arXiv:2302.05868v1 [math.NT] 12 Feb 2023

关于一类 Moran 谱测度之谱的介值性质

JINJUN LI 和 ZHIYI WU

Abstract. 我们证明，一类 Moran 谱测度的谱的贝尔林维数介于 0 与其上熵维数之间。此外，对于这样的 Moran 谱测度 μ，我们证明 μ 的谱的贝尔林维数具有介值性质：对于 μ 的上熵维数与 0 之间的任意值 t，都存在一个谱，其贝尔林维数为 t.。特别地，这一结果肯定地解决了 Fu、He 和 Wen 在 [J. Math. Pures Appl. 116 (2018年), 105–131] 中提出的一个涉及谱伯努利卷积的猜想。此外，贝尔林维数等于 0 与 $\dim_e \mu$ 之间任意固定值的谱所构成的集合，其基数为连续统。

1. Introduction and main results

设 μ 是在 $\mathbb{R}^d$. 中具有紧支撑的博雷尔概率测度。若存在两个常数 A、$B > 0$ 以及一个称为框架谱的可数集 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$，使得对于每个 $f \in L^2(\mu)$，都有

$$A\|f\|^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle f, e_\lambda\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \tag{1.1}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $L^2(\mu)$中的内积，$e_\lambda(x) = e^{2\pi i x\cdot\lambda}$，而 $x\cdot\lambda = \sum_{i=1}^d x_i\lambda_i$ 是 $\mathbb{R}^d$中的标准内积。特别地，若 $A = B = 1$满足方程（1.1），我们称 μ 为一个帕塞瓦尔框架谱测度，其帕塞瓦尔框架谱为 Λ。在这种情况下，不难看出，集合 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $L^2(\mu)$的一组正交归一基。基于这一事实，我们也称 μ 为谱测度，其谱为 Λ。已有许多谱测度被发现，例如参见
[1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 22, 25, 27, 33, 34, 36, 35, 38] 及其中的参考文献。一般而言，对于奇异谱测度，包含 0 的谱并不唯一，参见
[2, 8, 24, 21, 21, 27, 31, 32] 及其中的参考文献。然而，确定给定奇异谱测度的所有谱是一项重大挑战。据我们所知，目前还没有任何一种奇异谱测度的谱被完全刻画。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：28A80；42C05。
*Key words and phrases.*Moran 测度；谱测度；谱；贝尔林维数。

因此，从不同角度研究给定奇异谱测度的谱的结构，并尽可能多地找出其谱，是很有意义的。本文关注一类奇异谱测度，并证明其谱的贝尔林维数具有有趣的介值性质。此外，我们证明，贝尔林维数等于任意给定值的谱所构成的集合，其基数为连续统。这是这一研究方向上的首批结果；我们的结果表明，这类谱测度通常拥有大量的谱。尽管我们无法完全刻画奇异谱测度的谱，但我们的结果为理解其谱的结构提供了一些启示。

设 $\mathcal{B} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\mathcal{D} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两个整数序列，且满足$2 \le q_n < b_n$。对于每个 $k \ge 1$，记 $\mathcal{D}_k = \{0, 1, \dots, q_k - 1\}$，并令

$$\mu = \mu_{\mathcal{D},\mathcal{B}} := \delta_{b_1^{-1}\mathcal{D}_1} * \delta_{(b_1b_2)^{-1}\mathcal{D}_2} * \cdots * \delta_{(b_1b_2\cdots b_k)^{-1}\mathcal{D}_k} * \cdots, \tag{1.2}$$

其中 $\delta_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\#\mathcal{E}} \sum_{e\in\mathcal{E}} \delta_e$，$\#\mathcal{E}$ 表示集合 $\mathcal{E}$的基数，δ_e 表示位于 e 处的狄拉克测度，而 $*$是卷积算子。我们称 μ 为 Moran 测度；当 $b_n = b$且对所有 $n \ge 1$. 都有 $q_n = q$ 时，它就是 [9] 中研究的康托测度 $\mu_{q,\ b}$。μ 的支撑可以用数字展开表示

$$\operatorname{supp}\mu = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{b_1 \cdots b_k} :\ d_k \in \mathcal{D}_k, k \ge 1 \right\}. \tag{1.3}$$

它可以看作是冯、Wen 和吴[20]引入的一种特殊莫兰集。

[1] 证明了，若对所有 $n \ge 1$ 都有 $q_n | b_n$，则 μ 是谱测度；作者还为 Moran 测度找到了一个特殊的谱。在本文中，我们始终假设序列 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 满足以下两个技术条件：

$$2 \le r_n := \frac{b_n}{q_n} \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

and

$$M := \sup_n \{b_n\} < \infty. \tag{1.5}$$

例如，如果对于所有 $n \ge 1$ 和 $2 \le b/q \in \mathbb{N}$，都有 $q_n = q$、$b_n = b$，那么 (1.4) 和 (1.5) 均成立。

假设 (1.4) 保证了 $\mu_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ 的奇异性。已有一些结果表明，框架谱测度的维数与其谱的 Beurling 维数之间存在密切关系。例如，Dutkay 等人 [13] 证明，对于具有相同压缩比、相等概率权重且满足开集条件的自相似框架谱测度，其任意框架谱的 Beurling 维数都不超过其支撑的豪斯多夫维数。He 等人 [23] 证明，即使去掉压缩比相同和概率权重相等这两个假设，这一结果仍然成立。一般而言，He 等人 $\mu_{\mathcal{D}}$ 提出了以下猜想：如果 是一个谱为 且具有紧支撑 $\mathcal{B}$ 的框架谱测度，那么

去掉压缩比相同和概率权重相等这两个条件。一般而言，He 等人 [23] 提出了以下猜想：如果 μ 是一个谱为 Λ 且具有紧支撑 T 的框架谱测度，那么

$$\dim \Lambda \leq \dim_{\mathrm{H}} T,$$

其中 $\dim \Lambda$ 和 $\dim_H T$ 分别表示 Λ 的贝尔林维数和 T的豪斯多夫维数。然而，Shi [39] 构造了一个谱测度，使得它存在一个谱，其贝尔林维数严格大于其支撑的豪斯多夫维数。也就是说，对于框架谱测度，其支撑的豪斯多夫维数并不是其谱的贝尔林维数的自然上界。事实上，Shi [39] 证明，对于任意框架谱测度，其框架谱的贝尔林维数均受其上熵维数所界定。另一方面， [26] 中的定理 1.3 蕴含，框架谱测度的傅里叶维数是其框架谱贝尔林维数的下界。更确切地说，若 μ 是一个框架谱测度，且其框架谱为 Λ，则

$$\dim_{\mathrm{F}} \mu \leq \dim \Lambda \leq \overline{\dim}_{\mathrm{e}} \mu, \tag{1.6}$$

其中 $\dim_{\mathrm{F}} \mu$ 和 $\overline{\dim}_{\mathrm{e}} \mu$ 分别表示 μ的傅里叶维数和上熵维数。这些维数的定义将在下一节给出。

对于式 (1.2) 中定义的 Moran 测度，我们将证明，$\dim_{\mathrm{F}} \mu = 0$（命题 2.1）和 $\dim_{\mathrm{e}} \mu$ 可由一个与$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 相关的公式表示（命题 2.2）。因此，由式 (1.6) 可知， μ 的谱的贝尔林维数介于 0 和 $\dim_{\mathrm{e}} \mu$之间。众所周知，一个谱测度可能有多个不同的谱，但我们通常不知道这些谱有多“稠密”。例如，是否存在某个稀疏的谱，其贝尔林维数为零？事实上，Dai、He 和 Lai [9]为某类康托尔测度$\mu_{q,\ b}$给出了一些贝尔林维数为零的谱；An 和 Lai [4] 则证明，对于一般的自仿射谱测度，存在贝尔林维数为零的谱。这些结果多少有些出人意料，因为根据 Landau 的经典结果 [29]，勒贝格测度不存在贝尔林维数为零的谱。

自然会想到，是否存在一些谱，其贝尔林维数等于其他值？本文证明，μ 的谱的贝尔林维数具有如下介值性质。

定理 1.1. 设$\mu = \mu_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ 为式 (1.2) 中定义的 Moran 测度，且满足 (1.4) 和 (1.5)。对于任意 $t \in [0,$维数$_{\mathrm{e}}\, \mu]$，存在 $\overline{\Lambda_t}$的一个谱μ ，使得维数 $\Lambda_t = t$.

注 1.1. 我们指出，条件 (1.5) 保证我们可以根据 [30]，中的公式计算 μ 的上局部维数，进而计算其上熵维数（见命题 2.2）。当 $q_n = q$、$b_n = b$ 对所有 $n \geq 1$都成立时，$\dim_{\mathrm{e}} \mu$ 与 $\dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{supp} \mu)$ 相同（见第

2 节中的命题 2.2）。特别地，令 $q_n = 2$、$b_n = 2k$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立，则 μ 就是谱伯努利卷积，而定理 1.1 肯定了 Fu 、 He 和 Wen 在 [21, 猜想 5.3] 中提出的猜想。

此外，我们还可以描述贝尔林维数等于 0 与 $\dim_{\mathrm{e}}\mu$. 之间某个固定值的谱的基数。更确切地说，我们有如下令人惊讶的结果。

定理 1.2. 设 $\mu = \mu_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ 为由 (1.2) 定义、满足 (1.4) 和 (1.5) 的 Moran 测度。对于任意 $t \in [0,\dim_{\mathrm{e}}\mu]$，水平集

$$L_t := \{\Lambda : \Lambda \textit{ is a spectrum of } \mu \textit{ and } \dim\Lambda = t\}$$

具有连续统的基数。

2. Preliminaries

本节旨在介绍测度的傅里叶维数和上熵维数的定义及其若干性质，以及 $\mathbb{R}^d$ 中可数集的贝尔林维数。

2.1. 傅里叶维数。测度的傅里叶维数衡量其傅里叶变换的衰减速度，并能反映测度的一些内在性质。更准确地说，对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的博雷尔概率测度，其傅里叶维数定义为

$$\dim_{\mathrm{F}}\mu = \sup\Big\{0 \le s \le d : \text{there exists a constant } C > 0 \text{ such that } |\widehat{\mu}(\xi)| \le C|\xi|^{-s/2} \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^d\Big\},$$

其中 $\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi\cdot x}d\mu(x)$ 是 μ 的傅里叶变换。

若 μ 是框架谱测度，其框架谱为 Λ，则 [26] 中的定理 1.3 蕴含

$$\dim\Lambda \ge \dim_{\mathrm{F}}\mu.$$

也就是说，框架谱测度的傅里叶维数是其谱的贝尔林维数的下界。利用 [28] 中几乎相同的论证，我们可以得到以下结果。不过，为方便读者，我们在此给出完整证明。

命题 2.1. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 满足：对所有 $n \ge 1$，均有 $r_n \ge 2$；并设 $\mu = \mu_{\mathcal{D},\ \mathcal{B}}$ 是由 (1.2) 定义的 Moran 测度。那么 $\dim_{\mathrm{F}}\mu = 0$.

证明。只需证明 μ 的傅里叶变换不衰减。我们将采用以下经典方法来证明。对于集合 $E \subset [0,1]$ 和整数 n，定义

$$nE = \{nx(\mathrm{mod}1) : x \in E\}.$$

如果存在一个递增的正整数序列 $\{n_k\}$，使得

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} n_k E} \ne [0,1],$$

其中， $\overline{A}$ 表示 A 在欧氏拓扑下的闭包。那么， E 上的任意概率测度的傅里叶变换都不衰减。其证明可见于 [28] 或 [37]。

对于 $k \geq 1$，令 $n_k = b_1 \cdots b_k$。那么，根据 $\operatorname{supp}\mu$ in 的表示 (1.3)

$$n_k(\operatorname{supp}\mu) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{k+j}}{b_{k+1} \dots b_{k+j}} : \ d_{k+j} \in \mathcal{D}_{k+j}, j \geq 1 \right\}.$$

注意到 $b_k \geq 4$ 和 $r_k \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned} \max(n_k(\operatorname{supp}\mu)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_{k+j}-1}{b_{k+1} \dots b_{k+j}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k+1} \dots b_{k+j-1} r_{k+j}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^{j-1}} < 1. \end{aligned}$$

这意味着 $n_k(\operatorname{supp}\mu) \neq \overline{[0,1]}$，因此 $\dim_{\mathrm{F}} \mu = 0$. □

2.2. 熵维数。概率测度的熵维数常用于分形和动力系统中。令 $\mathcal{P}_n$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的第 n 个二进划分:

$$\mathcal{P}_n = \{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d : \ I_j \in \mathcal{P}_n^{(1)}, 1 \leq j \leq d\},$$

其中

$$\mathcal{P}_n^{(1)} = \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

写出

$$H_n(\mu) = -\sum_{Q \in \mathcal{P}_n} \mu(Q) \log \mu(Q).$$

μ 的上熵维数定义为

$$\overline{\dim}_{\mathrm{e}} \mu = \limsup_{n \to \infty} \frac{H_n(\mu)}{\log 2^n}.$$

下熵维数 $\dim_{\mathrm{e}} \mu$ 类似地定义为取下极限。

命题 2.2. 设 $\mu = \mu_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ 为在 (1.2) 中定义且满足 (1.5) 的 Moran 测度。则

$$\overline{\dim}_{\mathrm{e}} \mu = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n}. \tag{2.1}$$

值得指出的是， μ 的支撑的豪斯多夫维数通常小于 $\dim_{\mathrm{e}} \mu$。事实上，集合 $\operatorname{supp}\mu$ 可视为一个部分齐次Moran集，而 [20] 中的引理 2.2表明，其豪斯多夫维数为

$$\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{supp}\mu = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n + \log(b_{n+1}/q_{n+1})},$$

进而，条件 (1.5) 蕴含

$$\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{supp} \mu = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

当 $q_n = q$、$b_n = b$ 对所有 $n \geq 1$ 都成立时，命题 2.2 蕴含 $\dim_{\mathrm{e}} \mu = \dim_{\mathrm{H}} \overline{\operatorname{supp}} \mu$。

我们将在定理 1.1 的证明中证明，存在一个 μ 的谱 Λ，使得 $\overline{\dim}\, \Lambda = \dim_{\mathrm{e}} \mu$。另一方面，很容易构造序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\dim \Lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n} > \liminf_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n} = \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{supp} \mu.$$

这为 He 等人 [23] 提出的猜想提供了反例。

为了证明命题 2.2，我们需要介绍一些记号。对于 $\mathbb{R}^d$ 中的博雷尔概率测度 μ，其上填充维数定义为

$$\overline{\dim}_{\mathrm{P}} \mu = \inf\{\dim_{\mathrm{P}} F : \ \mu(F) = 1\},$$

其中，$\dim_{\mathrm{P}} F$ 是 F 的填充维数。关于其定义和性质，读者可参阅著名的书籍 [17, 18]。测度的上填充维数与其上局部维数密切相关，后者定义为

$$\overline{d}(\mu, x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

众所周知，$\dim_{\mathrm{P}} \mu$ 等于 $\overline{d}(\mu, x)$ 的本性上确界。也就是说，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{P}} \mu = \operatorname{ess\,sup} \overline{d}(\mu, x), \tag{2.2}$$

例如，参见 [16] 或 [18]。

上熵维数还有一种等价定义。

引理 2.1（ [5]中的定理 2.1）。设 μ 是$\mathbb{R}^d$. 上的博雷尔概率测度，则

$$\overline{\dim}_{\mathrm{e}} \mu = \limsup_{r\to 0} \frac{\int_{\operatorname{supp}\mu} \log \mu(B(x,r)) d\mu(x)}{\log r}.$$

现在我们转向命题 2.2 的证明。

命题 2.2 的证明。众所周知，$\dim_{\mathrm{e}} \mu \leq \dim_{\mathrm{P}} \mu$，例如参见 [19]中的定理 1.3。另一方面，[30]中给出的公式表明

$$\overline{d}(\mu, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n}$$

对于 μ 几乎处处的 $x \in \operatorname{supp} \mu$. 事实上， [30]中给出了更一般一类测度的上局部维数公式。因此，由 (2.2) 可得 (2.1) 中的上界。

接下来我们使用引理 2.1 得到下界。对于每个 $n \geq 1$，定义

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \left[\frac{k}{b_1 \cdots b_n}, \frac{k+1}{b_1 \cdots b_n} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

显然，每个 $\mathcal{A}_n$ 都是 $\mathbb{R}$. 的划分。对于任意 $x \in \operatorname{supp}\mu$ 和 $r'_n = \frac{1}{b_1 \cdots b_n}$，我们有

$$B(x, r'_n) \subset \frac{3}{2} I, \tag{2.3}$$

其中 $x \in I \in \mathcal{A}_n$和$\frac{3}{2}I = B(x_I, \frac{3}{2}|I|)$。这里，$x_I$是 I的中心，$|I|$表示 I的勒贝格测度。结论 (2.3) 意味着

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{supp}\mu} \log \mu(B(x, r'_n)) d\mu(x) &\leq \sum_{I \in \mathcal{A}_n} \mu(I) \log(3\mu(I)) \\ &= \log 3 - \log q_1 \cdots q_n.\end{aligned}$$

因此，由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_{\mathrm{e}}\, \mu &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\int_{\operatorname{supp}\mu} \log \mu(B(x, r'_n)) d\mu(x)}{\log r'_n} \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n}.\end{aligned}$$

这证明了 (2.1) 中的下界，因此命题 2.2 的证明完成。□

2.3. 贝尔林维数。Czaja、Kutyniok 和 Speegle 在 [6] 中引入了离散 $\mathbb{R}^d$ 子集的贝尔林维数概念，该概念基于贝尔林密度，并将其用于研究 Gabor 伪框架。从那时起，贝尔林维数在研究谱测度的（框架）谱方面得到了广泛应用，见 [9, 13, 23, 39] 及其中的参考文献。本文只考虑 $\mathbb{R}$. 中的离散集。设 $\Lambda \subset \mathbb{R}$ 为一个可数集。对于$r > 0$，Λ 的上 r-贝尔林密度定义为

$$D_r^+(\Lambda) = \limsup_{h\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap B(x, h))}{h^r}.$$

不难证明，存在一个 r 的临界值，使得 $D_r^+(\Lambda)$ 从 ∞ 跃变为 0。这个临界值定义为 Λ. 的贝尔林维数。更准确地说，

$$\dim \Lambda = \inf\{r : D_r^+(\Lambda) = 0\} = \sup\{r : D_r^+(\Lambda) = \infty\}.$$

我们指出，此处的贝尔林维数在 [6] 中称为上贝尔林维数；我们也可以类似地定义下贝尔林维数，但本文不需要用到它。以下命题见 [6], ，它提供了一种计算可数集贝尔林维数的方法。

命题 2.3（[6]）。设 $\Lambda \subset \mathbb{R}$ 是一个可数集。那么

$$\dim \Lambda = \limsup_{h\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{\log \#(\Lambda \cap B(x, h))}{\log h}. \tag{2.4}$$

显然，公式 (2.4) 等价于以下内容

$$\dim \Lambda = \limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\Lambda \cap I)}{\log |I|}, \tag{2.5}$$

其中 I 取遍 $\mathbb{R}$ 中长度为 $|I| \to \infty$.的所有区间

引理 2.2. [6] 设 Λ_1、$\Lambda_2 \subset \mathbb{R}$ 为两个可数集。则以下结论成立：

(i) 单调性：若 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$，则

$$\dim \Lambda_1 \le \dim \Lambda_2;$$

(ii) 有限稳定性：

$$\dim(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \max(\dim \Lambda_1, \dim \Lambda_2).$$

定义 2.1. 称可数集 $\Lambda = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ 为 b-稀疏的，若$a_0 = 0$、$|a_1| \ge b$ 且对所有 $n \ge 1$，$|a_{n+1}| \ge b|a_n|$。

引理 2.3. [4] 令 $b > 1$。若 Λ 是一个 b-稀疏集，则 $\dim \Lambda = 0$。

一般来说，除非可数集具有特定结构，否则很难计算其贝尔林维数。接下来，我们给出实数集 $\mathbb{R}$ 中一类特殊离散集的贝尔林维数公式，该公式在定理 1.1 的证明中起关键作用。设 $\{t_k\}$ 是一个正整数序列。设 $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$、$\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是两个满足 $n_0 = 1$ 且

$$t_{k+1}n_1 \cdots n_k > \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1)t_i n_1 \cdots n_{i-1} \quad \text{for any } k \ge 1. \tag{2.6}$$

例如，若 $t_k = n_k/m_k$ 对于 $k \ge 1$ 成立，则 (2.6) 成立。事实上，对于任意 $k \ge 1$,

$$\begin{aligned} & t_{k+1}n_1 \cdots n_k - \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1)t_i n_1 \cdots n_{i-1} \\ \ge & t_{k+1}n_1 \cdots n_k + t_1 + t_2 n_1 + \cdots + t_k n_1 \cdots n_{k-1} \\ & - n_1 - n_1 n_2 - \cdots - n_1 \cdots n_k \\ > & 0 \end{aligned}$$

由 $t_k = n_k/m_k \ge 2$ 这一事实可得。

对于任意 $k \ge 1$，记

$$\mathcal{M}_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i t_i (n_1 \cdots n_{i-1}) : \ x_i \in \{0, 1, \ldots, m_i - 1\} \text{ for } 1 \le i \le k \right\}$$

并定义

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}(\{n_k\}, \{m_k\}, \{t_k\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k. \tag{2.7}$$

我们称 $\mathcal{M}$ 为与数据 $\{n_k\}$、$\{m_k\}$ 和 $\{t_k\}$ 相关联的整数莫兰集。整数莫兰集的定义源于一些已知谱测度的谱结构。

由于整数莫兰集的构造过程清晰可追溯，因此可以计算其贝尔林维数。更准确地说，我们有以下结果。

命题 2.4. 设 $\mathcal{M}$ 为按 (2.7) 定义的整数莫兰集，且相关数据 $\{m_k\}$、$\{n_k\}$ 和 $\{t_k\}$ 满足假设 (2.6)。那么，其贝尔林维数由以下公式给出

$$\dim \mathcal{M} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1 \cdots m_k}{\log m_k t_k n_1 \cdots n_{k-1}}. \tag{2.8}$$

证明. 首先，若存在 $K \geq 1$ 使得对所有 $k \geq K$都有 $m_k = 1$ ，则相应的集合 $\mathcal{M}$ 是一个有限集，因此 $\dim \mathcal{M} = 0.$ 。也就是说，(2.8) 成立。因此，接下来我们假设只有有限多个 k 满足$m_k \geq 2.$

对于满足 $m_k \geq 2$ 的正整数 k，令 $J_k = [0, \sum_{i=1}^{k}(m_i-1)t_i(n_1 \cdots n_{i-1})]$.
则 $\#(\mathcal{M} \cap J_k) = \#\mathcal{M}_k = m_1 \cdots m_k$，并且我们可以利用 (2.6) 估计 J_k 的长度:

$$\begin{aligned} |J_k| &= m_k t_k (n_1 \cdots n_{k-1}) - \left(t_k n_1 \cdots n_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} (m_i - 1) t_i n_1 \cdots n_{i-1} \right) \\ &\leq m_k t_k n_1 \cdots n_{k-1}. \end{aligned}$$

因此，由命题 2.3 可得

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M} &= \limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M} \cap I)}{\log |I|} \qquad (\text{by } (2.5)) \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M} \cap J_k)}{\log |J_k|} \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1 \cdots m_k}{\log m_k t_k n_1 \cdots n_{k-1}}. \end{aligned}$$

接下来我们证明

$$\dim \mathcal{M} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1 \cdots m_k}{\log m_k t_k n_1 \cdots n_{k-1}}. \tag{2.9}$$

假设 $I = [a, b]$ 是一个区间，满足 a、$b \in \mathbb{N}$、$a < b$。我们可以假设 a、$b \in \mathcal{M}$。事实上，若非如此，我们可以将区间 I 略微缩短为 I'，使得 I' 的端点位于 $\mathcal{M}$ 中，且 $\#(\mathcal{M} \cap I') = \#(\mathcal{M} \cap I)$。要证明 (2.9)，只需考虑区间 I' ，因为

$$\limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M} \cap I)}{\log |I|} \leq \limsup_{|I'|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M} \cap I')}{\log |I'|}.$$

因此，存在一些 $k \geq 1$ 和 x_i'、$x_i \in \{0, 1, \ldots, m_i - 1\}\,(1 \leq i \leq k)$ $x_k \neq 0$，使得

$$a = \sum_{i=1}^{k} x_i' t_i (n_1 \cdots n_{i-1}), \quad b = \sum_{i=1}^{k} x_i t_i (n_1 \cdots n_{i-1}).$$

显然，$x_k \geq x_k'$。我们可以假设 $x_k' \neq x_k.$。否则，我们考虑区间 $I - x_k t_k n_1 \cdots n_{k-1}$。我们将证明分为两种情况。

Case 1. $x_k - x_k' \geq 2$. 显然，在这种情况下，所有 $m_k > 2$。我们可以得到以下估计:

$$\#(\mathcal{M} \cap [a, b]) \leq m_1 \cdots m_{k-1}(x_k - x_k')$$

and

$$\begin{aligned} b - a &= (x_1 - x_1')t_1 + (x_2 - x_2')t_2 n_1 + \cdots + (x_k - x_k')t_k (n_1 \cdots n_{k-1}) \\ &= (x_1 - x_1')t_1 + (x_2 - x_2')t_2 n_1 + \cdots + (x_{k-1} - x_{k-1}')t_{k-1}(n_1 \cdots n_{k-2}) \\ &\quad + (n_1 \cdots n_{k-1})t_k + (x_k - x_k' - 1)t_k (n_1 \cdots n_{k-1}) \\ &\geq (x_k - x_k' - 1)t_k (n_1 \cdots n_{k-1}), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由假设 (2.6) 得出。

Let

$$f(s) = \frac{\log s(m_1 \cdots m_{k-1})}{\log(s-1)t_k (n_1 \cdots n_{k-1})} := \frac{\log s a_{k-1}}{\log(s-1)c_{k-1}}, \quad s \geq 2.$$

注意

$$\begin{aligned} f(s+1) - f(s) &= \frac{\log(s+1)a_{k-1}}{\log s c_{k-1}} - \frac{\log s a_{k-1}}{\log(s-1)c_{k-1}} \\ &= \frac{\log(s+1)a_{k-1} \cdot \log(s-1)c_{k-1} - \log s a_{k-1} \cdot \log s c_{k-1}}{\log s c_{k-1} \cdot \log(s-1)c_{k-1}}. \end{aligned}$$

由于上述公式的分母大于 0，我们只需考虑分子。记

$$g(s) = \log(s+1)a_{k-1} \cdot \log(s-1)c_{k-1} - \log s a_{k-1} \cdot \log s c_{k-1}.$$

通过初等计算以及对所有 $k \geq 1$ 均有 $n_k \geq 2m_k$、$m_k \geq 2$、$t_k \geq 2$ 的假设，我们得到

$$\begin{aligned} g(s) &= \log(s+1)\log(s-1) - \log s \log s + \log c_{k-1} \log\left(\frac{s+1}{s}\right) \\ &\quad + \log a_{k-1} \log\left(\frac{s-1}{s}\right) \\ &\geq \log(s+1)\log(s-1) - \log s \log s + \log(2^{k-1} t_k a_{k-1}) \log\left(\frac{s+1}{s}\right) \\ &\quad + \left(\log\frac{s-1}{s}\right)\log a_{k-1} \\ &\geq \log(s+1)\log(s-1) - \log s \log s \\ &\quad + \left((2k-1)\log\frac{s+1}{s} + (k-1)\log\frac{s-1}{s}\right)\log 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

当 k 充分大时。这意味着 $f(s)$（当 k 充分大时）随 s 增大；注意到 $x_k - x'_k \leq m_k - 1$，我们有

$$\begin{aligned} \limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M}\cap I)}{\log |I|} &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(x_k - x'_k)(m_1\cdots m_{k-1})}{\log(x_k - x'_k - 1)t_k(n_1\cdots n_{k-1})} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(m_k-1)(m_1\cdots m_{k-1})}{\log(m_k-2)t_k(n_1\cdots n_{k-1})} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1\cdots m_k}{\log m_k t_k(n_1\cdots n_{k-1})(1-\frac{2}{m_k})} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1\cdots m_k}{\log m_k t_k n_1\cdots n_{k-1}}. \end{aligned}$$

结合 (2.5)，可知 (2.9) 成立。

Case 2. $x_k = x'_k + 1$。令

$$c = \sum_{i=1}^{k-1}(m_i - 1)t_i(n_1\cdots n_{i-1}) + x'_k t_k n_1\cdots n_{k-1}.$$

由假设 (2.6) 可得 $c < b.$。我们将 $[a,b]$ 分成两个不相交的子区间 $[a,b] = [a,c]\cup(c,b]$。不失一般性，假设 $\#(\mathcal{M}\cap(c,b]) \leq \#(\mathcal{M}\cap[a,c])$。于是我们有

$$\#(\mathcal{M}\cap[a,b]) \leq 2\#(\mathcal{M}\cap[a,c]).$$

若对所有 $1 \leq i \leq k-1$ 都有 $m_i - 1 - x'_i \leq 1$，我们声称 $\limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M}\cap I)}{\log |I|} = 0$，因此 (2.9) 显然成立。事实上，若对于 $1 \leq i \leq k-1$ 有 $x'_i = m_i - 1$，则 $a = c$，从而 $\#(\mathcal{M}\cap[a,b]) \leq 2$；若对于 $1 \leq i \leq k-1$ 有 $x'_i = m_i - 2$，则我们可以验证

$\#(\mathcal{M}\cap[a,c]) \le k-1$，且 $|I| \ge c-a = t_1+t_2n_1+\cdots+t_{k-1}n_1n_2\cdots n_{k-2}$。注意到 $n_k \ge 4$，我们得到

$$\limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M}\cap I)}{\log |I|} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{\log 2(k-1)}{\log t_{k-1}n_1n_2\cdots n_{k-2}} = 0.$$

因此，接下来我们只需考虑对某个 $1 \le i \le k-1$， $m_i - 1 - x_i' \ge 2$ 的情形。令

$$u_k = \max\{1 \le i \le k-1 : m_i - 1 - x_i' \ge 2\},$$

则 $\#(\mathcal{M}\cap[a,c]) \le m_1\cdots m_{u_k-1}(m_{u_k} - x'_{u_k})$。

另一方面，再次由 (2.6) 可得

$$\begin{aligned} b-a \ge c-a &\ge (m_1-1-x_1')t_1 + \cdots + (m_{u_k}-1-x'_{u_k})t_{u_k}n_1\cdots n_{u_k-1} \\ &\ge (m_{u_k} - x'_{u_k} - 2)t_{u_k}n_1\cdots n_{u_k-1}. \end{aligned}$$

因此，使用情形 1 中的相同论证，

$$\begin{aligned} \limsup_{|I|\to\infty} \frac{\log \#(\mathcal{M}\cap I)}{\log |I|} &\le \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(m_{u_k} - x'_{u_k})m_1\cdots m_{u_k-1}}{\log(m_{u_k} - x'_{u_k} - 2)t_{u_k}n_1\cdots n_{u_k-1}} \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1\ldots m_{u_k}}{\log m_{u_k}t_{u_k}n_1\cdots n_{u_k-1}} \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \frac{\log m_1\cdots m_k}{\log m_kt_kn_1\cdots n_{k-1}}. \end{aligned}$$

引理的证明完成。 □

3. Proofs of Theorems 1.1 and 1.2

本节将证明定理 1.1 和 1.2。

对于奇异谱测度，刻画其所有谱颇具挑战性。不过，我们可以找到一些充分条件，以保证某个离散集是某个谱测度的谱。特别地，Dai 和 Sun [10] 运用 Dutkay、Han 和 Sun [14]提出的树标记方法，为 Moran 测度μ给出了这样的充分条件。为陈述这一结果，我们需要一些记号。对于 $q \ge 1$，记作$\Sigma_q = \{0,1,\ldots,q-1\}$。对于正整数序列 $\mathcal{D} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 $n \ge 1$，令

$$\Sigma_{\mathcal{D}}^0 = \vartheta, \quad \Sigma_{\mathcal{D}}^n = \Sigma_{q_1}\times\Sigma_{q_2}\times\cdots\times\Sigma_{q_n},$$

以及 $\Sigma_{\mathcal{D}}^* = \cup_{n=1}^{\infty}\Sigma_{\mathcal{D}}^n$.

对于 m、$n \ge 1$ 和两个字 $\delta \in \Sigma_{\mathcal{D}}^n$、$\delta' \in \Sigma_{q_{n+1}}\times\cdots\times\Sigma_{q_{n+m}}$，我们用 $\delta\delta'$ 表示它们的连接。当然，对于任意字 $\delta.$，我们令 $\vartheta\delta = \delta$。我们称 $\Sigma_{\mathcal{D}}^*$ 为 $\mathcal{D}$- 进树，具体定义如下：将根设为 ϑ，所有第 n 层节点设为 $\Sigma_{\mathcal{D}}^n$，而 $\delta \in \Sigma_{\mathcal{D}}^n$ 的所有子节点设为 $\{\delta i : \ i \in \Sigma_{q_{n+1}}\}$，其中 $n \ge 1$。

我们称 $\tau: \ \Sigma_{\mathcal{D}}^* \to \mathbb{R}$ 是一个极大树映射，当且仅当

(i) $\tau(\vartheta) = \tau(R_n(0^\infty)) = 0$ for all $n \ge 1$;

（ii） $\tau(\delta_1\cdots\delta_n)\in(\delta_n+q_n\mathbb{Z})\cap\{-1,0,1,\ldots,b_n-2\}$ 对于 $\delta_1\cdots\delta_n\in\Sigma_{\mathcal{D}}^n$ 对于 $n\geq 1$；（iii）对于任意字 $\delta\in\Sigma_{\mathcal{D}}^n$，存在长度为 $m\geq 1$ 的 $\delta'\in\Sigma_{q_{n+1}}\times\cdots\times\Sigma_{q_{n+m}}$，使得 $\tau(R_k(\delta\delta'0^\infty))=0$ 对于充分大的 k，其中 $0^\infty:=000\cdots$ 且 $R_k(\delta)=\delta_1\cdots\delta_k\in\Sigma_{\mathcal{D}}^k$ 对任意 $\delta\in\Pi_{n=1}^\infty\Sigma_{q_n}$。

上述定义 (ii) 中的集合 $\{-1,0,1,\ldots,b_n-2\}$ 可以替换为模 b_n 且包含 0 的任意完全剩余系。例如，Dai 和 Sun 在他们的原文 [10] 中选取了集合 $\{-\lfloor b_n/2\rfloor,-\lfloor b_n/2\rfloor+1,\ldots,b_n-1-\lfloor b_n/2\rfloor\}$。本文根据需要选取上述集合，这不会影响后续结果。

对于极大树映射 τ，我们关注以下集合

$$\Lambda(\tau)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\tau(R_n(\delta0^\infty))\rho_n:\ \delta\in\Sigma_{\mathcal{D}}^*\text{ with }\tau(R_n(\delta0^\infty))=0\right.\\ \left.\text{for sufficiently large } n\right\},\tag{3.1}$$

其中 $\rho_n=r_nb_1\cdots b_{n-1},\ n\geq 1.$

以下关于 μ 的谱的判据归功于 Dai 和 Sun [10]。

定理 3.1（[10]）。设 τ 为一个极大树映射，并令 $\Lambda=\Lambda(\tau)$ 按（3.1）定义。若

$$\sup_{n\geq1}\sup_{\delta\in\Sigma_{\mathcal{D}}^n}\#\{j\geq1:\ \tau(R_{n+j}(\delta0^\infty))\neq0\}<\infty,$$

则 $\Lambda(\tau)$ 是（1.2）中定义的 Moran 测度 μ 的一个谱。

事实上，[10]中给出了一个更强的结果（定理 3.1 只是其推论）。不过，上述结果已经足够。

现在我们可以证明定理 1.1 了。困难之处在于 $0<t<$ 维数$_{\mathrm{e}}\,\mu$ 的情形。我们的主要思路是将 [9] 中具有连续数字集的自相似谱测度构造新谱的方法推广到 Moran 情形，并将构造出的谱分成两部分：规则部分（典范谱的子集）和不规则部分。然后，我们证明规则部分的贝尔林维数具有介值性质。此外，我们可以计算出不规则部分的贝尔林维数为零。利用贝尔林维数的有限稳定性，即可得到所需结果。

定理 1.1 的证明。对于任意 $n\geq1$，存在唯一的 $k:=k_n$ 和 $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_k\in\Sigma_{\mathcal{D}}^k$，使得 $\sigma_k\neq0$

$$n=\sigma_1+\sigma_2q_1+\cdots+\sigma_kq_1\cdots q_{k-1}=\sum_{j=1}^{k}\sigma_jq_1\cdots q_{j-1}.\tag{3.2}$$

事实上，对于 $n\geq1$，存在整数 $t_1\geq0$ 和 $\sigma_1\in\Sigma_{q_1}$，使得 $n=q_1t_1+\sigma_1$。类似地，我们可以写成 $t_1=q_2t_2+\sigma_2$，其中 $0\leq t_2\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma_2\in$

Σ_{q_2}，因此 $n = t_2q_1q_2+\sigma_2q_1+\sigma_1$。继续这一过程，将存在某个整数 k，使得 $n = \sigma_1 + \sigma_2q_1 + \cdots + t_{k-1}q_1\cdots q_{k-1}$、$t_{k-1} \neq 0$和 $t_{k-1} < q_k$。我们在第 $k-1$ 步停止，并令 $t_{k-1} = \sigma_k$，从而得到 (3.2)。

根据上述构造，每个正整数 $n \geq 1$ 都唯一对应一个字 $\sigma = \sigma(n) := \sigma_1\cdots\sigma_k \in \Sigma_{\mathcal{D}}^k$，其中 $\sigma_k \neq 0$。反过来，每个满足 $\sigma_k \neq 0$ 的字 $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_k \in \Sigma_{\mathcal{D}}^k$ 都唯一对应一个整数 $n := n(\sigma)$，它具有展开式 (3.2)。

设 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个非负整数序列。我们定义映射 $\tau(\vartheta) = \tau(0^k) = 0$，其中 $k \geq 1$；对于如 (3.2) 中的 n，$\tau(\sigma) = \sigma_k$，并且

$$\tau(\sigma 0^l) = \begin{cases} 0, & \text{if } l \neq s_n; \\ q_{k+s_n}, & \text{if } l = s_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

定义 $\lambda_0 = 0$，并且

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{k} \tau(\sigma_1\cdots\sigma_j)(r_jb_1\cdots b_{j-1}) + b_1\cdots b_{k+s_n}\delta_{s_n},$$

$$\delta_{s_n} = \begin{cases} 0, & \text{if } \ s_n = 0; \\ 1, & \text{if } \ s_n \geq 1. \end{cases}$$

于是，容易看出 τ 是一个极大树映射，并且

$$\ell_n := \#\{k : \tau(\sigma 0^l) \neq 0, l \geq 1\} \leq 1 \text{ for all } n \geq 1.$$

根据定理 3.1，$\Lambda(\{s_n\}) := \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 μ 的一个谱，我们称 $\Lambda(\{s_n\})$ 为相对于序列 $\{s_n\}$ 的 μ 的谱。

当对所有 $n \geq 1$ 都有 $s_n = 0$ 时，很容易看出

$$\Lambda(0) := \Lambda(\{s_n\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i(r_ib_1\cdots b_{i-1}) : \ x_i \in \Sigma_{q_i} \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\}.$$

$\Lambda(0)$ 称为 μ 的典范谱。由命题 2.4、命题 2.2 以及对于 $k \geq 1$ 有 $r_kq_k = b_k$ 这一事实可得

$$\begin{aligned} \dim \Lambda(0) &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log q_1\cdots q_k}{\log q_k(r_kb_1\cdots b_{k-1})} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log q_1q_2\cdots q_k}{\log b_1b_2\cdots b_k} = \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu. \end{aligned}$$

因此，当 $t = \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu$ 时，我们选择 $\Lambda_t = \Lambda(0)$。

接下来我们考虑另外两种情形：$t = 0$ 和 $0 < t < \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu$.

Case 1。$t = 0$。考虑 μ 相对于 $\{n\}$ 的谱，即 $\Lambda(\{n\}) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$。注意，对于 $n \geq 1$，我们有 $\lambda_n \geq b_1b_2\cdots b_{k_n+n}$，并且

$$\begin{aligned} \lambda_n &\leq b_1 + b_1b_2 + \cdots + b_1b_2\cdots b_{k_n} + b_1b_2\cdots b_{k_n+n} \\ &\leq 2b_1b_2\cdots b_{k_n+n}. \end{aligned}$$

注意，对于任意 $n \geq 1,\ b_n \geq 4$，这意味着

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \frac{b_1 b_2 \cdots b_{k_{n+1}+n+1}}{2 b_1 b_2 \cdots b_{k_n+n}} \geq \frac{b_{k_{n+1}+n+1}}{2} \geq 2.$$

根据引理 2.3，我们有 $\dim(\Lambda(\{n\})) = 0$。因此，取 $\Lambda_0 = \Lambda(\{n\})$。

Case 2。$0 < t < \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\, \mu$。我们从下面的引理开始。

引理 3.2。设 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$、$\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是满足 (1.4) 和 (1.5) 的两个正整数序列。则，对于任意

$$0 < t < \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(q_1 \cdots q_k)}{\log(b_1 \cdots b_k)},$$

存在一个序列 $q'_k \in \{1, 2, \ldots q_k\}$、$k \geq 1$ 使得

$$t = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(q'_1 \cdots q'_k)}{\log(b_1 \cdots b_k)}. \tag{3.4}$$

证明。令

$$0 < t < \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(q_1 \cdots q_k)}{\log(b_1 \cdots b_k)}. \tag{3.5}$$

接下来，我们归纳地定义一个正整数序列 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ 如下。其思路是在适当的位置用 1 替换某些 q_k。若 $t < \log q_2 \log(b_1 b_2)$，则定义 $k_1 = 1$；否则，由 (3.5) 定义

$$k_1 = \min\left\{ i : \frac{\log(1 \cdot q_2 \cdots q_i)}{\log(b_1 \cdots b_i)} \leq t < \frac{\log(1 \cdot q_2 \cdots q_{i+1})}{\log(b_1 \cdots b_{i+1})} \right\}$$

以及 $q'_1 = 1$、$q'_i = q_i$、$2 \leq i \leq k_1 + 1$.

然后，定义

$$k_2 = \min\left\{ i : \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_1+1} 1 \cdots 1 \cdot q_i)}{\log(b_1 \cdots b_i)} \leq t < \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_1+1} 1 \cdots q_i \cdot q_{i+1})}{\log(b_1 \cdots b_{i+1})} \right\}$$

以及 $q'_i = 1$、$k_1 + 2 \leq i \leq k_2 - 1$、$q'_{k_2} = q_{k_2}$、$q'_{k_2+1} = q_{k_2+1}$。继续归纳下去，我们得到一个整数序列 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和一个 $\{q'_k\}_{k=1}^{\infty}$序列，使得

$$k_{j+1} = \min\left\{ i : \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_j+1} 1 \cdots 1 \cdot q_i)}{\log(b_1 \cdots b_i)} \leq t < \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_j+1} 1 \cdots q_i \cdot q_{i+1})}{\log(b_1 \cdots b_{i+1})} \right\} \tag{3.6}$$

以及 $q'_i = 1$、$k_j + 2 \leq i \leq k_{j+1} - 1$、$q'_{k_{j+1}} = q_{k_{j+1}}$、$q'_{k_{j+1}+1} = q_{k_{j+1}+1}$、$j \geq 1$.

由 (3.6) 可得

$$\frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_j})}{\log(b_1 \cdots b_{k_j})} \leq t < \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_j} q_{k_j+1})}{\log(b_1 \cdots b_{k_j+1})} \text{ for } j \geq 1.$$

因此，由假设 (1.5) 可得

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_j})}{\log(b_1 \cdots b_{k_j})} = \lim_{j\to\infty} \frac{\log(q'_1 \cdot \cdots \cdot q'_{k_j} q_{k_j+1})}{\log(b_1 \cdots b_{k_j+1})} = t.$$

另一方面，对于 $j \geq 2$ 和任意 $k_j < k < k_{j+1}$，根据 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的定义可知 $\log(q_1' \cdots q_k') \log(b_1 \cdots b_k) \leq t$。因此，~~(3.4)~~ 成立。□

命题 3.1. 对任意 $t \in (0, \dim_{\mathrm{e}} \mu)$，存在一个 μ 的谱 Λ_t，使得

$$\dim \Lambda_t = t.$$

证明. 设 $0 < t < \overline{\dim}_{\mathrm{e}} \mu$，并令 $\{q_k'\}_{k=1}^{\infty}$ 为引理 3.2 中的序列。记

$$\Lambda_t^1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i (r_i b_1 \cdots b_{i-1}) : \ x_i \in \Sigma_{q_i'} \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\}.$$

于是 Λ_t^1 是与数据 $\{b_k\}$、$\{q_k'\}$和$\{r_k\}$相关联的整数莫兰集。由命题 2.4、引理 3.2 和假设 (1.5)，可得

$$\begin{aligned} \dim \Lambda_t^1 &= \limsup_{k \to \infty} \frac{\log(q_1' \cdots q_k')}{\log(q_k' r_k b_1 \cdots b_{k-1})} \\ &= \limsup_{k \to \infty} \frac{\log(q_1' \cdots q_k')}{\log(b_1 \cdots b_k) + \log(q_k'/q_k)} \\ &= \limsup_{k \to \infty} \frac{\log(q_1' \cdots q_k')}{\log(b_1 \cdots b_k)} \quad \left(\frac{1}{M} \leq \frac{q_k'}{q_k} \leq 1 \right) \\ &= t \end{aligned}$$

对于 $k \geq 1$，令 $\mathcal{D}' = \{q_n'\}_{n=1}^{\infty}$，并记

$$\widetilde{\Sigma}_{\mathcal{D}'}^k := \{(\sigma_1' \sigma_2' \ldots \sigma_k') \in \Sigma_{\mathcal{D}'}^k : \sigma_k' \neq 0\}.$$

定义 $\Gamma_t = \cup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$，其中 $\Gamma_k = \{n = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j q_1 \cdots q_{j-1} : \ \sigma \in \widetilde{\Sigma}_{\mathcal{D}'}^k\}$。

令 $s_n = n$ 对应于 $n \notin \Gamma_t$，且 $s_n = 0$对应于 $n \in \Gamma_t$。令 Λ_t 为 μ 关于序列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$的相应谱。容易验证$\Lambda_t^1 = \{\lambda_n\}_{n \in \Gamma_t}$。记

$$\Lambda_t = \{\lambda_n\}_{n \in \Gamma_t} \cup \{\lambda_n\}_{n \notin \Gamma_t} := \Lambda_t^1 \cup \Lambda_t^2. \tag{3.7}$$

接下来，我们利用引理 2.3 证明 $\dim \Lambda_t^2 = 0$。事实上，与情形 1 一样，我们有 $\dim(\Lambda(\{n\})) = 0$。另一方面，容易验证$\Lambda_t^2 \subset \Lambda(\{n\})$。由引理 2.2 (i)，可得 $\dim \Lambda_t^2 = 0$。

由 (3.7) 以及贝尔林维数的有限稳定性可得

$$\dim \Lambda_t = \max(\dim \Lambda_t^1, \dim \Lambda_t^2) = t,$$

因此，Λ_t 是所需的谱。□

定理 1.1 的证明完成。□

最后，我们给出定理 1.2 的证明。

引理 3.3. 对于 $t \in [0, \overline{\text{维}}_{\mathrm{e}} \mu)$，上述 Γ_t 和 Γ_t^c 均为可数无限。

证明。根据上述选择，容易看出它们是可数无限的。□

给定 $t \in [0, \overline{\text{维}}_{\mathrm{e}}\,\mu)$ 。对于任意 $n \notin \Gamma_t$，我们令 $s_n = n^2$ 或 n^2+1。于是容易看出， $s_n < s_{n+1}$ ，相应集合 Λ_t^2 的贝尔林维数为零。通过从上述两种选择中随机选取 s_n、 $n \notin \Gamma_t$ ，并利用引理 3.3，我们得到水平集

$$L_t := \{\Lambda : \Lambda \text{ is a spectrum of } \mu \text{ and } \dim \Lambda = t\}$$

具有连续统的基数。

当 $t = \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu$ 时。我们通过一些具体构造来证明。记

$$\{-1,1\}^\infty = \{i_1 i_2 \cdots : \ i_j \in \{-1,1\} \text{ for all } j \geq 1\}$$

and

$$1^\infty = 11\cdots, \ (-1)^\infty = (-1)(-1)\cdots.$$

我们断言，对每个 $w = w_1 w_2 \cdots \in \{-1,1\}^\infty$，集合

$$\Lambda^w = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i w_i (r_i b_1 \cdots b_{i-1}) : \ x_i \in \Sigma_{q_i} \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\}$$

是 μ 的谱。事实上，记 $\mu_n = \delta_{b_1^{-1}\mathcal{D}_1} * \delta_{(b_1 b_2)^{-1}\mathcal{D}_2} * \cdots * \delta_{(b_1 b_2 \cdots b_n)^{-1}\mathcal{D}_n}$。令

$$T_n = \Big\{ (b_1 b_2 \cdots b_n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i (r_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}) : \ x_i \in \Sigma_{q_i} \text{ for } 1 \leq i \leq n \Big\}.$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，由于

$$\begin{aligned}
&(b_1 b_2 \cdots b_n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (q_i - 1) r_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} \\
&\qquad = \frac{(q_n-1)r_n}{b_n} + \frac{(q_{n-1}-1)r_{n-1}}{b_{n-1}b_n} + \cdots + \frac{(q_1-1)r_1}{b_1 b_2 \cdots b_n} \\
&\qquad \leq \Big(1 - \frac{1}{b_n}\Big) + \Big(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}b_n}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{b_2 \cdots b_n} - \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n}\Big) \\
&\qquad = 1 - \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n} \\
&\qquad < 1,
\end{aligned}$$

由此可得 $T_n \subset [-1,1]$。因此，该集合

$$\mathcal{Z}(\widehat{\mu}_n) := \{\xi : \widehat{\mu}_n(\xi) = 0\} = \bigcup_{k=0}^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_k r_{k+1} (\mathbb{Z} \setminus q_{k+1}\mathbb{Z})$$

与集合 T_n 的距离为 $(r_1 - 1)$，且该距离对 n 一致。另一方面，对于任意满足 $k \geq 1$ 的 $w_k \in \{-1,1\}$ ，容易证明 $(b_k^{-1}\mathcal{D}_k, w_k r_k \Sigma_{q_k})$ 是一个相容对，即矩阵

$$\frac{1}{\sqrt{q_k}} \left(e^{-2\pi i \frac{d_k w_k r_k l_k}{b_k}} \right)_{d_k \in \mathcal{D}_k, l_k \in \Sigma_{q_k}}$$

是酉矩阵。根据 [40], 中的定理 2.8，我们有 Λ^w 是 μ. 的一个谱

根据命题 2.4 的证明以及 Λ^{1^∞} 与 $\Lambda^{(-1)^\infty}$ 之间的对称关系，我们有

$$\dim(\Lambda^{(-1)^\infty}) = \dim(\Lambda^{1^\infty}) = \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu \left(= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_n}{\log b_1 b_2 \cdots b_n}\right).$$

注意到集合 $\{-1,1\}^\infty$ 的基数为连续统，因此我们只需证明对于每个 $w \in \{-1,1\}^\infty$，$\dim(\Lambda^w) = \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu$。

给定 $w \in \{-1,1\}^\infty$。我们先证明 $\dim(\Lambda^w) \geq \dim_{\mathrm{e}}\mu$。记

$$\Lambda_k^w = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i w_i (r_i b_1 \cdots b_{i-1}) : \ x_i \in \Sigma_{q_i} \text{ for } 1 \leq i \leq k \right\},$$

然后 $\Lambda^w = \bigcup_{k=1}^\infty \Lambda_k^w$. 取 $x = 0$。对于 $k \geq 1$，令 $h_k = \sum_{i=1}^k (q_i - 1) r_i (b_1 \cdots b_{i-1})$。于是 $h_k \leq b_1 b_2 \cdots b_k$。此外，注意到 $\Lambda_k^w \subset B(0, h_k)$ 和 $\Lambda_{k+1}^w \setminus \Lambda_k^w \subset \mathbb{R} \setminus B(0, h_k)$。事实上，第一个包含关系显然成立，第二个包含关系成立是因为 $r_{k+1} b_1 b_2 \cdots b_k \geq 2 \sum_{i=1}^k (q_i - 1) r_i b_1 \cdots b_{i-1}$（因为 $r_{k+1} \geq 2$）。于是 $\#(\Lambda^w \cap B(0, h_k)) = q_1 \cdots q_k$。因此，由命题 2.3 可得

$$\begin{aligned} \dim \Lambda^w &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log \#(\Lambda^w \cap B(0, h_k))}{\log h_k} \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log q_1 q_2 \cdots q_k}{\log b_1 b_2 \cdots b_k} = \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu. \end{aligned}$$

接下来我们证明

$$\dim \Lambda^w \leq \overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu. \tag{3.8}$$

设 $h > 0$。设 $x \in \mathbb{R}$。那么我们可以选取充分大的 k，使得 $[-b_1 b_2 \cdots b_{k-1}, b_1 b_2 \cdots b_{k-1}] \subset B(x, h) \subset [-b_1 b_2 \cdots b_k, b_1 b_2 \cdots b_k]$。于是

$$\begin{aligned} \#(\Lambda^w \cap B(x,h)) &= \#(\Lambda_k^w \cap B(x,h)) \\ &\leq \#\left(\Lambda_k^{(-1)^\infty} \cap B(x,h)\right) + \#\left(\Lambda_k^{1^\infty} \cap B(x,h)\right). \end{aligned}$$

另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$，注意到 $\dim \Lambda^{1^\infty} = \dim \Lambda^{(-1)^\infty} = \dim_{\mathrm{e}}\mu$，我们有

$$\#\left(\Lambda_k^{(-1)^\infty} \cap B(x,h)\right) \leq h^{\overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu + \varepsilon}, \ \#\left(\Lambda_k^{1^\infty} \cap B(x,h)\right) \leq h^{\overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu + \varepsilon}$$

当 h 足够大时。因此，

$$\#(\Lambda^w \cap B(x,h)) \leq 2h^{\overline{\dim}_{\mathrm{e}}\,\mu + \varepsilon}.$$

最后，由命题 2.3 可知 (3.8) 成立。

致谢。作者感谢何兴刚教授让我们关注这些问题，并审阅了稿件。作者感谢吴萌教授提出极其宝贵且有益的建议，这些建议改进并简化了原稿。该项目得到国家自然科学基金（12171107、12271534、11971109）、广东省自然科学基金（2022A1515011844）以及广州大学基金（202201020207、RQ2020070）的资助。

References

[1] L. X. An and X. G. He, 《一类谱莫兰测度》, 《Journal of Functional Analysis》266（2014年）, 343–354。[2] L. X. An、X. H. Dong 和 X. G. He, 《关于平面谢尔宾斯基测度的谱及谱特征矩阵问题》, Indiana Univ. Math. J. 71（2022年）, 913–952。[3] L. X. An、X. G. He 和 K. S. Lau, 《一类无限卷积的谱性》, Adv. Math. 283（2015年）, 362–376。[4] L. X. An 和 C. K. Lai, 《自仿射谱测度的任意稀疏谱》, https://arxiv.org/pdf/2006.13497v1.pdf。[5] J. M. Barbaroux、F. Germinet 和 S. Tcheremchantsev, 《广义分形维数：等价性与基本性质》, J. Math. Pures Appl. 10（2001年）, 977–1012。[6] W. Czaja、G. Kutyniok 和 D. Speegle, 《仿射子空间上 Gabor 伪框架的贝尔林维数》, J. Fourier Anal. Appl. 14（2008年）, 514–537。[7] X. R. Dai, 《伯努利卷积何时存在谱? 》, Adv. Math. 231（2012年）, 1681–1693。[8] X. R. Dai, 《康托测度的谱》, Math. Ann. 366（2016年）, 1621–1647。[9] X. R. Dai、X. G. He 和 C. K. Lai, 《连续数字康托测度的谱性质》, Adv. Math. 242（2013年）, 187–208。[10] X. R. Dai 和 Q. Y. Sun, 《具有任意豪斯多夫维数的谱测度》, 《Journal of Functional Analysis》268（2015年）, 2464–2477。[11] Q. R. Deng, 《谢尔宾斯基型自仿射测度的谱》, 《Journal of Functional Analysis》270（2016年）, 4426–4442。[12] Q. R. Deng 和 J. B. Chen, 《谱自仿射测度的一致性》, Adv. Math. 380 （2021 年）, 107568。[13] D. E. Dutkay、D. G. Han、Q. Y. Sun 和 E. Weber, 《指数框架的贝尔林维数》, Adv. Math. 226（2011年）, 285–297。[14] D. E. Dutkay、D. G. Han 和 Q. Y. Sun, 《关于康托测度的谱》, Adv. Math. 221（2009年）, 251–276。[15] D. E. Dutkay、J. Haussermann 和 C. K. Lai, 《哈达玛三元组生成自仿射谱测度》, Trans. Amer. Math. Soc. 371（2019年）, 1439–1481。[16] G. A. Edgar, 《积分、概率与分形测度》, Springer-Verlag, 纽约, 1998年。[17] K. J. Falconer, 《分形几何——数学基础与应用》, John Wiley and Sons Ltd, 奇切斯特, 1990年。[18] K. J. Falconer, 《分形几何方法》, John Wiley and Sons Ltd, 奇切斯特, 1997年。[19] A. H. Fan、K. S. Lau 和 H. Rao, 《测度不同维数之间的关系》, Monatsh. Math. 135（2002年）, 191–201。[20] D. J. Feng、Z. Y. Wen 和 J. Wu, 《齐次莫兰集的一些维数结果》, Sci. China Ser. A. 40（1997年）, 475–482。[21] Y. S. Fu、X. G. He 和 Z. X. Wen, 《伯努利卷积与随机卷积的谱》, J. Math. Pures Appl. 116（2018年）, 105–131。

[22] B. Fuglede, 《可交换自伴偏微分算子与一个群论问题》, 《Journal of Functional Analysis》16（1974年）, 101–121。[23] X. G. He 等人, 《贝尔林维数与自相似测度》, 《Journal of Functional Analysis》274（2018年）, 2245–2264。[24] X. G. He、M. W. Tang 和 Z. Y. Wu, 《一类自相似谱测度的谱结构与谱特征值问题》, 《Journal of Functional Analysis》277（2019年）, 3688–3722。[25] T. Y Hu 和 K. S. Lau, 《伯努利卷积的谱性质》, Adv. Math. 219（2008年）, 554–567。[26] A. Iosevich 等人, 《曲面支撑测度的傅里叶框架》, Int. Math. Res. Not. IMRN, 3（2020年）, 1644–1665。[27] I. Laba 和 Y. Wang, 《关于谱康托测度》, 《Journal of Functional Analysis》193（2002年）, 409–420。[28] C. K. Lai, 《傅里叶维数为零且含有任意长算术级数的完美分形集》, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 42（2017年）, 1009–1017。[29] H. Landau, 《某些整函数采样与插值的必要密度条件》, Acta Math. 117（1967年）, 37–52。[30] J. J. Li 和 M. Wu, 《满足开集条件的一般莫兰测度的逐点维数》, Sci. China Math. 54（2011年）, 699–710。[31] J. J. Li 和 Z. Y. Wu, 《关于具有乘积形式的一类自相似谱测度的谱结构与谱特征值问题》, 《Nonlinearity》35（2022年）, 3095–3117。[32] J. J. Li 和 Z. Y. Wu, 《平面 Moran 型谢尔宾斯基谱测度谱的准Beurling 维数》, Appl. Comput. Harmon. Anal. 62（2023年）, 475–497。[33] J. L. Li, 《一类自仿射测度的谱》, 《Journal of Functional Analysis》260（2011年）, 1086–1095。[34] J. L. Li, 《行列式为素数的自仿射测度具有谱性的充分条件》, Studia Math. 220（2014年）, 73–86。[35] W. X. Li、J. J. Miao 和 Z. Q. Wang, 《无限卷积的弱收敛与谱性》, Adv. Math. 404（2022年）, 108425。[36] Z. Y. Lu、X. H. Dong 和 Z. S. Liu, 《谢尔宾斯基型自仿射测度的谱性》, 《Journal of Functional Analysis》282（2022年）, 109310。[37] R. Lyons, 《Rajchman 测度七十年》, 载于: 纪念让-皮埃尔·卡汉的会议论文集, 《J. Fourier Anal. Appl.》, 卡汉专刊, 1995年, 363 377–。[38] P. Jorgensen 和 S. Pedersen, 《稠密解析子空间》, 载于 L^2 空间, 《J. Anal. Math.》75（1998年）, 185–228。[39] R. X. Shi, 《框架谱测度及其框架谱的维数》, Annales Fennici Mathematici, 46（2021年）, 483–493。[40] R. Strichartz, 《与某些康托测度相关的模拟傅里叶级数与变换》, 《J. Anal. Math.》81（2000年）, 209–238。（Jinjun Li）

School of Mathematics and Information Science Guangzhou University, , , , Guangzhou 510006 P. R. China
Email address: li-jinjun@163.com（Zhiyi Wu）

School of Mathematics and Information Science Guangzhou University, , , , Guangzhou 510006 P. R. China
Email address: zhiyiwu@126.com