arXiv:2302.05867v1 [math.LO] 12 Feb 2023

连续逻辑中的融合性质与乌雷松结构

SU GAO 和 XUANZHI REN

Abstract. 本文研究连续一阶签名 $\mathcal{L}$ 下所有连续 $\mathcal{L}$-(前)结构的类。我们刻画了使有限、可数或所有连续 $\mathcal{L}$-(前)结构的类具有 amalgamation 性质的连续模。我们还刻画了乌雷松连续 $\mathcal{L}$-(前)结构存在的条件，证明某些有限连续 $\mathcal{L}$-结构的类是可数 Fra¨ıss´e 类，证明这些有限连续 $\mathcal{L}$-结构的类具有相干 EPPA，并证明有限 $\mathcal{L}$-结构上的自同构作用也构成一个 Fra¨ıss´e 类。由此可知，乌雷松连续 $\mathcal{L}$-结构的自同构群是一个泛波兰群，而 Hall 泛局部有限群包含在乌雷松连续$\mathcal{L}$-结构的自同构群中，且是其稠密子群。

1. Introduction

连续一阶逻辑由 Ben Yaccov 和 Usvyatsov 于 [3] 发展而来，是 Chang 和 Keisler 所研究的连续逻辑 [4] 的一种变体。这一逻辑在度量结构研究中非常有用。例如，Ben Yaacov[1] 通过将巴拿赫空间视为连续一阶结构，证明了 Gurarij 空间的线性等距群在所有波兰群中具有普适性。另一个例子是 [2] 中发展的度量斯科特分析，其中使用了无穷连续一阶逻辑。

本文是对作为度量结构理论的连续模型论的一个贡献。此前，连续模型论的发展主要是作为经典模型论的推广而进行的。在本文中，我们采取了略有不同的观点，将连续模型论视为可分度量空间丰富理论的一种推广。

众所周知，存在唯一一个完备可分度量空间，既是普适的（即包含每个可分度量空间的一个同构副本作为子空间），又是超齐性的（[18]）。这个空间被称为泛乌雷松度量空间，并记作 $\mathbb{U}$，以强调其典范性。基于 Katˇetov（[13]）的结果，Uspenskij [19] 证明了 $\mathbb{U}$ 的等距变换群是一个泛波兰群。因此，人们自然会想知道，对于任意连续一阶签名 $\mathcal{L}$，是否存在一个乌雷松连续 $\mathcal{L}$-结构，即，

Date：2023年2月14日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：03C66；次要分类号：03C52，03B60。第一作者感谢国家自然科学基金委员会（NSFC）项目12250710128和12271263对其研究的部分资助。第二作者的研究得到天津市大学生创新创业训练计划（编号：202210055334）的部分资助。

一个完备可分的连续 $\mathcal{L}$-结构，既是普适的，又是超齐性的。此外，若这样的结构存在，其自同构群是否为一个泛波兰群。

事实证明，答案取决于连续一阶签名 $\mathcal{L}$。一般而言，连续一阶签名 $\mathcal{L}$ 由各种元数的关系符号和函数符号组成。本文中，我们考虑仅含有限个关系符号的连续一阶签名 $\mathcal{L}$ 。与经典一阶签名中不正式包含等号关系 $=$ 、而是将其视为逻辑的一部分一样，在连续一阶逻辑中，我们也默认包含一个符号 d ，它总是在连续结构上被解释为度量。对于每个 n元关系符号 $R \in \mathcal{L}$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$，我们还关联一个连续模 $\mathfrak{u}_{R,\ i}$。在模型中对 R 进行解释时（即从模型的论域到区间 $[0,1]$的一个函数）， R 作为第 i个坐标的函数，必须是一个以 $\mathfrak{u}_{R,\ i}$ 为连续模的一致连续函数。

我们将定义两个概念，它们是与连续签名 $\mathcal{L}$ 相关的连续模的性质。它们分别称为适当和半适当，区别在于 $\mathcal{L}$ 中一元关系符号（若有）的连续模是否上半连续。我们将证明以下定理。

定理 1.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个只有有限个关系符号的连续签名，且所有相关的连续模均为非递减函数。那么以下结论成立：

(i) 存在一个（可分的）乌雷松 $\mathcal{L}$-结构，当且仅当 $\mathcal{L}$ 是适当的。
(ii) 存在一个乌雷松 $\mathcal{L}$-预结构，当且仅当 $\mathcal{L}$ 是半适当的。

这里，连续 $\mathcal{L}$-预结构是指将符号 d 解释为度量的结构；相比之下，在连续 $\mathcal{L}$-结构中， d 被解释为完备度量。

事实证明，适当性和半适当性也刻画了各种连续 $\mathcal{L}$-结构类的融合性质。特别地，我们有以下定理。

定理 1.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限个关系符号，且所有相关的连续模都是非递减的。那么以下条件等价：

(i) $\mathcal{L}$ 是半适当的。(ii) 所有有限连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有 amalgamation 性质。(iii) 所有有限连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有强融合性质。

定理 1.3. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限个关系符号，且所有相关的连续模都是非递减的。那么以下条件等价：

(i) $\mathcal{L}$是适当的。(ii) 所有（可数）连续 $\mathcal{L}$-预结构组成的类具有 amalgamation 性质。(iii) 所有（可数）连续 $\mathcal{L}$-预结构组成的类具有强 amalgamation 性质。

我们还定义了介于半适当性与适当性之间的强半适当性这一中间概念，并刻画了连续 $\mathcal{L}$-结构类的 amalgamation 性质。

定理 1.4. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限多个关系符号，且所有相关的连续模均为非减函数。则以下各项等价：

(i) $\mathcal{L}$ 是强半正规的。(ii) 所有（可数）连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类具有 amalgamation 性质。(iii) 所有（可数）连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类具有强融合性质。

可分的乌雷松连续 $\mathcal{L}$-结构将具有与其经典对应物相似的典范性，因此我们用 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 表示它。由于 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 是通过 Katětov 式构造得到的，根据 Uspenskij 的论证，$\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 的自同构群将是一个泛波兰群。

我们还将考察半适当 $\mathcal{L}$ 的某些有限连续 $\mathcal{L}$-结构类，并证明它们是可数 Fraïssé 类。特别地，我们将得到一个有理乌雷松连续 $\mathcal{L}$ 预结构 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$，与其经典对应物 $\mathbb{QU}$ 相类比。

我们将证明，对于任意半适当的 $\mathcal{L}$，所有有限连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类都具有相干 EPPA。EPPA 是“偏自同构扩张性质”（Extension Property for Partial Automorphisms）的缩写；Hrushovski 首次证明图具有 EPPA 时创造了这一术语（[11]）。此后，许多结构类都被证明具有 EPPA，其中最著名的是经典有限关系结构（Herwig– Lascar [10]）和有限度量空间（Solecki [17]）。关于 EPPA 最新成果的综述，参见 [12]。Siniora–Solecki [16] 定义了相干 EPPA，并证明许多经典结构类都具有这一性质。本文将证明以下定理。

定理1.5. 设 $\mathcal{L}$ 是任意半适当连续签名。所有有限连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类具有相干 EPPA。

事实证明，所有有限连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类具有（相干）EPPA，实质上等价于 $\mathcal{L}$的半适当性。

Herwig–Lascar 的方法揭示了自由群的性质与部分自同构的扩张或群作用之间的深刻联系。其他作者也进一步研究了这些群论性质，包括 Coulbois [5], Rosendal [14] [15], 和 Etedadialiabadi–Gao [6] [7]。这些研究最终在 [8] 中得到总结，证明了有限群在有限经典关系结构上的自同构作用所构成的类是一个 Fra¨ıss´e 类。本文将证明连续结构的一个类似结果，如下所示。

定理 1.6。设 $\mathcal{L}$ 为任意半适当连续签名。有限连续 $\mathcal{L}$-结构上有限群的所有自同构作用所构成的类是一个 Fra¨ıss´e 类。因此，若 $\mathcal{L}$ 适当，则 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 的自同构群包含 Hall 泛局部有限群 $\mathbb{H}$ 作为稠密子群。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾一些基本定义。第 3 节为连续一阶签名定义适当性、半适当性和强半适当性，并证明定理 1.2、1.3 和 1.4。在

第 4 节为适当的连续一阶签名给出一种 Katˇetov 风格的 Urysohn连续结构构造。具体而言，我们证明定理 1.1。第 5 节考察某些有限连续结构类，并证明它们构成可数 Fra¨ıss´e 类。我们还证明，当 $\mathcal{L}$ 适当时，$\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$的完备化与 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 同构。第 6 节证明定理1.5。第 7 节证明定理 1.6 的前半部分。为此，主要工作是证明 Rosendal 关于连续结构上的作用的有限逼近的一个类似结果。第 8 节证明定理 1.6 的后半部分。

2. Preliminaries

我们首先回顾连续一阶逻辑中的一些基本定义。这部分内容主要遵循 [3]，但为便于论述，我们在若干处有所偏离。

定义 2.1。

（i）连续模是一个函数

$$\mathfrak{u} : (0, \infty) \to (0, \infty]$$

满足 $\lim_{\delta \to 0} \mathfrak{u}(\delta) = 0$。

(ii) 设 $\mathfrak{u}$ 是一个连续模。设 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) 是度量空间。若映射 $f : X_1 \to X_2$ 满足：对所有 x、$y \in X_1$，都有

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant \mathfrak{u}(d_1(x, y)).$$

在方便时，我们将连续模函数 $\mathfrak{u}$ 视为在 0 处有定义，并令 $\mathfrak{u}(0) = 0$。于是 $\mathfrak{u}$ 在 0 处连续。若 f 满足连续模 $\mathfrak{u}$，则通过重新定义

$$\mathfrak{u}'(\delta) = \sup_{\tau \leqslant \delta} \mathfrak{u}(\tau)$$

可得 $\mathfrak{u}'$ 是非递减的，同时仍是 f 所满足的连续模。之后讨论超可加且上半连续的连续模时，采用上确界运算进行这种重新定义，仍能分别保持超可加性和上半连续性，同时使连续模变为非递减。因此，本文中考虑的所有连续模均假定为非递减。

定义 2.2。

(i) 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是次可加的，当且仅当对所有 $x, y \in [a, b]$，若 $x + y \in [a, b]$，则 (ii) 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是超可加的，当且仅当对所有 x，$y \in [a, b]$，若 $x+y \in [a, b]$，则 $u(x + y) \leqslant u(x) + u(y)$。(iii) 函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是上半连续的，当且仅当对所有 $x \in [a, b]$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对所有 $x' \in (x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$，我们有 $u(x') < u(x) + \epsilon$。

容易看出，若 $u : [0, b] \to \mathbb{R}$ 是超可加且非递减的，则 u 严格递增。对于非递减的 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, u，它是上半连续的，当且仅当对所有 $x \in [a, b]$，$\lim_{\delta \to 0^+} u(x + \delta) = u(x)$。下面的引理也很容易证明。

引理 2.3. 设 $\mathfrak{u}$ 是一个连续模，且 $c > 0$ 满足： $\mathfrak{u}$ 在 $[0, c]$ 上非递减且超可加。设 $a = \mathfrak{u}(c)$。定义 $\mathfrak{u}^*$: $[0, a) \to [0, c]$ 如下：

$$\mathfrak{u}^*(t) = \inf\{r \in (0, c] : t < \mathfrak{u}(r)\}.$$

那么， $\mathfrak{u}^*(0) = 0$ 和 u^* 是一个次可加、单调不减且上半连续的函数。此外，

(1) $\mathfrak{u}^*$ 在 0 处连续；(2) 对所有 $r \in [0、 c]$、 $\mathfrak{u}^*(\mathfrak{u}(r)) = r$， 以及
(3) 若 $\mathfrak{u}$ 上半连续，则对所有 $t \in [0、 a)$、 $\mathfrak{u}(\mathfrak{u}^*(t)) \geqslant t$。

定义 2.4. 连续（一阶）签名由以下内容组成：

(i) 一个特定的二元谓词符号 d，称为距离符号；(ii) 一组关系符号，每个关系符号都具有有限元数，并且对于每个 n 元关系符号 R 以及每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ ，都存在一个连续模$\mathfrak{u}_{R,\ i}$，称为 R 关于第i个参数的一致连续模；(iii) 一组函数符号，每个函数符号都具有有限元数，并且对于每个 n 元函数符号 F 以及每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ ，都存在一个连续模$\mathfrak{u}_{F,\ i}$，称为 F 关于第 i 个参数的一致连续模。

当我们谈到连续签名 $\mathcal{L}$ 时，通常会省略距离符号 d ，只将关系符号和函数符号视为 $\mathcal{L}$ 的元素。

定义 2.5。设 $\mathcal{L}$ 为连续签名。连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$是一个集合 M ，连同一个解释 d^M （对应于 d）、每个属于 $\mathcal{L}$ 的关系符号R 对应的解释 R^M ，以及每个属于 $\mathcal{L}$ 的函数符号 F 对应的解释 F^M ，满足

(i) d^M 是 M 上的度量；(ii) 对于每个 n 元关系符号 R， R^M：$M^n \to [0, 1]$ 满足：对于每个$1 \leqslant i \leqslant n$ 以及所有 $x_1, \ldots, x_{i-1}, y, z, x_{i+1}, \ldots x_n \in M$，

$$(\mathrm{UC}_{\mathcal{L}}) \qquad \begin{aligned} &|R^M(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \\ &\qquad R^M(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^M(y, z)); \end{aligned}$$

(iii) 对于每个 n 元函数符号 F， F^M：$M^n \to M$ 满足：对于每个$1 \leqslant i \leqslant n$ 以及所有 $x_1, \ldots, x_{i-1}, y, z, x_{i+1}, \ldots x_n \in M$，

$$\begin{aligned} &d^M(F^M(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n), \\ &\qquad F^M(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \leqslant \mathfrak{u}_{F,i}(d^M(y, z)). \end{aligned}$$

连续 $\mathcal{L}$-结构是一种连续的 $\mathcal{L}$-预结构，其中 d^M 是完备度量。

注意，在 [3] d^M 中， $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$ 里的解释可以是伪度量，而不是度量。我们在此采用的定义更加严格。此外，本文将研究关系连续结构，即那些连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{L}$ ，其连续签名不包含函数符号。因此，我们只关注关系符号的连续模$\mathfrak{u}_{R,\ i}$ $R \in \mathcal{L}$ 。基于这一原因，我们使用（$\mathrm{UC}_{\mathcal{L}}$）来表示仅针对关系符号的一致连续条件。

定义 2.6。设 $\mathcal{L}$ 为一个连续签名， $\mathcal{M}$ 为一个连续 $\mathcal{L}$-预结构。若 $\mathcal{M}$ 的 (M是有限的、可数的、可分的，等等，则我们分别称其为有限的、可数的、可分的，等等。

注意，有限的连续 $\mathcal{L}$-预结构必然是连续 $\mathcal{L}$-结构。一般而言，给定连续签名 $\mathcal{L}$和连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$，可以考虑 (M, d^M)的完备化 $(\bar{M}, d^{\bar{M}})$，并对任意关系符号 $R \in \mathcal{L}$和函数符号 $F \in \mathcal{L}$，自然地定义 $R^{\bar{M}}$和 $F^{\bar{M}}$。然而，所得结构可能不满足 (UC$_{\mathcal{L}}$)，因此未必是连续 $\mathcal{L}$-结构。假设与 $\mathcal{L}$ 相关联的所有连续模均为上半连续，则可推出 (UC$_{\mathcal{L}}$)，并通过完备化得到连续 $\mathcal{L}$-结构。

定义 2.7. 设 $\mathcal{L}$ 为连续签名， $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 为连续 $\mathcal{L}$-预结构。若以下条件均成立，则称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的子结构:

(i) $N \subseteq M$; (ii) $d^M \restriction (N \times N) = d^N$; (iii) 对于 $\mathcal{L}$ 中的每个 n 元关系符号 R 以及任意 $u_1, \dots, u_n \in N$,

$$R^M(u_1, \dots, u_n) = R^N(u_1, \dots, u_n);$$

(iv) 对于 $\mathcal{L}$ 中的每个 n 元函数符号 F，以及任意 $u_1, \dots, u_n \in N$,

$$F^M(u_1, \dots, u_n) = F^N(u_1, \dots, u_n).$$

当 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的子结构时，我们也称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的扩张。

注意，如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{L}$-结构，那么根据对所指定度量的完备性要求，子结构 $\mathcal{N}$ 的论域必然是环境结构 $\mathcal{M}$ 的论域的闭子集。

定义 2.8。设 $\mathcal{L}$ 是连续签名， $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构。从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的同构是一个双射 φ: $M \to N$，满足

(i) φ 是从 (M, d^M) 到 (N, d^N) 的等距映射; (ii) 对于 $\mathcal{L}$ 中的每个 n 元关系符号 R，以及任意 $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$R^M(x_1, \dots, x_n) = R^N(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n));$$

(iii) 对于 $\mathcal{L}$ 中的每个 n 元函数符号 F，以及任意 $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$\varphi(F^M(x_1, \dots, x_n)) = F^N(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)).$$

从 $\mathcal{M}$ 到自身的同构称为自同构。 $\mathcal{M}$ 的所有自同构构成的集合记作 Aut($\mathcal{M}$)。

定义 2.9. 设 $\mathcal{L}$ 为连续签名， $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 为连续 $\mathcal{L}$-预结构。从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{M}$ 的同构嵌入是从 $\mathcal{N}$到 $\mathcal{M}$的一个子结构的同构。

定义 2.10. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名， $\mathcal{M}$ 是一个连续 $\mathcal{L}$-预结构。 $\mathcal{M}$ 的一个部分同构是一个同构 p，它从 $\mathcal{N}_1$ 到 $\mathcal{N}_2$，其中 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 是 $\mathcal{M}$ 的子结构。 $\mathcal{M}$ 的所有部分同构组成的集合记作 Part($\mathcal{M}$)。

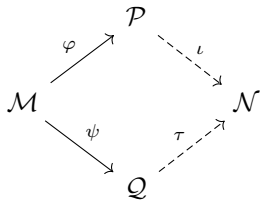
3. Characterizations of Amalgamation Properties

在本文余下部分，我们考虑仅含有限个关系符号的连续签名。本节将刻画与连续签名 $\mathcal{L}$ 相关联的那些连续模，使得有限、可数或所有连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类都具有 amalgamation 性质。

我们先回顾 amalgamation 性质和强 amalgamation 性质的定义。

定义 3.1。设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名， $\mathcal{K}$ 是一组连续 $\mathcal{L}$-预结构。

(i) 若对任意 $\mathcal{M}$、 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}$ 以及同构嵌入 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ 和 $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{Q}$，都存在 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ 及同构嵌入 $\iota\colon \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ 和 $\tau\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{N}$，使得 $\iota \circ \varphi = \tau \circ \psi$，则称 $\mathcal{K}$ 具有 amalgamation 性质（简称 AP），即下图可交换:



连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{N}$ 称为 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 在$\mathcal{M}$上的融合。

(ii) 如果在上述定义中还满足以下条件，则称 $\mathcal{K}$ 具有强 amalgamation 性质（简称 SAP）：

$$\mathrm{range}(\iota) \cap \mathrm{range}(\tau) = \mathrm{range}(\iota \circ \varphi) = \mathrm{range}(\tau \circ \psi).$$

我们的刻画将涉及以下定义。

定义 3.2。设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限多个关系符号，且所有相关的连续模均为非递减函数。

(i) 若• 对于任意 n元的 $R \in \mathcal{L}$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$，均有界，并且 $\mathfrak{u}_{R,i}$ 在 $I_{R,i}$上超可加；且• 对于任意 n元的 $R \in \mathcal{L}$，其中 $n \geqslant 2$，以及 $1 \leqslant i \leqslant n$，存在 $K_{R,i} > 0$，使得 $\mathfrak{u}_{R,i}(r) = K_{R,i} r$ 对所有 $r \in I_{R,i}$ 均成立，则称 $\mathcal{L}$为半适当。
$I_{R,i} = \{r \in [0, +\infty) : \mathfrak{u}_{R,i}(r) < 1\}$
(ii) 若 $\mathcal{L}$ 为半适当，且每个$\mathfrak{u}_{R,i}$ 在$I_{R,i}$上均为上半连续，则称 $\mathcal{L}$ 为适当。

amalgamation 性质需要一种方法，将部分定义的连续结构扩张为完全定义的连续结构。下文将首先建立这种方法。为此，我们固定一个连续签名 $\mathcal{L}$，其中只有有限个关系符号，且所有相关的连续模均为非递减的。

定义 3.3. 设 $(X、\ d^X)$ 为一个度量空间，$\mathfrak{u}$ 为一个非递减的连续模。对于任意 $x、\ y \in X$，在 X 上定义伪度量如下:

$$d^X_{\mathfrak{u}}(x,y) \quad = \quad \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{u}(d^X(z_{i-1},z_i)) : z_0 = x, z_1, \dots, z_m = y \in X\right\}.$$

定义 3.4。设 $(X$ 是一个度量空间，且 $R \in \mathcal{L}$ 是 n 元的。定义

$$d^X_R(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} d^X_{\mathfrak{u}_{R,i}}(x_i,y_i)$$

对于 $\overline{x} = (x_1、\ ...、\ x_n)、\ \overline{y} = (y_1、\ ...、\ y_n) \in X^n$。

对于每个 n 元的 $R \in \mathcal{L}$，d^X_R 是 X^n 上的一个伪度量。

引理 3.5。设 $(M$ 是一个度量空间，并且 R^M 定义在 M^n 上，对所有 n 元的 $R \in \mathcal{L}$ 均成立。则 $\mathcal{M} = (M、\ d^M、\ (R^M)_{R\in\mathcal{L}})$ 是一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构，即对于 $\mathcal{M}$，$(\mathsf{UC}_{\mathcal{L}})$ 成立，当且仅当对于任意 n 元的 $R \in \mathcal{L}$，R^M 关于 d^M_R 是 1-利普希茨的。

证明。假设 $R \in \mathcal{L}$ 是 n 元的，且 R^M 关于 d^M_R 是 1-利普希茨的。设 $\overline{x}、\ \overline{y} \in M^n$ 仅在第 i 个坐标处不同。则

$$|R^M(\overline{x}) - R^M(\overline{y})| \leqslant d^M_{\mathfrak{u}_{R,i}}(x_i,y_i) \leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^M(x_i,y_i)).$$

反之，假设（$\mathsf{UC}_{\mathcal{L}}$）对 $\mathcal{M}$ 的 n元 $R \in \mathcal{L}$成立。令 $\overline{x},\overline{y} \in M^n$。对于$0 \leqslant p \leqslant n$，令

$$\overline{z}^p = (x_1,\dots,x_p,y_{p+1},\dots,y_n).$$

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $w_{i,0} = x_i, w_{i,1}、\ .....、\ w_{i,m_i} = y_i \in M$为任意对象，并令

$$\overline{z}^{i,j} = (x_1,\dots,x_{i-1},w_{i,j},y_{i+1},\dots,y_n)$$

对于 $0 \leqslant j \leqslant m_i$。于是

$$\begin{aligned}|R^M(\overline{x}) - R^M(\overline{y})| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|R^M(\overline{z}^{i-1}) - R^M(\overline{z}^i)|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}|R^M(\overline{z}^{i,j-1}) - R^M(\overline{z}^{i,j})|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\mathfrak{u}_{R,i}(d^M(w_{i,j-1},w_j))\end{aligned}$$

在所有 $w_{i,0}、\ .....、\ w_{i,m_i}$中取下确界，得到

$$|R^M(\overline{x}) - R^M(\overline{y})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} d^M_{\mathfrak{u}_{R,i}}(x_i,y_i) = d^M_R(\overline{x},\overline{y}).$$

□

定义 3.6。

（i）部分定义的连续 $\mathcal{L}$前结构是一个组组

$$\mathcal{X} = (X, d^X, (R^X)_{R\in\mathcal{L}})$$

其中，(X, d^X) 是一个度量空间，并且对于每个 n元 $R \in \mathcal{L}$，$R^X\colon \mathsf{dom}(R^X) \to [0, 1]$ 是一个定义域为 $\mathsf{dom}(R^X) \subseteq X^n$ 且相对于 d^X_R为 1-利普希茨的函数。

(ii) 设 $\mathcal{X}$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。如果 $(M,d^M)=(X,d^X)$，且对于任意 $R\in\mathcal{L}$, $R^M\restriction \mathrm{dom}(R^X)=R^X$，则连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{X}$的保守扩张。

引理 3.7. 任意部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构都有一个保守扩张。

证明. 设 $\mathcal{X}$是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。定义 $(M,d^M)=(X,d^X)$，并对任意 n 元 $R\in\mathcal{L}$和 $\overline{x}\in M^n$，定义

$$R^M(\overline{x})=\max\{0,\sup\{R^X(\overline{y})-d_R^X(\overline{x},\overline{y}):\overline{y}\in\mathrm{dom}(R^X)\}\}.$$

显然，若 $\overline{x}\in$定义域(R^X)，则 $R^M(\overline{x})=R^X(\overline{x})$。

为完成证明，只需验证 $\mathcal{M}$ 满足 (UC$_\mathcal{L}$)。根据引理 3.5，只需证明对于任意 n 元 $R\in\mathcal{L}$， R^M 相对于d_R^M是 1-利普希茨的。设$\overline{x},\overline{y}\in M^n$。反设 $R^M(\overline{x})-R^M(\overline{y})>d_R^M(\overline{x},\overline{y})$，从而得到矛盾。令 $\epsilon>0$ 满足

$$R^M(\overline{x})-R^M(\overline{y})>d_R^M(\overline{x},\overline{y})+\epsilon.$$

特别地， $R^M(\overline{x})>0$。根据 $R^M(\overline{x})$的定义，存在 $\overline{z}\in$定义域(R^X)使得

$$R^X(\overline{z})-d_R^X(\overline{x},\overline{z})>R^M(\overline{x})-\epsilon.$$

Then

$$\begin{aligned}R^X(\overline{z})-R^M(\overline{y}) &= R^X(\overline{z})-R^M(\overline{x})+R^M(\overline{x})-R^M(\overline{y})\\ &> d_R^X(\overline{x},\overline{z})-\epsilon+d_R^X(\overline{x},\overline{y})+\epsilon\\ &\geqslant d_R^X(\overline{z},\overline{y}).\end{aligned}$$

因此 $R^X(\overline{z})-d_R^X(\overline{z}$，这与 $R^M(\overline{y})$的定义矛盾。 □

现在我们可以证明第一个刻画。

定理 3.8。设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限多个关系符号，且所有相关的连续模都是非递减的。以下各条件等价:

（1） $\mathcal{L}$是半适当的。（2）所有有限连续 $\mathcal{L}$结构组成的类具有 amalgamation property。（3）所有有限连续 $\mathcal{L}$结构组成的类具有强合并性质。

证明。我们证明蕴含关系（1）⇒（3）和（2）⇒（1）。

对于 (1)⇒(3)，令 $\mathcal{M}$、 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q}$ 为有限连续 $\mathcal{L}$-结构，并令 φ: $\mathcal{M}\to\mathcal{P}$ 和 ψ: $\mathcal{M}\to\mathcal{Q}$ 为同构嵌入。为简化记号，我们将 φ 和 ψ 视为恒等映射。令 X 为 M、 $P\backslash M$ 和 $Q\backslash M$ 的不交并。通过显然的定义在 X 上定义度量 d^X，但对于 $x\in P\backslash M$ 和 $y\in Q\backslash M$，我们设

$$d^X(x,y)=\inf\{d^P(x,z)+d^Q(z,y):z\in M\}.$$

对于一个 n 元的 $R\in\mathcal{L}$， R^X 在 $\mathrm{dom}(R^X)=P^n\cup Q^n$ 上有自然的定义。

我们验证 $\mathcal{X}=(X、d^X、(R^X)_{R\in\mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。为此，固定一个 n 元的 $R\in\mathcal{L}$，并考察 $\overline{x}=(x_1、\ldots、x_n)$、$\overline{y}=(y_1、\ldots、y_n)\in\mathrm{dom}(R^X)$。

首先假设 $n=1$。在这种情况下，我们断言对于任意 u、 $v\in P\cup Q$,

$$|R^X(u)-R^X(v)|\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(u,v)).$$

由此断言可立即推出

$$|R^X(x_1) - R^X(y_1)| \leqslant d_R^X(x_1, y_1).$$

为证明该断言，我们只需考虑 $u \in P\backslash M$ and$v \in Q\backslash M$ 的情形。注意，对任意 $z \in M$，

$$\begin{aligned} |R^X(u) - R^X(v)| &\leqslant |R^X(u) - R^X(z)| + |R^X(z) - R^X(v)| \\ &= |R^P(u) - R^P(z)| + |R^Q(z) - R^Q(v)| \\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^P(u,z)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^Q(z,v)) \end{aligned}$$

由 (UC$_{\mathcal{L}}$)，对 $R^P$and R^Q 成立。若 $d^X(u,v) \notin I_{R,\ 1}$，那么显然有

$$|R^X(u) - R^X(v)| \leqslant 1 \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(u,v)).$$

否则，我们只需考虑满足 $d^P(u,z) + d^Q(z,v) \in I_{R,\ 1}$ 的那些 $z \in M$。由$\mathfrak{u}_{R,\ 1}$ 在 $I_{R,\ 1}$ 上的超可加性，可得

$$|R^X(u) - R^X(v)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^P(u,z) + d^Q(z,v)).$$

对这类 $z \in M$ 取下确界，并注意到 M 是有限的，由 $\mathfrak{u}_{R,\ 1}$ 的单调性可得

$$|R^X(u) - R^X(v)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(u,v)).$$

接下来，假设 $n \geqslant 2$。此时，对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，都存在某个$K_{R,\ i} > 0$，使得对所有 $r \in I_{R,\ i}$，均有 $\mathfrak{u}_{R,\ i}(r) = K_{R,\ i}r$。容易验证，对任意$u, v \in P$，

$$d^X_{\mathfrak{u}_{R,i}}(u,v) = d^P_{\mathfrak{u}_{R,i}}(u,v) = K_{R,i}d^P(u,v).$$

对于 u、$v \in Q$，情况也类似。由此，$\overline{x}$、$\overline{y} \in P^n$ 以及 $\overline{x}$、$\overline{y} \in Q^n$ 的情形可由引理 3.5 迅速得出。

接下来考虑 $\overline{x} \in P^n$ 和 $\overline{y} \in Q^n$ 的情形。定义

$$\begin{aligned} S_0 &= \{i : x_i, y_i \in M\} \\ S_1 &= \{i : x_i \in P\backslash M, y_i \in M\} \\ S_2 &= \{i : x_i \in M, y_i \in Q\backslash M\} \\ S_3 &= \{i : x_i \in P\backslash M, y_i \in Q\backslash M\}. \end{aligned}$$

定义 $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$、$\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in$ 的定义域 (R^X) 为

$$u_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \in S_2 \cup S_3 \\ y_i & \text{if } i \in S_0 \cup S_1 \end{cases}$$

and

$$v_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \in S_2 \\ y_i & \text{if } i \in S_0 \cup S_1 \cup S_3. \end{cases}$$

对于任意 $\overline{z} \in M^n$，由引理 3.5 可得

$$\begin{aligned} |R^X(\overline{u}) - R^X(\overline{v})| &\leqslant |R^X(\overline{u}) - R^X(\overline{z})| + |R^X(\overline{z}) - R^X(\overline{v})| \\ &\leqslant d_R^P(\overline{u}, \overline{z}) + d_R^Q(\overline{z}, \overline{v}) \\ &= \sum_{i=1}^n d^P_{\mathfrak{u}_{R,i}}(u_i, z_i) + \sum_{i=1}^n d^Q_{\mathfrak{u}_{R,i}}(z_i, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n K_{R,i}(d^P(u_i, z_i) + d^Q(z_i, v_i)) \end{aligned}$$

对所有 $\overline{z}\in M^n$ 取下确界，得到

$$|R^X(\overline{u})-R^X(\overline{v})|\leqslant\sum_{i=1}^n K_{R,i}d^X(u_i,v_i)=\sum_{i=1}^n d^X_{\mathfrak{u}_{R,i}}(u_i,v_i)=d^X_R(\overline{u},\overline{v}).$$

Thus

$$\begin{array}{rl} & |R^X(\overline{x})-R^X(\overline{y})|\\ \leqslant & |R^X(\overline{x})-R^X(\overline{u})|+|R^X(\overline{u})-R^X(\overline{v})|+|R^X(\overline{v})-R^X(\overline{y})|\\ \leqslant & d^X_R(\overline{x},\overline{u})+d^X_R(\overline{u},\overline{v})+d^X_R(\overline{v},\overline{y})\\ \leqslant & \displaystyle\sum_{i\in S_0\cup S_1} d^X_{\mathfrak{u}_{R,i}}(x_i,y_i)+\sum_{i\in S_3} d^X_{\mathfrak{u}_{R,i}}(x_i,y_i)+\sum_{i\in S_2} d^X_{\mathfrak{u}_{R,i}}(x_i,y_i)\\ = & d^X_R(\overline{x},\overline{y}).\end{array}$$

至此，我们完成了对 $\mathcal{X}$ 是一个部分定义的连续$\mathcal{L}$-预结构的验证。将引理 3.7 应用于 $\mathcal{X}$，我们得到 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{X}$的保守扩张。这个 $\mathcal{N}$ 满足强 amalgamation 性质的要求。

(2)⇒(1)。设 $R\in\mathcal{L}$ 是 n-元的且 $1\leqslant i\leqslant n$。我们断言

$$\mathfrak{u}_{R,i}(r_1+r_2)\geqslant\mathfrak{u}_{R,i}(r_1)+\mathfrak{u}_{R,i}(r_2)$$

对于所有满足 $r_1+r_2\in I_{R,i}=\{r$ 的 $r_1,r_2>0:\ \mathfrak{u}_{R,i}(r)<1\}$。为证明该断言，设$r_1,r_2>0$ 满足 $r_1+r_2\in I_{R,i}$。考虑有限连续的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{Q}$，其中对于所有满足 $R'\neq R$ 的 $R'\in\mathcal{L}$，R'^M, R'^P, R'^Q 的值恒等于 0，并且

- $M=\{x_0\}$, $R^M(\overline{x})=\mathfrak{u}_{R,i}(r_1)$ where $\overline{x}=(x_0,\ldots,x_0)\in M^n$;
- $P=\{x_0,x_1\}$, $d^P(x_0,x_1)=r_1$, and for all $\overline{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in P^n$,
$$R^P(\overline{y})=\begin{cases}\mathfrak{u}_{R,i}(r_1) & \text{if } y_i=x_0\\ 0 & \text{otherwise;}\end{cases}$$
- $Q=\{x_0,x_2\}$, $d^Q(x_0,x_2)=r_2$, and for all $\overline{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in Q^n$,
$$R^Q(\overline{y})=\begin{cases}\mathfrak{u}_{R,i}(r_1) & \text{if } y_i=x_0\\ \min\{1,\mathfrak{u}_{R,i}(r_1)+\mathfrak{u}_{R,i}(r_2)\} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

设 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$在 $\mathcal{M}$上的融合。令$\overline{x}'$由 $\overline{x}$得到，方法是将 $\overline{x}$ 的第 i个坐标替换为 x_1；类似地，令 $\overline{x}''$由 $\overline{x}$ 得到，方法是将 $\overline{x}$ 的第 i个坐标替换为 x_2。于是根据$\mathfrak{u}_{R,i}$的单调性，我们有

$$\begin{array}{rcl}\min\{1,\mathfrak{u}_{R,i}(r_1)+\mathfrak{u}_{R,i}(r_2)\} & = & |R^N(\overline{x}')-R^N(\overline{x}'')|\\ & \leqslant & \mathfrak{u}_{R,i}(d^N(x_1,x_2))\\ & \leqslant & \mathfrak{u}_{R,i}(d^P(x_1,x_0)+d^Q(x_0,x_2))=\mathfrak{u}_{R,i}(r_1+r_2).\end{array}$$

由于 $\mathfrak{u}_{R,i}(r_1+r_2)<1$，我们得到 $\mathfrak{u}_{R,i}(r_1)+\mathfrak{u}_{R,i}(r_2)\leqslant\mathfrak{u}_{R,i}(r_1+r_2)$，如所需。

由此可知，$I_{R,i}$ 有界。事实上，若 $I_{R,i}$ 无界，则 $I_{R,i}=[0,+\infty)$，且 $M=\sup\{\mathfrak{u}_{R,i}(r):\ r\geqslant 0\}\leqslant 1$。取满足条件的 $r_1,r_2>0$，使得$\mathfrak{u}_{R,i}(r_1),\mathfrak{u}_{R,i}(r_2)>M/2$。于是 $\mathfrak{u}_{R,i}(r_1+r_2)>M$，这与 M 的定义矛盾。

对于 $\mathcal{L}$ 的其余半适当性，假设 $n\geqslant 2$。不失一般性，考虑 $i=1$。关于 $1<i\leqslant n$ 的证明类似。令 r_1,r_2 满足 $r_1+r_2\in I_{R,i}$。令 $r>r_1+r_2$ 为 $I_{R,n}$ 的一个上界。考虑有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{Q}$，其中对于所有满足 $R'\neq R$ 的 $R'\in\mathcal{L}$，R'^M, R'^P, R'^Q 的值恒为 0，并且

- $M=\{x_0,u_0\}$, $d^M(x_0,u_0)=r_1+r_2$, $R^M(\overline{x})=0$ for all $\overline{x}\in M^n$;

- $P = \{x_0, u_0, x_1\}$, $d^P(x_0, x_1) = d^P(u_0, x_1) = r > r_1 + r_2$,
$$R^P(\overline{y}) = \begin{cases} \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) & \text{if } y_1 = x_0 \text{ and } y_n = x_1 \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$
- $Q = \{x_0, u_0, x_2\}$, $d^Q(x_0, x_2) = r_1$, $d^Q(u_0, x_2) = r_2$, $R^Q(\overline{z}) = 0$ for all $\overline{z} \in Q^n$.

令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{M}$ 上 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的一个融合。令
$$\begin{array}{rcl} \overline{y} & = & (x_0, x_0, \dots, x_0, x_1) \in P \\ \overline{y}' & = & (u_0, x_0, \dots, x_0, x_1) \in P \\ \overline{w} & = & (x_2, x_0, \dots, x_0, x_1) \in N. \end{array}$$
Then
$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) & = & |R^N(\overline{y}) - R^N(\overline{y}')| \\ & \leqslant & |R^N(\overline{y}) - R^N(\overline{w})| + |R^N(\overline{w}) - R^N(\overline{y}')| \\ & \leqslant & \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(x_0, x_2)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(u_0, x_2)) \\ & = & \mathfrak{u}_{R,1}(r_1) + \mathfrak{u}_{R,1}(r_2). \end{array}$$
因此，实际上对于所有 $r_1 + r_2 \in I_{R,\ 1}$，我们都有 $\mathfrak{u}_{R,\ 1}(r_1 + r_2) = \mathfrak{u}_{R,\ 1}(r_1) + \mathfrak{u}_{R,\ 1}(r_2)$。这意味着存在 $K_1 > 0$，使得对于所有 $r \in I_{R,\ 1}$，都有 $\mathfrak{u}_{R,\ 1}(r) = K_1 r$。□

定理 3.9。设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限个关系符号，且所有相关的连续模均为非递减的。以下各项等价：

（1） $\mathcal{L}$ 是适当的。（2）所有可数连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有 amalgamation property。（3）所有可数连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有强合并性质。（4）所有连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有 amalgamation property。（5）所有连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有强合并性质。

证明。(1)⇒(3) 的证明与定理 3.8 中 (1)⇒(3) 的证明完全相同，除了在验证一元关系符号的 1-Lipschitz 性质的最后一步中，我们不使用 M 的有限性，而是使用 $\mathfrak{u}_{R的1}$上半连续性。(1)⇒(5) 的证明也完全相同。

反过来，对于 (2)⇒(1) 或 (4)⇒(1)，我们作如下观察。若 $R \in \mathcal{L}$ 是一元的，且在 $r_0 \in I_{R处不}$上半连续，则选取某些 $t_0 \in (0、\ 1)$ 使得
$$\mathfrak{u}_{R,1}(r_0) < t_0 < \min\{\inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_0\}, 1\}.$$
考虑可数连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$、 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q}$，其中对于所有满足 $R' \neq R$ 的 $R' \in \mathcal{L}$， R'^M、 R'^P、 R'^Q 的取值恒为 0，并且

- $M = \{x_i : i \geqslant 1\}$, $d^M(x_i, x_j) = |2^{-i} - 2^{-j}|$, for all $i, j \geqslant 1$, and $R^M(x_0) = 0$ for all $i \geqslant 1$;
- $P = M \cup \{x_0\}$, $d^P(x_0, x_i) = r_0 + 2^{-i}$, $R^P(x_0) = t_0$;
- $Q = M \cup \{y_0\}$, $d^Q(y_0, x_i) = 2^{-i}$, $R^Q(y_0) = 0$.

设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的融合。则
$$\begin{array}{rcl} r_0 = |d^N(x_0, x_i) - d^N(y_0, x_i)| & \leqslant & d^N(x_0, y_0) \\ & \leqslant & d^N(x_0, x_i) + d^N(y_0, x_i) = r_0 + 2^{-i+1} \end{array}$$
对所有 $i \geqslant 1$。令 $i \to \infty$，我们得到 $d^N(x_0,\ y_0) = r_0$。现在
$$t_0 = |R^N(x_0) - R^N(y_0)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(x_0, y_0)) = \mathfrak{u}_{R,1}(r_0),$$
一个矛盾。 □

最后，我们给出所有（可数） $\mathcal{L}$-结构类具有强合并性质和强合并性质的刻画。为此，我们需要引入以下强半适当性的概念。

定义 3.10. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，只有有限个关系符号，且所有相关的连续模都是非递减的。若 $\mathcal{L}$ 是半适当的，并且对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$ 和 r_1， $r_2 > 0$ 满足 $r_1 + r_2 \in I_{R,1}$，则称 $\mathcal{L}$ 为强半正规。

$$\mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) \geqslant \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_1\} + \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_2\}.$$

显然，强半适当性蕴含半适当性；而且容易看出，适当性蕴含强半适当性。

定理 3.11. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，只有有限个关系符号，且所有相关的连续模都是非递减的。以下条件等价：

(1) $\mathcal{L}$ 是强半正规的。(2) 所有可数连续 $\mathcal{L}$-结构组成的类具有 AP。(3) 所有可数连续 $\mathcal{L}$-结构组成的类具有 SAP。(4) 所有连续 $\mathcal{L}$-结构组成的类具有 AP。(5) 所有连续 $\mathcal{L}$-结构组成的类具有 SAP。

证明。(1)⇒(3) 的证明与定理 3.8 中 (1)⇒(3) 的证明完全相同，不过在验证一元关系符号的 1-Lipschitz 性质的最后一步，需要修改论证。首先注意，如果 (P, d^P) 和 (Q, d^Q) 都是完备的，那么度量空间 (X, d^X) 也是完备的；如果 P 和 Q 都是可数的，那么它也是可数的。设 $R \in \mathcal{L}$ 是一元的， $u \in P \backslash M$ 和 $v \in Q \backslash M$。那么

$$|R^X(u) - R^X(v)| \leqslant \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(d^P(u,z)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^Q(z,v)) : z \in M\}.$$

我们可以选择 $\{z_n\} \subseteq M$ 使得

$$d^X(u,v) = \inf\{d^P(u,z) + d^Q(z,v) : z \in M\} = \lim_n \left(d^P(u,z_n) + d^Q(z_n,v)\right)$$

并且 $\{d^P(u,z_n)\}_n$ 和 $\{d^Q(z_n,v)\}_n$ 都是单调的。令

$$r_1 = \lim_n d^P(u,z_n) \text{ and } r_2 = \lim_n d^Q(u,z_n).$$

如果 $r_1 + r_2 \notin I_{R,\ 1}$ 那么我们有

$$|R^X(u) - R^X(v)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) = \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(u,v)).$$

假设 $r_1 + r_2 \in I_{R,\ 1}$。那么

$$\begin{aligned} |R^X(u) - R^X(v)| &\leqslant \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(d^P(u,z)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^Q(z,v)) : z \in M\} \\ &\leqslant \lim_n \left(\mathfrak{u}_{R,1}(d^P(u,z_n)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^Q(z_n,v))\right) \\ &\leqslant \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_1\} + \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_2\} \\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) = \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(u,v)). \end{aligned}$$

(1)⇒(5) 的证明完全相同。

反过来，我们证明 (2)⇒(1) 和 (4)⇒(1)。根据定理 3.8 中 (2)⇒(1) 的证明， $\mathcal{L}$ 是半适当的。为证明 $\mathcal{L}$ 是强半正规的，设 $R \in \mathcal{L}$ 是一元的，并设 r_1、 $r_2 > 0$ 满足 $r_1 + r_2 \in I_{R,\ 1}$。不失一般性，假设 $r_1 \leqslant r_2$。令 $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为一个可数无限集，并对所有互不相同的 n、$m \in \mathbb{N}$定义$d^M(x_n, x_m) = r_1$。定义 $R^M(x) = \inf\{\mathfrak{u}_{R,\ 1}(r) : r > r_1\}$

对于所有 $x \in M$ 以及任意其他 $\tilde{R} \in \mathcal{L}$，令 $\tilde{R}^M$ 恒等于 0。由此定义了一个可数连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$。令 $P = M \cup \{y\}$，其中 y 是一个新点。对所有 $n \in \mathbb{N}$、$R^P(y) = 0$定义 $d^P(x_n, y) = (1+2^{-n})r_1$。对于 $\tilde{R} \in \mathcal{L}$，令 $\tilde{R}^P$恒等于 0。由此定义了一个可数连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{P}$，它是$\mathcal{M}$的扩张。令 $Q = M \cup \{z\}$，其中 z 是一个新点。定义 $d^Q(x_n, z) = r_2 + 2^{-n}r_1$ 并

$$R^Q(z) = \min\{1, \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_1\} + \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_2\}\}.$$

对于 $\tilde{R} \in \mathcal{L}$，令 $\tilde{R}^Q$ 恒等于 0。这定义了一个可数的连续 $\mathcal{L}$-结构$\mathcal{Q}$，它是 $\mathcal{M}$的扩张。令 $\mathcal{N}$为 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$上的一个融合。那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$d^N(y, z) \leqslant d^P(x_n, y) + d^Q(x_n, z) = r_1 + r_2 + 2^{-n+1}r_1.$$

由于 n是任意的，我们有 $d^N(y, z) \leqslant r_1 + r_2$。于是

$$\begin{aligned} & \min\{1, \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_1\} + \inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) : r > r_2\}\} \\ = \ & |R^Q(z) - R^P(y)| = |R^N(z) - R^N(y)| \\ = \ & \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(y, z)) \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2). \end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{L}$ 是强半正规的。 □

4. Urysohn Continuous Structures

本节将为任意适当连续签名 $\mathcal{L}$构造一个 Katˇetov 风格的乌雷松连续$\mathcal{L}$-结构。这不仅将确立乌雷松结构的常见性质，例如普适性、超齐性和唯一性，还将证明其自同构群是一个泛波兰群。

本节中，除非另有明确说明，我们始终假设 $\mathcal{L}$ 是适当连续签名。对于每个一元 $R \in \mathcal{L}$，连续模 $\mathfrak{u}_{R,\,1}$ 在 $I_{R,\,1}$上单调不减、超可加且上半连续。与引理 2.3 中一样，我们定义 $\mathfrak{u}^*_{R,\,1} : [0,1) \to I_{R,\,1}$，特别地，它在 $[0,1)$上次可加。对于满足 $n \geqslant 2$的 n-元$R \in \mathcal{L}$，我们固定 $K_{R,\,i} > 0$，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $\mathfrak{u}_{R,\,i}(r) = K_{R,\,i}r$，对所有$r \in I_{R,\,i}$均成立。

定义 4.1. 设 $\mathcal{L}$ 是适当连续签名，$\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{U}$ 是连续$\mathcal{L}$-预结构，且 $\mathcal{K}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构的一个类。

(i) 若 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的子结构且 $N \backslash M$ 是单元素集，则称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的单点扩张。(ii) 若对于任意有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$、$\mathcal{M}$的单点扩张 $\mathcal{N}$ 以及从 $\mathcal{M}$ 到$\mathcal{U}$的同构嵌入 φ，存在从 $\mathcal{N}$到 $\mathcal{U}$的同构嵌入 ψ，使得 $\psi \restriction M = \varphi$，则称 $\mathcal{U}$ 具有乌雷松性质。若 $\mathcal{U}$ 满足乌雷松性质，则称其为乌雷松结构。(iii) 若对于任意 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$，都存在从 $\mathcal{M}$到 $\mathcal{U}$的同构嵌入，则称 $\mathcal{U}$ 对 $\mathcal{K}$ 是普适的。(iv) 若对于 $\mathcal{U}$ 的任意有限子结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，以及它们之间的任意同构 φ（即从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$的同构），都存在 $\mathcal{U}$ 的自同构 ψ，使得 $\psi \restriction M = \varphi$，则称 $\mathcal{U}$ 是超齐性的。

给定一个适当连续签名 $\mathcal{L}$，令

$$\mathcal{K}^{\mathcal{L}}_{\mathrm{fin}} = \text{ the class of all finite continuous } \mathcal{L}\text{-structures}$$

and

$$\mathcal{K}^{\mathcal{L}}_{\text{sep}} = \text{ the class of all separable continuous } \mathcal{L}\text{-structures.}$$

通过一个标准论证可知，可分的连续 $\mathcal{L}$-结构具有乌雷松性质，当且仅当它是超齐性的，并且对 $\mathcal{K}^{\mathcal{L}}_{\text{fin}}$ 普适。在这种情况下，它实际上对 $\mathcal{K}^{\mathcal{L}}_{\text{sep}}$ 普适，且在同构意义下唯一。

根据定理 3.9，所有连续 $\mathcal{L}$-预结构构成的类具有强合并性质。我们将定理 3.9 的证明中构造的连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{N}$ 称为 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$上的典范合并。

定义 4.2. 设 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构，且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$的子结构。若存在一个有限子集 $F \subseteq M$，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{M}$ 中以 F为论域的子结构，$\mathcal{A}$为 $\mathcal{N}$中以 $A = F \cup (N \backslash M)$为论域的子结构，且 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{F}$上的典范合并，则称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的有限支撑扩张。在此情况下，称集合 F 为 $\mathcal{N}$在 $\mathcal{M}$上的有限支撑。

我们将研究连续 $\mathcal{L}$-预结构的有限支撑单点扩张。接下来的第一步，我们聚焦于单点扩张。

4.1. 单点扩张。本小节研究连续 $\mathcal{L}$-预结构的单点扩张及其融合。

固定一个连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$。若 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$的单点扩张，我们将 $N \backslash M$中的唯一元素记为 $x_{\mathcal{N}}$。反过来，若 x是 $N \backslash M$中的唯一元素，我们也将 $\mathcal{N}$记为 $\mathcal{M}_x$。

若 $\mathcal{M}_x$ 和 $\mathcal{M}_y$ 是 $\mathcal{M}$的两个单点扩张，考虑映射 $\varphi : M_x \to M_y$，其中 $\varphi(x) = y$，且对所有 $z \in M$都有 $\varphi(z) = z$。若 φ 是 $\mathcal{M}_x$ 与 $\mathcal{M}_y$ 之间作为连续 $\mathcal{L}$-预结构的同构，则定义等价关系 $x \sim y$。

令 $\tilde{E}(\mathcal{M})$ 为所有单点扩张 $\mathcal{N}$ 对应的 $x_{\mathcal{N}}$ 的集合。令 $E'(\mathcal{M})$ 为商空间 $E(\mathcal{M})/\sim$。在 $E'(\mathcal{M})$ 中，我们将 $\sim$-等价的 x 和y 视为同一对象，并记作 $x = y$。最后，令

$$E(\mathcal{M}) = M \cup E'(\mathcal{M})$$

是 M 和 $E'(\mathcal{M})$的不交并。

我们如下定义 $E(\mathcal{M})$ 上的连续 $\mathcal{L}$-预结构。对于任意 $n \geqslant 1$、x、$y \in E(\mathcal{M})$ 和 $\overline{u} = (u_1$、.....、$u_n) \in E(\mathcal{M})^n$，令 $\overline{u}(y|x) = (v_1$、.....、$v_n) \in E(\mathcal{M})^n$ 满足：对于 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$v_i = \begin{cases} u_i & \text{if } u_i \neq x \\ y & \text{if } u_i = x. \end{cases}$$

此外，对于 $\overline{u} \in E(\mathcal{M})^n$，令

$$\|\overline{u}\| = \sum_{u_i \notin M} K_{R,i}.$$

对于 x、$y \in E(\mathcal{M})$，定义度量 $d^E(x$、$y)$，使得

$$d^E(x,y) = \begin{cases} d^M(x,y) & \text{if } x, y \in M \\ d^{M_x}(x,y) & \text{if } x \in E'(\mathcal{M}) \text{ and } y \in M \\ d^{M_y}(x,y) & \text{if } x \in M \text{ and } y \in E'(\mathcal{M}). \end{cases}$$

若 x、 $y \in E'(\mathcal{M})$, 我们定义

$$\mu(x,y) = \max\Big\{ \mathfrak{u}^*_{R,1}(|R^{M_x}(x) - R^{M_y}(y)|) \,:\, R \in \mathcal{L} \text{ is unary}\Big\}$$

$$\rho(x,y) = \sup\big\{ \|\overline{u}\|^{-1}|R^{M_x}(\overline{u}) - R^{M_y}(\overline{u}(y|x))| \,: \\ \overline{u} \in M_x^n \backslash M^n, R \in \mathcal{L} \text{ is } n\text{-ary for } n \geqslant 2\big\}$$

$$\lambda(x,y) = \sup\big\{ \,|d^{M_x}(x,z) - d^{M_y}(y,z)| \,:\, z \in M\big\}$$

and

$$d^E(x,y) = \max\{\,\mu(x,y),\ \rho(x,y),\ \lambda(x,y)\}\,.$$

引理 4.3. d^E 是 $E(\mathcal{M})$上的度量。

证明。我们验证，若 $d^E(x、\ y) = 0$，则 $x = y$。当$x、\ y$中至少有一个属于 M时，这显然成立。假设 $x、\ y \in E'(\mathcal{M})$。令 $\varphi\colon\ M_x \to M_y$为满足 $\varphi(x) = y$且对所有 $z \in M$ 都有 $\varphi(z) = z$的映射。若 $d^E(x、\ y) = 0$，则 $\mu(x、\ y) = \rho(x、\ y) = \lambda(x、\ y) = 0$, 这意味着 φ 是 $\mathcal{M}_x$ 与 $\mathcal{M}_y$ 之间作为连续 $\mathcal{L}$-预结构的一个同构。因此 $x = y$。

注意， μ 满足三角不等式，因为根据引理 2.3 $\mathfrak{u}^*_{R,\ 1}$ 对一元 $R \in \mathcal{L}$具有次可加性。对于所有 $x、\ y、\ z \in E'(\mathcal{M})$、 $d(x、\ y) + d(y、\ z) \geqslant d(x、\ z)$, 这是因为 μ、 ρ 和 λ 都满足三角不等式。此外，很容易验证 $\max\{\mu(x、\ y)、\ \rho(x、\ y)、\ \lambda(x、\ y)\} \leqslant \inf\ d^{M_x}(x、\ z) + d^{M_y}(y、\ z)\colon\ \ z \in M\}$,, 因此 d^E也满足三角不等式。□

定义 $(X, d^X) = (E(\mathcal{M}), d^E)$，并对任意 n元 $R \in \mathcal{L}$ 在 上自然地定义 R^X

$$\mathrm{dom}(R^X) = \bigcup\{M_x^n \,:\, x \in E'(\mathcal{M})\}.$$

引理 4.4. $\mathcal{X} = (X, d^X, (R^X)_{R\in\mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。

证明. 我们验证，对于任意 n元 $R \in \mathcal{L}$， R^X 关于 d^X_R是 1-利普希茨的。首先假设 $n = 1$。只需证明，对任意 $x, y \in E'(\mathcal{M})$,

$$|R^X(x) - R^X(y)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(x,y)).$$

为此，注意到由引理 2.3 (3)，我们有

$$\begin{aligned} |R^X(x) - R^X(y)| &= |R^{M_x}(x) - R^{M_y}(y)| \\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(\mathfrak{u}^*_{R,1}(|R^{M_x}(x) - R^{M_y}(y)|)) \\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(\mu(x,y)) \\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^X(x,y)). \end{aligned}$$

接下来假设 $n \geqslant 2$。除 $\overline{u} \in M_x^n \backslash M^n, \overline{v} \in M_y^n \backslash M^n$ 对不同的 $x, y \in E'(\mathcal{M})$成立的情形外，所有情形均由引理 3.5 得出。

假设 $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_n), \overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ 如上所述给定。令

$$\begin{aligned} S_0 &= \{i \,:\, u_i, v_i \in M\} \\ S_1 &= \{i \,:\, u_i = x, v_i \in M\} \\ S_2 &= \{i \,:\, u_i \in M, v_i = y\} \\ S_3 &= \{i \,:\, u_i = x, v_i = y\}. \end{aligned}$$

定义 $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in M_x^n$， 使得

$$w_i = \begin{cases} u_i & \text{if } i \in S_2 \cup S_3 \\ v_i & \text{if } i \in S_0 \cup S_1. \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} & |R^X(\overline{u}) - R^X(\overline{v})| \\ \leqslant\ & |R^X(\overline{u}) - R^X(\overline{w})| + |R^X(\overline{w}) - R^X(\overline{w}(y|x))| + |R^X(\overline{w}(y|x)) - R^X(\overline{v})| \\ \leqslant\ & d_R^X(\overline{u},\overline{w}) + \|w\|\rho(x,y) + d_R^X(\overline{w}(y|x),\overline{v}) \\ \leqslant\ & \sum_{i\in S_0\cup S_1} K_{R,i} d^X(u_i,v_i) + \sum_{i\in S_3} K_{R,i} d^X(u_i,v_i) + \sum_{i\in S_2} K_{R,i} d^X(u_i,v_i) \\ =\ & d_R^X(\overline{u},\overline{v}) \end{aligned}$$

满足所需条件。 □

根据引理 3.7，我们得到一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构，它是 $\mathcal{X}$的保守扩张。我们将这个连续的 $\mathcal{L}$-预结构记为

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = (E(\mathcal{M}), d^E, (R^E)_{R\in\mathcal{L}}).$$

由引理 3.7 的证明可知，对于任意 n-元 $R\in\mathcal{L}$ 和 $\overline{x}\in E(\mathcal{M})^n$，

$$R^E(\overline{x}) = \max\left\{0,\ \sup\{R^{M_y}(\overline{u}) - d_R^E(\overline{x},\overline{u}) \,:\, y\in E'(\mathcal{M}), \overline{u}\in M_y^n\}\right\}.$$

4.2. 有限支撑单点扩张。本小节将讨论有限支撑单点扩张。

设 $\mathcal{M}_x$ 是具有有限支撑 $F\subseteq M$的 $\mathcal{M}$ 的单点扩张。那么，$\mathcal{M}_x$ 是 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{F}_x$ 在 $\mathcal{F}$ 上的典范合并。这意味着，对于任意 $y\in M$，

$$d^{M_x}(x,y) = \inf\{d^{M_x}(x,z) + d^M(z,y) \,:\, z\in F\},$$

对于任意 n 元 $R\in\mathcal{L}$，其中 $n\geqslant 2$ 且 $\overline{u}\in M_x^n$，

$$R^{M_x}(\overline{u}) = \max\left\{0,\ \sup\{R^{M_x}(\overline{v}) - d_R^{M_x}(\overline{u},\overline{v}) \,:\, \overline{v}\in F_x^n\cup M^n\}\right\}.$$

我们定义

$$E(\mathcal{M},\omega) = M\cup\{x\in E'(\mathcal{M}) \ :\ \begin{array}{l}\mathcal{M}_x \text{ is a finitely-supported}\\ \text{one-point extension of } \mathcal{M}\end{array}\}$$

并令 $\mathcal{E}(\mathcal{M}、\omega)$ 为 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ 的子结构，其论域为 $E(\mathcal{M}、\omega)$。

定理 4.5. 设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名， $\mathcal{M}$ 是一个连续 $\mathcal{L}$-预结构。若 $\mathcal{M}$ 可分，则 $\mathcal{E}(\mathcal{M}、\omega)$ 也可分。

证明. 设 N 是所有 $R\in\mathcal{L}$ 中最大的元数。设 K 是所有 $K_{R,\,i}$ 中的最小值，其中 n 元 $R\in\mathcal{L}$ 满足 $n\geqslant 2$ 且 $1\leqslant i\leqslant n$。设 J 是所有 $K_{R,\,i}/K$ 中的最大值，其中 n 元 $R\in\mathcal{L}$ 满足 $n\geqslant 2$ 且 $1\leqslant i\leqslant n$。

设 D 是 M 的一个可数稠密子集。令

$$V = \{d^M(x,y), R^M(\overline{u}) \,:\, x,y\in D, \overline{u}\in D^n, R\in\mathcal{L} \text{ is } n\text{-ary}\}$$

并令 G 为由 $V\cup\mathbb{Q}$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的加法子群。那么 G 是 $\mathbb{R}$ 的可数稠密子集。

我们称连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{A}$ 是 G-值的，若

$$\{d^A(x,y), R^A(\overline{u}) \,:\, x,y\in A, \overline{u}\in A^n, R\in\mathcal{L} \text{ is } n\text{-ary}\}\subseteq G.$$

Let

$$B = \{x\in E'(\mathcal{M}) : \begin{array}{l}\text{there is a finite support } F\subseteq D \text{ for } \mathcal{M}_x\\ \text{such that } \mathcal{F}_x \text{ is } G\text{-valued}\}.\end{array}$$

那么 $B\subseteq E(\mathcal{M},\omega)\cap E'(\mathcal{M})$ 是可数的。只需证明 B 在$E(\mathcal{M},\omega)\cap E'(\mathcal{M})$中稠密。

设 $x \in E(\mathcal{M},\omega) \cap E'(\mathcal{M})$ 和 $1 > \epsilon > 0$。假设 $A = \{a_0, \ldots, a_m\} \subseteq M$ 是 $\mathcal{M}_x$ 的一个有限支撑，使得

$$d^{M_x}(x, a_0) \geqslant d^{M_x}(x, a_1) \geqslant \cdots \geqslant d^{M_x}(x, a_m) > 0.$$

Let

$$\delta = \min\{d^{M_x}(y, z) : y \neq z \in A_x = A \cup \{x\}\} > 0.$$

选取

$$0 < \epsilon_0 < \frac{\epsilon \min\{1, \delta\} \min\{1, K\}}{(9m + 9)N}.$$

Then

$$\epsilon_0 < \min\left\{\frac{\min\{\epsilon, \delta\}}{9m + 9}, \frac{\epsilon\delta}{(9m + 9)N}, \frac{K\epsilon\delta}{4}\right\}.$$

由于 D 是稠密的，我们可以找到互不相同的 b_0、……、$b_m \in D$，使得

$$d^M(a_i, b_i) < \frac{\epsilon_0}{2NJ}$$

对所有 $0 \leqslant i \leqslant m$ 均成立。令 $F = \{b_0$、……、$b_m\} \subseteq D$。

定义 g：$F \to G$，使得

$$g(b_i) = d^{M_x}(x, a_i) + (3i + 1)\epsilon_0 + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon_i'$$

对于 $0 \leqslant i \leqslant m$，其中我们选取 $\epsilon_i' \in (0$、$\epsilon_0)$，使得 $g(b_i) \in G$。接下来的计算表明，对所有 $0 \leqslant i < j \leqslant m$，

$$|g(b_i) - g(b_j)| \leqslant d^M(b_i, b_j) \leqslant g(b_i) + g(b_j).$$

事实上，假设 $0 \leqslant i < j \leqslant m$。我们有

$$\begin{aligned} g(b_j) - g(b_i) &= d^{M_x}(x, a_j) - d^{M_x}(x, a_i) + 3(j - i)\epsilon_0 + \epsilon_j' - \epsilon_i' \\ &< (3m + 1)\epsilon_0 \\ &= 3(m + 1)\epsilon_0 - 2\epsilon_0 \\ &< \delta - (d^M(a_i, b_i) + d^M(a_j, b_j)) \\ &\leqslant d^M(a_i, a_j) - d^M(a_i, b_i) - d^M(a_j, b_j) \\ &\leqslant d^M(b_i, b_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b_i) - g(b_j) &= d^{M_x}(x, a_i) - d^{M_x}(x, a_j) - 3(j - i)\epsilon_0 + \epsilon_i' - \epsilon_j' \\ &\leqslant d^{M_x}(x, a_i) - d^{M_x}(x, a_j) - 2\epsilon_0 \\ &< d^M(a_i, a_j) - d^M(a_i, b_i) - d^M(a_j, b_j) \\ &\leqslant d^M(b_i, b_j) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d^M(b_i, b_j) &\leqslant d^{M_x}(x, a_i) + d^{M_x}(x, a_j) + d^M(a_i, b_i) + d^M(a_j, b_j) \\ &< d^{M_x}(x, a_i) + d^{M_x}(x, a_j) + 2\epsilon_0 \\ &< g(b_i) + g(b_j). \end{aligned}$$

因此，我们可以通过一点 u 定义有限度量空间 (F, d^F) 的单点扩张，使得对所有 $0 \leqslant i \leqslant m$, $d^{F_u}(u, b_i) = g(b_i)$。通过定义

$$d^{M_u}(u, y) = \inf\{g(b_i) + d^M(b_i, y) : 0 \leqslant i \leqslant m\}$$

对于任意 $y \in M$，我们将度量扩张到 $M_u = M \cup \{u\}$。

接下来，我们通过定义所有 $R \in \mathcal{L}$ 的 R^{F_u} 值，来定义一个定义域为 $F_u = F \cup \{u\}$ 的连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{F}_u$。

首先假设 $R \in \mathcal{L}$ 是一元的。由于 G 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，我们可以选取 $R^{F_u}(u) \in G \cap [0,\ 1]$，使得

$$|R^{F_u}(u) - R^{M_x}(x)| < \mathfrak{u}_{R,1}\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$

我们验证 $_{\mathcal{L}}$ 在 F_u 中对 R 成立。事实上，对于任意 $0 \leqslant i \leqslant m$，如果 $g(b_i) \in I_{R,\ 1}$，那么根据 $\mathfrak{u}_R$ 的超可加性，$_1$，我们有

$$\begin{array}{ll} & |R^M(b_i) - R^{F_u}(u)| \\ \leqslant & |R^M(b_i) - R^M(a_i)| + |R^M(a_i) - R^{M_x}(x)| + |R^{M_x}(x) - R^{F_u}(u)| \\ \leqslant & \mathfrak{u}_{R,1}(d^M(b_i, a_i)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^{M_x}(x, a_i)) + \mathfrak{u}_{R,1}(\frac{\epsilon}{2}) \\ \leqslant & \mathfrak{u}_{R,1}(\epsilon_0) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^{M_x}(x, a_i)) + \mathfrak{u}_{R,1}(\frac{\epsilon}{2}) \\ \leqslant & \mathfrak{u}_{R,1}(g(b_i)) = \mathfrak{u}_{R,1}(d^{F_u}(u, b_i)). \end{array}$$

如果 $g(b_i) \notin I_{R,\ 1}$ 那么

$$|R^M(b_i) - R^{F_u}(u)| \leqslant 1 \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(g(b_i)) = \mathfrak{u}_{R,1}(d^{F_u}(u, b_i)).$$

接下来假设 $R \in \mathcal{L}$ 对 $n \geqslant 2$ 是 n 元的。如果 $\overline{v} \in F^n$，那么令 $R^{F_u}(\overline{v}) = R^M(\overline{v})$。接下来我们为 $\overline{v} = (v_1$ 定义 $R^{F_u}(\overline{v})$，...，$v_n) \in F_u^n \backslash F^n$。为此，令 $\overline{v}' = (v_1'$，...，$v_n') \in A_x^n \backslash A^n$ 定义如下

$$v_i' = \begin{cases} a_j & \text{if } v_i = b_j \\ x & \text{if } v_i = u. \end{cases}$$

我们定义 R^{F_u}：$F_u^n \backslash F^n \to G \cap [0,\ 1]$ 使得

(a) for all $\overline{v} \in F_u^n \backslash F^n$, $|R^{F_u}(\overline{v}) - R^{A_x}(\overline{v}')| < K\dfrac{\epsilon}{2}$, and

(对所有 $\overline{v}$、$\overline{w} \in F_u^n$ F^n, $\backslash$b

$$|R^{F_u}(\overline{v}) - R^{F_u}(\overline{w})| \leqslant \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\delta}\right)|R^{A_x}(\overline{v}') - R^{A_x}(\overline{w}')|.$$

请注意，我们对 ϵ_0 的选择保证了 tha t

$$\frac{\epsilon_0}{\delta} < \frac{\epsilon}{(9m+9)N} \ll 1 \text{ and } \frac{2\epsilon_0}{\delta} < K\frac{\epsilon}{2}.$$

为了定义 R^{F_u}，我们将 $F_u^n \backslash F^n$ 的所有元素枚举为

$$\overline{v}^0, \overline{v}^1, \ldots, \overline{v}^\ell$$

使得

$$R^{A_x}(\overline{v}^{0\prime}) \leqslant R^{A_x}(\overline{v}^{1\prime}) \leqslant \cdots \leqslant R^{A_x}(\overline{v}^{\ell\prime}).$$

如果 $R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime}) = 0$，我们定义 $R^{F_u}(\overline{v}) = 0$。我们还约定，若 $R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime}) = R^{A_x}(\overline{v}^{j\prime})$，则 $R^{F_u}(\overline{v}^i) = R^{F_u}(\overline{v}^j)$。有了这一约定，不失一般性地假设

$$0 < R^{A_x}(\overline{v}^{0\prime}) < R^{A_x}(\overline{v}^{1\prime}) < \cdots < R^{A_x}(\overline{v}^{\ell\prime}).$$

接下来，我们将根据 $i = 0$、.....、ℓ 进行归纳定义，并采用以下归纳假设：

(H1) $R^{F_u}(\overline{v}^i) \in G$ 并且

$$\left(1 - \frac{2\epsilon_0}{\delta}\right)R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime}) < R^{F_u}(\overline{v}^i) < \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\delta}\right)R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime});$$

（H2）对所有 $j < i$,

$$R^{F_u}(\overline{v}^i) \leqslant R^{F_u}(\overline{v}^j) + \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\delta}\right)(R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime}) - R^{A_x}(\overline{v}^{j\prime})).$$

对于 $i=0$，（H2）是平凡成立的，而（H1）可通过 G 的稠密性实现。一般来说，假设我们已定义 $R^{F_u}(\overline{v}^j)$，使其对 $j\leqslant i$ 满足（H1）和（H2）。注意到

$$\left(1-\frac{2\epsilon_0}{\delta}\right)R^{A_x}(\overline{v}^{i+1\prime})<R^{F_u}(\overline{v}^i)+\left(1-\frac{\epsilon_0}{\delta}\right)(R^{A_x}(\overline{v}^{i+1\prime})-R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime})).$$

接下来，我们可以将 $R^{F_u}(\overline{v}^{i+1})\in G$ 定义为介于上述两个量之间的一个值。为说明归纳假设仍然成立，注意根据此定义，(H2) 和 (H1) 的左半部分显然成立。对于 (H1) 的右半部分，只需注意到

$$R^{F_u}(\overline{v}^i)+\left(1-\frac{\epsilon_0}{\delta}\right)(R^{A_x}(\overline{v}^{i+1\prime})-R^{A_x}(\overline{v}^{i\prime}))<\left(1-\frac{\epsilon_0}{\delta}\right)R^{A_x}(\overline{v}^{i+1\prime}).$$

至此，R^{F_u} 的定义完成。容易验证 (a) 和 (b) 成立。

我们验证 R 在 F_u 中满足 (UC$_{\mathcal{L}}$)。为此，设 $\overline{v}$、$\overline{w}\in F_u^n$ 恰好在一个坐标上不同，记为第 i 个坐标。若 $\overline{v}$、$\overline{w}\in F^n$ 均满足

$$|R^{F_u}(\overline{v})-R^{F_u}(\overline{w})|=|R^M(\overline{v})-R^M(\overline{w})|\leqslant K_{R,i}d^M(v_i,w_i)$$

根据 R 在 M 中的 (UC$_{\mathcal{L}}$)。若 $\overline{v}$、$\overline{w}\in F_u^n\backslash F^n$ 均满足，则由 (b) 可得

$$\begin{aligned}|R^{F_u}(\overline{v})-R^{F_u}(\overline{w})| &\leqslant \left(1-\frac{\epsilon_0}{\delta}\right)|R^{A_x}(\overline{v}')-R^{A_x}(\overline{w}')|\\ &\leqslant \left(1-\frac{\epsilon_0}{\delta}\right)K_{R,i}d^{A_x}(v_i',w_i')\\ &\leqslant K_{R,i}d^{A_x}(v_i',w_i')-K_{R,i}\epsilon_0.\end{aligned}$$

现在，若 v_i、$w_i\in F$ 满足，则有 v_i'、$w_i'\in A$、$d^{A_x}(v_i',w_i')=d^M(v_i',w_i')$，

$$d^M(v_i',v_i),d^M(w_i',w_i)<\frac{\epsilon_0}{2NJ}\leqslant\frac{\epsilon_0}{2}$$

and

$$\begin{aligned}|R^{F_u}(\overline{v})-R^{F_u}(\overline{w})| &\leqslant K_{R,i}d^M(v_i',w_i')-K_{R,i}\epsilon_0\\ &\leqslant K_{R,i}d^M(v_i',w_i')-K_{R,i}(d^M(v_i',v_i)+d^M(w_i',w_i))\\ &\leqslant K_{R,i}d^M(v_i,w_i).\end{aligned}$$

若 $v_i\in F$ 且 $w_i=u$，则 $v_i'\in A$ 且 $w_i'=x$，并且

$$|R^{F_u}(\overline{v})-R^{F_u}(\overline{w})|\leqslant K_{R,i}d^{A_x}(v_i',x)-K_{R,i}\epsilon_0\leqslant K_{R,i}d^{F_u}(v_i,u).$$

这就完成了对 R 在 $\overline{v},\overline{w}\in F_u^n\backslash F^n$ 的情形下证明 (UC$_{\mathcal{L}}$)。最后，假设 $\overline{v}\in F_u^n\backslash F^n$ 且 $\overline{w}\in F^n$。由于 $\overline{v}$ 和 $\overline{w}$ 仅在坐标 i 处不同，因此我们有 $v_i=u$ 和 $w_i\in F$。我们有

$$\begin{aligned}&|R^{F_u}(\overline{v})-R^{F_u}(\overline{w})|\\ \leqslant\ &|R^{F_u}(\overline{v})-R^{A_x}(\overline{v}')|+|R^{A_x}(\overline{v}')-R^M(\overline{w}')|+|R^M(\overline{w}')-R^M(\overline{w})|\\ \leqslant\ &K\frac{\epsilon}{2}+d_R^{A_x}(\overline{v}',\overline{w}')+d_R^M(\overline{w}',\overline{w})\\ \leqslant\ &K\frac{\epsilon}{2}+K_{R,i}d^{A_x}(x,w_i')+\sum_{j=1}^n K_{R,j}d^M(w_j',w_j)\\ \leqslant\ &K_{R,i}d^{A_x}(x,w_i')+K_{R,i}\frac{\epsilon}{2}+NJK_{R,i}\frac{\epsilon_0}{2NJ}\\ <\ &K_{R,i}d^{F_u}(u,w_i).\end{aligned}$$

现在，我们已经证明了 (UC$_{\mathcal{L}}$) 对 F_u中的所有 $R\in\mathcal{L}$ 都成立，因此可知 $\mathcal{F}_u$ 确实是作为连续 $\mathcal{L}$-结构的 $\mathcal{F}$ 的单点扩张。

根据定理 3.9，$\mathcal{F}_u$ 和 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{F}$ 上的典范合并给出了 $\mathcal{M}$的单点扩张 $\mathcal{M}_u$。因此，$u\in E(\mathcal{M},\omega)\cap E'(\mathcal{M})$。

为了完成该定理的证明，我们断言 $d^E(x、\ u) < (NJ+1)\epsilon$。为此，我们注意到，对于任意 $y \in M$，

$$d^{M_x}(x,y) = \inf\{d^{A_x}(x,a_i) + d^M(a_i,y) \ : \ 0 \leqslant i \leqslant m\}$$

and

$$d^{M_u}(u,y) = \inf\{d^{F_u}(u,b_i) + d^M(b_i,y) \ : \ 0 \leqslant i \leqslant m\}.$$

固定任意一个 $y \in M$。首先假设 $d^{M_u}(u、\ y) < d^{M_x}(x、\ y)$，并令 $d^{M_u}(u、\ y) =d^{F_u}(u、\ b_i) + d^M(b_i、\ y)$。于是

$$\begin{array}{ll} & d^{M_x}(x,y) - d^{M_u}(u,y) \\ \leqslant & d^{A_x}(x,a_i) + d^M(a_i,y) - (d^{F_u}(u,b_i) + d^M(b_i,y)) \\ \leqslant & d^{A_x}(x,a_i) - d^{F_u}(u,b_i) + d^M(a_i,b_i) \\ \leqslant & \dfrac{\epsilon_0}{2NJ} - \dfrac{\epsilon}{2} < 0, \end{array}$$

这与我们的假设相矛盾。因此，我们必有 $d^{M_u}(u、\ y) \geqslant d^{M_x}(x、\ y)$。令$d^{M_x}(x、\ y) = d^{A_x}(x、\ a_i) + d^M(a_i、\ y)$。于是

$$\begin{array}{ll} & d^{M_u}(u,y) - d^{M_x}(x,y) \\ \leqslant & d^{F_u}(u,b_i) + d^M(b_i,y) - (d^{A_x}(x,a_i) + d^M(a_i,y)) \\ \leqslant & d^{F_u}(u,b_i) - d^{A_x}(x,a_i) + d^M(a_i,b_i) \\ \leqslant & (3m+2)\epsilon_0 + \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon_0}{2NJ} < \dfrac{5}{6}\epsilon. \end{array}$$

由此可得 $\lambda(x、\ u) < \epsilon$。

对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$，我们有

$$\mathfrak{u}^*_{R,1}(|R^{M_x}(x) - R^{M_u}(u)|) \leqslant \mathfrak{u}^*_{R,1}(\mathfrak{u}_{R,1}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)) = \frac{\epsilon}{2}.$$

因此 $\mu(x,\ u) < \epsilon$。

为计算 $\rho(x,\ u)$，我们固定一个 n元 $R \in \mathcal{L}$，用于 $n \geqslant 2$和 $\overline{v} \in M_u^n \backslash M^n$。由于 $\mathcal{M}_u$ 是 $\mathcal{F}_u$ 和 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{F}$ 上的典范合并，因此我们有

$$R^{M_u}(\overline{v}) = \max\{0, \sup\{R^{M_u}(\overline{z}) - d_R^{M_u}(\overline{v},\overline{z}) \ : \ \overline{z} \in F_u^n \cup M^n\}\}.$$

同理，

$$R^{M_x}(\overline{v}(x|u)) = \max\{0, \sup\{R^{M_x}(\overline{w}) - d_R^{M_x}(\overline{v}(x|u),\overline{w}) \ : \ \overline{w} \in A_x^n \cup M^n\}\}.$$

首先假设 $R^{M_u}(\overline{v}) \geqslant R^{M_x}(\overline{v}(x|u))$。如果 $R^{M_u}(\overline{v}) = 0$，则必有 $R^{M_x}(\overline{v}(x|u)) =0$，无需证明。假设 $R^{M_u}(\overline{v}) > 0$。任取 $\eta > 0$。于是对于某个 $\overline{z} \in F_u^n \cup M^n$，

$$R^{M_u}(\overline{v}) \leqslant R^{M_u}(\overline{z}) - d_R^{M_u}(\overline{v},\overline{z}) + \eta.$$

先考虑 $\overline{z} \in M^n$ 的情形。于是

$$\begin{array}{ll} & R^{M_u}(\overline{v}) - R^{M_x}(\overline{v}(x|u)) \\ \leqslant & R^{M_u}(\overline{z}) - d_R^{M_u}(\overline{v},\overline{z}) + \eta - (R^{M_x}(\overline{z}) - d_R^{M_x}(\overline{v}(x|u),\overline{z})) \\ \leqslant & \|\overline{v}\|\lambda(u,x) + \eta. \end{array}$$

由于 η 是任意的，我们有

$$\|\overline{v}\|^{-1}|R^{M_u}(\overline{v}) - R^{M_x}(\overline{v}(x|u))| < \epsilon.$$

接下来考虑 $\overline{z} \in F_u^n \backslash F^n$ 的情形。于是

$$\begin{aligned} & R^{M_u}(\overline{v}) - R^{M_x}(\overline{v}(x|u)) \\ \leqslant\ & R^{M_u}(\overline{z}) - d_R^{M_u}(\overline{v}, \overline{z}) + \eta - (R^{M_x}(\overline{z}') - d_R^{M_x}(\overline{v}(x|u), \overline{z}') \\ =\ & R^{M_u}(\overline{z}) - R^{M_x}(\overline{z}') + (d_R^{M_x}(\overline{v}(x|u), \overline{z}') - d_R^{M_u}(\overline{v}, \overline{z})) + \eta \\ \leqslant\ & K\frac{\epsilon}{2} + NKJ\epsilon + \eta. \end{aligned}$$

最后一个不等式可由以下观察得出：v_i、$z_i \in M_u$的取值有四种情况：

情况 1。$v_i = u$ 和 $z_i = u$。于是 $z_i' = x$ 和 $v_i(x|u) = x$。在这种情况下$d^{M_x}(v_i(x|u)$、$z_i') - d^{M_u}(v_i$、$z_i) = 0$。情况 2。$v_i \in M$ 和 $z_i = b_j \in F$。于是 $z_i' = a_j \in A$ 和 $v_i(x|u) = v_i$。在这种情况下

$$|d^{M_x}(v_i(x|u), z_i') - d^{M_u}(v_i, z_i)| \leqslant d^M(a_j, b_j) < \frac{\epsilon_0}{2NJ} < \epsilon.$$

情况 3。$v_i = u$ 和 $z_i = b_j \in F$。于是 $z_i' = a_j \in A$ 和 $v_i(x|u) = x$。在这种情况下

$$\begin{aligned} |d^{M_x}(v_i(x|u), z_i') - d^{M_u}(v_i, z_i)| &= |d^{M_x}(x, a_j) - d^{M_u}(u, b_j)| \\ &\leqslant (3m+2)\epsilon_0 + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

情况 4。$v_i \in M$ 和 $z_i = u$。于是 $z_i' = x$ 和 $v_i(x|u) = v_i$。在这种情况下

$$\begin{aligned} |d^{M_x}(v_i(x|u), z_i') - d^{M_u}(v_i, z_i)| &= |d^{M_x}(v_i, x) - d^{M_u}(v_i, u)| \\ &\leqslant \lambda(u, x) < \epsilon. \end{aligned}$$

由于 η 是任意的，我们有

$$R^{M_u}(\overline{v}) - R^{M_x}(\overline{v}(x|u)) \leqslant K(NJ+1)\epsilon.$$

由于 $\|\overline{v}\| \geqslant K$，我们有

$$\|\overline{v}\|^{-1}|R^{M_u}(\overline{v}) - R^{M_x}(\overline{v}(x|u))| \leqslant (NJ+1)\epsilon.$$

对于 $R^{M_u}(\overline{v}) \leqslant R^{M_x}(\overline{v}(x|u))$，通过对称论证可得到类似的估计。因此我们有 $\rho(x$、$u) < (NJ+1)\epsilon$以及 $d^E(x$、$u) < (NJ+1)\epsilon$。□

4.3. 乌雷松结构的构造。给定任意适当连续签名 $\mathcal{L}$ 和连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$，通过归纳定义

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_{n+1} &= \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \omega) \end{aligned}$$

并令

$$\mathcal{M}_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{M}_n.$$

那么，根据定理 4.5，若 $\mathcal{M}$ 可分，则 $\mathcal{M}_\omega$也可分。从$\mathcal{M}_\omega$ 的构造容易看出，它总是具有乌雷松性质。

由$\mathcal{M}$的适当性、对ω有唯一的完备化$\mathcal{M}_\omega$是一个连续的$\mathcal{L}$-预结构。我们证明了 $\mathcal{M}_\omega$ 仍具有乌雷松性质。为此，我们首先注意到定理 4.5 的证明所得到的以下推论。

引理 4.6. 设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名，且 $\mathcal{M}$ 是一个连续 $\mathcal{L}$-预结构。假设 $\mathcal{M}$ 具有乌雷松性质。给定 $\mathcal{M}$的任意有限子结构$\mathcal{A}$、一个 $\mathcal{A}$的单点扩张 $\mathcal{A}_x$ 以及 $\epsilon > 0$，存在 $u \in M$ 使得

$$|d^{A_x}(x, a) - d^{\bar{M}}(u, a)| < \epsilon \text{ for all } a \in A,$$

并且对于任意 n-元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{y} \in A_x^n$,

$$|R^{A_x}(\overline{y}) - R^{\bar{M}}(\overline{y}(u|x))| < \epsilon.$$

证明。设给定了 $\mathcal{A}_x$ 和 $\epsilon > 0$ 。令 N、 K、 J 按定理 4.5 的证明中的方式定义。假设 $A = \{a_0, \ldots\ldots, a_m\} \subseteq M$。由于 M在 M中稠密，我们得到一个有限子集 $F = \{b_0, \ldots\ldots, b_m\} \subseteq M$，使得

$$d^{\bar{M}}(a_i, b_i) < \frac{\epsilon}{2NKJ}$$

对所有 $0 \leqslant i \leqslant m$都成立。根据定理 4.5 的证明，我们得到 $\mathcal{F}$ 的一个单点扩张 $\mathcal{F}_u$ ，使得

$$|d^{A_x}(x, a) - d^{F_u}(u, b)| < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有 $a \in A$ 都成立，其中对于 $0 \leqslant j \leqslant m$，若 $a = a_j$ ，则 $b = b_j$ ；对于任意 n 元的 $R \in \mathcal{L}$ 和$\overline{y} \in A_x^n$,

$$|R^{A_x}(\overline{y}) - R^{F_u}(\overline{y}')| < \frac{\epsilon}{2},$$

其中 $\overline{y}'$ 按定理 4.5 的证明中的方式定义。

由于 M 具有乌雷松性质，我们可以找到这样的 $u \in M$。现在对于任意 $a \in A$，令 $b \in F$ 如上定义，我们有

$$\begin{aligned} & |d^{A_x}(x, a) - d^{\bar{M}}(u, a)| \\ \leqslant\ & |d^{A_x}(x, a) - d^{F_u}(u, b)| + |d^{F_u}(u, b) - d^{\bar{M}}(u, a)| \\ <\ & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

对于 n元的 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{y} \in A_x^n$,

$$\begin{aligned} & |R^{A_x}(\overline{y}) - R^{\bar{M}}(\overline{y}(u|x))| \\ \leqslant\ & |R^{A_x}(\overline{y}) - R^{F_u}(\overline{y}')| + |R^{F_u}(\overline{y}') - R^{\bar{M}}(\overline{y}(u|x))| \\ \leqslant\ & \frac{\epsilon}{2} + d_R^{\bar{M}}(\overline{y}', \overline{y}(u|x)) \\ \leqslant\ & \frac{\epsilon}{2} + NKJ\frac{\epsilon}{2NKJ} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

下面的引理也显而易见。

引理 4.7。设 $\mathcal{M}$ 是一个连续 $\mathcal{L}$-预结构，且 $\mathcal{M}_x$ 和 $\mathcal{M}_y$ 是 $\mathcal{M}$的两个非同构单点扩张。那么 $\mathcal{M}$ 有一个扩张 $\mathcal{M}_{xy}$ ，满足$M_{xy} = M \cup \{x, y\}$ ，使得

$$d^{M_{xy}}(x, y) = \max\{\mu(x, y), \rho(x, y), \lambda(x, y)\} = d^E(x, y).$$

证明。取 $\mathcal{M}_{xy}$ 为 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ 中定义域为 M_{xy}的子结构。 □

定理 4.8。设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名，且 $\mathcal{M}$ 是一个连续$\mathcal{L}$-预结构。如果 $\mathcal{M}$具有乌雷松性质，那么其完备化 $\mathcal{M}$也具有乌雷松性质。

证明。设 $A \subseteq M$ 和 $\mathcal{A}_x$ 是 $\mathcal{A}$的一个单点扩张。设

$$\delta = \min\{d^{A_x}(a, x) : a \in A\} > 0.$$

我们通过对 m进行归纳，在 M 中定义一个序列 (y_m)。根据引理 4.6，存在 $y_0 \in M$ 使得

$$|d^{A_x}(x, a) - d^{\bar{M}}(y_0, a)| < \delta \text{ for all } a \in A,$$

对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$,

$$|R^{A_x}(x) - R^{\bar{M}}(y_0)| < \mathfrak{u}_{R,1}(\delta),$$

并且对于任意的 n 元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{z} \in A_x^n$,

$$|R^{A_x}(\overline{z}) - R^{\bar{M}}(\overline{z}(y_0|x))| < \delta K,$$

其中 K 的定义与定理 4.5 的证明中相同。令 $B_0 = A \cup \{y_0\} \subseteq M$。由引理 4.7，我们得到一个单点扩张 $(\mathcal{B}_0)_x = \mathcal{A}_{xy_0}$，使得

$$d^{(B_0)_x}(x, y_0) = \max\{\mu(x, y_0), \rho(x, y_0), \lambda(x, y_0)\} < \delta.$$

一般地，假设 y_m 已定义，并满足以下归纳假设：对于

$$B_m = A \cup \{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \bar{M}$$

存在 $\mathcal{B}_m$ 的一个单点扩张 $(\mathcal{B}_m)_x$ （由引理 4.7 得到），使得

$$d^{(B_m)_x}(x, y_m) = \max\{\mu(x, y_m), \rho(x, y_m), \lambda(x, y_m)\} < \frac{\delta}{2^m}.$$

由引理 4.6，存在 $y_{m+1} \in M$，使得

$$|d^{(B_m)_x}(x, b) - d^{\bar{M}}(y_{m+1}, b)| < \frac{\delta}{2^{m+1}} \text{ for all } b \in B_m,$$

对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$,

$$|R^{(B_m)_x}(x) - R^{\bar{M}}(y_{m+1})| < \mathfrak{u}_{R,1}\left(\frac{\delta}{2^{m+1}}\right),$$

对于任意 n元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{z} \in (B_m)_x^n$,

$$|R^{(B_m)_x}(\overline{z}) - R^{\bar{M}}(\overline{z}(y_{m+1}|x))| < \frac{\delta K}{2^{m+1}}.$$

现在令

$$B_{m+1} = B_m \cup \{y_{m+1}\} = A \cup \{y_0, \dots, y_m, y_{m+1}\} \subseteq \bar{M}$$

并令 $(\mathcal{B}_{m+1})_x$ 由引理 4.7 给出，使得

$$d^{(B_{m+1})_x}(x, y_{m+1}) = \max\{\mu(x, y_{m+1}), \rho(x, y_{m+1}), \lambda(x, y_{m+1})\} < \frac{\delta}{2^{m+1}}.$$

定义的归纳步骤已完成，且归纳假设得以维持。注意

$$\begin{aligned} d^M(y_m, y_{m+1}) &\leqslant d^{(B_m)_x}(x, y_m) + d^{(B_{m+1})_x}(x, y_{m+1}) \\ &< \frac{\delta}{2^m} + \frac{\delta}{2^{m+1}} < \frac{\delta}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

因此，(y_m)是 M中的一个 d^M-柯西序列。令 $y = \lim_m y_m \in \bar{M}$。那么对于任意 $a \in A$，由于

$$|d^{A_x}(x, a) - d^{\bar{M}}(y_m, a)| < \frac{\delta}{2^m},$$

令 $m \to \infty$，我们得到

$$d^{A_x}(x, a) = d^{\bar{M}}(y, a).$$

对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$，我们有

$$|R^{A_x}(x) - R^{\bar{M}}(y_m)| < \mathfrak{u}_{R,1}\left(\frac{\delta}{2^m}\right).$$

由于 $\mathfrak{u}$ 在 0 处连续，令 $m \to \infty$，可得

$$R^{A_x}(x) = R^{\bar{M}}(y).$$

对于任意 n元 $\mathcal{R} \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{z} \in A_x^n$,

$$|R^{A_x}(\overline{z}) - R^{\bar{M}}(\overline{z}(y_m|x))| < \frac{\delta K}{2^m}.$$

令 $m \to \infty$，我们得到

$$R^{A_x}(\overline{z}) = R^{\bar{M}}(\overline{z}(y|x)).$$

这表明 $\mathcal{A}_x$ 和 $\mathcal{A}_y$ 同构，特别地，存在一个同构的¯嵌入 $\varphi\colon\ \mathcal{A}_x \to \mathcal{M}$，且对所有 $a \in A$都有 $\varphi(a) = a$。□

因此，我们已经证明，对于任意适当连续签名 $\mathcal{L}$ 和连续$\mathcal{L}$预结构 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}_\omega$ 是一个具有乌雷松性质的连续 $\mathcal{L}$结构。由于任意两个具有乌雷松性质的可分连续 $\mathcal{L}$结构都是同构的，根据上述过程，对于任意可分连续 $\mathcal{L}$预结构 $\mathcal{M}$，我们得到这个唯一的可分连续$\mathcal{L}$结构，即 $\mathcal{M}_\omega$。

我们将这个具有乌雷松性质的唯一可分连续 $\mathcal{L}$-结构记为 $\mathbb{U}_\mathcal{L}$。

4.4. 乌雷松结构的性质。在上一小节中，我们证明了定理 1.1 (i) 的一个方向，即若 $\mathcal{L}$ 是适当连续签名，则存在一个具有乌雷松性质的（可分）连续 $\mathcal{L}$-结构。接下来我们证明定理 1.1 的其余部分。

我们首先证明，若 $\mathcal{L}$ 是半适当的，那么对于任意连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}_\omega$ 都是具有乌雷松性质的连续 $\mathcal{L}$-预结构。注意，$\mathcal{E}(\mathcal{M}、\omega)$ 不一定是完备的，甚至可能没有完备化。我们也无需讨论 $\mathcal{M}_\omega$ 的可分性。证明只需注意，在构造 $\mathcal{M}_\omega$ 时并未用到上半连续性。

定理 4.9. 设 $\mathcal{L}$ 是半适当连续签名，$\mathcal{M}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构。那么 $\mathcal{M}_\omega$ 是具有乌雷松性质的连续 $\mathcal{L}$-预结构。

证明。我们首先断言，对于任意连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$ 以及 M的有限子集$F \subseteq G$，如果单点扩张 $\mathcal{M}_x$的支撑为 F，那么它的支撑也为G。容易验证，对于任意 $y \in M$,

$$d^{M_x}(x,y) = \text{的最小值}\{d^{M_x}(x,z) + d^M(z,y)\colon\ z \in F\} = \text{的最小值}\{d^{M_x}(x,z) + d^M(z,y)\colon\ z \in G\}.$$

若 $R \in \mathcal{L}$是 n元的，其中 $n \geqslant 2$，且 $\bar{u} \in M_x^n$，则

$$\begin{aligned} R^{M_x}(\bar{u}) &= \max\{0, \sup\{R^{M_x}(\bar{v}) - d_R^{M_x}(\bar{u},\bar{v}) : \bar{v} \in M^n \cup F_x^n\}\} \\ &\leqslant \max\{0, \sup\{R^{M_x}(\bar{v}) - d_R^{M_x}(\bar{u},\bar{v}) : \bar{v} \in M^n \cup G_x^n\}\}; \end{aligned}$$

另一方面，若 $\bar{v} \in M^n \cup G_x^n$,

$$\begin{aligned} R^{M_x}(\bar{v}) - d_R^{M_x}(\bar{u},\bar{v}) &\leqslant \sup\{R^{M_x}(\bar{w}) - d_R^{M_x}(\bar{v},\bar{w}) - d_R^{M_x}(\bar{u},\bar{v}) : \bar{w} \in M^n \cup F_x^n\} \\ &\leqslant \sup\{R^{M_x}(\bar{w}) - d_R^{M_x}(\bar{u},\bar{w}) : \bar{w} \in M^n \cup F_x^n\}. \end{aligned}$$

因此我们有

$$R^{M_x}(\bar{u}) = \max\{0, \sup\{R^{M_x}(\bar{v}) - d_R^{M_x}(\bar{u},\bar{v}) : \bar{v} \in M^n \cup G_x^n\}\}$$

如所需。

为了完成证明，只需证明 $\mathcal{E}(\mathcal{M},\omega)$ 是一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构，因为 $\mathcal{M}_\omega$ 可以通过反复应用 $\mathcal{E}(\mathcal{M}$ 的定义轻易定义，而 $\mathcal{M}_\omega$ 根据构造将具有乌雷松性质。为此，我们只需注意到，对于 $\mathcal{E}(\mathcal{M},\omega)$，证明引理 4.3 和引理 4.4 时无需使用上半连续性。对于引理 4.3，只需注意，使用引理 2.3 得到 $\mathfrak{u}^*_{R,1}$ 的次可加性，并不需要 $\mathfrak{u}_{R,1}$ 的上半连续性。对于引理 4.4，其证明中使用引理 2.3 (3) 确实需要上半连续性。下面我们给出 $\mathcal{E}(\mathcal{M},\omega)$ 相关部分的另一种证明，该证明不使用上半连续性。

设 $R\in\mathcal{L}$ 是一元的，且有 x、$y\in E'(\mathcal{M}$ 和 $\omega)$，我们需要证明

$$|R^{M_x}(x)-R^{M_y}(y)|\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(\inf\{d^{M_x}(x,z)+d^{M_y}(z,y)\,:\,z\in M\}).$$

假设 $\mathcal{M}_x$ 具有有限支撑 $F\subseteq M$，且 $\mathcal{M}_y$ 具有有限支撑 $G\subseteq M$。根据上述断言，$\mathcal{M}_x$ 和 $\mathcal{M}_y$ 都具有有限支撑 $H=F\cup G$。因此

$$\inf\{d^{M_x}(x,z)+d^{M_y}(z,y)\,:\,z\in M\}=\min\{d^{H_x}(x,z)+d^{H_y}(z,y)\,:\,z\in H\}.$$

由 $\mathfrak{u}_{R,\ 1}$ 的超可加性，对于任意 $z\in H$，有

$$\begin{array}{rcl}|R^{M_x}(x)-R^{M_y}(y)| & = & |R^{H_x}(x)-R^{H_y}(y)|\\ & \leqslant & |R^{H_x}(x)-R^{H}(z)|+|R^{H}(z)-R^{H_y}(y)|\\ & \leqslant & \mathfrak{u}_{R,1}(d^{H_x}(x,z))+\mathfrak{u}_{R,1}(d^{H_y}(z,y))\\ & \leqslant & \mathfrak{u}_{R,1}(d^{H_x}(x,z)+d^{H_y}(z,y)).\end{array}$$

所需不等式由 $\mathfrak{u}_{R,\ 1}$ 的单调性得到，因为 H 是有限的。

□

定理 4.10. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中仅有有限个关系符号，且所有相关的连续模都是非递减的。

(1) 若存在具有乌雷松性质的连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{U}$，则 $\mathcal{L}$是半适当的。(2) 若存在具有乌雷松性质的（可分）连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{U}$，则 $\mathcal{L}$是适当的。

证明。(1) 根据定理 3.8，只需证明 $\mathcal{K}^{\mathcal{L}}_{\mathrm{fin}}$ 满足 AP。设 $\mathcal{M}$、$\mathcal{P}$、$\mathcal{Q}$ 是有限连续 $\mathcal{L}$-结构，并设 $\varphi\colon M\to P$ 和 $\psi\colon M\to Q$ 是同构嵌入。由 $\mathcal{U}$ 的乌雷松性质，我们可以找到 $\mathcal{U}$ 的一个子结构 $\mathcal{P}'$，它与 $\mathcal{P}$ 同构。设 $i\colon P\to P'$ 是一个同构。设 $M'=i\circ\varphi(M)\subseteq U$。那么，$i\circ\varphi$ 是 $\mathcal{M}$ 与作为 $\mathcal{U}$（或 $\mathcal{P}'$）的子结构的 $\mathcal{M}'$ 之间的一个同构。设 $e\colon \psi(M)\to M'$ 为 $i\circ\varphi\circ\psi^{-1}$。那么 e 是一个同构，并且我们有 $i\circ\varphi=e\circ\psi$。

根据 $\mathcal{U}$ 的乌雷松性质，我们可以找到 $\mathcal{M}'$ 的一个扩张 $\mathcal{Q}'$，满足 $Q'\subseteq U$，使得 $\mathcal{Q}'$ 与 $\mathcal{Q}$同构。令 $j\colon Q\to Q'$ 为该同构，则有 $j\restriction\psi(M)=e$。现在令 $N=P'\cup Q'\subseteq U$。那么，$\mathcal{N}$是U的子结构，$i\colon P\to N$是从 $\mathcal{P}$到 $\mathcal{N}$的同构嵌入，而 $j\colon P\to N$是从 $\mathcal{Q}$到 $\mathcal{N}$的同构嵌入。根据我们的构造，$i\circ\varphi=j\circ\psi$。因此，$\mathcal{N}$是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$上的融合。

(2) 假设 $\mathcal{U}$ 是具有乌雷松性质的连续 $\mathcal{L}$-结构。根据 (1)，$\mathcal{L}$ 是半适当的。接下来只需证明，对于任意一元 $R\in\mathcal{L}$，$\mathfrak{u}_{R,\ 1}$ 在 $I_{R,\ 1}$上是上半连续的。令 $I^\circ_{R,\ 1}$ 为 $I_{R,\ i}$ 的内部，并假设 $a\in I^\circ_{R,\ i}$。由于$\mathcal{U}$ 具有乌雷松性质，存在 $\mathcal{U}$ 的一个可数子结构 $\mathcal{M}$，其中

- $M=\{x_n\}_{n\geqslant 1}\cup\{y\}$,

- for all $m, n \geqslant 1$, $d^M(x_n, y) = a + 2^{-n}$, $d^M(x_m, x_n) = |2^{-m} - 2^{-n}|$,
- $R^M(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathfrak{u}_{R,1}(a + \delta) < 1$, $R^M(x_n) = 0$ for all $n \geqslant 1$, and
- for all other $R' \in \mathcal{L}$, R'^M is identically 0.

于是，根据 $\mathcal{U}$的完备性，存在 $z \in \mathcal{U}$使得 $d^U(y、\ z) = a$和 $R^U(z) = 0$，这意味着

$$\lim_{\delta \to 0^+} \mathfrak{u}_{R,1}(a + \delta) = |R(y) - R(z)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(a).$$

□

如果 $\mathcal{L}$ 是适当的，自然会想到，$\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 所对应的度量空间是否与泛乌雷松度量空间 $\mathbb{U}$等距。答案并非总是如此。

定义 4.11。若连续签名 $\mathcal{L}$ 是 Lipschitz 的，则 $\mathcal{L}$ 仅包含有限多个关系符号，并且对于每个 n元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$， $I_{R,i}$ 有界，且存在 $K_{R,i} > 0$ ，使得 $\mathfrak{u}_{R,i}(r) = K_{R,i} r$ 对所有 $r \in I_{r,i}$ 都成立。

任何 Lipschitz 连续签名都是适当的。如果 $\mathcal{L}$ 不包含任何一元关系符号，那么 $\mathcal{L}$ 是适当的，当且仅当它是 Lipschitz 的。

定理 4.12。设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名。则以下条件等价:

(i) $\mathcal{L}$是 Lipschitz 的。(ii) 以 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 为底层空间的度量空间与 $\mathbb{U}$ 等距。

证明。对于 (i)⇒（ii），设 $A \subseteq \mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 为有限集，且 A_x 是一个作为度量空间的 A 的单点扩张。只需证明 x 可以在 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 中实现为一个点。为此，我们只需构造一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{A}_x$ ，使其成为子结构 $\mathcal{A}$ 的单点扩张。注意，对于任意 n-元 $R \in \mathcal{L}$，由于 $\mathcal{L}$ 是 Lipschitz 的，对于任意度量空间 $(X、\ d^X)$ 和 $\overline{u} = (u_1、\ \ldots\ldots、\ u_n)$、$\overline{v} = (v_1、\ \ldots\ldots、\ v_n) \in X^n$，

$$d_R^X(\overline{u}, \overline{v}) = \sum_{i=1}^{n} K_i d^X(u_i, v_i).$$

现在，对于任意 n-元 $R \in \mathcal{L}$， R^A 定义在 A^n 上，并且根据引理 3.5，关于 d_R^A 是 1-利普希茨的。因此， R^{A_x} 在 定义域$(R^{A_x}) = A^n$ 上是部分定义的，并且关于 $d_R^{A_x}$ 是 1-利普希茨的。于是，根据引理 3.7，我们可以在 A_x^n 上定义 R^{A_x} ，使得 $\mathcal{A}_x$ 是 $\mathcal{A}$ 的扩张。根据 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 的乌雷松性质， x 现在可以在 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 中实现为一个点，正如所需。

对于 (ii)⇒，(i) 假设 $\mathcal{L}$ 是适当的，但不是 Lipschitz 的。那么对于某个一元 $R \in \mathcal{L}$，我们有 $r_1、\ r_2 > 0$ ，其中 $r_1 + r_2 \in I_{R,\ 1}$ 且

$$\mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) > \mathfrak{u}_{R,1}(r_1) + \mathfrak{u}_{R,1}(r_2).$$

现在考虑如下定义的连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 。

$$M = \{a, b\},\ d^M(a, b) = r_1 + r_2,\ R^M(a) = 0,\ R^M(b) = \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2),$$

对于任何其他的 $R' \in \mathcal{L}$， R'^M 都恒等于 0。令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 的一个子结构，且它与 $\mathcal{M}$ 同构。设 $A = \{x、\ y\} \subseteq \mathbb{U}_{\mathcal{L}}$，其中 $d^U(x、\ y) = r_1 + r_2$、$R^U(x) = 0$ 且 $R^U(y) = \mathfrak{u}_{R,\ 1}(r_1 + r_2)$。现在考虑（$A$ 的一个度量单点扩张 d^A)，其中添加了一个点 z ，使得

$$d^{A_z}(z, x) = r_1 \text{ and } d^{A_z}(z, y) = r_2.$$

反设 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 与 $\mathbb{U}$ 等距。那么存在这样的 $z \in \mathbb{U}_{\mathcal{L}}$。于是

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{R,1}(r_1 + r_2) = |R^U(x) - R^U(y)| &\leqslant |R^U(x) - R^U(z)| + |R^U(z) - R^U(y)| \\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(r_1) + \mathfrak{u}_{R,2}(r_2), \end{aligned}$$

这与我们的假设矛盾。 □

当 $\mathcal{L}$ 是适当但非 Lipschitz 时，我们可以将 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 分解为连续统多个子结构，其中每个子结构都包含一个与 $\mathbb{U}$ 等距的副本，且该副本的底层度量空间就是 $\mathbb{U}$ 。参数空间为 $[0, 1]^k$，其中某个 k 有限。事实上，设 $\mathcal{L}$ 中所有相关连续模不是 Lipschitz 的一元关系符号为 R_1、……、R_k。对于每个 $\overline{p} = (p_1、\ldots\ldots、\ p_k) \in [0、\ 1]^k$，令

$$\mathbb{U}_{\mathcal{L},\overline{p}} = \{x \in \mathbb{U}_{\mathcal{L}} : R_i^U(x) = p_i \text{ for all } 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

于是，对每个 $\overline{p} \in [0、\ 1]^k$，每个 $\mathbb{U}_{\mathcal{L},\ \overline{p}}$ 的底层度量空间都与 $\mathbb{U}$ 等距。

设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名。对于任意可分连续 $\mathcal{L}$-结构$\mathcal{M}$，赋予 Aut($\mathcal{M}$) 逐点收敛拓扑。于是 Aut($\mathcal{M}$) 成为一个波兰群。

由 Uspenskij 方法 [19] 和我们的构造，很容易推出 Aut($\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$) 是一个泛波兰群。

5. Fraïssé Classes of Finite Continuous Structures

本节考虑半适当 $\mathcal{L}$ 下若干有限连续 $\mathcal{L}$结构类，并证明它们是 Fra¨ıss´e 类。特别地，我们构造有理 Urysohn $\mathcal{L}$预结构 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$，并证明当 $\mathcal{L}$ 适当时，其完备化同构于 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$。

定义 5.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名。设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^+$ 和 $V \subseteq [0, 1]$。

(i) 若对所有 $a, b \in \Delta$，我们称 Δ 为距离值集，

$$\min\{a + b, \sup(\Delta)\} \in \Delta.$$

(ii) 若 (Δ, V) 满足以下条件，我们称其为 $\mathcal{L}$ 的良好值对：

- Δ是距离值集，• 若 Δ 有界，则对任意 n元 $R \in \mathcal{L}$ 及 $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathfrak{u}_{R,i}($ sup$(\Delta)) \geqslant$1,• $0 \in V$，并且对任意 $v \in V$、任意 $\delta \in \Delta$、任意 n元 $R \in \mathcal{L}$ 及 $1 \leqslant i \leqslant n$，若 $v > \mathfrak{u}_{R,i}(\delta)$，则 $v - \mathfrak{u}_{R,i}(\delta) \in V$。

(iii) 如果（Δ 和 V）都是有限的（分别为可数的），则称 (Δ, V) 是有限的（分别为可数的）。

定义 5.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名， $\mathcal{M}$ 是一个连续 $\mathcal{L}$-预结构。设 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的一个良好值对。

(i) 若对所有 $x, y \in M$, $d^M(x, y) \in \Delta$ 以及所有 n 元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{x} \in M^n$, $R^M(\overline{x}) \in V$ 都成立，则称 $\mathcal{M}$ 是 (Δ, V)-值的。(ii) 令 $\mathcal{K}_{(\Delta,\ V)}$ 为所有有限的 (Δ, V)-值连续 $\mathcal{L}$-结构所成的类。

引理 5.3. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名。

(i) 对于任意有限连续 $\mathcal{L}$结构 $\mathcal{M}$，存在有限良值对 (Δ, V)，使得 $\mathcal{L}$ $\mathcal{M}$ 是 (Δ, V) 值的。

(ii) 对于任意有限（分别为可数）的距离值集 Δ 以及有限（分别为可数）的 $W \subseteq [0, 1]$，存在有限（分别为可数）的V，使得 $W \subseteq V$和 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$的良好值对。

证明。（i）设

$$P = \{d^A(x, y) : x \neq y \in M\}.$$

设 δ 足够大，使得 $\delta \geqslant \sup(P)$，且对于任意 n元 $R \in \mathcal{L}$ 和$1 \leqslant i \leqslant n$， $\delta \geqslant \sup(I_{R,\, i})$。设 Δ 为满足 $P \subseteq \Delta$和 $\sup(\Delta) = \delta \in \Delta$ 的最小距离值集。由于 P 是有限的，因此 Δ 也是有限的。

Let

$$Q = \{\mathfrak{u}_{R,i}(\delta) : R \in \mathcal{L} \text{ is } n\text{-ary}, 1 \leqslant i \leqslant n, \delta \in \Delta\},$$
$$W = \{R^M(\overline{x}) : R \in \mathcal{L} \text{ is } n\text{-ary}, \overline{x} \in M^n\},$$

and

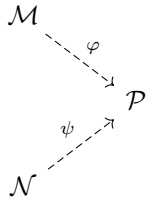
$$V = \{0\} \cup W \cup ([0, 1] \cap \left\{ w - \sum_{i=1}^{\ell} q_i : w \in W,\ q_1, \ldots, q_\ell \in Q \right\}).$$

由于 $\mathcal{L}$ 是半适当的， Q、 W 和 V 都是有限的。显然，（Δ、V）是 $\mathcal{L}$ 的良好值对，且 $\mathcal{M}$ 是（Δ、V）值的。

（ii）的证明类似。 □

定义 5.4. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名， $\mathcal{K}$ 是一组连续 $\mathcal{L}$-预结构。

(i) 若对于任意连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，只要 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的子结构且 $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$，就有 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$，则称 $\mathcal{K}$ 具有遗传性质（简称 HP）。(ii) 若对于任意 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N} \in \mathcal{K}$，都存在 $\mathcal{P} \in \mathcal{K}$ 以及同构嵌入 φ: $\mathcal{M} \to \mathcal{P}$ 和 ψ: $\mathcal{N} \to \mathcal{P}$，则称 $\mathcal{K}$ 具有联合嵌入性质（简称 JEP）。



(iii) 若 $\mathcal{K}$ 具有 HP、JEP 和 AP，则称 $\mathcal{K}$ 是一个 Fra¨ıss´e 类。

本节的主定理如下。

定理 5.5. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名，且（Δ、V）是 $\mathcal{L}$ 的可数良好值对。那么类 $\mathcal{K}_{(\Delta,\ V)}$ 是一个可数 Fra¨ıss´e 类。

证明。显然，$\mathcal{K}_{(\Delta,\ V)}$是可数的。$\mathcal{K}_{(\Delta,\ V)}$的遗传性质显然成立。对于联合嵌入性质，设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$是有限的 (Δ、V)-值连续 $\mathcal{L}$-结构。令 X为 M和 N的不交并。令 $\delta \in \Delta$满足 $\delta \geqslant \mathrm{diam}(M)$、$\mathrm{diam}(N)$，并且对于任意 n元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $\delta \geqslant \sup(I_{R,\ i})$。注意，由于(Δ、$V$) 是 $\mathcal{L}$的良好值对，这样的 δ 确实存在。于是，在 X 上定义度量 d^X 如下:

$$d^X(x, y) = \begin{cases} d^M(x, y) & \text{if } x, y \in M \\ d^N(x, y) & \text{if } x, y \in N \\ \delta & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于每个 $R \in \mathcal{L}$， R^X 都自然地定义在

$$\mathrm{dom}(R^X) = M^n \cup N^n$$

并取值于 V。显然， $\mathcal{X} = (X, d^X, (R^X)_{R\in\mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。根据引理 3.7， $\mathcal{X}$ 有一个保守扩张 $\mathcal{P}$。容易看出， $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 作为子结构嵌入到 $\mathcal{P}$ 中。

定理 3.8 的证明给出了融合性质。只需注意，对于该证明中定义的部分结构 $\mathcal{X}$， d^X 可以取值于 Δ，并且对于任意 $R\in\mathcal{L}$， R^X 都取值于 V。于是，在应用引理 3.7 的证明时，对于融合 $\mathcal{P}$ 和任意 $R\in\mathcal{L}$， R^P 都取值于 V。因此，得到的融合 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{K}_{(\Delta,\ V)}$ 的一个元素。□

根据一个标准论证，当 $\mathcal{L}$ 半适当且 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的可数良好值对时，类 $\mathcal{K}_{(\Delta,\ V)}$ 存在一个 Fra¨ıss´e 极限。我们将其记为 $\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$。

$\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$ 是唯一的可数连续 $\mathcal{L}$-预结构，它对所有有限的 (Δ, V)-值连续 $\mathcal{L}$ 结构具有普适性，并且是超齐性的。它对所有可数的 (Δ, V)-值连续 $\mathcal{L}$-预结构也具有普适性。

众所周知，对于任意可数距离值集 Δ，所有距离取值于 Δ 的有限度量空间类（称为 Δ-度量空间）构成一个 Fra¨ıss´e 类（例如参见 [8]），其 Fra¨ıss´e 极限记为 $\mathbb{U}_\Delta$。通常， $\mathbb{U}_\Delta$ 的特征是：它对所有有限 Δ-度量空间都具有普适性，并且是超齐性的。

通过与定理 4.12 (i)⇒(ii) 的证明完全相同的论证可知，如果 $\mathcal{L}$ 是一个 Lipschitz 连续签名，且 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的一个可数良好值对，那么 $\mathbb{U}_{(\Delta,V)}$ 所对应的底层度量空间与 $\mathbb{U}_\Delta$ 等距。

当 $\mathcal{L}$ 是半适当的，且 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的一个可数良好值对时，我们考察 $\mathbb{U}_{(\Delta,V)}$ 的自同构群，并将其记为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{(\Delta,V)})$。由于 $\mathbb{U}_{(\Delta,V)}$ 是可数的，我们可以将 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{(\Delta,V)})$ 视为无限置换群 S_∞ 的一个子群。在 S_∞ 的通常拓扑下，它是一个闭子群，因而自身也是一个波兰群。根据上述讨论，我们知道，$\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{(\Delta,V)})$ 对所有 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 的、取 (Δ, V) 值的连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$ 都具有普适性。

当 $\Delta = \mathbb{Q}^+$ 时，由引理 5.3 (ii) 可知，存在一个可数的 V，使得 $\mathbb{Q}\cap[0, 1]\subseteq V$ 和 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的良好值对。此外，存在唯一最小的此类 V，我们固定该对象。按照相应经典结构的惯例，我们也将 $\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$ 记作 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$。我们也称 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 为有理 Urysohn 连续 $\mathcal{L}$-预结构。

接下来我们证明，若 $\mathcal{L}$ 是适当的，则 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 的完备化同构于唯一的可分 Urysohn 连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$。

定理 5.6. 设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名。那么 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 的完备化同构于 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$。

证明. 设 $\Delta = \mathbb{Q}^+$，并令 V 为满足以下条件的最小对象： $\mathbb{Q}\cap[0, 1]\subseteq V$ 和 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的良好值对。

$\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 显然具有如下有理乌雷松性质：给定任意有限的(Δ, V)值连续 $\mathcal{L}$结构 $\mathcal{M}$，其一个(Δ, V)值的单点扩张 $\mathcal{N}$，以及从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$的同构嵌入 φ，存在从 $\mathcal{N}$到 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$的同构嵌入 ψ，使得 $\psi\restriction M = \varphi$。

用有理乌雷松性质替代乌雷松性质后，可以重复定理 4.5 和引理 4.6 的证明，从而得到以下结论：给定 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}} = \mathcal{M}$的任意有限子结构 $\mathcal{A}$、一个$\mathcal{A}$的单点扩张 $\mathcal{A}_x$ 以及 $\epsilon > 0$，存在 $u\in\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 使得

$$|d^{A_x}(x, a) - d^{\bar{M}}(u, a)| < \epsilon \quad \text{for all } a\in A,$$

并且对于任意 n元的 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{y} \in A_x^n$,

$$|R^{A_x}(\overline{y}) - R^{\bar{M}}(\overline{y}(u|x))| < \epsilon.$$

接着，重复定理 4.8 的证明，并再次在假设中用有理乌雷松性质替代乌雷松性质，我们便得到 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 的完备化具有乌雷松性质。这表明 $\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 的完备化与 $\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$ 同构。□

若 $\mathcal{L}$ 适当，根据定理 5.6，$\mathrm{Aut}(\mathbb{QU}_{\mathcal{L}})$ 中的每个元素都唯一地扩张为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathcal{L}})$ 中的一个元素。令 $\eta : \mathrm{Aut}(\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathcal{L}})$ 为这个典范扩张映射。容易看出，η 是一个群同构嵌入。

在结束本节之前，我们证明 $\eta(\mathrm{Aut}(\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}))$ 在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_{\mathcal{L}})$ 中稠密。为此，我们需要固定一些记号。对于任意连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$，若其具有单点扩张 $\mathcal{M}_x$ 和 $\mathcal{M}_y$，令

$$d^E_{\mathcal{M}}(x,y) = \max\{\,\mu(x,y),\, \rho(x,y),\, \lambda(x,y)\,\}$$

按第 4.1 小节中的定义。令 $A > \max\{NJ, 1\}$，其中 N 和 J 的定义见定理 4.5 的证明。

引理 5.7。设 $\mathcal{M} = \mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}_x$ 的有限子结构，且 $\mathcal{A}_y$ 是 $\mathcal{A}$ 和 $\epsilon > 0$ 的单点扩张。假设 $y \in M$, $d^E_{\mathcal{A}}(x,y) < \epsilon$，并且存在 $x_0 \in M$ 使得 $d^E_{\mathcal{A}}(x, x_0) = 0$。那么存在某个 $x' \in M$，使得 $d^E_{\mathcal{A}}(x,x') = 0$ 且 $d^M(x',y) < \epsilon$。

证明。令 $\Delta = \mathbb{Q}^+$，并令 V 为满足 $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq V$ 且 (Δ, V) 是 $\mathcal{L}$ 的良好值对的最小值。

由引理 4.7，存在一个融合 $\mathcal{A}_{xy}$，它同时是 $\mathcal{A}_x$ 和 $\mathcal{A}_y$ 的融合，并且 $A_{xy} = A \cup \{x,y\}$ 和 $d^{A_{xy}}(x,y) = d^E_{\mathcal{A}}(x,y)$。我们定义一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{A}_{xy}$ 除了 $d^F(x,y)$ 是一个有理数之外，在其他所有方面都相同，使得二者都

$$d^F(x,y) \leqslant \inf\{d^{A_x}(x,z) + d^{A_y}(y,z) : z \in A\}$$

and

$$d^{A_{xy}}(x,y) \leqslant d^F(x,y) < \epsilon.$$

根据我们的假设可知，$\mathcal{F}$是一个有限的 (Δ, V)值连续 $\mathcal{L}$结构，是 $\mathcal{A}_y$的扩张。由 $\mathcal{M}$ 的有理乌雷松性质可知，存在一点 $x' \in M$，使得 $d^E_{\mathcal{A}}(x, x') = 0$ 以及 $d^M(x', y) = d^F(x, y) < \epsilon$。□

定理 5.8. η(自同构群($\mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$))在自同构群($\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$)中稠密。

证明。设 $\mathcal{M} = \mathbb{QU}_{\mathcal{L}}$ 和 $\mathcal{M} = \mathbb{U}_{\mathcal{L}}$。令 $g \in$ 自同构群($\mathcal{M}$)、x_1、……、$x_n \in \mathcal{M}$ 以及 $\epsilon > 0$。我们将定义 y_1、……、y_n、z_1、……、$z_n \in M$，使得映射 $y_i \mapsto z_i$、$1 \leqslant i \leqslant n$是 $\mathcal{M}$的部分同构，并且对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$d^{\bar{M}}(x_i, y_i) < \epsilon$$

and

$$d^{\bar{M}}(g(x_i), z_i) < 2(1 + iA^i)\epsilon.$$

首先，令 $y_1, \ldots, y_n \in M$ 满足：对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，$d^M(x_i, y_i) < \epsilon$。令 $u_1, \ldots, u_n \in M$ 满足 $d^E_{\varnothing}(g(y_i), u_i) < \epsilon$ 以及 $d^{\bar{M}}(g(y_i), u_i) < \epsilon$。我们通过对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使用归纳来定义 $z_1, \ldots, z_n \in M$，归纳假设如下：令 $A_{i-1} = \{z_1, \ldots, z_{i-1}\}$，映射 $y_j \mapsto z_j$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$是一个

$\mathcal{M}$ 和 $d^{\bar{M}}(u_j$ 的部分同构，对任意 $1 \leqslant j \leqslant i-1$ 均有 $z_j) < 2jA^j\epsilon$。令 $F_{i-1} = \{y_1, \dots, y_{i-1}\}$。根据归纳假设， $\mathcal{A}_{i-1}$ 和 $\mathcal{F}_{i-1}$ 同构。令 π_{i-1}： $F_{i-1} \to A_{i-1}$ 为由 $\pi_{i-1}(y_j) = z_j$ 给出的同构，其中 $1 \leqslant j \leqslant i-1$。考虑将 $\mathcal{F}_{i-1}$ 通过 y_i 进行单点扩张。通过 π_{i-1}，这给出了将 $\mathcal{A}_{i-1}$ 扩张一个点的单点扩张，我们将该点记为 v_i。再考虑将 $\mathcal{A}_{i-1}$ 通过 u_i 进行的单点扩张。在下面的计算中，为了记号简便，我们将 $\mathcal{A}_{i-1}$ 记为$\mathcal{A}$，将 $\mathcal{F}_{i-1}$ 记为 $\mathcal{F}$。

对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}^*_{R,1}(|R^{A_{u_i}}(u_i) - R^{A_{v_i}}(v_i)|) &= \mathfrak{u}^*_{R,1}(|R^{A_{u_i}}(u_i) - R^{F_{y_i}}(y_i)|) \\ &= \mathfrak{u}^*_{R,1}(|R^{A_{u_i}}(u_i) - R^{g(F)_{g(y_i)}}(g(y_i))|) \\ &\leqslant d^E_{\varnothing}(u_i, g(y_i)) < \epsilon. \end{aligned}$$

因此 $\mu(u_i, v_i) < \epsilon$。

设 $1 \leqslant j \leqslant i-1$ 使得 $\lambda(u_i, v_i) = |d^{A_{u_i}}(u_i, z_j) - d^{A_{v_i}}(v_i, z_j)|$。则

$$\begin{aligned} \lambda(u_i, v_i) &= |d^{A_{u_i}}(u_i, z_j) - d^{A_{v_i}}(v_i, z_j)| \\ &= |d^{A_{u_i}}(u_i, z_j) - d^{F_{y_i}}(y_i, y_j)| \\ &= |d^{\bar{M}}(u_i, z_j) - d^{\bar{M}}(y_i, y_j)| \\ &= |d^{\bar{M}}(u_i, z_j) - d^{\bar{M}}(g(y_i), g(y_j))| \\ &\leqslant d^{\bar{M}}(u_i, g(y_i)) + d^{\bar{M}}(g(y_j), z_j) \\ &\leqslant d^{\bar{M}}(u_i, g(y_i)) + d^{\bar{M}}(g(y_j), u_j) + d^{\bar{M}}(u_j, z_j) \\ &\leqslant \epsilon + \epsilon + 2jA^j\epsilon \leqslant 2iA^i\epsilon. \end{aligned}$$

最后，设 $R \in \mathcal{L}$ 为 n 元，其中 $n \geqslant 2$，并设 $\overline{w} \in A^n_{u_i} \backslash A^n$。定义 $\overline{w}' \in g(F)^n_{g(y_i)}$ 为

$$w'_k = \begin{cases} g(y_j) & \text{if } w_k = z_j \text{ for some } 1 \leqslant j \leqslant i-1 \\ g(y_i) & \text{if } w_k = u_i. \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} & \|\overline{w}\|^{-1} \left| R^{A_{u_i}}(\overline{w}) - R^{A_{v_i}}(\overline{w}(v_i|u_i)) \right| \\ = \; & \|\overline{w}\|^{-1} \left| R^{A_{u_i}}(\overline{w}) - R^{g(F)_{g(y_i)}}(\overline{w}') \right| \\ \leqslant \; & A(d^{\bar{M}}(u_i, g(y_i)) + \max\{d^{\bar{M}}(z_j, g(y_j)) : 1 \leqslant j \leqslant i-1\}) \\ \leqslant \; & A(d^{\bar{M}}(u_i, g(y_i)) + \max\{d^{\bar{M}}(z_j, u_j) + d^{\bar{M}}(u_j, g(y_j)) : 1 \leqslant j \leqslant i-1\}) \\ \leqslant \; & A(\epsilon + 2(i-1)A^{i-1}\epsilon + \epsilon) \leqslant 2iA^i\epsilon. \end{aligned}$$

这意味着 $\rho(u_i, v_i) < 2iA^i\epsilon$。

结合以上计算，我们得到 $d^E_{\mathcal{A}}(u_i, v_i) < 2iAi\epsilon$。根据引理 5.7，存在某个 $z_i \in M$，使得映射 $y_j \mapsto z_j, 1 \leqslant j \leqslant i$ 是 $\mathcal{M}$ 与 $d^M(u_j, z_j) < 2iA^i\epsilon$ 的部分同构。至此，归纳完成。

注意，对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$d^{\bar{M}}(g(x_i), z_i) \leqslant d^{\bar{M}}(g(x_i), g(y_i)) + d^{\bar{M}}(g(y_i), u_i) + d^{\bar{M}}(u_i, z_i) \leqslant 2(1 + iA^i)\epsilon$$

如所需。 □

6. Coherent EPPA for Continuous Structures

本节继续讨论半适当连续签名 $\mathcal{L}$。我们证明，所有有限连续 $\mathcal{L}$-结构构成的类具有 Hrushovski [11] 和 Siniora–Solecki [16]所定义的相干 EPPA。

定理 6.1. 设 $\mathcal{L}$是一个半适当连续签名， $\mathcal{M}$ 是一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构。存在一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$，使得

(i) $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$的扩张；(ii) 存在一个映射 ϕ，将 $\mathcal{M}$ 的所有部分自同构组成的集合 Part($\mathcal{M}$) 映射到 $\mathcal{N}$的所有自同构组成的集合 Aut($\mathcal{N}$)；使得对于任意 $\pi \in$ Part($\mathcal{M}$)，$\phi(\pi)$ 扩张 π；(iii) 对于(ii)中的映射 ϕ，对于所有 π、$\tau \in$ Part($\mathcal{M}$)，若 range(τ) =dom(π)，则

$$\phi(\pi \circ \tau) = \phi(\pi) \circ \phi(\tau).$$

证明。令

$$P = \{d^M(x, y) : x \neq y \in M\}$$

and

$$V = \{R^M(\overline{x}) : \overline{x} \in M^n, R \in \mathcal{L} \text{ is } n\text{-ary}\}.$$

对于每个 $p \in P$，我们引入一个新的二元关系符号 D_p；对于每个 n元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $v \in V$，我们引入一个新的 n元关系符号 R_v。令 $\mathcal{L}^*$ 为经典签名，它由所有 D_p和 R_v组成，其中 $p \in P$、$R \in \mathcal{L}$和 $v \in V$。令 $\mathcal{T}$为所有满足以下某一条件的有限经典 $\mathcal{L}^*$结构 $\mathcal{S}$ 的集合:

(a) 对于某些 $m \geqslant 1$和 p、p_1、...、$p_m \in P$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} p_i < p,$$

$\mathcal{S}$至多有 $m+1$个元素，并且存在 z_0、z_1、.....、$z_m \in S$使得

$$\mathcal{S} \models D_p(z_0, z_m) \wedge D_p(z_m, z_0) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} (D_{p_i}(z_{i-1}, z_i) \wedge D_{p_i}(z_i, z_{i-1}));$$

or

(b) 对于某个 n元的 $R \in \mathcal{L}$，存在 v、$v' \in V$、m_1、.....、$m_n \geqslant 1$，并且

$$p_{1,1}, \ldots, p_{1,m_1}, p_{2,1}, \ldots, p_{2,m_2}, \ldots, p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n} \in P$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \mathfrak{u}_{R,i}(p_{i,j}) < |v - v'|,$$

$\mathcal{S}$至多有 $\sum_{i=1}^{n}(m_i+1) = n + \sum_{i=1}^{n} m_i$ 个元素，并且存在

$$z_{1,0}, \ldots, z_{1,m_1}, z_{2,0}, \ldots, z_{2,m_2}, \ldots, z_{n,0}, \ldots, z_{n,m_n} \in S$$

使得

$$\mathcal{S} \models \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant m_i} (D_{p_{i,j}}(z_{i,j-1}, z_{i,j}) \wedge D_{p_{i,j}}(z_{i,j}, z_{i,j-1}))$$

and

$$\mathcal{S} \models R_v(z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots, z_{n,0}) \wedge R_{v'}(z_{1,m_1}, z_{2,m_2}, \ldots, z_{n,m_n});$$

or

(c) 对于某个 n 元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $v \neq v' \in V$，$\mathcal{S}$ 至多含有 n 个元素，并且存在 x_1、.....、$x_n \in S$，使得

$$\mathcal{S} \models R_v(x_1, \ldots, x_n) \wedge R_{v'}(x_1, \ldots, x_n).$$

由于 D 和 V 是有限的，因此 $\mathcal{T}$ 也是有限的。

对于任意连续的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{A}$，我们都可以按显然的方式得到一个经典的 $\mathcal{L}^*$-结构 $\mathcal{A}^*$：对于 x、$y \in A^*$ 和 $p \in P$，定义

$$\mathcal{A}^* \models D_p(x,y) \iff d^A(x,y) = p,$$

对于任意 n 元的 $R \in \mathcal{L}$、$v \in V$ 和 $\overline{x} \in (A^*)^n$，定义

$$\mathcal{A}^* \models R_v(\overline{x}) \iff R^U(\overline{x}) = v.$$

由引理 5.3 (i)，存在一个关于 $\mathcal{L}$ 的有限良值对 (Δ, W)，使得 $\mathcal{M}$ 是 (Δ, W) 值的。此外，$P \subseteq \Delta$ 和 $V \subseteq W$。由定理 5.5，类 $\mathcal{K}_{(\Delta,\ W)}$ 是一个可数的 Fra¨ıss´e 类，因此有一个 Fra¨ıss´e 极限 $\mathbb{U}_{(\Delta,\ W)}$。于是 $\mathbb{U}^*_{(\Delta,\ W)}$ 是一个经典的 $\mathcal{L}^*$-结构，它扩张了 $\mathcal{M}^*$，且其任意部分自同构都可扩张为 $\mathbb{U}^*_{(\Delta,\ W)}$ 的一个自同构。此外，$\mathbb{U}^*_{(\Delta,\ W)}$ 在同态意义下是 $\mathcal{T}$-自由的，即不存在 $\mathcal{S} \in \mathcal{T}$ 以及从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathbb{U}^*_{(\Delta,\ W)}$ 的同态。

根据 [16] 的定理 1.11，存在一个有限的 $\mathcal{L}^*$-结构 $\mathcal{X}$，使得 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{M}^*$ 的扩张，并且存在一个映射 $\psi : \mathsf{Part}(\mathcal{M}^*) \to \mathsf{Aut}(\mathcal{X})$，满足对于任意 $\pi \in \mathsf{Part}(\mathcal{M}^*)$，$\psi(\pi)$ 扩张了 π；而对于所有 π、$\tau \in \mathsf{Part}(\mathcal{M}^*)$，如果 $\mathsf{dom}(\pi) = \mathsf{range}(\tau)$，则

$$\psi(\pi \circ \tau) = \psi(\pi) \circ \psi(\tau).$$

在 X 上定义等价关系 $\sim$：$x \sim y$ 当且仅当存在 $x = z_0$、……、$z_m = y \in X$ 以及 p_1、……、$p_m \in P$，使得

$$\mathcal{X} \models \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} (D_{p_i}(z_{i-1}, z_i) \wedge D_{p_i}(z_i, z_{i-1})).$$

显然，M 包含于某个 $\sim$-等价类中。我们将该等价类记为 Y。设 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子结构，其论域为 Y。我们在 Y 上定义度量 d^Y 如下。对于任意 x、$y \in Y$，若 $x = y$，则定义 $d^Y(x, y) = 0$，并且

$$\begin{aligned} d^Y(x,y) \quad = \quad \inf \Bigg\{ & \sum_{i=1}^m p_i \ : \ p_1, \dots, p_m \in P, \exists z_0 = x, z_1, \dots, z_m = y \in Y \\ & \text{such that } \ \mathcal{X} \models \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} (D_{p_i}(z_{i-1}, z_i) \wedge D_{p_i}(z_i, z_{i-1})) \Bigg\} \end{aligned}$$

如果 $x \neq y$。由于 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{T}$-自由的，因此 d^Y 是 Y 上的一个度量，并且 (Y, d^Y) 是 (M, d^M) 作为度量空间的一个扩张。

对于每个非空的 $\pi \in \mathsf{Part}(\mathcal{M}^*)$，$\psi(\pi) \in \mathsf{Aut}(\mathcal{X})$ 必须保持 Y 集合不变，因此 $\psi(\pi) \restriction Y$ 是 $\mathcal{Y}$ 的一个自同构，且仍扩张 π；这意味着 $\psi(\pi) \restriction Y$ 是 (Y, d^Y) 上扩张 π 的等距映射，其中 π 是 (M, d^M) 的部分等距映射。

我们继续在 Y 上定义一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。对于任意 n 元的 $R \in \mathcal{L}$、$v \in V$ 和 $\overline{x} \in Y^n$，令 $R^Y(\overline{x}) = v$ 当且仅当 $\mathcal{X} \models R_v(\overline{x})$。因此

$$\mathrm{dom}(R^Y) = \{\overline{x} \in Y^n \ : \ \exists v \in V \ \mathcal{X} \models R_v(\overline{x})\}.$$

由于 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{T}$-自由的，因此对于任意 n 元的 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{x}$，$\overline{y} \in \mathsf{dom}(R^Y)$，我们有 $R^Y(\overline{x}), R^Y(\overline{y}) \in V$，并且

$$|R^Y(\overline{x}) - R^Y(\overline{y})| \leqslant d^Y_R(\overline{x}, \overline{y}).$$

因此，$(Y、\ d^Y、\ (R^Y)_{R \in \mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。

令 $\mathcal{N}$ 为一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构，它是以下对象的保守扩张

$$(Y, d^Y, (R^Y)_{R \in \mathcal{L}})$$

由引理 3.7 给出。则 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$的扩张。对于任意 $\pi \in \mathrm{Part}(\mathcal{M})$，令 $\phi(\pi) = \psi(\pi) \restriction Y$。为完成证明，只需证明对于任意$\pi \in \mathrm{Part}(\mathcal{M})$，$\phi(\pi) \in$ 自同构群$(\mathcal{N})$。为此，我们只需注意，对于任意 n元的 $R \in \mathcal{L}$ 和$\overline{z} \in N^n = Y^n$,

$$R^N(\overline{z}) = \max\{0, \sup\{R^Y(\overline{x}) - d_R^Y(\overline{x}, \overline{z}) : \overline{x} \in \mathrm{dom}(R^Y)\}.$$

因此，$R^N(\overline{z}) = R^N(\phi(\pi)(\overline{z}))$当且仅当 $\phi(\pi)(\overline{x}) \in$定义域$(R^Y)$，而对于$\overline{x} \in$ 定义域(R^Y)，$R^Y(\overline{x}) = R^Y(\phi(\pi)(\overline{x}))$。□

在定理 6.1 中，前两个子句定义了 $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}^{\mathcal{L}}$ 的 EPPA 性质，而 (i)–(iii) 合起来给出了相干 EPPA 的定义。在结束本节之前，我们将证明这些性质等价于连续签名 $\mathcal{L}$ 的半适当性。不过请注意，对于连续签名 $\mathcal{L}$，我们假设的背景条件比之前略强。

定理 6.2。设 $\mathcal{L}$ 是一个仅含有限多个关系符号的连续签名，且所有相关的连续模均严格递增。以下条件等价:

(1) $\mathcal{L}$是半适当的。(2) $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}^{\mathcal{L}}$ 具有 EPPA。(3) $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}^{\mathcal{L}}$ 具有相干 EPPA。

证明。(1)⇒(3)由定理 6.1 得出。(3)⇒(2)显然。我们证明(2)⇒(1)。为此，设 $R \in \mathcal{L}$ 为 n元的，并设 $1 \leqslant i \leqslant n$。

我们首先证明$I_{R,i}$ 有界。为导出矛盾，假设$I_{R,i}$ 无界，即$I_{R,i} = [0, +\infty)$。令 $M = \sup\{\mathfrak{u}_{R,i}(r) : r \geqslant 0\} \leqslant 1$。由于$\mathfrak{u}_{R,i}$严格递增，因此对所有 $r \geqslant 0$，都有$\mathfrak{u}_{R,i}(r) < M$。设 $a, b > 0$ 使得$\mathfrak{u}_{R,i}(a) + \mathfrak{u}_{R,i}(b) > M$。设 $\epsilon > 0$ 使得$\epsilon < M - \mathfrak{u}_{R,i}(a + b)$。取充分大的 $\delta > 0$，使得$\mathfrak{u}_{R,i}(a + \delta + b) > M - \epsilon$。考虑由实数轴上的四个点 y, s, t, z构成的度量空间(M, d^M)，其中 $s - y = a$, $t - s = \delta$且 $z - t = b$。对于 $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$，定义

$$R^M(\overline{x}) = \begin{cases} M - \epsilon & \text{if } x_i = y \\ \mathfrak{u}_{R,i}(b) & \text{if } x_i = s \text{ or } x_i = t \\ 0 & \text{if } x_i = z. \end{cases}$$

对于所有其他 $\tilde{R} \in \mathcal{L}$，定义 $\tilde{R}^M$ 恒等为 0。容易验证，这定义了一个有限连续的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$。令 $p : \{s, t\} \to \{s, t\}$ 定义为 $p(s) = t$ 和 $p(t) = s$。那么 p 是 $\mathcal{M}$的部分同构。根据 EPPA，存在一个有限连续的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$ 以及 $\mathcal{N}$ 的一个自同构 f，使得 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的扩张，且 f是 p的扩张。令 $y' = f(y)$。那么 $d^N(y', t) = d^N(f(y), f(s)) = d^N(y, s) = d^M(y, s) = a$。定义 $\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2$如下。

$$x_j^0 = \begin{cases} y & \text{if } j = i \\ s & \text{if } j \neq i; \end{cases} \quad x_j^1 = \begin{cases} y' & \text{if } j = i \\ t & \text{if } j \neq i; \end{cases} \quad x_j^2 = \begin{cases} z & \text{if } j = i \\ t & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

那么 $\overline{x}^1 = f(\overline{x}^0)$，因此 $R^N(\overline{x}^1) = R^N(\overline{x}^0) = R^M(\overline{x}^0) = M - \epsilon$。由此可得

$$M - \epsilon = |R^N(\overline{x}^1) - R^N(\overline{x}^2)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^N(y', z)) \leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^N(y', t) + d^N(t, z)) = \mathfrak{u}_{R,i}(a + b),$$

这与我们对 ϵ 的选择矛盾。

接下来我们证明，$\mathfrak{u}_{R,\ i}$ 在$I_{R,\ i}$上是超可加的。为此，我们采用与上述类似的构造。设 a、$b > 0$ 满足$a + b \in I_{R,\ i}$。令 $\delta >$ sup$I_{R,\ i}$。

考虑度量空间 $(M,\ d^M)$ 由实数轴上的四个点 y、s、t、z 组成，其中 $s-y=a$、$t-s=\delta$ 且 $z-t=b$。对于 $\overline{x}=(x_1,\ .....,\ x_n)\in M^n$，定义

$$R^M(\overline{x})=\begin{cases}\min\{1,\mathfrak{u}_{R,i}(a)+\mathfrak{u}_{R,i}(b)\} & \text{if } x_i=y\\ \mathfrak{u}_{R,i}(b) & \text{if } x_i=s \text{ or } x_i=t\\ 0 & \text{if } x_i=z.\end{cases}$$

对于所有其他的 $\tilde{R}\in\mathcal{L}$，定义 $\tilde{R}^M$ 恒等为 0。容易验证，这定义了一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$。令 $p:\ \{s,t\}\to\{s,t\}$ 定义为$p(s)=t$ 和 $p(t)=s$。那么 p 是 $\mathcal{M}$ 的部分同构。根据 EPPA，存在一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$ 及其自同构 f，使得 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的扩张，且 f 是 p 的扩张。令 $y'=f(y)$。那么 $d^N(y',t)=d^N(f(y),f(s))=d^N(y,s)=d^M(y,s)=a$。按前述方式定义 $\overline{x}^0,\overline{x}^1,\overline{x}^2$。

$$x^0_j=\begin{cases}y & \text{if } j=i\\ s & \text{if } j\neq i;\end{cases}\quad x^1_j=\begin{cases}y' & \text{if } j=i\\ t & \text{if } j\neq i;\end{cases}\quad x^2_j=\begin{cases}z & \text{if } j=i\\ t & \text{if } j\neq i.\end{cases}$$

那么 $\overline{x}^1=f(\overline{x}^0)$，因此 $R^N(\overline{x}^1)=R^N(\overline{x}^0)=R^M(\overline{x}^0)=$ 与 $\{1,\mathfrak{u}_{R,i}(a)+\mathfrak{u}_{R,i}(b)\}$ 中的最小值相等。由此可得

$$\begin{aligned}\min\{1,\mathfrak{u}_{R,i}(a)+\mathfrak{u}_{R,i}(b)\} &= |R^N(\overline{x}^1)-R^N(\overline{x}^2)|\\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^N(y',z))\\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^N(y',t)+d^N(t,z))=\mathfrak{u}_{R,i}(a+b).\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{u}_{R,i}(a+b)<1$，我们得到 $\mathfrak{u}_{R,i}(a)+\mathfrak{u}_{R,i}(b)\leqslant\mathfrak{u}_{R,i}(a+b)$，如所需。

最后，我们证明若 $R\in\mathcal{L}$ 是 n 元的，且满足 $n\geqslant 2$ 和 $1\leqslant i\leqslant n$，则存在 $K_{R,i}>0$，使得对所有 $r\in I_{R,i}$，都有 $\mathfrak{u}_{R,i}(r)=K_{R,i}r$。为此，我们证明 $\mathfrak{u}_{R,i}$ 在 $I_{R,i}$ 上是次可加的。取满足 $k\neq i$ 的 $1\leqslant k\leqslant n$。取满足 $a+b\in I_{R,i}$ 的 $a,b>0$。考虑由五个点 r,s,t,z,y 构成的度量空间 (M,d^M)，其中 r,s,t 构成边长为 $a+b$ 的等边三角形，$d^N(y,s)=b$, $d^N(y,t)=a$, $d^N(y,r)=$ 等于 $\min\{2a+b,a+2b\}$，并且对于某个 $\delta>\sup I_{R,i}$，有 $d^N(z,r)=d^N(z,s)=d^N(z,t)=d^N(z,y)=\delta$。对于 $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in M^n$，定义

$$R^M(\overline{x})=\begin{cases}\mathfrak{u}_{R,i}(a+b) & \text{if } x_i=r \text{ and } x_k=z\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于所有其他的 $\tilde{R}\in\mathcal{L}$，将 $\tilde{R}^M$ 定义为恒等于 0。容易验证，这定义了一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$。设 $p:\ \{r,s,t\}\to\{r,s,t\}$ 满足$p(r)=s$, $p(s)=t$ 且 $p(t)=r$。那么 p 是 $\mathcal{M}$的部分同构。根据 EPPA，我们得到一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$ 以及一个 $\mathcal{N}$的自同构 f，使得 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{N}$的扩张，且 f是 p的扩张。令 $y'=f(y)\in N$。那么 $d^N(y',r)=d^N(f(y),f(t))=d^N(y,t)=a$且 $d^N(y',t)=d^N(f(y),f(s))=d^N(y,s)=b$。定义 $\overline{x}^0,\overline{x}^1,\overline{x}^2$如下。

$$x^0_j=\begin{cases}r & \text{if } j=i\\ z & \text{if } j\neq i;\end{cases}\quad x^1_j=\begin{cases}t & \text{if } j=i\\ z & \text{if } j\neq i;\end{cases}\quad x^2_j=\begin{cases}y' & \text{if } j=i\\ z & \text{if } j\neq i.\end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}_{R,i}(a+b) &= |R^N(\overline{x}^0)-R^N(\overline{x}^1)|\\ &\leqslant |R^N(\overline{x}^0)-R^N(\overline{x}^2)|+|R^N(\overline{x}^2)-R^N(\overline{x}^1)|\\ &\leqslant \mathfrak{u}_{R,i}(d^N(r,y'))+\mathfrak{u}_{R,i}(d^N(y',t))=\mathfrak{u}_{R,i}(a)+\mathfrak{u}_{R,i}(b).\end{aligned}$$

□

7. Actions by Automorphisms on Continuous Structures

本节证明，对于任意半适当连续签名 $\mathcal{L}$，有限连续$\mathcal{L}$-结构上的自同构作用构成一个 Fra¨ıss´e 类。

定义 7.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名。设 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 是所有满足以下条件的作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 的类:

- $\mathcal{M}$ 是一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构，
- Γ 是一个有限群，并且
- $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 是一个自同构作用。

我们的目标是证明 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 是一个 Fra¨ıss´e 类。这里的意思是， $\mathcal{C}_\mathcal{L}$具有遗传性质、联合嵌入性质和 amalgamation 性质。它们定义如下。

定义 7.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名。设 Λ、Γ 是群，$\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构，且 $\tau\colon \Lambda \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\pi\colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{N}$ 是自同构作用。

(1) 从 τ 到 π 的嵌入是一个对 (e, f)，其中 e 是从 Λ 到 Γ 的群同构嵌入，而 f 是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的连续 $\mathcal{L}$-预结构嵌入，并且对所有 $g \in \Lambda$ 和 $x \in M$，$e(g) \cdot_\pi f(x) = f(g \cdot_\tau x)$。(2) 如果对于任意 $\tau\colon \Lambda \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\pi\colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{N}$，只要 $\pi \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$ 且存在从 τ 到 π 的嵌入，就有 $\tau \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$，则称 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 具有遗传性质（简称 HP）。(3) 如果对于任意给定的 $\tau, \pi \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$，都存在一个 $\kappa \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$，以及从 τ 到 κ 和从 π 到 κ 的嵌入，则称 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 具有联合嵌入性质（简称 JEP）。(4) 如果对于任意给定的 $\mu, \tau, \pi \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$，以及从 μ 到 τ 的嵌入 (e, f) 和从 μ 到 π 的嵌入 (p, q)，都存在一个 $\kappa \in \mathcal{C}_\mathcal{L}$，以及从 τ 到 κ 的嵌入 (g, h) 和从 π 到 κ 的嵌入 (r, s)，使得

$$g \circ e = r \circ p \text{ and } h \circ f = s \circ q.$$

我们的证明将遵循 [8]中定理 3.9 和 4.8 的一般论证思路。证明的两个关键要素是 Rosendal 的一些结果的类似结论（ [15] 中的引理 16，以及 [14], 中的定理 7；另请参见 [8], 中的引理 4.7、 [8] 中的定理 4.6 和 [7]中的定理 3.3）。我们先证明这些结果。

7.1. 自同构作用的扩张。本小节将 Rosendal 的一个引理（ [15]中的引理 16；另请参见 [8]中的引理 4.7）推广到具有半适当连续签名 $\mathcal{L}$的有限连续 $\mathcal{L}$结构。

我们将证明一个更一般的结果，其假设更强，即 $\mathcal{L}$ 是适当连续签名。相同的证明将给出半适当 $\mathcal{L}$情形下所需的结果。因此，暂时假设 $\mathcal{L}$ 是适当的。

假设 Γ 是一个群， $\Lambda \leqslant \Gamma$ 是一个子群， $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 是连续的 $\mathcal{L}$-预结构，并且 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 是相容的自同构作用。

在 $N \times \Gamma$ 上定义伪度量 ∂：

$$\begin{aligned} &\partial((y_1, g_1), (y_2, g_2)) \\ = &\begin{cases} d^N(g_2^{-1} g_1 \cdot y_1, y_2) & \text{if either } y_1, y_2 \in M \text{ or } g_2^{-1} g_1 \in \Lambda \\ \inf_{x \in M} \{d^N(y_1, g_1^{-1} \cdot x) + d^N(y_2, g_2^{-1} \cdot x)\} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

那么 ∂ 是 $N\times\Gamma$ 上的伪度量，并且对于所有 $(y_1、\ g_1)、(y_2、\ g_2)\in N\times\Gamma$,

$$\partial((y_1,g_1),(y_2,g_2))\leqslant \inf_{x\in X}\{d^N(y_1,g_1^{-1}\cdot x)+d^N(y_2,g_2^{-1}\cdot x)\}.$$

在 $N\times\Gamma$ 上定义等价关系 $\sim$

$$(y_1,g_1)\sim(y_2,g_2)\iff \partial((y_1,g_1),(y_2,g_2))=0.$$

那么 $(y_1、\ g_1)\sim(y_2、\ g_2)$ 当且仅当

$$(y_1,y_2\in M \text{ or } g_2^{-1}g_1\in\Lambda) \text{ and } g_2^{-1}g_1\cdot y_1=y_2.$$

令 $[y、\ g]$ 表示 $(y、\ g)$ 的 $\sim$-等价类。令

$$P=(N\times\Gamma)/\sim$$

并令

$$d^P([y_1,g_1],[y_2,g_2])=\partial((y_1,g_1),(y_2,g_2)).$$

那么 d^P 是 P 上的度量。

令 $\varphi\colon N\to P$ 定义为 $\varphi(y)=[y,1]$。则 φ 是从 (N,d^N) 到 (P,d^P) 的等距嵌入，因为

$$d^P(\varphi(y_1),\varphi(y_2))=\partial((y_1,1),(y_2,1))=d^N(y_1,y_2)$$

对任意 $y_1,y_2\in N$。

定义 $\Gamma\curvearrowright P$ 为

$$g\cdot[y,h]=[y,gh]$$

对于 $g,h\in\Gamma$ 和 $y\in N$。显然，这一定义是良定的。

现在假设 $R\in\mathcal{L}$ 是一个 n 元关系符号。定义

$$R^P([y_1,g_1],\dots,[y_1,g_n])=R^N(z_1,\dots,z_n)$$

如果 $z_1,\dots,z_n\in N$, $g\in\Gamma$，并且

$$[y_1,g_1]=[z_1,g],\dots,[y_n,g_n]=[z_n,g].$$

Thus

$$[y_1,g_1],\dots,[y_1,g_n]\in\mathrm{dom}(R^P)\iff \exists g\in\Gamma,z_1,\dots,z_n\in N\ \bigwedge_{i=1}^n[y_i,g_i]=[z_i,g].$$

我们验证了 R^P 在其定义域上定义良好。为此，令

$$([y_1,g_1],\dots,[y_n,g_n])\in\mathrm{dom}(R^P).$$

设 z_1，……，z_n、z_1'，……，$z_n'\in N$ 以及 g、$g'\in\Gamma$ 满足对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$,

$$[y_i,g_i]=[z_i,g]=[z_i',g'].$$

我们需要证明 $R^N(z_1,\dots,z_n)=R^N(z_1',\dots,z_n')$。注意到对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$，有 $g^{-1}g'\cdot z_i'=z_i$，因此

$$R^N(z_1,\dots,z_n)=R^N(g^{-1}g'\cdot z_1',\dots,g^{-1}g'\cdot z_n')=R^N(z_1',\dots,z_n').$$

我们还注意到，$\mathrm{dom}(R^P)$ 在 Γ 作用下是不变的。也就是说，如果 $[\overline{y}、\ h]\in$属于 $\mathrm{dom}(R^P)$ 且 $g\in\Gamma$，那么

$$g\cdot[\overline{y},h]=[\overline{y},gh]\in\mathrm{dom}(R^P)$$

and

$$R^P(g\cdot[\overline{y},h])=R^N(\overline{y})=R^P([\overline{y},h]).$$

引理 7.3. 对于定义域 (R^P) 上的任意 $R\in\mathcal{L}$、R^P，关于 d_R^P 都是 1-利普希茨的。

证明. 我们首先考虑一元 $R \in \mathcal{L}$。对于任意 $[y_1, g_1]$、$[y_2, g_2] \in P$，如果 y_1、$y_2 \in M$ 或 $g_2^{-1}g_1 \in \Lambda$，那么

$$\begin{aligned} & |R^P([y_1,g_1]) - R^P([y_2,g_2])| = |R^N(g_2^{-1}g_1 \cdot y_1) - R^N(y_2)| \\ \leqslant\ & \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(g_2^{-1}g_1 \cdot y_1, y_2)) = \mathfrak{u}_{R,1}(d^P([y_1,g_1],[y_2,g_2])). \end{aligned}$$

否则，对于任意 $x \in M$，

$$\begin{aligned} & |R^P([y_1,g_1]) - R^P([y_2,g_2])| = |R^N(y_1) - R^N(y_2)| \\ \leqslant\ & |R^N(y_1) - R^N(g_1^{-1} \cdot x)| + |R^N(g_2^{-1} \cdot x) - R^N(y_2)| \\ \leqslant\ & \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(y_1, g_1^{-1} \cdot x)) + \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(y_2, g_2^{-1} \cdot x)) \\ \leqslant\ & \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(y_1, g_1^{-1} \cdot x) + d^N(y_2, g_2^{-1} \cdot x)) \end{aligned}$$

若 $\mathfrak{u}_{R,1}(d^N(y_1, g_1^{-1} \cdot x) + d^N(y_2, g_2^{-1} \cdot x)) < 1$，则否则我们仍有

$$|R^P([y_1,g_1]) - R^P([y_2,g_2])| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^N(y_1, g_1^{-1} \cdot x) + d^N(y_2, g_2^{-1} \cdot x)).$$

对右侧关于 $x \in M$ 取下确界，并利用 $\mathfrak{u}_{R,1}$ 的上半连续性，我们得到

$$|R^P([y_1,g_1]) - R^P([y_2,g_2])| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^P([y_1,g_1],[y_2,g_2])).$$

因此，$(\mathrm{UC}_{\mathcal{L}})$ 对 R^P 成立。由此可知，对于任意 $[y_1, g_1], [y_2, g_2] \in P$，

$$|R^P([y_1,g_1]) - R^P([y_2,g_2])| \leqslant d_R^P([y_1,g_1],[y_2,g_2]).$$

接下来我们考虑 n 元 $R \in \mathcal{L}$，其中 $n \geqslant 2$。设 y_1，……，y_n，z_1，……，$z_n \in N$ 以及 g，$h \in \Gamma$。如果 $h^{-1}g \in \Lambda$ 或 y_1，……，y_n，z_1，……，$z_n \in M$，那么

$$\begin{aligned} & |R^P([y_1,g],\ldots,[y_n,g]) - R^P([z_1,h],\ldots,[z_n,h])| \\ =\ & |R^N(h^{-1}g \cdot y_1,\ldots,h^{-1}g \cdot y_n) - R^N(z_1,\ldots,z_n)| \\ \leqslant\ & d_R^N(h^{-1}g \cdot \overline{y}, \overline{z}) = d_R^P([\overline{y},g],[\overline{z},h]). \end{aligned}$$

否则，对于任意 $\overline{x} \in M^n$，我们有

$$\begin{aligned} & |R^P([y_1,g],\ldots,[y_n,g]) - R^P([z_1,h],\ldots,[z_n,h])| \\ \leqslant\ & |R^N(y_1,\ldots,y_n) - R^N(g^{-1} \cdot x_1,\ldots,g^{-1} \cdot x_n)| + \\ & |R^N(h^{-1} \cdot x_1,\ldots,h^{-1} \cdot x_n) - R^N(z_1,\ldots,z_n)| \\ \leqslant\ & \sum_{i=1}^{n} K_{R,i} d^N(y_i, g^{-1} \cdot x_i) + K_{R,i} d^N(z_i, h^{-1} \cdot x_i) \\ =\ & \sum_{i=1}^{n} K_{R,i}(d^N(y_i, g^{-1} \cdot x_i) + d^N(z_i, h^{-1} \cdot x_i)). \end{aligned}$$

对右侧关于所有 $\overline{x} \in M$ 取下确界，得到

$$|R^P([\overline{y},g]) - R^P([\overline{z},h])| \leqslant d_R^P([\overline{y},g],[\overline{z},h]).$$

这里我们用到了如下事实：若 y_i，$z_i \in M$，则我们也有

$$d^P([y_i,g],[z_i,h]) = d^N(h^{-1}g \cdot y_i, z_i) = \inf_{x_i \in M}\{d^N(y_i, g^{-1} \cdot x_i) + d^N(z_i, h^{-1} \cdot x_i)\}.$$

□

因此，$\mathcal{P} = (P, d^P, (R^P)_{R \in \mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。我们定义带有作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 的 $\mathcal{P}$ 的保守扩张 $\mathcal{Q}$。令 $(Q, d^Q) = (P, d^P)$。对于任意 n 元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{w} \in Q^n$，定义

$$R^Q(\overline{w}) = \max\{0, \sup\{R^P(\overline{z}) - d_R^P(\overline{w},\overline{z}) : \overline{z} \in \mathrm{dom}(R^P)\}\}.$$

那么对于任意 $g \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{Q}}(g \cdot \overline{w}) \quad &= \text{最大}\{0,\ \text{上确界}\{R^P(g \cdot \overline{z}) - d_R^P(g \cdot \overline{w},\ g \cdot \overline{z}) :\ \ \overline{z} \in \text{定义域}(R^P)\} \\ &= \text{最大}\{0,\ \text{上确界}\{R^P(\overline{z}) - d_R^P(\overline{w},\ \overline{z}) :\ \ \overline{z} \in \text{定义域}(R^P)\} = \quad R^{\mathcal{Q}}(\overline{w}). \end{aligned}$$

我们证明 $\mathcal{Q}$ 是一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构，即 $\mathcal{Q}$ 满足 (UC$_{\mathcal{L}}$)。对于一元$R \in \mathcal{L}$，无需证明，因为所有 $[y、\ g] \in$ 都定义在 (R^P) 上，且我们有引理 7.3。对于 $n \geqslant 2$ 和 n 元 $R \in \mathcal{L}$，证明与引理 3.7 的证明完全相同。

因此，我们得到 $\mathcal{N}$ 的一个扩张 $\mathcal{Q}$，其上有一个作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$。显然，作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 与 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 都相容。

因此，我们证明了以下结论。

定理 7.4. 设 $\mathcal{L}$ 是适当连续签名。设 Γ 是一个群，$\Lambda \leqslant \Gamma$是一个子群，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 是连续的 $\mathcal{L}$-预结构，且 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$是相容的自同构作用。那么存在一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构$\mathcal{Q}$ 以及一个自同构作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{N}$的扩张，且作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 与 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$都相容。

此外，若 $\mathcal{L}$ 是半适当的，且 $\mathcal{N}$ 和 Γ是有限的，那么上述结论对有限的 $\mathcal{Q}$也成立。

在结束本小节之前，我们指出，上述扩张性质实际上分别等价于 $\mathcal{L}$ 的半适当性和适当性。这里我们再次假设连续签名 $\mathcal{L}$满足稍强的背景条件。

定理 7.5. 设 $\mathcal{L}$ 是一个连续签名，其中只有有限多个关系符号，且所有相关的连续模都是严格递增的。以下条件等价:

(i) $\mathcal{L}$是半适当的。(ii) 设 Γ 是一个群，$\Lambda \leqslant \Gamma$ 是一个子群，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 是有限连续$\mathcal{L}$结构，且 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 是相容的自同构作用。那么存在一个有限连续 $\mathcal{L}$结构 $\mathcal{Q}$ 以及一个自同构作用$\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{N}$ 的扩张，且作用$\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 与 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 均相容。(iii) 设 Γ 是一个群，$\Lambda \leqslant \Gamma$ 是一个子群，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 是有限连续$\mathcal{L}$结构，且 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 是相容的自同构作用。那么存在一个连续 $\mathcal{L}$-(预)结构 $\mathcal{Q}$ 以及一个自同构作用$\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{N}$ 的扩张，且作用$\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 与 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 均相容。

证明。(i)⇒(ii) 根据定理 7.4 得出。(ii)⇒(iii) 显然。对于 (iii)⇒(i)，我们采用定理 6.2 的证明中 (2)⇒(1) 所用的相同构造和类似论证。□

定理 7.6. 设 $\mathcal{L}$ 是一个只有有限个关系符号的连续签名，且所有相关的连续模都是严格递增的。以下各项等价:

(i) $\mathcal{L}$是适当的。(ii) 设 Γ 为一个群，$\Lambda \leqslant \Gamma$ 为一个子群，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 为连续的 $\mathcal{L}$-预结构，且 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 为相容的自同构作用。那么存在一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{Q}$ 以及一个由自同构构成的作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{N}$的扩张，并且作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 同时与 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$相容。

证明。(i)⇒(ii)由定理 7.4 得出。对于(ii)⇒(i)，根据定理 7.5 的蕴含关系(iii)⇒(i)，我们知道 $\mathcal{L}$ 是半适当的。还需证明，对于任意一元 $R \in \mathcal{L}$，$\mathfrak{u}_{R,\ 1}$ 是上半连续的。为此，设 a 是$I_{R,\ 1}$内部的一点。令$\delta > \sup I_{R,\ 1}$。设 $(N、\ d^N)$ 为由实数轴上的以下点构成的度量空间

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, r, y, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

其中 $r - r_n = 2^{-n}$, $y - r = \delta$, $s_n - y = a + 2^{-n}$。定义 $R^N(y) = \inf\{\mathfrak{u}_R,_1(r) :\ r > a\}$和 $R^N(x) = 0$ for $x \neq y$。对于所有其他的 $\tilde{R} \in \mathcal{L}$，定义 $\tilde{R}^N$ 为恒等于 0。容易验证，这定义了一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构。令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{N}$的子结构，其中 $M = \{r_1, \ldots, r_n, \ldots, s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$。令 $\Gamma = \langle g \rangle$，其中$g^2 = 1$，并令 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$由 $g \cdot r_n = s_n$和 $g \cdot s_n = r_n$ 生成。令 Λ为平凡群。根据 (ii)，存在一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{Q}$ 以及一个由自同构构成的作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{N}$的扩张，且作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{Q}$ 与 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$相容。令 $s = g \cdot r \in Q$。则 $d^{\mathcal{Q}}(s, s_n) = d^{\mathcal{Q}}(g \cdot r, g \cdot r_n) = d^{\mathcal{Q}}(r, r_n) = d^N(r, r_n) = 2^{-n}$。由此可得 $d^{\mathcal{Q}}(y, s) = \lim_n d^{\mathcal{Q}}(y, s_n) = a$。此外 $R^{\mathcal{Q}}(s) = R^{\mathcal{Q}}(r) = 0$。我们有

$$\inf\{\mathfrak{u}_{R,1}(r) :\ r > a\} = |R^{\mathcal{Q}}(y) - R^{\mathcal{Q}}(s)| \leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^{\mathcal{Q}}(y, s)) = \mathfrak{u}_{R,1}(a).$$

□

7.2. 作用的有限逼近。本节将 Rosendal 的一个定理（ [14], 中的定理 7；另见 [7] 中的定理 3.3 以及 [8]中的定理 3.7 和 4.6）推广到具有半适当 $\mathcal{L}$ 的连续 $\mathcal{L}$-结构。

为了陈述该定理，我们需要给出群的 HL 性质的定义（见 [10] 和 [7]；HL 代表 Herwig–Lascar）。

定义 7.7. 设 G 为一个群。

（i）设 $H_1, \ldots, H_n \leqslant G$。关于 $H_1, \ldots, H_n$ 的左方程组是一个方程的有限集，其中含有变量 $x_1, \ldots, x_m$ 和常数 $g_1, \ldots, g_\ell \in G$，且每个方程都具有以下形式

$$x_i H_j = g_k H_j \text{ or } x_i H_j = x_r g_k H_j$$

其中 $1 \leqslant i$、$r \leqslant m$、$1 \leqslant k \leqslant \ell$ 和 $1 \leqslant j \leqslant n$。

(ii) 如果对任意有限生成的 $H_1, \ldots, H_n \leqslant G$ 以及关于 $H_1, \ldots, H_n$ 的左方程组，只要该方程组无解，就存在有限指数正规子群 $N_1, \ldots, N_n \trianglelefteq G$，使得关于 $N_1 H_1, \ldots, N_n H_n$ 的同一个左方程组仍无解，那么我们就称 G 具有 HL 性质。

注意，通过引入新变量，我们也可以将以下形式的方程包含在

$$x_i g_k H_j = x_r g_s H_j$$

左方程组中。

定理 7.8。设 $\mathcal{L}$ 是半适当连续签名。设 Γ 是具有 HL 性质的可数群。假设 $\pi : \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{M}$ 上的自同构作用。那么对于任意有限的 $A \subseteq M$ 和有限的 $F \subseteq \Gamma$，存在一个有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$ 以及一个自同构作用 $\pi' : \Gamma \curvearrowright \mathcal{N}$，使得 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{A}$ 的扩张，并且对于所有 $\gamma \in F$ 和 $a \in A$，若 $\gamma \cdot_\pi a \in A$，则有 $\gamma \cdot_{\pi'} a = \gamma \cdot_\pi a$。

本小节余下部分将证明定理 7.8。我们的策略是，度量部分沿用 Rosendal 对定理 7 [14] (a)⇒(b) 的证明（另见 [6]），然后关系部分采用 Etedadialiabadi–Gao 对定理 3.3 [7](i)⇒(ii) 的证明。Rosendal 的证明使用了群 Γ 的所谓 (RZ) 性质或 RZ 性质，而 Etedadialiabadi–Gao 的证明使用了 HL 性质。由于 HL 性质蕴含 RZ 性质，我们将看到证明的两部分所提出的要求彼此兼容，可以通过调用一次 Γ 的 HL 性质来解决。事实上，我们指出，只假设 RZ 性质也足以完成证明；不过，采用 HL 性质能使表述的记号更简洁。应用 HL 性质后，我们将得到一个有限的部分定义连续 $\mathcal{L}$-结构，并通过引理 3.7 完成证明。

设给定一个适当连续签名 $\mathcal{L}$、一个连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$、一个具有 HL 性质的群 Γ 、一个自同构作用 $\pi\colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$，以及一个有限$A \subseteq M$。

不失一般性，我们可以假设作用 π 是忠实的，即对于所有满足 $\gamma \neq 1_\Gamma$ 的 $\gamma \in \Gamma$，都存在某个 $x \in M$ 使得 $\gamma \cdot_\pi x \neq x$。在下文中，只要不会引起混淆，我们就省略 $\cdot_\pi$ 中的下标。

Let

$$P_A = \{d^M(x,y) : x \neq y \in A\}$$

$$\delta_A = \max\{\operatorname{diam}(A), \sup\{I_{R,i} : R \in \mathcal{L} \text{ is unary}, 1 \leqslant i \leqslant n\}\}$$

and

$$P = \{\delta_A\} \cup \left(\left\{\sum_{i=1}^m p_i : p_1, \dots, p_m \in P_A\right\} \cap [0, \delta_A]\right).$$

由于 A 是有限的， P 也是有限的。

我们按如下方式定义一个连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\tilde{\mathcal{M}}$。令 $\tilde{M} = M$ 并且

$$d^{\tilde{M}}(x,y) = \begin{cases} \min\{p \in P : d^M(x,y) \leqslant p\} & \text{if } d^M(x,y) \leqslant \delta_A \\ \delta_A & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是 d^M 是 M 上的一个度量，并且作用 $\pi\colon \Gamma \curvearrowright \tilde{M}$ 仍然是（M 上的一个等距作用 $\tilde{d}^M$）（参见 [14]的引理 4）。对于任意 $R \in \mathcal{L}$，我们定义 $R^{\tilde{M}} = R^M$。由于$d^M(x,y) \leqslant d^M(x,y)$ 对任意满足 $d(x,y) \leqslant \delta_A$ 的 $x, y \in M$ 均成立，因此 (UC$_\mathcal{L}$) 对所有 $R \in \mathcal{L}$ 都成立$\tilde{R}^M$。这表明

$$\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{M}, d^{\tilde{M}}, (R^{\tilde{M}})_{R \in \mathcal{L}})$$

是一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构。

注意，作用 $\pi\colon \Gamma \curvearrowright \tilde{\mathcal{M}}$ 仍由自同构给出，并且 $\mathcal{A}$ 是 $\tilde{\mathcal{M}}$的一个子结构。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$。特别地，对于所有 $x, y \in M$, $d^M(x,y) \in P$，都有。

同样，不失一般性，我们可以假设，对于任意 $x \in M$，都存在 $a \in A$和 $\gamma \in \Gamma$，使得 $x = \gamma \cdot a$。事实上，令

$$M' = \{x \in M : \exists a \in A\ \exists \gamma \in \Gamma\ x = \gamma \cdot a\}.$$

那么，显然 M' 是一个 π-不变子集，因此 $\mathcal{M}'$ 是一个满足 $A \subseteq M'$的 π-不变子结构。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$。

固定 $a_1, \dots, a_m \in A$，使得 $\{\Gamma a_i\colon 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 构成 M的一个划分，其中

$$\Gamma a_i = \{\gamma \cdot a_i : \gamma \in \Gamma\}.$$

定义 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Part}(\mathcal{A})$ 如下：对于任意 $\gamma \in \Gamma$ 和 $a \in A$，若$\gamma \cdot a \in A$，则 $\rho(\gamma)(a) = \gamma \cdot a$；否则 $\rho(\gamma)(a)$ 未定义。

设 $F \subseteq \Gamma$ 为有限的。由于 π 是忠实的，必要时通过向 A 和 F 中添加有限多个元素，我们不妨假设

(i) $1_\Gamma \in F$; (ii) $F = F^{-1}$; (iii) 对所有满足 $\gamma \neq 1_\Gamma$ 的 $\gamma \in F$，都存在 $a \in A$ 使得 $a \neq \rho(\gamma)(a) \in A$；(iv) 对所有 $\gamma \in \Gamma$，都存在某个 $\eta \in F$ 使得 $\rho(\gamma) = \rho(\eta)$。

对于 $1 \leqslant i \leqslant m$，定义

$$H_i = \{\gamma_1 \cdots \gamma_\ell : \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell \in F \text{ and } \rho(\gamma_1)(\cdots(\rho(\gamma_\ell)(a_i))\cdots) = a_i\}.$$

由于 A 和 F 都是有限的，H_i 是 Γ 的有限生成子群。注意，对于任意 $\gamma \in H_i$，都有 $\gamma \cdot a_i = a_i$。

设 X 为左陪集空间的不交并

$$X = \Gamma/H_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma/H_m.$$

令 Γ 通过左乘法作用于 X。

我们按如下方式定义 X 上的伪度量 d^X。对于 γ、$\eta \in \Gamma$ 和 $1 \leqslant i$、$j \leqslant m$，

$$d^X(\gamma H_i, \eta H_j) = d^M(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j).$$

容易看出，d^X 定义良好，且 Γ 在 X 上的作用由等距变换给出。定义 $e\colon A \to X$ 为

$$e(a) = \begin{cases} H_i & \text{if } a = a_i \\ \gamma H_i & \text{if } a \neq a_i \text{ and } a = \gamma \cdot a_i \text{ for } \gamma \in F. \end{cases}$$

为说明 e 定义良好，首先注意，对于任意 $a \in A \cap \Gamma a_i$（但不等于 $a \neq a_i$），由 (iv) 可知存在 $\gamma \in F$ 使得 $\gamma \cdot a_i = a$，因此 $e(a)$ 有定义。接下来，假设 γ、$\gamma' \in F$ 满足 $\gamma \cdot a_i = \gamma' \cdot a_i \in A$。那么 $\gamma^{-1} \in F$ 且 $\rho(\gamma^{-1})(\rho(\gamma')(a_i)) = a_i$，从而 $\gamma^{-1}\gamma' \in H_i$ 且 $\gamma H_i = \gamma' H_i$。

我们断言，e 是从 $(A、d^A)$ 到 $(X、d^X)$ 的等距嵌入。为此，假设对于 γ、$\eta \in F$，有 $a = \gamma \cdot a_i \in A$ 且 $b = \eta \cdot a_j \in A$。那么

$$d^X(e(a), e(b)) = d^X(\gamma H_i, \eta H_j) = d^M(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j) = d^A(a, b).$$

对于任意 n元 $R \in \mathcal{L}$，定义 R^X 于

$$\mathrm{dom}(R^X) = \{(\gamma\gamma_1 H_{i_1}, \ldots, \gamma\gamma_n H_{i_n}) : \gamma \in \Gamma,\ \gamma_j \cdot a_{i_j} \in A \text{ for all } 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

by

$$R^X(\gamma\gamma_1 H_{i_1}, \ldots, \gamma\gamma_n H_{i_n}) = R^M(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}).$$

我们断言，对于任意 n元 $R \in \mathcal{L}$和 b_1，....., $b_n \in A$，令 $\gamma_j \in F$满足：对于 $1 \leqslant j \leqslant n$，有 $b_j = \gamma_j \cdot a_{i_j}$，则

$$R^X(\gamma_1 H_{i_1}, \ldots, \gamma_n H_{i_n}) = R^A(b_1, \ldots, b_n).$$

这是因为

$$R^X(\gamma_1 H_{i_1}, \ldots, \gamma_n H_{i_n}) = R^M(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) = R^A(b_1, \ldots, b_n).$$

我们断言以下条件成立：

（C1）对于任意 γ、η、γ'、$\eta' \in F$ 以及 $1 \leqslant i$、$j \leqslant m$，如果 $\gamma \cdot a_i$、$\gamma' \cdot a_i$、$\eta \cdot a_j$、$\eta' \cdot a_j \in A$ 以及

$$d^A(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j) \neq d^A(\gamma' \cdot a_i, \eta' \cdot a_j),$$

那么，不存在 $g \in \Gamma$ 使得

$$g\gamma H_i = \gamma' H_i \text{ and } g\eta H_j = \eta' H_j.$$

(C2) 对任意 γ、$\eta \in F$ 和 $1 \leqslant i \leqslant m$，若 $\gamma \cdot a_i$、$\eta \cdot a_i \in A$ 和 $\gamma \cdot a_i \neq \eta \cdot a_i$，则 $\gamma^{-1}\eta \notin H_i$，即 $\gamma H_i \neq \eta H_i$。

(C3) 对任意 γ、η、γ_1、η_1、$\ldots$、γ_ℓ、$\eta_\ell \in F$ 和 $1 \leqslant i_0$、$\ldots$、$i_\ell \leqslant m$，若 $\gamma \cdot a_{i_0}$、$\eta \cdot a_{i_\ell} \in A$ 且对所有 $1 \leqslant j \leqslant \ell$、$\gamma_j \cdot a_{i_{j-1}}$、$\eta_j \cdot a_{i_j} \in A$，并且

$$d^A(\gamma \cdot a_{i_0}, \eta \cdot a_{i_\ell}) > \sum_{j=1}^{\ell} d^A(\gamma_j \cdot a_{i_{j-1}}, \eta_j \cdot a_{i_j}),$$

那么，不存在 g_1、$\ldots$、$g_\ell \in \Gamma$ 使得

$$\begin{array}{rcl} \gamma H_{i_0} & = & g_1\gamma_1 H_{i_0} \\ g_1\eta_1 H_{i_1} & = & g_2\gamma_2 H_{i_1}, \\ \cdots & & \cdots \\ g_{\ell-1}\eta_{\ell-1} H_{i_{\ell-1}} & = & g_\ell\gamma_\ell H_{i_{\ell-1}} \\ g_\ell\eta_\ell H_{i_\ell} & = & \eta H_{i_\ell}. \end{array}$$

(C4) 对任意 n 元 $R \in \mathcal{L}$、γ_1、$\ldots$、γ_n、η_1、$\ldots$、$\eta_n \in F$ 和 $1 \leqslant i_1$、$\ldots$、$i_n \leqslant m$，若对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$、$\gamma_j \cdot a_{i_j}$、$\eta_j \cdot a_{i_j} \in A$ 且

$$R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) \neq R^A(\eta_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \eta_n \cdot a_{i_n}),$$

不存在这样的 $g \in \Gamma$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 H_{i_1} & = & g\eta_1 H_{i_1} \\ \cdots & & \cdots \\ \gamma_n H_{i_n} & = & g\eta_n H_{i_n}. \end{array}$$

（C5）对于任意 n 元 $R \in \mathcal{L}$，其中 $n \geqslant 2$,

$$E = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\},$$

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in F,$$

$$\gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{1,\ell_1}, \eta_{1,1}, \ldots, \eta_{1,\ell_1} \in F,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\gamma_{t,1}, \ldots, \gamma_{t,\ell_t}, \eta_{t,1}, \ldots, \eta_{t,\ell_t} \in F,$$

$$1 \leqslant i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n \leqslant m,$$

and

$$1 \leqslant i_{1,0}, i_{1,1}, \ldots, i_{1,\ell_1}, \ldots, i_{t,0}, i_{t,1}, \ldots, i_{t,\ell_t} \leqslant m,$$

若对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\gamma_k \cdot a_{i_k}, \eta_k \cdot a_{j_k} \in A,$$

对所有的 $1 \leqslant s \leqslant t$ 和 $1 \leqslant p \leqslant \ell_s$,

$$i_{s,0} = i_{\epsilon_s}, i_{s,\ell_s} = j_{\epsilon_s},$$

$$\gamma_s \cdot a_{i_{\epsilon_s}}, \eta_s \cdot a_{j_{\epsilon_s}}, \gamma_{s,p} \cdot a_{i_{s,p-1}}, \eta_{s,p} \cdot a_{i_{s,p}} \in A,$$

对所有的 $1 \leqslant s \leqslant t$,

$$C_s = \sum_{p=1}^{\ell_s} d^A(\gamma_{s,p} \cdot a_{i_{s,p-1}}, \eta_{s,p} \cdot a_{i_{s,p}}) < \delta_A,$$

and

$$|R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) - R^A(\eta_1 \cdot a_{j_1}, \ldots, \eta_n \cdot a_{j_n})| > \sum_{k=\epsilon_s \in E} K_{R,k} C_s + \sum_{k \notin E} K_{R,k} \delta_A,$$

那么，不存在 g、h、$g_{1,\ 1}$、……、$g_{1,\ \ell_1}$、……、$g_{t,\ 1}$、……、$g_{t,\ \ell_t} \in \Gamma$，使得对所有 $1 \leqslant s \leqslant t$,

$$\begin{aligned} g\gamma_{\epsilon_s} H_{i_{s,0}} &= g_{s,1}\gamma_{s,1} H_{i_{s,0}}, \\ g_{s,1}\eta_{s,1} H_{i_{s,1}} &= g_{s,2}\gamma_{s,2} H_{i_{s,1}}, \\ \cdots &\quad \cdots \\ g_{s,\ell_s}\eta_{s,\ell_s} H_{i_{s,\ell_s}} &= h\eta_{\epsilon_s} H_{i_{s,\ell_s}}. \end{aligned}$$

条件 (C1)、(C2) 和 (C4) 很容易验证。对于 (C3)，设 $a = \gamma \cdot a_{i_0}$、$b = \eta \cdot a_{i_\ell}$，并且对于所有 $1 \leqslant j \leqslant \ell$，设 $b_j = \gamma_j \cdot a_{i_{j-1}}$ 和 $c_j = \eta_j \cdot a_{i_j}$。注意，所有这些元素都属于 A。根据我们的假设，有

$$d^A(a,b) > \sum_{j=1}^{\ell} d^A(b_j, c_j).$$

如果存在 g_1、……、$g_\ell \in \Gamma$ 使得左方程组成立，那么我们有$e(a) = g_1 \cdot e(b_1)$、$g_\ell \cdot e(c_\ell) = e(b)$，并且对于所有 $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$，$g_j \cdot e(c_j) = g_{j+1} \cdot e(b_j)$。因此

$$\begin{aligned} d^X(e(a), e(b)) &\leqslant \sum_{j=1}^{\ell-1} d^X(g_j \cdot e(b_j), g_j \cdot e(c_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell-1} d^X(e(b_j), e(c_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell-1} d^A(b_j, c_j) < d^A(a,b) = d^X(e(a), e(b)), \end{aligned}$$

一个矛盾。

对于 (C5)，假设所有假设均成立，但存在

$$g, h, g_{1,1}, \ldots, g_{1,\ell_1}, \ldots, g_{t,1}, \ldots, g_{t,\ell_1} \in \Gamma$$

使得所示左方程组成立的对象。那么对于所有 $1 \leqslant s \leqslant t$,

$$\begin{aligned} g\gamma_{\epsilon_s} \cdot a_{i_{s,0}} &= g_{s,1}\gamma_{s,1} \cdot a_{i_{s,0}}, \\ g_{s,1}\eta_{s,1} \cdot a_{i_{s,1}} &= g_{s,2}\gamma_{s,2} \cdot a_{i_{s,1}}, \\ \cdots &\quad \cdots \\ g_{s,\ell_s}\eta_{s,\ell_s} \cdot a_{i_{s,\ell_s}} &= h\eta\epsilon_s \cdot a_{i_{s,\ell_s}}. \end{aligned}$$

因此，对于 $k = \epsilon_s \in E$,

$$d^M(g\gamma_k \cdot a_{i_k}, h\eta_k \cdot a_{j_k}) \leqslant \sum_{p=1}^{\ell_s} d^A(\gamma_{s,p} \cdot a_{i_{s,p-1}}, \eta_{s,p} \cdot a_{i_{s,p}}) = C_s < \delta_A.$$

由于 $\mathcal{M}$ 是一个连续的 $\mathcal{L}$-预结构，且 Γ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用由自同构给出，我们有

$$\begin{aligned} & |R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \dots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) - R^A(\eta_1 \cdot a_{j_1}, \dots, \eta_n \cdot a_{j_n})| \\ = \ & |R^M(g\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \dots, g\gamma_n \cdot a_{i_n}) - R^M(h\eta_1 \cdot a_{j_1}, \dots, h\eta_n \cdot a_{j_n})| \\ \leqslant \ & \sum_{k=1}^{n} K_{R,k} d^M(g\gamma_k \cdot a_{i_k}, h\eta_k \cdot a_{j_k}) \\ \leqslant \ & \sum_{k=\epsilon_s \in E} K_{R,k} C_s + \sum_{k \notin E} K_{R,k} \delta_A, \end{aligned}$$

一个矛盾。

条件 (C1)–(C5) 均表述为某些左方程组无解。合起来，这些条件涉及有限个这样的左方程组。根据 Γ 的 HL 性质，我们得到有限指数正规子群 $K_1, \dots, K_m \trianglelefteq \Gamma$，使得在 $K_1H_1, \dots, K_mH_m$ 上的相同左方程组仍无解。取 $K = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant m} K_i$ 后，不失一般性，我们可以假设 $K_1 = \cdots = K_m = K$。这将简化我们的记号和讨论。在 $KH_1, \dots, KH_m$ 上的左方程组无解这一事实，又可以表述为以下条件。

(K1) 对任意 γ、η、γ'、$\eta' \in F$ 和 $1 \leqslant i$、$j \leqslant m$，若 $\gamma \cdot a_i$、$\gamma' \cdot a_i$、$\eta \cdot a_j$、$\eta' \cdot a_j \in A$ 且

$$d^A(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j) \neq d^A(\gamma' \cdot a_i, \eta' \cdot a_j),$$

那么不存在满足以下条件的 $g \in \Gamma$

$$g\gamma KH_i = \gamma' KH_i \text{ and } g\eta KH_j = \eta' KH_j.$$

(K2) 对任意 γ、$\eta \in F$ 和 $1 \leqslant i \leqslant m$，如果 $\gamma \cdot a_i$、$\eta \cdot a_i \in A$ 和 $\gamma \cdot a_i \neq \eta \cdot a_i$，那么 $\gamma^{-1}\eta \notin KH_i$，即 $\gamma KH_i \neq \eta KH_i$。(K3) 对任意 γ、η、γ_1、η_1、……、γ_ℓ、$\eta_\ell \in F$ 以及 $1 \leqslant i_0$、……、$i_\ell \leqslant m$，如果 $\gamma \cdot a_{i_0}$、$\eta \cdot a_{i_\ell} \in A$，并且对于所有 $1 \leqslant j \leqslant \ell$、$\gamma_j \cdot a_{i_{j-1}}$、$\eta_j \cdot a_{i_j} \in A$，以及

$$d^A(\gamma \cdot a_{i_0}, \eta \cdot a_{i_\ell}) > \sum_{j=1}^{\ell} d^A(\gamma_j \cdot a_{i_{j-1}}, \eta_j \cdot a_{i_j}),$$

那么不存在满足以下条件的 g_1、……、$g_\ell \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \gamma KH_{i_0} &= g_1\gamma_1 KH_{i_0} \\ g_1\eta_1 KH_{i_1} &= g_2\gamma_2 KH_{i_1}, \\ \cdots & \quad \cdots \\ g_{\ell-1}\eta_{\ell-1} KH_{i_{\ell-1}} &= g_\ell\gamma_\ell KH_{i_{\ell-1}} \\ g_\ell\eta_\ell KH_{i_\ell} &= \eta KH_{i_\ell}. \end{aligned}$$

(K4) 对任意 n 元 $R \in \mathcal{L}$、γ_1、……、γ_n、η_1、……、$\eta_n \in F$ 以及 $1 \leqslant i_1$、……、$i_n \leqslant m$，如果对于所有 $1 \leqslant j \leqslant n$、$\gamma_j \cdot a_{i_j}$、$\eta_j \cdot a_{i_j} \in A$ 和

$$R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \dots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) \neq R^A(\eta_1 \cdot a_{i_1}, \dots, \eta_n \cdot a_{i_n}),$$

此处不存在满足以下条件的 $g \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_1 KH_{i_1} &= g\eta_1 KH_{i_1} \\ \cdots & \quad \cdots \\ \gamma_n KH_{i_n} &= g\eta_n KH_{i_n}. \end{aligned}$$

(K5) 对任意 n 元的 $R\in\mathcal{L}$，其中 $n\geqslant 2$,

$$E=\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_t\}\subseteq\{1,\ldots,n\},$$

$$\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\eta_1,\ldots,\eta_n\in F,$$

$$\gamma_{1,1},\ldots,\gamma_{1,\ell_1},\eta_{1,1},\ldots,\eta_{1,\ell_1}\in F,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\gamma_{t,1},\ldots,\gamma_{t,\ell_t},\eta_{t,1},\ldots,\eta_{t,\ell_t}\in F,$$

$$1\leqslant i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_n\leqslant m,$$

and

$$1\leqslant i_{1,0},i_{1,1},\ldots,i_{1,\ell_1},\ldots,i_{t,0},i_{t,1},\ldots,i_{t,\ell_t}\leqslant m,$$

如果对于所有 $1\leqslant k\leqslant n$,

$$\gamma_k\cdot a_{i_k},\eta_k\cdot a_{j_k}\in A,$$

对于所有 $1\leqslant s\leqslant t$ 和 $1\leqslant p\leqslant\ell_s$,

$$i_{s,0}=i_{\epsilon_s},i_{s,\ell_s}=j_{\epsilon_s},$$

$$\gamma_s\cdot a_{i_{\epsilon_s}},\eta_s\cdot a_{j_{\epsilon_s}},\gamma_{s,p}\cdot a_{i_{s,p-1}},\eta_{s,p}\cdot a_{i_{s,p}}\in A,$$

对于所有 $1\leqslant s\leqslant t$,

$$C_s=\sum_{p=1}^{\ell_s}d^A(\gamma_{s,p}\cdot a_{i_{s,p-1}},\eta_{s,p}\cdot a_{i_{s,p}})<\delta_A,$$

and

$$\begin{aligned}&|R^A(\gamma_1\cdot a_{i_1},\ldots,\gamma_n\cdot a_{i_n})-R^A(\eta_1\cdot a_{j_1},\ldots,\eta_n\cdot a_{j_n})|\\&\qquad>\sum_{k=\epsilon_s\in E}K_{R,k}C_s+\sum_{k\notin E}K_{R,k}\delta_A,\end{aligned}$$

那么不存在 g、h、$g_{1,\ 1}$、……、$g_{1,\ \ell_1}$、……、$g_{t,\ 1}$、……、$g_{t,\ \ell_t}\in\Gamma$，使得对于所有 $1\leqslant s\leqslant t$,

$$\begin{aligned}g\gamma_{\epsilon_s}KH_{i_{s,0}}&=g_{s,1}\gamma_{s,1}KH_{i_{s,0}},\\g_{s,1}\eta_{s,1}KH_{i_{s,1}}&=g_{s,2}\gamma_{s,2}KH_{i_{s,1}},\\\cdots&\quad\cdots\\g_{s,\ell_s}\eta_{s,\ell_s}KH_{i_{s,\ell_s}}&=h\eta_{\epsilon_s}KH_{i_{s,\ell_s}}.\end{aligned}$$

令 Y 为左陪集空间的不交并

$$Y=\Gamma/KH_1\sqcup\cdots\sqcup\Gamma/KH_m.$$

令 Γ 通过左乘法作用于 Y。

我们按如下方式在 Y 上定义度量 d^Y。对于 γ、$\eta\in\Gamma$ 和 $1\leqslant i$、$j\leqslant m$,

$$d^Y(\gamma KH_i,\eta KH_j)=\min\{\delta_A,\inf\{p_1+\cdots+p_\ell:(p_1,\ldots,p_\ell)\in S_{\gamma,\eta,i,j}\}\},$$

其中 $(p_1$、……、$p_\ell)\in S_{\gamma,\ \eta,\ i,\ j}$，如果存在

$$g_1,\ldots,g_\ell\in\Gamma,$$

$$\gamma_1,\eta_1,\ldots,\gamma_\ell,\eta_\ell\in F,$$

and

$$1\leqslant i_0,\ldots,i_\ell\leqslant m$$

使得

$$i=i_0,j=i_\ell,$$

对于所有 $1 \leqslant k \leqslant \ell$,

$$\gamma_k \cdot a_{i_{k-1}}, \eta_k \cdot a_{i_k} \in A,$$
$$p_k = d^A(\gamma_k \cdot a_{i_{k-1}}, \eta_k \cdot a_{i_k}),$$

and

$$\begin{aligned} \gamma K H_{i_0} &= g_1\gamma_1 K H_{i_0} \\ g_1\eta_1 K H_{i_1} &= g_2\gamma_2 K H_{i_1}, \\ \cdots & \quad \cdots \\ g_{\ell-1}\eta_{\ell-1} K H_{i_{\ell-1}} &= g_\ell\gamma_\ell K H_{i_{\ell-1}} \\ g_\ell\eta_\ell K H_{i_\ell} &= \eta K H_{i_\ell}. \end{aligned}$$

显然， d^Y 在 Γ 的作用下保持不变。

引理 7.9. d^Y 是 Y 上的度量。

证明. 我们首先验证，若 $i \neq j$ 或（$i = j$ 但 $\gamma^{-1}\eta \notin KH_i$），则

$$d^Y(\gamma K H_i, \eta K H_j) > 0.$$

若 $S_{\gamma,\eta,i,j} = \varnothing$，则 $d^Y(\gamma K H_i, \eta K H_j) = \delta_A > 0$。因此，假设 $S_{\gamma,\eta,i,j} \neq \varnothing$。然而请注意，由于 F和 A是有限的，满足 $p_1, \ldots, p_\ell \neq 0$且 $p_1 + \cdots + p_\ell \leqslant \delta_A$的元素 $(p_1, \ldots, p_\ell) \in S_\gamma$, $_{\eta,i,j}$的个数是有限的。现在假设 $i \neq j$。那么由于 $\Gamma a_i \cap \Gamma a_j = \varnothing$，对于任意 $(p_1, \ldots,$ $p_\ell) \in S_{\gamma,\eta,i,j}$, $p_1 + \cdots + p_\ell > 0$，因为某一项为正。因此 $d^Y(\gamma K H_i, \eta K H_j) > 0$。接下来假设 $i = j$但 $\gamma^{-1}\eta \notin KH_i$。在这种情况下，如果存在某个 $i_k \neq i$使得 $1 \leqslant k \leqslant \ell$，那么由同样的论证可得 $p_1 + \cdots + p_\ell > 0$。否则，对所有 $1 \leqslant k \leqslant \ell$， $i_k = i$。在这种情况下

$$p_1 + \cdots + p_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} d^A(\gamma_j \cdot a_i, \eta_j \cdot a_i).$$

再者，如果其中某些量为正，那么结论成立。若它们全都为零，则对所有 $1 \leqslant j \leqslant \ell$, $\gamma_j^{-1}\eta_j \in H_i$。特别地，对所有 $1 \leqslant j \leqslant \ell$， $\gamma_j K H_i = \eta_j K H_i$。根据（$p_1$ 的定义关系，....., p_ℓ）$\in S_{\gamma,\ \eta,\ i,\ j}$，我们得到

$$\begin{aligned} \gamma K H_i &= g_1\gamma_1 K H_i \\ g_1\eta_1 K H_i &= g_2\gamma_2 K H_i, \\ \cdots & \quad \cdots \\ g_{\ell-1}\eta_{\ell-1} K H_i &= g_\ell\gamma_\ell K H_i \\ g_\ell\eta_\ell K H_i &= \eta K H_i. \end{aligned}$$

但现在这些等式中的所有项都相等。因此我们得到 $\gamma K H_i = \eta K H_i$。

接下来验证三角不等式。假设

$$d^Y(\gamma K H_i, \eta K H_j) = p_1 + \cdots + p_\ell$$

and

$$d^Y(\eta K H_j, \mu K H_k) = q_1 + \cdots + q_t$$

对于 $(p_1,\ .....,\ p_\ell) \in S_{\gamma,\ \eta,\ i,\ j}$ 和 $(q_1,\ .....,\ q_t) \in S_{\eta,\ \mu,\ j,\ k}$。将 $(p_1,\ .....,\ p_\ell)$ 和 $(q_1,$ $.....,\ q_t)$的定义关系串接起来，我们得到关于 $(p_1,\ .....,\ p_\ell,\ q_1,\ .....,\ q_t) \in S_{\gamma,\ \mu,\ i,\ k}$的左系统。因此

$$d^Y(\gamma K H_i, \mu K H_k) \leqslant d^Y(\gamma K H_i, \eta K H_j) + d^Y(\eta K H_j, \mu K H_k).$$

□

引理 7.10. 对任意 γ、 $\eta \in F$ 和 $1 \leqslant i$、 $j \leqslant m$，若 $\gamma \cdot a_i$、 $\eta \cdot a_j \in A$，则

$$d^A(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j) = d^Y(\gamma K H_i, \eta K H_j).$$

证明. 假设

$$d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j) = p_1 + \cdots + p_\ell$$

其中 $(p_1, \ldots, p_\ell) \in S_{\gamma,\eta,i,j}$ 由 $g_1, \ldots, g_\ell \in \Gamma$, $\gamma_1, \eta_1, \ldots, \gamma_\ell, \eta_\ell \in F$ 和 $1 \leqslant i_0, \ldots, i_\ell \leqslant m$ 见证。于是，根据 $(p_1, \ldots, p_\ell) \in S_{\gamma,\eta,i,j}$ 的定义性左方程组以及 (K3)，我们得到

$$d^A(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j) \leqslant p_1 + \cdots + p_\ell = d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j).$$

反过来，由平凡的方程组

$$\gamma KH_i = \gamma KH_i$$
$$\eta KH_j = \eta KH_j$$

我们得到

$$d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j) \leqslant d^A(\gamma \cdot a_i, \eta \cdot a_j).$$

□

接下来，我们为 n元 $R \in \mathcal{L}$ 定义 R^Y

$(R^Y) = \{(\gamma\gamma_1 KH_{i_1}、\ldots\ldots、\gamma\gamma_n H_{i_n})$: 对所有 $1 \leqslant j \leqslant n\}$，由 $\gamma \in \Gamma$、$\gamma_j \in F$、$\gamma_j \cdot a_{i_j} \in A$ 给出

$$R^Y(\gamma\gamma_1 KH_{i_1}, \ldots, \gamma\gamma_n H_{i_n}) = R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}).$$

由 (K4) 可知，这定义良好。显然，(R^Y) 和 R^Y 在 Γ 的作用下是不变的。

引理 7.11. $\mathcal{Y} = (Y、d^Y、(R^Y)_{R\in\mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。

证明. 首先假设 R 是一元的。我们验证 R 满足 $(\mathrm{UC}_{\mathcal{L}})$。令 $\gamma、\eta \in \Gamma$ 和 $1 \leqslant i、j \leqslant m$。假设

$$d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j) = p_1 + \cdots + p_\ell$$

其中 $(p_1、\ldots\ldots、p_\ell) \in S_{\gamma,\eta,i,j}$ 由 $g_1、\ldots\ldots、g_\ell \in \Gamma$、$\gamma_1、\ldots\ldots、\gamma_\ell$、$\eta_\ell \in F$ 见证，并且 $1 \leqslant i_0、\ldots\ldots、i_\ell \leqslant m$。对于 $1 \leqslant k \leqslant \ell$，令 $b_k = \gamma_k \cdot a_{i_{k-1}} \in A$ 和 $c_k = \eta_k \cdot a_{i_k} \in A$. Then

$$R^Y(\gamma KH_i) = R^A(a_i) = R^A(\gamma_1 \cdot a_i) = R^A(b_1),$$
$$R^Y(\eta KH_j) = R^A(a_j) = R^A(\eta_\ell \cdot a_j) = R^A(c_\ell),$$

and

$$d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j) = p_1 + \cdots + p_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} d^A(b_k, c_k).$$

我们不妨假设 $d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j) \in I_{R,1}$；否则，所需的不等式显然成立。现在，根据$S_{\gamma,\eta,i,j}$的定义方程，我们有

$$\begin{aligned}
|R^Y(\gamma KH_i) - R^Y(\eta KH_j)| &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell} |R^Y(\gamma_k KH_{i_{k-1}}) - R^Y(\eta_k KH_{i_k})| \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} |R^A(b_k) - R^A(c_k)| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\ell} \mathfrak{u}_{R,1}(d^A(b_k, c_k)) \\
&\leqslant \mathfrak{u}_{R,1}(d^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j)).
\end{aligned}$$

现在可得

$$|R^Y(\gamma KH_i) - R^Y(\eta KH_j)| \leqslant d_R^Y(\gamma KH_i, \eta KH_j).$$

接下来，假设对于 $n \geqslant 2$， R 是 n 元的。令 $\gamma, \eta \in \Gamma$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in F$ and $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n \leqslant m$。假设对于所有 $1 \leqslant k \leqslant n$， $\gamma_k \cdot a_{i_k}, \eta_k \cdot a_{j_k} \in A$。我们需要证明

$$\begin{aligned}|R^Y(\gamma\gamma_1 KH_{i_1}, \ldots, \gamma\gamma_n KH_{i_n}) - R^Y(\eta\eta_1 KH_{j_1}, \ldots, \eta\eta_n KH_{j_n})| \\ \leqslant \sum_{k=1}^n K_{R,k} d^Y(\gamma\gamma_k KH_{i_k}, \eta\eta_k KH_{j_k}).\end{aligned}$$

令 E 为满足下列条件的 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 的集合

$$d^Y(\gamma\gamma_k KH_{i_k}, \eta\eta_k KH_{j_k}) < \delta_A.$$

将 E 中的元素枚举为 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t$。那么对于每个 $1 \leqslant s \leqslant t$，根据 d^Y 的定义，存在

$$g_{s,1}, \ldots, g_{s,\ell_s} \in \Gamma,$$
$$\gamma_{s,1}, \ldots, \gamma_{s,\ell_s}, \eta_{s,1}, \ldots, \eta_{s,\ell_s} \in F,$$

and

$$1 \leqslant i_{s,0}, i_{s,1}, \ldots, i_{s,\ell_s} \leqslant m$$

使得

$$i_{\epsilon_s} = i_{s,0},\ j_{\epsilon_s} = i_{s,\ell_s},$$

对于所有 $1 \leqslant p \leqslant \ell_s$,

$$\gamma_{s,p} \cdot a_{i_{s,p-1}}, \eta_{s,p} \cdot a_{i_{s,p}} \in A,$$

$$d^Y(\gamma\gamma_{\epsilon_s} KH_{i_{\epsilon_s}}, \eta\eta_{\epsilon_s} KH_{j_{\epsilon_s}}) = \sum_{p=1}^{\ell_s} d^A(\gamma_{s,p} \cdot a_{i_{s,p-1}}, \eta_{s,p} \cdot a_{i_{s,p}}) = C_s,$$

and

$$\begin{aligned}\gamma\gamma_{\epsilon_s} KH_{i_{s,0}} &= g_{s,1}\gamma_{s,1} KH_{i_{s,0}}, \\ g_{s,1}\eta_{s,1} KH_{i_{s,1}} &= g_{s,2}\gamma_{s,2} KH_{i_{s,1}}, \\ &\cdots \quad\quad \cdots \\ g_{s,\ell_s}\eta_{s,\ell_s} KH_{i_{s,\ell_s}} &= \eta\eta_{\epsilon_s} KH_{i_{s,\ell_s}}.\end{aligned}$$

对于 $k \notin E$,

$$d^Y(\gamma\gamma_k KH_{i_k}, \eta\eta_k KH_{j_k}) = \delta_A.$$

Thus

$$\sum_{k=1}^n K_{R,k} d^Y(\gamma\gamma_k KH_{i_k}, \eta\eta_k KH_{j_k}) = \sum_{k=\epsilon_s \in E} K_{R,k} C_s + \sum_{k \notin E} K_{R,k}\delta_A.$$

由 (K5) 可知

$$\begin{aligned}&|R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) - R^A(\eta_1 \cdot a_{j_1}, \ldots, \eta_1 \cdot a_{j_n})| \\ &\leqslant \sum_{k=\epsilon_s \in E} K_{R,k} C_s + \sum_{k \notin E} K_{R,k}\delta_A \\ &= \sum_{k=1}^n K_{R,k} d^Y(\gamma\gamma_k KH_{i_k}, \eta\eta_k KH_{j_k}).\end{aligned}$$

不过，请注意,

$$\begin{aligned}&|R^Y(\gamma\gamma_1 KH_{i_1}, \ldots, \gamma\gamma_n KH_{i_n}) - R^Y(\eta\eta_1 KH_{j_1}, \ldots, \eta\eta_n KH_{j_n})| \\ =\ &|R^Y(\gamma_1 KH_{i_1}, \ldots, \gamma_n KH_{i_n}) - R^Y(\eta_1 KH_{j_1}, \ldots, \eta_n KH_{j_n})| \\ =\ &|R^A(\gamma_1 \cdot a_{i_1}, \ldots, \gamma_n \cdot a_{i_n}) - R^A(\eta_1 \cdot a_{j_1}, \ldots, \eta_1 \cdot a_{j_n})|.\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的不等式。 □

令 $\mathcal{N}$ 为引理 3.7 给出的 $\mathcal{Y}$ 的保守扩张。特别地，对于每个 n元 $R \in \mathcal{L}$ 和 $\overline{x} \in N^n$,

$$R^N(\overline{x}) = \max\{0, \sup\{R^Y(\overline{y}) - d^Y(\overline{x}, \overline{y}) : \overline{y} \in \mathrm{dom}(R^Y)\}\}.$$

显然， R^N 在 Γ的作用下保持不变。

定义 $f\colon A \to N$，使得

$$f(a) = \begin{cases} KH_i & \text{if } a = a_i \\ \gamma K H_i & \text{if } a \neq a_i \text{ and } a = \gamma \cdot a_i \text{ for } \gamma \in F. \end{cases}$$

容易看出 f 定义良好。我们断言， f 是从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{N}$的同构嵌入。为证明单射性，设 γ、 $\eta \in F$满足 $\gamma \cdot a_i$、 $\eta \cdot a_i \in A$，但 $\gamma \cdot a_i \neq \eta \cdot a_i$。于是由 (K2) 得，$\gamma K H_i \neq \eta K H_i$。等距性由引理 7.10 得出。 R值的保持性直接由 R^Y的定义得出。

最后，我们验证对于所有的 $g \in F$和 $a \in A$，若 $g \cdot a \in A$，则

$$f(g \cdot a) = g f(a).$$

假设对于 γ、 $\eta \in F$和 $1 \leqslant i \leqslant m$， $a = \gamma \cdot a_i$且 $g \cdot a = \eta \cdot a_i$。那么

$$\rho(\eta^{-1})(\rho(g)(\rho(\gamma)(a_i)))) = a_i.$$

因此 $\eta^{-1} g \gamma \in H_i \subseteq K H_i$，并且

$$f(g \cdot a) = f(\eta \cdot a_i) = \eta K H_i = g \gamma K H_i = g f(a).$$

这就完成了定理 7.8 的证明。

我们指出，同样的方法也可用于直接证明定理 6.1（另见 [6]）。

7.3. 自同构作用的 Fra¨ıss´e 类。在本小节最后，我们证明对于任意半适当连续签名 $\mathcal{L}$，定义 7.1 中定义的类 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 是一个 Fra¨ıss´e 类。论证与 [8] 中定理 3.9 和 4.8 的证明十分相似。为方便读者，我们给出一些细节。关键事实如下定理所述。

定理 7.12. 设 $\mathcal{L}$ 是半适当连续签名。那么 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 具有合并性质。

证明. 假设 Γ_1 和 Γ_2 是有限群，且 Λ 是 Γ_1 和 Γ_2 的子群。假设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是有限连续 $\mathcal{L}$-结构，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的子结构。假设 $\pi_1 : \Gamma_1 \curvearrowright \mathcal{M}_1$, $\pi_2 : \Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{M}_2$ 和 $\tau : \Lambda \curvearrowright \mathcal{A}$。此外，假设

$$\tau = \pi_1 \restriction (\Lambda \times A) = \pi_2 \restriction (\Lambda \times A).$$

令 $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$。根据 [8] 的命题 4.4， Γ 具有 HL 性质。

由于根据定理 3.8， $\mathcal{K}^\mathcal{L}_{\mathrm{fin}}$ 具有强合并性质，我们可以得到 $\mathcal{M}_1$和 $\mathcal{M}_2$ 在 $\mathcal{A}$ 上的强合并，记为 $\mathcal{N}_0$，使得 π_1、 π_2、 τ 分别作为 $\mathcal{N}$ 的子结构作用于 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$、 $\mathcal{A}$ 上，并且仍满足上述相容条件。此外，根据定理 3.8 的证明，我们可以假设 $N_0 = M_1 \cup M_2$ 和 $M_1 \cap M_2 = A$。现在，作为 Γ_1 和 Γ_2 的子群， Λ 以自然方式作用于 $\mathcal{N}_0$ 上，且此作用仍由自同构给出。

现在我们归纳地定义一个扩张序列

$$\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \cdots$$

$\mathcal{N}_0$。为定义 $\mathcal{N}_1$，对作用 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_0$ 和 $\Gamma_1 \curvearrowright \mathcal{M}_1$应用引理 7.4。我们得到 $\mathcal{N}_1$ 以及一个作用 $\Gamma_1 \curvearrowright \mathcal{N}_1$，它与作用 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_0$和 $\Gamma_1 \curvearrowright M_1$相容。此作用还诱导出一个作用 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_1$。为定义 $\mathcal{N}_2$，我们对这个诱导作用 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_1$ 和 $\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{M}_2$应用引理 7.4。结果是一个扩张 $\mathcal{N}_2$，以及一个作用 $\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{N}_2$，它与作用$\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_1$ 和 $\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{M}_2$相容。一般而言，假设已定义 $\mathcal{N}_{2k}$，并带有作用$\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{N}_{2k}$ 和 $\Gamma_1 \curvearrowright N_{2k-1}$。我们对诱导作用 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_{2k}$和作用 $\Gamma_1 \curvearrowright N_{2k-1}$ 应用引理 7.4，从而得到 $\mathcal{N}_{2k+1}$，以及一个作用 $\Gamma_1 \curvearrowright \mathcal{N}_{2k+1}$，它与前面提到的两个作用相容。类似地，对诱导作用 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}_{2k+1}$ 和作用 $\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{N}_{2k}$ 应用引理 7.4，得到 $\mathcal{N}_{2k+2}$ 和作用 $\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{N}_{2k+2}$。

设 $\mathcal{N}_\infty = \bigcup_n \mathcal{N}_n$。那么 $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$ 自然地作用于 $\mathcal{N}_\infty$，且此作用由自同构给出。我们将此作用记为 π。

现在将定理 7.8 应用于 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{N}_\infty$、$\mathcal{N}_0$ 和 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$，我们得到一个有限连续的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{N}$ 以及一个自同构作用 $\pi' \colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{N}$，使得$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{N}_0$ 的扩张，并且对于所有的 $\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 和 $x \in \mathcal{N}_0$，若 $\gamma \cdot_\pi x \in A$，则$\gamma \cdot_\pi x = \gamma \cdot_{\pi'} x$。

令 G 为由 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$生成的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ 的子群。由于 $\mathcal{N}$是有限的，G也是有限的。现在，作用 $G \curvearrowright \mathcal{N}$ 是 $\Gamma_1 \curvearrowright \mathcal{M}_1$ 和 $\Gamma_2 \curvearrowright \mathcal{M}_2$ 在$\Lambda \curvearrowright \mathcal{A}$上的融合。□

下面的定理说明 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 满足联合嵌入性质（JEP）。

定理 7.13. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名。设 Γ、Λ 是群，设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是连续 $\mathcal{L}$-预结构，且 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N} \curvearrowright \mathcal{N}$ 是自同构作用。假设 $\mathrm{diam}(M)$、$\mathrm{diam}(N) < \infty$。那么存在一个连续 $\mathcal{L}$-预结构 $\mathcal{P}$、一个自同构作用 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright \mathcal{P}$，以及嵌入 i，将 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 嵌入 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright \mathcal{P}$，还有嵌入 j，将 $\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$ 嵌入 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright \mathcal{P}$。特别地，$\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 满足联合嵌入性质（JEP）。

证明. 设 X 是 M 和 N 的不交并。设 $\delta \geqslant \mathrm{diam}(M)$、$\mathrm{diam}(N)$，且对所有 n-元 $R \in \mathcal{L}$ 以及所有 $1 \leqslant i \leqslant n$、$\delta \geqslant$，$\sup I_{R,\ i}$。于是定义 X 上的度量 d^X 如下：

$$d^X(x,y) = \begin{cases} d^M(x,y) & \text{if } x,y \in M \\ d^N(x,y) & \text{if } x,y \in N \\ \delta & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于每个 $R \in \mathcal{L}$，R^X 都自然定义在

$$\mathrm{dom}(R^X) = M^n \cup N^n.$$

显然，$\mathcal{X} = (X, d^X, (R^X)_{R \in \mathcal{L}})$ 是一个部分定义的连续 $\mathcal{L}$-预结构。于是根据引理 3.7，$\mathcal{X}$ 有一个保守扩张 $\mathcal{P}$。容易看出，$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 嵌入到 $\mathcal{P}$ 中，成为其子结构。

定义作用 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright \mathcal{P}$ 如下：

$$(\gamma, \lambda) \cdot x = \begin{cases} \gamma(x) & \text{if } x \in M \\ \lambda(x) & \text{if } x \in N. \end{cases}$$

容易看出，此作用是 $\mathcal{P}$上的自同构作用。此外，$\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 和$\Lambda \curvearrowright \mathcal{N}$嵌入到 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright \mathcal{P}$中。□

推论 7.14. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名。那么 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 是一个 Fra¨ıss´e 类。

证明. 注意到遗传性质显然成立，因此可直接由定理 7.12 和 7.13 得出。□

8. Dense Locally Finite Subgroups of the Automorphism Groups

在本文的最后一节中，我们证明 Hall 的普适局部有限群$\mathbb{H}$ 可以嵌入为适当 $\mathcal{L}$的 Aut $(\mathbb{U}_{\mathcal{L}})$ 的稠密子群。

P. Hall 最早在 [9] 中构造了 $\mathbb{H}$ ，并证明它是唯一一个对所有有限群都普适且具有超齐性的可数局部有限群。他还证明了 $\mathbb{H}$ 对所有可数局部有限群都是普适的。众所周知， $\mathbb{H}$ 是由所有有限群组成的可数 Fra¨ıss´e 类的 Fra¨ıss´e 极限。文献 [8] 证明了，对于任意可数距离值集 Δ， $\mathbb{H}$ 都能嵌入为$\mathbb{U}_\Delta$ 的等距变换群的稠密子群；对于 $\mathbb{U}$ 的等距变换群也同样成立（文献 [8] 的定理 3.14 和 3.16）。

这里我们首先考虑一个半适当连续签名 $\mathcal{L}$ ，以及适用于 $\mathcal{L}$ 的一个可数良好值对 (Δ, V)。根据定理 5.5，所有有限 (Δ, V) 值连续 $\mathcal{L}$ 结构组成的类 $\mathcal{K}_{(\Delta,V)}$ 是一个可数的 Fra¨ıss´é 类。我们考虑其子类 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ，定义如下：

$\mathcal{C}_{(\Delta,V)}$ = 是 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ 的子类，由自同构作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 组成，其中 Γ 是有限的，且 $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{(\Delta,V)}$。

第 7 节的全部内容都可以针对 $\mathcal{C}_{(\Delta,V)}$ 重复，从而得到以下结果。

定理 8.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名，且 (Δ, V) 是适用于 $\mathcal{L}$ 的一个可数良好值对。那么 $\mathcal{C}_{(\Delta,V)}$ 是一个可数的 Fra¨ıss´é 类。

证明。证明与推论 7.14 的证明完全相同。 □

令 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$ 为 $\mathcal{C}_{(\Delta,\ V)}$ 的 Fra¨ıss´e 极限。那么 $\mathcal{M}_\infty$ 是一个可数的 (Δ, V)-值连续 $\mathcal{L}$-预结构， Γ_∞ 是一个局部有限群，且该作用由自同构给出。根据 [8]，的定理 3.14 的论证，我们证明以下引理。

引理 8.2. $\mathcal{M}_\infty$ 与 $\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$ 同构。

证明。$\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$ 是唯一具有 (Δ, V)-乌雷松性质的可数连续 $\mathcal{L}$-预结构：给定任意有限的 (Δ, V)-值连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$、一个 $\mathcal{M}$ 的单点扩张 $\mathcal{N}$（该扩张为 (Δ, V)-值），以及从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$ 的同构嵌入 φ，存在一个从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$ 的同构嵌入 ψ，使得 $\psi \restriction M = \varphi$。

我们验证 $\mathcal{M}_\infty$ 具有这一性质。显然， $\mathcal{M}_\infty$ 是 (Δ, V)-值的。设 $A \subseteq \mathcal{M}_\infty$ ，并令 $\mathcal{A}_x$ 为 (Δ, V)-值的 $\mathcal{A}$ 的单点扩张。令 Γ 为平凡群。于是 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{A}$ 可平凡地嵌入 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{A}_x$ 。由 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$的普适性和超齐性，我们得到一个嵌入 φ ，将$\Gamma \curvearrowright \mathcal{A}_x$ 嵌入 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$ ，使得 $\varphi \restriction M$ 为恒等映射。因此， φ 证明了 $\mathcal{M}_\infty$具有(Δ, V)-乌雷松性质。□

引理 8.3. Γ_∞ 在 $\mathcal{M}_\infty$上忠实作用。

证明。设 $g \in \Gamma_\infty$ 是一个非单位元。令 Γ 为由 g 生成的 Γ_∞ 的子群。由于 Γ_∞ 是局部有限的， Γ 是有限的。考虑如下定义的有限连续 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$。令 $\delta \in \Delta$。令 $M = \Gamma$。对任意 $x \neq y \in M$，定义 $d^M(x、\ y) = \delta$。对任意 $R \in \mathcal{L}$，定义 R^M 恒等于 0。于是 $\mathcal{M}$

这是一个有限的、取值于 $(\Delta、 V)$ 的连续 $\mathcal{L}$-结构，而左乘作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ 是一个自同构作用。根据 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$ 的普适性和超齐性，我们知道 $\mathcal{M}$ 可以实现为 $\mathcal{M}_\infty$ 的一个子结构。由此可知，存在 $x \in \mathcal{M}_\infty$ 使得 $g \cdot x \neq x$。□

引理 8.4. Γ_∞ 与 $\mathbb{H}$同构。

证明. $\mathbb{H}$ 是满足以下扩张性质的唯一可数局部有限群：给定任意有限群 $G \leqslant H$ 以及从 G 到 $\mathbb{H}$的群同构嵌入 φ，存在从 H 到 $\mathbb{H}$ 的群同构嵌入 ψ，使得$\psi \restriction G = \varphi$。

我们验证 Γ_∞ 具有此性质。设给定 G、 H和 φ。考虑平凡结构 $\mathcal{M}$，它是一个单元素集，且所有关系符号都解释为恒等于 0 的函数。于是，由于 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$ 的普适性和超齐性，存在一个将 $H \curvearrowright \mathcal{M}$ 嵌入 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$ 的嵌入 ψ，使得 $\psi \restriction G = \varphi$。这就证明了所需的扩张性质。□

由于 $\mathcal{M}_\infty$ 可数，我们赋予 $\mathcal{M}_\infty$ 离散拓扑，并赋予 Aut($\mathcal{M}_\infty$)相应的逐点收敛拓扑。于是 Aut($\mathcal{M}_\infty$) 成为一个波兰群。事实上，它同构于 S_∞（无限置换群）的一个闭子群。

引理 8.5. Γ_∞ 在 Aut($\mathcal{M}_\infty$)中稠密。

证明。设 $g \in$ Aut($\mathcal{M}_\infty$)，且 $A \subseteq M_\infty$ 有限。我们需要找到一个 $\gamma \in \Gamma_\infty$，使得对每个 $a \in A$，都有 $g(a) = \gamma \cdot a$。令 Γ 为由 g生成的 Aut($\mathcal{M}_\infty$) 的子群。

先假设 Γ 有限。令 $B = \Gamma(A)$。 B 有限，并且根据定义， Γ 通过自同构作用于 $\mathcal{B}$。由 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$的普适性和超齐性，我们可以将 Γ 实现为 Γ_∞的一个子群。这给出了一个 $\gamma \in \Gamma_\infty$，使得对每个 $a \in A$，都有 $g(a) = \gamma \cdot a$。

接下来假设 Γ 无限。则 $\Gamma = \langle g \rangle$ 是一个自由阿贝尔群；根据 Herwig–Lascar 的一个定理（ [10]中的定理 3.3）， Γ 具有 HL 性质。考虑$F = \{g\}$ 和 $B = A \cup g(A)$。根据定理 7.8，存在一个有限连续的 $\mathcal{L}$-结构$\mathcal{N}$ 以及一个作用 $\pi : \Gamma \curvearrowright \mathcal{N}$，使得 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个扩张，并且对所有 $a \in A$，都有 $g \cdot_\pi a = g(a)$。令 Λ 为由 g生成的 Aut ($\mathcal{N}$) 的子群。由于 $\mathcal{N}$有限，Λ 有限。由 $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathcal{M}_\infty$的普适性和超齐性，我们可以将$\Lambda$ 实现为 Γ_∞ 的一个子群，并将 $\mathcal{N}$实现为扩张 $\mathcal{B}$的 $\mathcal{M}_\infty$ 的一个子结构。这给出了一个$\gamma \in \Gamma_\infty$，使得对每个 $a \in A$，都有 $g(a) = \gamma \cdot a$。□

将这些引理合在一起，我们证明了以下定理。

定理 8.6. 设 $\mathcal{L}$ 是一个半适当连续签名，且 $(\Delta、 V)$ 是 $\mathcal{L}$的一个可数良好值对。那么 Aut($\mathbb{U}_{(\Delta,\ V)}$) 包含 $\mathbb{H}$ 作为一个稠密子群。

我们有以下推论。

推论 8.7. 设 $\mathcal{L}$ 是一个适当连续签名。那么 Aut($\mathbb{U}_\mathcal{L}$) 包含$\mathbb{H}$作为一个稠密子群。

证明。由定理 8.6 可知，Aut($\mathbb{QU}_\mathcal{L}$) 包含 $\mathbb{H}$ 作为一个稠密子群。由定理 5.6， $\mathbb{U}_\mathcal{L}$ 同构于 $\mathbb{QU}_\mathcal{L}$ 的完备化，因此存在一个稠密像的同构嵌入 $i : \mathbb{QU}_\mathcal{L} \to \mathbb{U}_\mathcal{L}$。这诱导出一个群同构嵌入 η : Aut($\mathbb{QU}_\mathcal{L}$) →Aut($\mathbb{U}_\mathcal{L}$)。由定理 5.8， η(Aut($\mathbb{QU}_\mathcal{L}$))

在 Aut($\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$)中稠密。容易看出 η 是连续的。因此， $\eta(\mathbb{H})$ 是 Aut($\mathbb{U}_{\mathcal{L}}$) 的一个稠密子群，且与 $\mathbb{H}$同构。□

References

[1] I. Ben Yaacov, 《Gurarij 空间的线性等距群是普适的》。

Proc. Am. Math. ( ), 第 – 期。

Soc. 142 2014 7, 2459 2467

[2] I. Ben Yaacov、M. Doucha、A. Nies、T. Tsankov, 《度量斯科特分析》。 *Adv. Math.* 318 (2017), 46–87。[3] I. Ben Yaacov 和 A. Usvyatsov, 《连续一阶逻辑与局部稳定性》,

Trans. ( ), 第 10 期,

Amer. Math. Soc. 362 2010 5259

5213– 。[4] C.C. Chang、H.J. Keisler, *Continuous Model Theory*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1966 年。[5] T. Coulbois, 《自由积、原有限拓扑与有限生成子群》,

Int. J. Al- ( ), 第 – 期。

gebra Comput. 11 2001 2, 171 184

[6] M. Etedadialiabadi、S. Gao, 《部分等距映射的扩张》, arXiv:1903.09723。[7] M. Etedadialiabadi、S. Gao, 《部分同构的扩张》, *J. Symb. Logic* 87 (2022), 第 1 期, 416–435。[8] M. Etedadialiabadi、S. Gao、F. Le Maˆıtre、J. Melleray, 《超扩展空间自同构群的稠密局部有限子群》, *Adv. Math.* 391 (2021), 107966, 42 页。[9] P. Hall, 《局部有限群的一些构造》, *J. London Math. Soc.* S1-34 (1959), 第 3 期, 305–319。[10] B. Herwig、D. Lascar, 《扩张部分自同构与自由群上的原有限拓扑》,

Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 第 5 期, 1985–2021。[11] E. Hrushovski, 《图的部分同构的扩张》,

Combinatorica 12 1992 4, ( ), 第 – 期。

411 416

[12] J. Hubiˇcka、M. Koneˇcn´y、J. Neˇsetˇril, 《所有这些 EPPA 类（Herwig–Lascar 定理的强化）》, arXiv: 1902.03855v4。[13] M. Katˇetov, 《关于泛度量空间》, 载于 *General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra VI* 1986 323 330 16 （布拉格, ）, –。《数学研究与探索》。Heldermann, 柏林, 1988 年。[14] C. Rosendal, 《有限可逼近群与作用（第一部分）：Ribes–Zalesskii 性质》, *J. Symb. Logic* 76 (2011), 第 4 期, 1297–1306。[15] C. Rosendal, 《有限可逼近群与作用（第二部分）：泛表示》,

J. ( ), 第 – 期。

Symb. Logic 76 2011 4, 1307 1321

[16] D. Siniora、S. Solecki, 《部分自同构的相容扩张、自由 amalgamation 与自同构群》,

J. Symb. Logic 85 (2020), 第 1 期, 199–223。[17] S. Solecki, 《部分等距映射的扩张》,

Israel J. Math. 150 (2005), 315–331。[18] P. Urysohn, 《关于一个普适度量空间》, *Bull. Sci. Math.* 51 (1927), 43–64, 74–90。[19] V.V. Uspenskij, 《关于乌雷松泛度量空间的等距变换群》,

Comment. ( ), 第 1 期,

Math. Univ. Carolin. 31 1990 182

181–。

School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China
Email address: sgao@nankai.edu.cn

School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China
Email address: renxz@mail.nankai.edu.cn