arXiv:2302.05854v1 [math.DG] 12 Feb 2023

# 秩一对称空间中 Steklov 特征值调和平均数的等周不等式

HEMANGI MADHUSUDAN SHAH[1] 和 SHEELA VERMA[2]

摘要。 本文证明了非紧致秩一对称空间中有界区域上低阶 Steklov 特征值调和平均数的等周不等式。该工作拓展了1 秩一对称空间中由 [2] 和 [8] 分别针对欧几里得空间和双曲空间中的有界区域所证明的结果。

## 1. 引言

在谱几何中，寻找使拉普拉斯特征值或其某些组合达到最优的区域，是一个备受关注的问题。本文将研究非紧致秩一对称空间中有界区域上 Steklov 特征值的几何行为。在具有光滑边界$\partial M$的紧致完备黎曼流形 $M$ 上，Steklov 特征值问题可表示为:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \ \text{ in } M \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= \mu u \ \text{ on } \partial M, \end{aligned}$$

其中， $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ 表示沿外单位法向量$\nu$ 方向的方向导数， $\mu$ 是一个实数，称为与特征函数 $u$对应的Steklov特征值。众所周知，Steklov 特征值是离散的，并构成一个递增序列

$$0 = \mu_0(M) < \mu_1(M) \leq \mu_2(M) \leq \cdots \nearrow \infty.$$

利用共形映射技术，Weinstock [10] 证明，对于周长为 $l$且边界解析的单连通平面区域Ω,

$$\mu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{l}. \tag{1.1}$$

Hersch 和 Payne [6] 注意到，Weinstock 的证明给出了一个更一般的结果，即

$$\frac{1}{\mu_1(\Omega)} + \frac{1}{\mu_2(\Omega)} \geq \frac{l}{\pi}.$$

1 Harish-Chandra研究所，Homi Bhaba国家研究所的一个CI，Chhatnag Road, Jhunsi, Prayagraj-211019, India 2 通讯作者，数学科学系，Indian Institute of Tech- nology(BHU), Varanasi电子邮箱: hemangimshah@hri.res.in, sheela.mat@iitbhu.ac.in. 2010 数学主题分类。主要分类 58J50；次要分类 35P15。关键词与短语。等周不等式；Steklov 特征值；秩一对称空间；调和流形。

后来，F. Brock [2] 将这一结果推广到有界 Lipschitz 域 Ω 中 $\mathbb{R}^n$ ，并在体积约束下证明了

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \geq n\ R = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i(B(R))}, \tag{1.2}$$

其中， $B(R) \subset \mathbb{R}^n$ 是一个半径为 $R$ 且体积与Ω相同的球。最近，S.Verma 将（1.2）推广到了第一个$(n-1)$非零 Steklov 特征值，适用于 $n$维双曲空间[8]中的有界区域。文献 [1], 中，Binoy 和 Santhanam 研究了非紧秩一对称空间中有界区域上的 Steklov 特征值问题，并证明在所有固定体积的区域中，球使第一个非零 Steklov 特征值达到最大。关于秩一对称空间谱几何的更多结果，请参阅 [1, 3, 4, 5, 9]。

本文推广了[2] 和 [8] 的结果，并证明了非紧秩一对称空间中凸域上较低 Steklov 特征值的等周界。更确切地说，我们证明以下定理。

**定理 1.1**。 设 $(M, ds^2)$ 是一个曲率为 $-4 \leq K_M \leq -1$ 的非紧秩一对称空间，且 Ω 是 $M$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界凸域。设 $B(R) \subset M$ 表示一个半径为 $R > 0$ 、以 $p$ 为中心的测地球，使得 $vol(\Omega) = vol(B(R))$。则

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \geq \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\mu_i(B(R))},$$

其中

$$l = \begin{cases} k-1, & n = 1 \\ k(n-1), & n > 1. \end{cases}$$

此外，当且仅当Ω 是一个测地球时，等号成立。

## 2. 非紧秩一对称空间的几何

本节回顾非紧秩一对称空间 [3] 的一些几何性质。单连通秩一对称空间有两类彼此对偶的空间。第一类是紧秩一对称空间：圆球面 $\mathbb{S}^n$、复射影空间 $\mathbb{C}P^n$、四元数射影空间 $\mathbb{H}P^n$ 和凯莱射影平面$Ca\mathbb{P}^2$。第二类是非紧秩一对称空间：实双曲空间 $\mathbb{R}H^n$、复双曲空间 $\mathbb{C}H^n$、四元数双曲空间 $\mathbb{H}H^n$ 和凯莱双曲平面 $CaH^2$。

下文中， $\mathbb{K}$ 表示 $\mathbb{R}$ （实数域）、 $\mathbb{C}$ （复数域）、$\mathbb{H}$ （四元数代数）或 $Ca$ （八元数代数）。令 $k = \dim_{\mathbb{R}} K$，则$m = kn$。非紧秩一对称空间定义如下。在 $\mathbb{K}^{n+1}$ 上定义 Hermitian 内积为：

$$\langle x, y \rangle = -x_0\bar{y}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i,$$

其 $\langle$.实部 .$\rangle_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{K}^{n+1}$上的一个具有签名（$k$， $nk$）的实双线性型。考虑 $\mathbb{K}^{n+1}$ 中由下式定义的洛伦兹球面:

$$H^{kn+k-1} = \{x \in \mathbb{K}^{n+1} | \langle x, x\rangle = -1\}.$$

于是， $U(1,\mathbb{K})$（单位元素集合）作用于 $H^{kn+k-1}$，而双曲空间 $\mathbb{K}H^n$ 是$H^{kn+k-1}/U(1,\mathbb{K})$。它是纤维化的底空间

$$\mathbb{S}^{k-1} \to H^{kn+k-1} \to \mathbb{K}H^n.$$

由 $\langle .,.\rangle_{\mathbb{R}}$ 在 $H^{kn+k-1}$ 上诱导的度量具有签名（$k-1, kn$）。由于该度量在作用 $U(1,\mathbb{K})$下保持不变，且其轨道是 $k-1$ 维球面，因此，该度量在正交方向上对纤维的限制是正定的。因此，该纤维化诱导出黎曼度量$\mathbb{K}H^n$。

设 $B(p,r) \subset M$是一个非紧秩一对称空间，其中以 $p$ 为中心、半径为 $r$的测地球为 $B(p,r) \subset M$。并设 $S(p,r) = \partial(B(p,r))$为半径 $r$的测地球面。用 $A(r)$表示 $S(p,r)$的第二基本形式。已知（见 [3]第8页）， $S(p,r)$的体积密度函数为:

$$\phi(p,r) = \sinh^{kn-1}(r)\cosh^{k-1}(r)$$

以及 $\mathrm{Tr}(A(r)) = \frac{\phi'}{\phi}(r)$。拉普拉斯算子 $\lambda_1(S(p,r))$ 在 $S(p,r)$ 上的第一个非零特征值的重数为 $kn$ ，其表达式为,

$$\begin{aligned}\lambda_1(S(p,r)) = (\mathrm{Tr}(A(r)))' &= \frac{kn-1}{\sinh^2(r)} - \frac{k-1}{\cosh^2(r)},\\ &= \frac{kn-k}{\sinh^2(r)} + \frac{k-1}{\sinh^2(r)\cosh^2(r)}.\end{aligned}$$

设 $(x_1, x_2, \ldots, x_{kn})$ 是 $B(p,r)$ 中的测地法坐标系。那么坐标函数 $\frac{x_i}{r}, 1 \le i \le kn$ 是对应于 $\lambda_1(S(p,r))$ 的特征函数。

$M$ 上的拉普拉斯算子在极坐标下可写为:

$$\Delta_M = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mathrm{Tr}(A(r)) + \Delta_{S(p,r)}.$$

请注意，上述恒等式与所选基点 $p$ 无关，因此可以省略该基点。

## 3. 测地球上 Steklov 特征值的刻画

众所周知，（[3]中的命题3.7）第一个非零Steklov特征值 $\mu_1(B(R))$的重数为 $kn$，且由下式给出:

$$\begin{aligned}\mu_1(B(R)) &= \frac{\int_{B(R)} g^2(r)\lambda_1(S(r)) + (g'(r))^2 dV}{\int_{S(R)} g^2(r) dV}\\ &= \frac{\int_{B(R)} g^2(r)\lambda_1(S(r)) + (g'(r))^2 dV}{g^2(R)\mathrm{vol}(S(R))},\end{aligned}$$

其中， $g(r)$是满足以下条件的径向函数：

$$g''(r) + \mathrm{Tr}(A(r))g'(r) - \lambda_1(S(r))g(r) = 0,\ r \in (0, R),$$
$$g(0) = 0, \quad g'(R) = \mu_1(B(R))g(R).$$

对应于 $\mu_1(B(R))$ 的特征函数具有如下形式： $g(r)\frac{x_i}{r}, 1 \le i \le kn$，其中 $(x_1, x_2, \dots, x_{kn})$ 是以点 $p$ 为中心的测地法坐标系。利用以下事实：$\mathrm{Tr}(A(r)) = {}^{\phi'(r)}\!/_{\phi(r)}$ 以及 $(\mathrm{Tr}(A(r)))' = -\lambda_1(S(r))$，可得

$$g(r) = \frac{1}{\phi(r)} \int_0^r \phi(t)dt. \tag{3.1}$$

函数 $g$ 的以下性质在引理 3.4 中得到了证明，参见 [1]。

**引理 3.1.** $(g'(r))^2 + g^2(r)\lambda_1(S(r))$ 是关于 $r > 0$ 的递减函数。

## 4. 第一 $kn-$ 个非零 Steklov 特征值的测试函数构造

设 $(M, g)$ 是一个完备黎曼流形。设 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是与特征值 $\{\mu_i(\Omega)\}_{i=0}^{\infty}$ 对应的标准正交特征函数序列。对于 $1 \le i < \infty$， $\mu_i(\Omega)$ 的变分刻画如下（例如，参见 [3] 的第 2 节），

$$\mu_i(\Omega) = \inf_{f \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega \|\nabla f\|^2 dV}{\int_{\partial\Omega} f^2 dA} : \int_{\partial\Omega} f u_j dA = 0, 0 \le j \le i-1 \right\}. \tag{4.1}$$

对于区域 $A \subset M$，令 $CA$ 表示 $A$ 的凸包。设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为以 $p$ 为中心的测地法坐标系。我们将 $CA \subset M$ 视为其在 $T_pM$ 中经 $\exp_p^{-1}$的逆像，并将 $ds_p^2(X, X)$ 记作 $\|X\|_p^2$，其中 $X \in T_p(M)$。令 $(r, \xi)$ 表示以 $p$ 为中心的极坐标。下述引理给出了 $A$在 $M$ 中质心存在的条件（参见 [5] 的定理 1）。

**引理 4.1.** 设 $G\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，且在 $(0, \infty)$上为正。则存在一点 $p \in CA$，使得

$$\int_A G(\|X\|_p) X ds = 0.$$

因此，对于非紧致秩一对称空间 $(M, ds^2)$ 中的有界凸域 $\Omega$，我们可以选取一点 $p \in \Omega$，使得

$$\int_{\partial\Omega} g(\|\exp_p^{-1}(q)\|_p) \frac{\langle \exp_p^{-1}(q), X_i \rangle}{\|\exp_p^{-1}(q)\|_p} dA = 0, \quad 1 \le i \le kn,$$

其中 $(X_1, X_2, \dots, X_{kn})$ 是 $T_p(M)$ 的标准正交基。此后，我们将 $r = r(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|_p$ 记作。考虑一个 $kn \times kn$ 矩阵 $A = (a_{ij})$，其中

$$a_{ij} = \int_{\partial\Omega} g(r) \frac{\langle \exp_p^{-1}(q), X_i \rangle}{r} u_j dA.$$

根据 QR 分解定理，我们知道存在一个上三角矩阵$T = (t_{ij})$和一个正交矩阵 $U = (u_{ij})$，使得 $T = UA$，即，

$$t_{ij} = \sum_{m=1}^{kn} u_{im} a_{mj}$$

$$= \sum_{m=1}^{kn} u_{im} \int_{\partial\Omega} g(r) \frac{\langle \exp_p^{-1}(q), X_m \rangle}{r} u_j dA$$
$$= 0 \text{ for } 1 \le j < i \le kn.$$

因此，我们可以选取 $T_p(M)$的一组正交基（$X_1, X_2, \ldots, X_{kn}$），使得

$$\int_{\partial\Omega} g(r) \frac{\langle \exp_p^{-1}(q), X_i \rangle}{r} u_j dA = 0 \text{ for } 1 \le j < i \le kn. \tag{4.2}$$

## 5. 测试函数的一些性质

设 $\Omega$ 是非紧致秩一对称空间 $(M, ds^2)$ 中的一个有界凸域。固定一点 $p \in \Omega$。则任意 $q \in \Omega$ 都可以表示为 $q = \exp_p(r(q)w(q))$，其中 $r(q) \in \mathbb{R}^+$且 $w(q)$ 是 $T_pM$ 中的一个单位向量。因此 $r(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|_p$且 $w(q) = \exp_p^{-1}(q) \| \exp_p^{-1}(q) \|_p$。给定 $T_p(M)$ 的一个标准正交基 $(X_1, X_2, \ldots, X_{kn})$，令

$$f_i(q) = \langle X_i, w(q) \rangle = \frac{\langle X_i, \exp_p^{-1}(q) \rangle}{\| \exp_p^{-1}(q) \|_p} = \frac{x_i}{r}.$$

设 $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{kn})$ 是 $T_p(M)$ 的另一个标准正交基，满足 $\eta_1 = w(q)$ 且 $\eta_{j+1} = J_j \eta_1$ 对于 $j = 1, 2, \ldots, (k-1)$，其中 $J_j$ 是 $M$([3]) 上的正交复结构。然后利用 [3], 的引理4.11，我们得到

$$\nabla f_i(q) = \sum_{j=2}^{k} \frac{\langle X_i, \eta_j \rangle}{\sinh r \cosh r} \eta_j + \sum_{j=k+1}^{kn} \frac{\langle X_i, \eta_j \rangle}{\sinh r} \eta_j.$$

现在可以很容易地得出以下引理。

**引理5.1.** *(1)* $\sum_{i=1}^{kn} \|\nabla \left(\frac{x_i}{r}\right)\|^2 = \lambda_1(S(r))$.

*(2)* $\int_\Omega (g'(r))^2 \frac{x_i}{r^2} dV = \frac{1}{kn} \int_\Omega (g'(r))^2 \, dV$。

**引理5.2.** 以下结论成立：

$$\sum_{i=1}^{kn} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\|^2 \le \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \frac{\lambda_1(S(r))}{\mu_i(\Omega)}.$$

证明。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{kn} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2 &\le \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2 + \frac{1}{\mu_{l+1}(\Omega)} \left(\lambda_1(S(r)) - \sum_{i=1}^{l} \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2 + \frac{1}{\mu_{l+1}(\Omega)} \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\lambda_1(S(r))}{l} - \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2 + \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\mu_i(\Omega)} \left(\frac{\lambda_1(S(r))}{l} - \left\|\nabla^{S(r)} \left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \frac{\lambda_1(S(r))}{\mu_i(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

下述引理证明见 [1] （引理3.3 （1））。

**引理 5.3.** 设 $g$ 是按 (3.1)中所定义的函数。那么

$$\int_{\partial\Omega} g^2(r)dA \geq vol(S(R))\, g^2(R),$$

*and* 当且仅当 $\partial\Omega$ 是以 $p$为中心、半径为 $R$ 的测地球面时，等号成立。

## 6. 定理 1.1 的证明

设 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是对应于特征值$\{\mu_i(\Omega)\}_{i=0}^{\infty}$的标准正交特征函数序列。根据 (4.2)，我们可以选取$(X_1, X_2, \ldots, X_{kn})$ 作为 $T_p(M)$的一组标准正交基，并选取以点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{kn})$ 为中心的相应正规坐标系 $p$，使得

$$\int_{\partial\Omega} g(r)\frac{\langle \exp_p^{-1}(q), X_i\rangle}{\|\exp_p^{-1}(q)\|_p}u_j dA = \int_{\partial\Omega} g(r)\frac{x_i}{r}u_j dA = \int_{\partial\Omega} g(r)\omega(\xi)u_j dA = 0, \quad 0 \leq j \leq i-1.$$

利用 $\mu_i(\Omega)$ (4.1) 的变分刻画，可得

$$\begin{aligned}\mu_i(\Omega)\int_{\partial\Omega}\left(g(r)\frac{x_i}{r}\right)^2 dA &\leq \int_{\Omega}\left\|\nabla\left(g(r)\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2 dV \\ &= \int_{\Omega}\left(g'(r)\right)^2\frac{x_i^2}{r^2} + g^2(r)\left\|\nabla^{S(r)}\left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2 dV.\end{aligned}$$

将两边除以 $\mu_i(\Omega)$ 并对 $i$ 求和，得到:

$$\int_{\partial\Omega} g^2(r)dA \leq \sum_{i=1}^{kn}\frac{1}{\mu_i(\Omega)}\int_{\Omega}\left(\left(g'(r)\right)^2\frac{x_i^2}{r^2} + g^2(r)\left\|\nabla^{S(r)}\left(\frac{x_i}{r}\right)\right\|^2\right)dV.$$

利用引理 5.2 可得:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} g^2(r)dA &\leq \frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{kn}\frac{1}{\mu_i(\Omega)}\int_{\Omega}\left(g'(r)\right)^2 dV + \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\mu_i(\Omega)}\int_{\Omega} g^2(r)\lambda_1(S(r))dV, \\ &\leq \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\mu_i(\Omega)}\int_{\Omega}\left(\left(g'(r)\right)^2 + g^2(r)\lambda_1(S(r))\right)dV.\end{aligned}$$

因此我们得到,

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\mu_i(\Omega)} &\geq \frac{\int_{\partial\Omega} g^2(r)dA}{\int_{\Omega}\left(\left(g'(r)\right)^2 + g^2(r)\lambda_1(S(r))\right)dV}, \\ &\geq \frac{\int_{\partial B(r)} g^2(r)dA}{\int_{B(r)}\left(\left(g'(r)\right)^2 + g^2(r)\lambda_1(S(r))\right)dV}, \\ &= \frac{1}{\mu_1(B(r))},\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\mu_i(B(r))}.$$

这就证明了定理1.1。

**注 6.1.** 调和流形是秩一对称空间的推广。在 [7],中证明，体积密度函数刻画了双曲空间、复双曲空间和四元数双曲空间。自然地可以问：若$(M, g)$ 是一个调和黎曼流形，那么定理1.1是否成立?

## 参考文献

[1] Binoy 和 Santhanam G.，第一个非零 Steklov特征值的尖锐上界及比较定理，J. Ramanujan Math. Society，29 (2014)，133-154。2, 4, 6[2] F. Brock，Stekloff问题特征值的一个等周不等式，Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 81 (2001)，69–71。1, 2[3] Castillon P. 和 Ruffini B.，非紧秩一对称空间中测地球的谱刻画，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.，21 (2019)，1359-1388。2, 3, 4, 5[4] Meng Y. 和 Wang K.，秩一对称空间中有界区域上的 Neumann特征值的等周不等式，arXiv: 2209.13842v1 [math.DG] (2022)。2[5] Santhanam, G.，秩一对称空间中紧超曲面的拉普拉斯算子第一特征值的一个尖锐上界，Proc. Indian Math. Sci. 117 (2007)，307–315。2, 4[6] Hersch, J., Payne, L.E.，某些 Stekloff型混合问题的极值原理和等周不等式，Z. Angew. Math. Phys. 19 (1968)，802–817。1[7] Ramchandran K., Ranjan A.，具有某些特定体积密度的调和流形，Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 107 (1997)，251–261。7[8] Verma S.，双曲空间中 Steklov 特征值调和平均数的一个等周不等式，Arch. Math. 116 (2021)，193–201。1, 2[9] Verma, S., Santhanam, G. 一类双连通域中与拉普拉斯算子相关的特征值问题。Monatsh Math 193 (2020)，879–899。2[10] Weinstock, R.，一个经典特征值问题的不等式，J. Ration. Mech. Anal. 3 (1954)，745–753。1