arXiv:2302.05931v1 [math.CV] 12 Feb 2023

关于非齐次双调和方程解的 Schwarz-Pick 型不等式与利普希茨连续性

Peijin Li、Yaxiang Li、Qinghong Luo 和
Saminathan Ponnusamy

摘要。本文旨在研究非齐次双调和方程的解所满足的 Schwarz-Pick 型不等式及利普希茨连续性： $\Delta(\Delta f) = g$，其中 $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ 是一个连续函数， $\overline{\mathbb{D}}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$中的单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的闭包。事实上，我们为这些解建立了以下性质：首先，我们证明解 f 并不总是满足 Schwarz-Pick 型不等式

$$\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} \leq C,$$

其中 C 是一个常数。其次，我们在一定条件下建立了关于 f 的一般 Schwarz-Pick 型不等式。第三，我们讨论 f的利普希茨连续性，并由此得到关于距离比度量的利普希茨连续性以及关于双曲度量的利普希茨连续性。

数学主题分类（2010）。主要分类：30C80，31A30；次要分类：35J40，30C62。
关键词：Schwarz-Pick 型不等式，利普希茨连续性，双调和方程。

1. 引言

令$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 表示复平面，对于 $r > 0$，令 $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$。记 $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$为开单位圆盘， $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$为 $\mathbb{D}$的边界， $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$为 $\mathbb{D}$的闭包。此外，我们用 $\mathcal{C}^m(\Omega)$表示从Ω到$\mathbb{C}$的复值 m次连续可微函数的集合，其中Ω表示 $\mathbb{C}$ 的一个子集，且 $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。特别地，$\mathcal{C}(\Omega) := \mathcal{C}^0(\Omega)$表示Ω中所有连续函数的集合。

令 $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$、 f^*、 $g \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$和 $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{D})$。我们考虑以下带有狄利克雷边界值的非齐次双调和方程:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta f) = g & \text{in } \mathbb{D}, \\ f_{\overline{z}} = \varphi & \text{on } \mathbb{T}, \\ f = f^* & \text{on } \mathbb{T}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 4f_{z\overline{z}}$是 f的拉普拉斯算子。

特别地，如果 $g \equiv 0$，则方程 (1.1) 的解是双调和映射；关于双调和映射的某些性质，参见 [5, 20] 及其中的参考文献。

非齐次双调和方程出现在连续介质力学领域，包括线弹性理论和斯托克斯流的求解（参见 [9]）。Chen 等人 [4] 讨论了非齐次双调和方程 (1.1) 的解的施瓦茨型引理、朗道型定理和双 Lipschitz 性质。Mohapatra 等人 [17] 讨论了非齐次双调和方程 (1.1) 的解的边界施瓦茨引理。双调和方程的可解性已在例如 [1, 16]中得到研究。本文研究非齐次双调和方程 (1.1) 的解的 Schwarz-Pick 型不等式和利普希茨连续性。

对于 z、$w \in \mathbb{D}$，令

$$G(z,w) = |z-w|^2 \log \left| \frac{1-z\overline{w}}{z-w} \right|^2 - (1-|z|^2)(1-|w|^2)$$

and

$$P(z,e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}$$

分别表示双调和格林函数和泊松核，其中$t \in [0, 2\pi]$。

由 [2, 定理 2], 可知，双调和方程 (1.1) 的所有解均可表示为

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{P}_{f^*}(z) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{z}e^{it} f^*(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}e^{it})^2} dt \\ &\quad -(1-|z|^2)\mathcal{P}_{\varphi_1}(z) - \frac{1}{8}G[g](z), \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $\varphi_1(e^{it}) = \varphi(e^{it})e^{-it}$,

$$\mathcal{P}_{f^*}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{it}) f^*(e^{it}) dt, \quad \mathcal{P}_{\varphi_1}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{it})\varphi_1(e^{it}) dt$$

and

$$G[g](z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} G(z,w) g(w) dA(w).$$

这里， $dA(w)$ 表示 $\mathbb{D}$ 中的勒贝格面积测度。

2. 主要结果

令 $\mathcal{B}_H$ 表示从 $\mathbb{D}$ 映到其自身的所有复值调和映射的集合。设 $\mathcal{B}_H^0 = \{f \in \mathcal{B}_H : f(0) = 0\}$。Pavlović [19, 定理 3.6.1] 将 Heinz 经典引理推广为如下的一般形式：若 $f \in \mathcal{B}_H$，则有

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} f(0) \right| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z| \quad \text{for } z \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

注意，$f(0) = 0$ 的情形归功于 Heinz [8]。此外，容易看出 $p(t) = \frac{4}{\pi} \arctan t - \frac{2}{\pi} t$ 在 $[0,1]$ 上递增，因此 $p(t) \leq p(1)$，或者等价地，

$$\frac{4}{\pi} \arctan t \leq \frac{2}{\pi}(t-1) + 1 \quad \text{for } t \in [0,1] \tag{2.2}$$

（另见 [22, 引理 2.4]）。现在，利用 (2.1) 和 (2.2)，可得

$$\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{1-\left(\frac{2}{\pi}(|z|-1)+1\right)^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1+|z|}{|z|+\pi-1}.$$

由于函数 $h(t) = \frac{1+t}{t+\pi-1}$ 在 $t \in [0,1)$ 上递增，我们可以很容易地推出关于 $f \in \mathcal{B}_H^0$ 的以下 Schwarz-Pick 型不等式：

$$\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{for } z \in \mathbb{D}. \tag{2.3}$$

设 $\mathcal{F}(\mathbb{D}, B) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : f(0) = 0, |\Delta f| \leq B \cdot |Df|^2, f \in \mathcal{C}^2\}$，其中 $|Df| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$。近期，Kalaj [10] 于 2015 年证明，若 f 是一个 K-拟共形映射，且 $f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}, B)$，则存在常数 $C(B, K)$，使得

$$\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} \leq C(B,K) \quad \text{for } z \in \mathbb{D}. \tag{2.4}$$

在 Kalaj 的同一篇文章中，作者询问能否去掉拟共形性假设。最近，Zhong 等人 [22, 定理 1.3] 证明，属于类 $\mathcal{F}(\mathbb{D}, B)$ 的映射并不总是满足上述 Schwarz-Pick 型不等式：在 (2.4) 中以 $C(B)$ 替代 $C(B, K)$。

因此，在本研究的背景下，一个自然的问题是：对于方程 (1.1) 的解，Schwarz-Pick 型不等式 (2.4) 中以绝对常数 C 替代 $C(B, K)$ 后，不等式是否仍然成立？与 (2.3) 相比较。

本文的第一个目标是通过一个例子对上述问题给出否定回答。更确切地说，我们的例子表明：

定理 2.1. 假设 $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{D}) \cap \mathcal{B}_H^0$ 且满足 (1.1)。那么 f 并不总是满足 Schwarz-Pick 型不等式

$$\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} \leq C \quad \textit{for } z \in \mathbb{D}, \tag{2.5}$$

其中，C 是一个常数。此外，f 并不总是满足泊松微分不等式 $|\Delta f| \leq B \cdot |Df|^2$。

尽管答案是否定的，但在某些条件下，可以为方程（1.1）的解建立一般的 Schwarz-Pick 型不等式（2.5）。例如，在 [13], 中，针对满足泊松微分不等式 $|\Delta f| \leq B \cdot |Df|^2$的 $\mathbb{D}$ 的（K， K'）-拟共形自映射，得到了 Schwarz-Pick 型不等式（2.5）。在 [22], 中，作者针对满足更一般的泊松微分不等式 $|\Delta f| \leq a \cdot |Df|^2 + b$的 $\mathbb{D}$ 的自映射，在某些条件下得到了一个一般的 Schwarz-Pick 型不等式。在 [11], 中，作者证明，如果 $f \in \mathcal{B}_H^0$ ，那么不等式

$$\frac{1-|z|^q}{1-|f(z)|^q} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{for } z \in \mathbb{D}$$

对每个 $q > 0$ 均成立。

本文的第二个目标是在一定条件下，给出方程 (1.1) 的解所满足的一般性 Schwarz-Pick 型不等式。

定理 2.2. 对于给定的 $q \in \{1\} \cup [2, +\infty)$，设 $f \in \mathcal{B}_H$, $f(0) = 0$，且满足双调和方程 (1.1)，其中 $f^* \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ 在 $\mathbb{D}$ 中解析。

1. 对于 $q = 1$，我们得到

$$\frac{1-|z|}{1-|f(z)|} \leq \frac{1}{\frac{2}{\pi} - 4(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty)};$$

2. 对于 $q \geq 2$，如果

$$(2^{q-1} \cdot q + 1)\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big) < \frac{2}{\pi},$$

then

$$\frac{1-|z|^q}{1-|f(z)|^q} \leq \frac{1}{\frac{2}{\pi} - (2^{q-1} \cdot q + 1)(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty)},$$

其中 $\|\varphi_1\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{T}}\{|\varphi_1(z)|\}$ 且 $\|g\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|g(z)|\}$。

设 D 和 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的区域，且 L 为正的常数。若映射 $f\colon D \to \Omega$ 满足以下条件，则称其为利普希茨映射:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \text{whenever } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

在 [18], , Pavlović证明， $\mathbb{D}$ 到自身的调和同胚的拟共形性可用其双 Lipschitz 连续性来刻画。Kalaj [10] 还证明了拟共形调和映射的利普希茨连续性。近期，文献 [4, 6] 建立了非齐次双调和方程的解的利普希茨连续性。

本文的第三个目标是考察方程 (1.1) 的解的利普希茨连续性。

定理 2.3. 假设 $f \in \mathcal{B}_H$ and 满足双调和方程 (1.1)，其中 $f^* \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ 是 $\mathbb{D}$ and 中的单叶解析函数，且 $f^*(e^{it}) = e^{i\gamma(t)}$。则 f 是 Lipschitz连续。

现在，我们需要做一些准备来陈述接下来的结果。对于子域 $G \subset \mathbb{C}$ and 以及所有 $z_1, z_2 \in G$，距离比度量 j_G 定义为

$$j_G(z_1, z_2) = \log\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|}{\min\{\delta_G(z_1), \delta_G(z_2)\}}\right),$$

其中， $\delta_G(z)$ 表示 z 到 ∂G的欧几里得距离。距离比度量由 Gehring 和 Palka [7] 引入，并由 Vuorinen [21]以以上简化形式提出。若存在正数常数 L_1 使得.....，则称映射 $f: D \to \Omega$ 关于距离比度量是 Lipschitz连续的。

$$j_\Omega(f(z_1), f(z_2)) \leq L_1 j_D(z_1, z_2) \text{ for all } z_1, z_2 \in D.$$

Ω 中两点 z_1 和 z_2 之间的双曲距离 $d_h(z_1, z_2)$ 定义为

$$\inf_\gamma \Big\{ \int_\gamma \lambda_\Omega(z)|dz| \Big\},$$

其中， γ 遍历 Ω 中连接 z_1 和 z_2的所有可求长曲线。众所周知， $\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$。类似地，若存在正数常数 L_2 使得.....，则称映射 $f: D \to \Omega$ 关于双曲度量是 Lipschitz连续的。

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \leq L_2 d_h(z_1, z_2) \text{ for all } z_1, z_2 \in D.$$

在某些条件下，关于单位圆盘的调和自映射相对于给定度量具有利普希茨连续性这一课题，吸引了许多研究者的关注。例如，在 [12], 中，作者证明了从 $\mathbb{D}$ 到自身的 K-拟共形调和映射关于双曲度量是双利普希茨的。在 [13], 中，作者证明了满足泊松微分不等式 $|\Delta f| \leq B \cdot |Df|^2$的 $\mathbb{D}$ 的 (K, K')–拟共形自映射关于距离比度量是利普希茨连续的。

作为定理2.2和2.3的应用，我们分别给出了方程 (1.1) 的解关于距离比度量的利普希茨连续性，以及关于双曲度量的利普希茨连续性。

推论 2.4. 假设 $f \in \mathcal{B}_H^0$ 且满足双调和方程 (1.1)，其中 $f^* \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ 是 $\mathbb{D}$ 中的单叶解析函数，且 $f^*(e^{it}) = e^{i\gamma(t)}$。

1. 如果

$$4\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big) < \frac{2}{\pi},$$

那么 f 关于距离比度量是 Lipschitz连续的。2. 如果

$$5\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big) < \frac{2}{\pi},$$

那么 f 关于双曲度量是 Lipschitz连续的。

定理2.1、2.2、2.3及推论2.4的证明将在第3节中给出。

3. 主要结果的证明

3.1. 定理 2.1 的证明

考虑 $f(z) = 2|z|^2z^2 - |z|^6z^2$, $z \in \mathbb{D}$。显然, $f(0) = 0$。由于 $|f(z)| = |z|^4(2 - |z|^4)$, 且函数 $h(t) = t(2 - t)$ 在 $t \in [0, 1)$ 上递增，因此容易得到 $|f(z)| \leq 1$ 在 $\mathbb{D}$ 中。此外，简单计算可得

$$\begin{cases} \Delta(\Delta f)(z) = -1920z^3\overline{z} & \text{in } \mathbb{D}, \\ f_{\overline{z}}(z) = -z^3 & \text{on } \mathbb{T}, \\ f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} & \text{on } \mathbb{T}. \end{cases}$$

因此, f 是 $\mathbb{D}$ 的一个自映射，满足双调和方程 (1.1)。结合 $r = |z|^2$，我们得到

$$1 - |f(z)|^2 = 1 - |z|^8(2 - |z|^4)^2 = (1 - r^2)^2(1 + 2r^2 - r^4)$$

因此,

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} = \lim_{r\to 1^-} \frac{1 - r}{(1 - r^2)^2(1 + 2r^2 - r^4)} = +\infty.$$

因此, f 并不总是满足 Schwarz-Pick 型不等式 (2.5)。接下来，若 $0 < |z|^4 < \frac{2}{3}$，简单计算可得

$$|Df|^2 = (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)^2 = 64|z|^6(1 - |z|^4)^2 \text{ and } |\Delta f| = 3\big|2 - 5|z|^2\big|$$

因此,

$$\lim_{|z|\to 0^+} \frac{|\Delta f|}{|Df|^2} = +\infty.$$

也就是说, f不满足泊松微分不等式 $|\Delta f| \leq B\cdot|Df|^2$。至此，证明完成。□

我们先给出几个引理，它们将在定理 2 的证明中用到。 2.

引理 A.（[22, 引理 2.2]）设 f 是 $\mathbb{D}$ 的一个调和自映射，满足 $|f(0)| < \frac{2}{\pi}$。那么，对于任意 $q \geq 1$，不等式

$$\frac{1 - |z|^q}{1 - |f(z)|^q} \leq \frac{1}{\frac{2}{\pi} - |f(0)|}$$

对每个 $z \in \mathbb{D}$都成立。

引理 B. ([22, 引理 2.3]) 对任意 $0 \leq y < 1, 0 \leq \varepsilon < 1, q > 1$，有

$$(y + \varepsilon)^q \leq y^q + 2^{q-1}q\varepsilon.$$

3.2. 定理 2.2 的证明

由于 $f^*\in\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ 在 $\mathbb{D}$ 中是解析的，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{z}e^{it}f^*(e^{it})\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}e^{it})^2}dt=\frac{1-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^*(e^{it})\frac{\overline{z}e^{it}}{(1-\overline{z}e^{it})^2}dt=0.$$

由 (1.2)、(2.1) 和 $|\mathcal{P}_{\varphi_1}|\le\|\varphi_1\|_\infty$，可知

$$\begin{aligned}|f(z)| &\le \left|\mathcal{P}_{f^*}(z)-\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\mathcal{P}_{f^*}(0)\right|+(1-|z|^2)\left|\mathcal{P}_{\varphi_1}(z)-\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\mathcal{P}_{\varphi_1}(0)\right|\\ &\quad+\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}|\mathcal{P}_{f^*}(0)-(1-|z|^2)\mathcal{P}_{\varphi_1}(0)|+\frac{1}{8}|G[g](z)|\\ &\le \frac{4}{\pi}\arctan|z|+(1-|z|^2)\frac{4}{\pi}\arctan|z|\|\varphi_1\|_\infty\\ &\quad+\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\Big(|\mathcal{P}_{f^*}(0)-\mathcal{P}_{\varphi_1}(0)|+|z|^2\|\varphi_1\|_\infty\Big)+\frac{1}{8}|G[g](z)|.\end{aligned}$$

沿用 [4, 定理 1.1]，证明中的论证，可得

$$|G[g](z)|\le\frac{1}{8}\|g\|_\infty(1-|z|^2)^2. \tag{3.1}$$

由假设 $f(0)=0$ 和 (3.1) 可知

$$|\mathcal{P}_{f^*}(0)-\mathcal{P}_{\varphi_1}(0)|=\left|\frac{1}{8}G[g](0)\right|\le\frac{1}{64}\|g\|_\infty.$$

因此，我们有如下估计

$$\begin{aligned}|f(z)| &\le \frac{4}{\pi}\arctan|z|+\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\left(\frac{1}{64}\|g\|_\infty+|z|^2\|\varphi_1\|_\infty\right)\\ &\quad+\frac{4}{\pi}\|\varphi_1\|_\infty\left(1-|z|^2\right)\arctan|z|+\frac{1}{64}\|g\|_\infty\left(1-|z|^2\right)^2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

对于 $q=1$ 的情形，由 (3.2) 和 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} &\ge \frac{2}{\pi}-\frac{1+|z|}{1+|z|^2}\left(\frac{1}{64}\|g\|_\infty+|z|^2\|\varphi_1\|_\infty\right)\\ &\quad-\frac{4}{\pi}\|\varphi_1\|_\infty(1+|z|)\arctan|z|-\frac{1}{64}\|g\|_\infty(1-|z|^2)(1+|z|)\\ &\ge \frac{2}{\pi}-4\left(\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty\right)>0.\end{aligned}$$

对于 $q\ge2$ 的情形，由假设 $f(0)=0$、(3.1) 以及

$$\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty<(2^{q-1}\cdot q+1)\Big(\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big)<\frac{2}{\pi},$$

that

$$|\mathcal{P}_{f^*}(0)|\le|\mathcal{P}_{\varphi_1}(0)|+\frac{1}{8}|G[g](0)|\le\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty<\frac{2}{\pi}.$$

因此， $\mathcal{P}_{f^*}$ 是满足 $|\mathcal{P}_{f^*}(0)| \leq \frac{2}{\pi}$ 的 $\mathbb{D}$ 的调和自映射。由引理 A 可得

$$\frac{1-|\mathcal{P}_{f^*}(z)|^q}{1-|z|^q} \geq \frac{2}{\pi} - |\mathcal{P}_{f^*}(0)|. \tag{3.3}$$

然后利用 (3.3)、引理 B 以及估计

$$|f(z)| \leq |\mathcal{P}_{f^*}(z)| + (1-|z|^2)\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big),$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1-|f(z)|^q}{1-|z|^q} &\geq \frac{1-|\mathcal{P}_{f^*}(z)|^q - 2^{q-1}\cdot q(1-|z|^2)\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big)}{1-|z|^q} \\
&= \frac{1-|\mathcal{P}_{f^*}(z)|^q}{1-|z|^q} - 2^{q-1}\cdot q\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big)\frac{1-|z|^2}{1-|z|^q} \\
&\geq \frac{2}{\pi} - |\mathcal{P}_{f^*}(0)| - 2^{q-1}\cdot q\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big) \\
&\geq \frac{2}{\pi} - (2^{q-1}\cdot q + 1)\Big(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty\Big) > 0.
\end{aligned}$$

定理的证明至此完成。 □

为了证明定理 2.3，我们需要以下结果。

定理 C。（[18, 定理 1.2]）设 $F(e^{it}) = e^{i\gamma(t)}$ 是 $\mathbb{T}$ 到其自身的保向同胚。若 $f = \mathcal{P}_F$ 是 $\mathbb{D}$ 的拟共形自映射，则它是双 Lipschitz 的，即存在常数 $L < \infty$ 使得

$$\frac{1}{L} \leq \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leq L \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}),$$

因此

$$\frac{1}{L} \leq \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \leq L \quad (z \in \mathbb{D}).$$

引理 D.（[15,引理 2.1]）设 f 是在 $\mathbb{D}$ 上连续可微的函数。那么，当且仅当 $|Df(z)| \leq L$ 在 $\mathbb{D}$ 上时， f 是具有 $L > 0$ 的 L-Lipschitz连续函数。

3.3. 定理 2.3 的证明

对于 z_1、 $z_2 \in \mathbb{D}$，我们有

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left|\int_{[z_1,z_2]} f_z(z)dz + f_{\overline{z}}(z)d\overline{z}\right| \leq |Df(z)||z_1 - z_2|,$$

其中 $[z_1, z_2]$ 表示 $\mathbb{D}$ 中以 z_1 和 z_2为端点的线段。因此，我们只需估计 $|Df(z)|$。由于 $\mathcal{P}_{f^*} = f^*$是一个单叶解析

函数，从 $\overline{\mathbb{D}}$ 映射到 $\overline{\mathbb{D}}$，且 $f^*(e^{it}) = e^{i\gamma(t)}$，根据定理 C，对于任意 z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$,

$$|\mathcal{P}_{f^*}(z_1) - \mathcal{P}_{f^*}(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

其中 L 是一个正常数。由引理 D 可得

$$|D\mathcal{P}_{f^*}(z)| \leq L.$$

由于 f^* 在 $\mathbb{D}$ 中的解析性，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{z}e^{it} f^*\left(e^{it}\right) \frac{1-|z|^2}{\left(1-\bar{z}e^{it}\right)^2} dt = 0,$$

由 (1.2) 可知

$$\begin{aligned} f_z(z) &= [\mathcal{P}_f(z)]_z + \overline{z}\mathcal{P}_{\varphi_1}(z) - (1-|z|^2)[\mathcal{P}_{\varphi_1}(z)]_z \\ &\quad -\frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{D}} g(w)G_z(z,w)dA(w) \end{aligned} \tag{3.4}$$

and

$$\begin{aligned} f_{\overline{z}}(z) &= [\mathcal{P}_f(z)]_{\overline{z}} + z\mathcal{P}_{\varphi_1}(z) - (1-|z|^2)[\mathcal{P}_{\varphi_1}(z)]_{\overline{z}} \\ &\quad -\frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{D}} g(w)G_{\overline{z}}(z,w)dA(w). \end{aligned} \tag{3.5}$$

利用 [14, 引理 2.5]„ 可得

$$\frac{\|g\|_\infty}{16\pi}\int_{\mathbb{D}} \left(|G_z(z,w)| + |G_{\bar{z}}(z,w)|\right) dA(w) \leq \frac{23}{48}\|g\|_\infty. \tag{3.6}$$

由调和映射的施瓦茨-皮克型引理（见 [3]），可得

$$|D\mathcal{P}_{\varphi_1}(z)| \leq \frac{4}{\pi}\frac{\|\varphi_1\|_\infty}{1-|z|^2}. \tag{3.7}$$

由 (3.4)、(3.5)、(3.6) 和 (3.7) 可得

$$|Df(z)| \leq |D\mathcal{P}_{f^*}(z)| + 2|z||\mathcal{P}_{\varphi_1}(z)| + (1-|z|^2)|D\mathcal{P}_{\varphi_1}(z)| + \frac{23}{48}\|g\|_\infty \leq M, \tag{3.8}$$

其中

$$M = L + \left(2 + \frac{4}{\pi}\right)\|\varphi_1\|_\infty + \frac{23}{48}\|g\|_\infty.$$

定理得证。 □

3.4. 推论 2.4 的证明

(1) 根据推论 2.4(1) 和定理 2.2 的假设，我们得到 t

$$\frac{\delta_{\mathbb{D}}(z)}{\delta_{\mathbb{D}}(f(z))} = \frac{1-|z|}{1-|f(z)|} \leq \frac{1}{\frac{2}{\pi} - 4(\|\varphi_1\|_\infty + \frac{1}{64}\|g\|_\infty)}.$$

此外，由 (3.8) 可知，存在一个常数 M 使得 $|Df| \leq M$。现在，我们选取一个适当的常数 M_1，满足 $M_1 = \max\{M, \frac{2}{\pi}\}$，使得 $|Df| \leq M_1$。然后，由引理 D 可得

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M_1|z_1 - z_2|.$$

因此，利用伯努利不等式，对于$\mathbb{D}$中的任意两点 z_1 和 z_2，可得

$$\begin{aligned} j_{\mathbb{D}}(f(z_1),f(z_2)) &= \log\left(1+\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\min\{\delta_{\mathbb{D}}(f(z_1)),\delta_{\mathbb{D}}(f(z_2))\}}\right) \\ &\leq \log\left(1+\frac{M_1}{\frac{2}{\pi}-4(\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty)}\cdot\frac{|z_1-z_2|}{\min\{\delta_{\mathbb{D}}(z_1),\delta_{\mathbb{D}}(z_2)\}}\right) \\ &\leq \frac{M_1}{\frac{2}{\pi}-4\left(\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty\right)} j_{\mathbb{D}}(z_1,z_2). \end{aligned}$$

推论第一部分的证明至此完成。

(2) 在这种情况下，根据定理 2.2，我们得到

$$\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}\leq\frac{1}{\frac{2}{\pi}-5(\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty)}.$$

由此不等式结合 (3.8) 可得

$$\frac{|Df(z)|(1-|z|^2)}{1-|f(z)|^2}\leq\frac{M}{\frac{2}{\pi}-5(\|\varphi_1\|_\infty+\frac{1}{64}\|g\|_\infty)}:=M'.$$

令 γ 为连接 z_1 和 z_2 的双曲测地线。则对于任意 $z\in\gamma$，我们得到

$$d_h(f(z_1),f(z_2))\leq\int_{f(\gamma)}\lambda_{\mathbb{D}}(w)|dw|\leq\int_\gamma(\lambda_{\mathbb{D}}\circ f)(z)|Df(z)||dz|\leq M'd_h(z_1,z_2),$$

其中 $w=f(z)$。这就完成了推论第二部分的证明 y. □

致谢
本研究部分得到中国湖南省自然科学基金（编号：2022JJ40112）、湖南省教育厅科学基金（编号：20B118）和河北省自然科学基金（编号：2021201006）的资助。

利益冲突
作者声明，本文发表不存在任何利益冲突。

数据可用性声明
作者声明，本研究纯属理论研究，不涉及任何数据。

参考文献

[1] K. Astala, T. Iwaniec and G. Martin, 《平面上的椭圆型偏微分方程与拟共形映射》, 载于: 普林斯顿数学系列, 第 48 卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2009 年, xviii+677 页。[2] H. Begehr, 《双调和方程的狄利克雷问题》, *Gen. Math.*, 13 (2005), 65–72。[3] F. Colonna, 《有界调和映射的布洛赫常数》, *Indiana Univ. Math. J.* **38** 1989 829 840 , ( ), –。

[4]SH. Chen, P. Li and X. Wang, 《非齐次双调和方程解的施瓦茨型引理、朗道型定理及利普希茨型空间》, *J. Geom. Anal.*, 29 (2019), 2469–2491。[5] SH. Chen, S. Ponnusamy and X. Wang, 《某些双调和映射的朗道定理》, *Appl. Math. Comput.*, 208 (2009), 427–433。[6]SH. Chen and X. Wang, 《满足双调和方程的单位圆盘拟共形自映射的双利普希茨特征》, *Indiana U. Math. J.* **70** 2021 1055 1086 , ( ), –。

[7] F. W. Gehring and B. P. Palka, 《拟共形齐性域》。 *J. Analyse Math.* **30** 1976 172 199 , ( ), –。

[8] E. Heinz, 《关于单射调和映射》, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 101–105。[9] S. Hayek, 《科学与工程中的高等数学方法》, Marcel Dekker, 纽约, 2000 年。ISBN 0-8247-0466-5。[10] D. Kalaj, 《曲面之间的拟共形调和映射》, *Int. Math. Res. Notices* **2** 2015 355 380 , ( ), –。

[11] D. Kalaj and J. Zhu, 《黎曼曲面间调和映射的施瓦茨–皮克型不等式》, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 69 (2018), 1364–1375。[12] M. Knežević and M. Mateljević, 《关于调和拟共形映射的拟等距映射》, *J. Math. Anal. Appl.*, 334 (2007), 404–413。[13] P. Li and S. Ponnusamy, 《拟共形映射及二阶椭圆型偏微分方程解关于距离比度量的利普希茨连续性》, *Complex Anal. Oper. Theory*, 12 (2018), 1991–2001。[14] P. Li and S. Ponnusamy, 《单位圆盘内非齐次双调和狄利克雷问题解的表示公式与双利普希茨连续性》, *J. Math. Anal. Appl.*, 456 (2017), 1150–1175。[15] P. Li and X. Wang, 《 α *Hokkaido* -调和函数的利普希茨连续性》, *Math. J.* **48** 2019 85 97 , ( ), –。[16] S. Mayboroda and V. Maz'ya, 《双调和方程解的梯度有界性与一阶维纳判别》, *Invent. Math.*, 175 (2009), 287–334。[17] M. Mohapatra, X. Wang and J. Zhu, 《非齐次双调和方程解的边界施瓦茨引理》, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 100 (2019), 470–478。[18] M. Pavlović, 《单位圆盘调和拟共形同胚下的边界对应》, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 27 (2002), 365–372。[19] M. Pavlović, 《圆盘上函数空间导论》, Matematički institut SANU, 贝尔格莱德, 2004 年。

[20] P. Strzelechi，关于双调和映射及其推广，
Calc. Var. Partial.，( )，–。[21] M.
Differ. Equ. **18** 2003 401 432
Vuorinen，共形不变量与拟正则映射。
J. Analyse，( )，–。[22] D.
Math. **45** 1985 69 115
Zhong、F. Meng 和 W. Yuan，关于满足泊松微分不等式的映射的 Schwarz-Pick 型不等式，
Acta Math. Sci.，3 (2021)，959– 967。

Peijin Li
P. Li，湖南第一师范学院数学系，中华人民共和国湖南省长沙市 410205。电子邮箱：wokeyi99@163.com

Yaxiang Li Y. Li，湖南第一师范学院数学系，中华人民共和国湖南省长沙市 410205。电子邮箱：yaxiangli@163.com

Qinghong Luo Qinghong Luo，数学系，湖南师范大学，中国湖南长沙 410081，中华人民共和国；数学系，湖南第一师范学院，中国湖南长沙 410205，中华人民共和国。电子邮箱：luoqh207@qq.com

Saminathan Ponnusamy S.Ponnusamy，数学系，印度理工学院马德拉斯分校，印度金奈 600 036；莫斯科国立罗蒙诺索夫大学，莫斯科基础与应用数学中心，俄罗斯莫斯科。电子邮箱：samy@iitm.ac.in