arXiv:2302.05947v1 [math.LO] 12 Feb 2023

类型逻辑与数学基础*

Jouko V¨a¨an¨anen 数学与统计系，赫尔辛基大学 逻辑、语言与计算研究所，阿姆斯特丹大学 jouko.vaananen@helsinki.fi

2023年2月14日

摘要

我曾在别处 [8]论证过，二阶逻辑为数学提供了一种基础，其方式与集合论大体相同，尽管前者是二阶的，而后者是一阶的；但二阶逻辑因依赖特设的大域假设而有缺陷。本文论证，类型逻辑这一二阶逻辑的强大扩展，能够在不依赖任何特设大域假设的情况下为数学提供基础。大域假设由类似 ZFC 的公理所取代。尽管类型逻辑与集合论有这种相似之处，它仍保留了二阶逻辑所特有的数学结构主义方法。作为一种模型论逻辑，类型逻辑是最强的逻辑。事实上，在集合论中可定义的每个模型类，都是类型逻辑中某个句子的模型类。由于其强大性，类型逻辑可用于在集合论中表述特别强的反射原理。

1 引言

类型逻辑于 [7], 中提出，是二阶逻辑的一种多类扩展。从严格意义上说，它是最强的逻辑。本文提出以类型逻辑作为数学基础，并将其与二阶逻辑和集合论进行比较。本文认为，类型逻辑解决了二阶逻辑中的一个问题：结构的存在性证明依赖于特设的大域假设。

类型逻辑相较于一阶和二阶逻辑所具有的新特性，是能够“向模型之外查看”：例如，要使一个群成为某个域的乘法群，就需要引用群外的零元素；又如，对于定义为有限四元组集合的图灵机，要使其停机，就需要引用一条可能比图灵机本身大得多的纸带。

*发表于 [9]。

在计算机科学中，通常将数据库视为一种多类型结构。数据库的每一列（属性）都有各自的值域，可以是薪资数值、性别、部门、姓氏、邮政编码等。事实上，把这些内容全部归入同一个包含数字、单词和符号字符串的混合域中，似乎很不自然。要说明可以向数据库添加一个新列（例如薪资列），就需要说明可以将新元素，即薪资值，添加到数据库所涉及的整体对象集合中。

从某种意义上说，普通的二阶逻辑也会“超出”模型的范围，因为我们可以把有界二阶变量看作一阶变量，它们的取值范围是原始域上所有子集和关系构成的域。事实上，理解二阶逻辑的最佳方式之一，是将其视为一种双类型一阶逻辑，其中一种类型——即二阶变量取值的类型——被假定由另一种类型的所有子集和关系组成。当“所有子集和关系”被替换为“足以满足概括公理的子集和关系”时，我们便得到一种语义，在这种语义下，Henkin 完备性 [2]成立。类型逻辑也是如此。

为了初步了解类型逻辑，我们来考察在具有两种变量类型的多类型一阶逻辑中对域公理的一种表述。我们用变量x、 y和 z表示乘法群的类型，用 u、 v和 w表示加法群的类型。函数 $\cdot$和常数 1 属于第一种类型，函数$+$ 和常数 0 属于第二种类型：

$$\varphi = \begin{cases} \forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\ \forall x(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x) \\ \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x) \\ \forall x \exists y(x \cdot y = 1) \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} \forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z)) \\ \forall x(x + 0 = 0 + x = x) \\ \forall x \forall y(x + y = y + x) \\ \forall x \exists y(x + y = 0) \\ \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z) \\ \forall x \exists u(x = u) \wedge \forall u \exists x(u = 0 \vee u = x) \end{cases} \tag{1}$$

我们已将乘法群划分为第一类型，将加法群划分为第二类型。将群与更大的域部分分开后，我们可以提出如下问题：

What kind of groups are the multiplicative group of a field?

答案是：恰好是满足以下条件的群

$$\text{For some } + \text{ and for some } 0\text{: } \varphi \wedge \psi. \tag{2}$$

在给定群中，句子 (2) 为真意味着群外存在某个元素，此处为元素 0，它与新函数 $+$ 一起定义了一个域。

举一个不同类型的例子，假设

$$\varphi \tag{3}$$

是词汇表 $\{R_1, ..., R_n\}$ 中某个数学结构的有限二阶公理化。假设我们想说 φ 有一个模型。那么，我们引入一个新的一元谓词 P，并考虑句子

$$\exists P(\exists R_1 \ldots \exists R_n \varphi)^{(P)}, \tag{4}$$

其中，$\psi^{(P)}$ 表示将 ψ 相对化到一元谓词 P。在一个模型中，(4) 表示存在一个子集 P 以及定义在 P 上的关系 R_1, ..., R_n，使得

$$(P, R_1, ..., R_n) \models \varphi.$$

因此，在任何足够大、能够包含 φ 的模型中，句子 (4) 都表示确实存在这样一个模型。但在较小的模型中，(4) 就是假的，即使φ 可能有模型。因此，(4) 并没有真正表达 φ存在模型。如果允许"$\exists P \exists R_1 \ldots \exists R_n$"指向模型之外的对象，情况就会不同。在类型逻辑中（我们将在下文详细介绍），句子

$$\tilde{\exists} R_1 \ldots \tilde{\exists} R_n \varphi, \tag{5}$$

表示存在一个新的对象域以及新的关系 R_1,..., R_n，使得 φ 成立。因此，(5) 表达的是 φ 的语义一致性，而不受考察它的模型影响。

在代数中，诸如模 P是投射的、群 F是自由的等概念，都是通过任意的模 M 和任意的群 G 来定义的，而不考虑这些模 M 能否在 P内部实现，也不考虑这些群G 能否在 F内部实现。即使后来证明它们确实能够在其中实现，原始概念所指的也无疑是数学对象总体论域中的任意对象 N 和 G 。启示：数学中的二阶概念有时显然会指向所考察结构之外的对象。

在集合论中，外部指涉当然最为明显，因为其中的对象是通过指涉整个集合论域来定义的。实际上，在大多数情况下，可以将指涉范围限制在论域的某个较小部分，但往往不能限制为待定义对象的元素或其幂集。

2 类型逻辑

多类逻辑包含多个论域，并为每个论域设置变量；这很像向量空间包含标量域和向量域，并为它们分别设置不同的变量，也类似于几何学中点和直线各有不同的变量。Herbrand 似乎最早研究了多类逻辑，之后 Schmidt、Feferman [1], 等人也对此进行了研究。

2.1 基本概念

（多类型）词汇表是任意集合 L，由谓词符号 P、Q、R 等组成。为简化表述，我们不考虑函数符号和常量符号。我们使用自然数作为类型的名称。

每个词汇表 L 都有一个元数函数

$$\mathfrak{a}_L : L \to \mathbb{N}$$

它说明每个谓词符号的元数，以及一个类型函数

$$\mathfrak{s}_L : L \to \bigcup_n \mathbb{N}^n, \mathfrak{s}_L(R) \in \mathbb{N}^{\mathfrak{a}_L(R)},$$

它说明关系中元组各元素的类型。因此，如果 $P \in L$，那么 P是一个 $\mathfrak{a}_L(P)$元谓词符号，表示一个由类型为 $n_1, \ldots, n_k$ 的元素构成的 $\mathfrak{a}_L(P)$元组关系，其中 $(n_1, \ldots, n_k) = \mathfrak{s}(P)$。因此，我们可以从每个 n元谓词符号中读出预期关系的 n 元组中各元素的类型。换言之，我们没有表示任意类型元素之间抽象关系的符号（恒等关系 $=$除外）。

2.2 语法

类型逻辑的语法与二阶逻辑的语法非常接近。实际上，我们˜只需添加一种新的公式形式 $\exists P\varphi$，其直观含义是：存在一个具有新类型元素的谓词P，使得 φ。

设 L是一个词汇表。个体的变量符号为 $x, y, z, ...$，必要时带有索引 $x_0, x_1, ...$；关系的变量符号为 $X, Y, Z, ...$，带有索引 $X_0, X_1, ...$ 每个个体变量 x 都关联有一个类型 $\mathfrak{s}(x) \in \mathbb{N}$，因此它是一个取值于类型为 $\mathfrak{s}(x)$ 的元素的变量。每个关系变量 X 都有一个元数 $\mathfrak{a}(X)$，并关联有一个类型 $\mathfrak{s}(X) \in \mathbb{N}^{\mathfrak{a}(R)}$，因此它是一个表示类型为 $n_1 \dot{n}_k$ 的元素之间关系的关系变量，其中 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$。

词汇表 L 中的类型逻辑逻辑符号为

$$\approx, \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, (,), x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots.$$

L-方程的形式为 $x = y$，其中 x 和 y 可以是任意类型的变量。L-原子公式要么是 L-方程，要么形式为 $Rx_1 \ldots x_k$，其中 $R \in L, \mathfrak{s}_L(R) = (n_1, \ldots, n_k)$，且 $x_1, ..., x_k$ 是个体变量，使得 $\mathfrak{s}(x_i) = n_i$ 对于 $i = 1k$成立。基本公式是原子公式或原子公式的否定。L-公式的形式为：

1. $x = y$2. $R(x_1 \dot{x}_n)$，当 $\mathfrak{s}_L(R) = (\mathfrak{s}(x_1) ..., \mathfrak{s}(x_n))$ 3. $X(x_1 \dot{x}_n)$，当 $\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(x_1) ..., \mathfrak{s}(x_n))$ 4. $\neg\varphi$5. $(\varphi \vee \psi)$ 6. $\exists x\varphi$。 7. $\exists X\varphi$。

˜8. $\exists X\varphi$。新排序条件：如果 $\mathfrak{s}(X) = (n_1\dot{n}_k)$，那么 φ 除了 X 之外，不含 L 的自由变量或符号，且其类型为 n_i 或类型为 $(m_1\dot{m}_l)$，其中 $\{m_1\dot{m}_l\} \cap \{n_1\dot{n}_k\} \neq \emptyset$。

新排序条件的理由是，φ 的自由变量所指涉的元素所属的论域已经固定，因此不应由$\exists$量词改变。

˜我们将 $\varphi \wedge \psi$、$\varphi \to \psi$、$\forall x\varphi$ 和 $\forall X\varphi$ 视为借助否定从析取和存在量化得到的简写。

公式中变量的自由出现这一概念，其定义与一阶逻辑中的定义相同。一个新概念是公式中类型的自由出现。我们按如下方式定义这一概念，遵循这样的直觉：如果某个类型在公式中“自由”出现，无论它是个体变量、关系变量还是谓词符号的类型，那么要理解该公式在模型中的含义，就必须固定该类型的元素论域。相应地，如果某个类型在公式中只有“约束”出现，那么无需固定该类型的元素论域，就能理解该公式在模型中的含义；相反，在模型中评估公式的含义时，我们很可能会尝试该类型元素的不同论域。

公式的自由类型 $\mathfrak{fs}(\varphi)$ 定义如下：

1. $\mathfrak{fs}(x = y) = \{\mathfrak{s}(x)\ \mathfrak{s}(y)\}$2. $\mathfrak{fs}(Rx_1 \dots x_n)$ $= \{\mathfrak{s}(x_1) ..., \mathfrak{s}(x_n)\}$3. $\mathfrak{fs}(Xx_1 \dots x_n) = \{\mathfrak{s}(x_1) ...,$ $\mathfrak{s}(x_n)\}$4. $\mathfrak{fs}(\neg\varphi) = \mathfrak{fs}(\varphi)$ 5. $\mathfrak{fs}(\varphi \vee \psi) = \mathfrak{fs}(\varphi)$ $\cup\, \mathfrak{fs}(\psi)$ 6. $\mathfrak{fs}(\exists x\varphi) = \mathfrak{fs}(\varphi) \cup \{\mathfrak{s}(x)\}$7. $\mathfrak{fs}(\exists X\varphi)$ $= \mathfrak{fs}(\varphi) \cup \{n_1\dot{n}_k\}$，如果 $\mathfrak{s}(X) = (n_1\dot{n}_k)$。˜8. $\mathfrak{fs}(\exists X\varphi) = \mathfrak{fs}(\varphi) \setminus \{n_1\dot{n}_k\}$，如果 $\mathfrak{s}(X) = ($ $n_1\dot{n}_k)$。

2.3 公理

下文中，$\varphi(y/x)$表示通过在 φ 的自由出现位置将 x 替换为 y 所得到的公式。替换应遵循类型。

定义 2.1。类型逻辑的公理如下：逻辑公理：

- 命题逻辑重言式。
- 等同公理：$x = y$、$x = y \to y = x$、$(x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_n = y_n \wedge \varphi) \to \varphi($ $y_1...y_n/x_1...x_n)$，其中 φ 为原子式
- 量词公理：

- $\varphi(y/x) \to \exists x\varphi$, if y is free for x in φ in the usual sense.
- $\varphi(Y/X) \to \exists X\varphi$, if Y is free for X in φ in the usual sense.
- $\varphi(Y/X) \to \tilde{\exists} X\varphi$, if Y is free for X in φ in the usual sense.

证明规则：

- 肯定前件式 $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$
- 全称概括规则
  - $\{\Sigma, \varphi \to \psi\} \models \exists x\varphi \to \psi$, if x is not free in $\Sigma \cup \{\psi\}$
  - $\{\Sigma, \varphi \to \psi\} \models \exists X\varphi \to \psi$, if X is not free in $\Sigma \cup \{\psi\}$
  - $\{\Sigma, \varphi \to \psi\} \models \tilde{\exists} X\varphi \to \psi$, if no free sorts of ψ occur in $\mathfrak{s}(X)$.

第一理解公理：

$$\exists X \forall y_1 ... \forall y_m (X y_1 ... y_m \leftrightarrow \psi)$$

对于任意不含 X 自由出现的公式 ψ，只要 $\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(y_1) \ldots, \mathfrak{s}(y_m))$。第二理解公理：

$$\tilde{\exists} X \forall y_1 ... \forall y_m (X y_1 ... y_m \leftrightarrow \psi)$$

对于任意不含 X 自由出现的公式 ψ，只要 $\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(y_1) \ldots, \mathfrak{s}(y_m))$。

逻辑公理和证明规则显然不可或缺，并直接源自一阶逻辑中相应的公理和规则。公理 $\varphi(Y/X) \to \exists X\varphi$ 和 $\varphi(Y/X) \to \exists X\varphi$ 之间的区别如下：二者都将 $\varphi(Y/X)$ 作为假设。结论 $\exists X\varphi$ 谈及当前类型，指出存在满足 φ 的关系 X，即 Y。若 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$，那么结论 $\exists X\varphi$ 谈及除 $n_1 \dot{n}_k$ 之外的类型，指出存在类型 $n_1 \dot{n}_k$ 的域，使得在旧域与新域构成的组合结构中，存在满足 φ 的关系 X，即 Y。理解公理是传统的（非良基定义的）公理模式，它赋予二阶逻辑——在我们的情形中是类型逻辑——进行数学研究所必需的能力[3]。在个别情况下，较弱的理解能力可能就足够了，但这是一种通用模式。第一理解公理与第二理解公理的区别在于，前者规定，在由现有类型构成的结构中，存在由 ψ 定义的关系 X；而后者则指出，即使元素和关系所属的类型 ψ

如果我们只考虑一种类型，例如 0，就会得到恰好是经典二阶逻辑的系统。

2.4 语义

现在我们来定义类型逻辑的语义。这与二阶逻辑的语义非常相似，不同之处在于，我们必须处理解释形式为 $\exists$ 和 $\forall$ 的量词时可能出现的新论域˜ ˜。

定义 2.2。一个 L-结构（或 L-模型）是定义在 L 上的函数 $\mathcal{M}$，并具有以下性质：

1. 如果 $R \in L$ 和 $\mathfrak{s}(R) = (n_1, ..., n_k)$，那么对于每个 $i \in \{1, ..., k\}$，$n_i \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ 且 $M_{n_i} =_{df} \mathcal{M}(n_i)$ 是非空集合。2. 如果 $R \in L$ 是一个 k-关系符号，且 $\mathfrak{s}(R) = (n_1, ..., n_k)$，那么 $\mathcal{M}(R) \subseteq M_{n_1} \times \ldots \times M_{n_k}$。

我们通常将 $\mathcal{M}(R)$ 简写为 $R^{\mathcal{M}}$。如果不会引起混淆，我们使用如下记号

$$\mathcal{M} = (M_{n_1}, \ldots, M_{n_l}; R_1^{\mathcal{M}}, \ldots, R_m^{\mathcal{M}})$$

表示一个具有论域 M_{n_1}、...、M_{n_l} 以及关系 $R_1^{\mathcal{M}}$、...、$R_m^{\mathcal{M}}$ 的多排序结构，其中这些关系定义在某些论域的元素之间。按照这一约定，一个标量域为 F、向量群为 V 的向量空间（将函数和常量视为关系）记作：

$$(V, F; \cdot, 1, +, 0).$$

定义 2.3。到一个 L-结构 $\mathcal{M}$ 中的赋值，是任意函数 s，其定义域是一个由个体变量、关系变量和自然数组成的集合，并且满足

1. 如果 $x \in \mathrm{dom}(s)$，那么 $\mathfrak{s}(x) \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$，且 $s(x) \in M_{\mathfrak{s}(x)}$。

2. 如果 $X \in \mathrm{dom}(s)$，且 $\mathfrak{s}_L(X) = (n_1, \ldots, n_k)$，那么 $n_1, \ldots, n_k \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$，且 $s(X) \subseteq M_{n_1} \times \ldots \times M_{n_k}$。

修正赋值定义如下：

$$s[a/x](y) = \begin{cases} a & \text{if } y = x \\ s(y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$s[A/X](Y) = \begin{cases} A & \text{if } Y = X \\ s(Y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$。如果模型 $\mathcal{M}'$ 是模型 $\mathcal{M}$ 的 X-扩展，那么 $\{n_1 \dot{n}_k\} \cap \mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \emptyset$，$\mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \mathrm{dom}(\mathcal{M}) \cup \{n_1 \dot{n}_k\}$，且 $\mathcal{M}' \restriction \mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$。

定义 2.4。在 s 下，L-公式在 $\mathcal{M}$ 中的真定义如下：

(1) 当且仅当（$s(x_1) .. ., s(x_n)$）$\in \mathcal{M}(R)$ 时，$\mathcal{M} \models_s R(x_1 \dot{x}_n)$；(2) $\mathcal{M} \models_s x = y$ 当且仅当 $s(x) = s(y)$；(3) $\mathcal{M} \models_s \neg\varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \nvDash_s \varphi$；(4) $\mathcal{M} \models_s (\varphi \vee \psi)$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \models_s \psi$；(5) $\mathcal{M} \models_s \exists x\varphi$ 当且仅当对于某个 $a \in M_{\mathfrak{s}(x)}$，$\mathcal{M} \models_{s[a/x]} \varphi$；(6) $\mathcal{M} \models_s \exists X\varphi$ 当且仅当对于某个 $A \subseteq M_{n_1} \times \ldots \times M_{n_k}$，$\mathcal{M} \models_{s[A/X]} \varphi$，其中 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$，

˜(7) $\mathcal{M} \models_s \exists X\varphi$ 当且仅当对于某个 X-展开 $\mathcal{M}'$ 的 $\mathcal{M}$ 以及某个 $A \subseteq M'_{n_1} \times \ldots \times M'_{n_k}$, $\mathcal{M}' \models_{s[A/X]} \varphi$，其中 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$。

由于上述真值定义中的 (7) 涉及对集合进行无界量词化，因此必须针对量词秩不超过某个固定自然数 n的公式，分别给出定义。随着 n 增大，定义本身在量词秩方面也会变得更加复杂。

与二阶逻辑一样，这里有一个较宽松的模型概念；相对于这种模型，我们可以证明完备性定理。这个概念也允许给出统一定义。

定义 2.5。Henkin L-结构（或 Henkin L-模型）是一个三元组 $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G})$，其中$\mathcal{M}$ 是一个 L-结构，$\mathcal{U}$ 是一个满足 $\emptyset \notin \mathcal{U}$ 的集合，而 $\mathcal{G}$ 是一个关系集合，其关系连接 $\mathcal{M}$ 的论域中的元素与 $\mathcal{U}$中的集合。我们假设，$(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G})$ 满足第一理解公理和第二理解公理，具体含义如下文所定义。

其思想是，$\mathcal{U}$ 为˜真值条件所需的新类型提供一组可能的论域，而 $\mathcal{G}$ 则为 $\exists$ 量词的真值条件提供一组可能的关系。由于 $\mathcal{U}$ 并非所有集合构成的类（因为它是一个集合），且 $\mathcal{G}$ 不一定包含所有相关关系，因此结构 $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G})$ 比结构 $\mathcal{M}$ 更一般。原始结构 $\mathcal{M}$ 称为满结构。

Henkin L-结构（$\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}$）的赋值和修正赋值定义与普通结构中的相同。设 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$。模型 $\mathcal{M}'$ 是模型 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{U}$ 中的一个 X-扩张，当且仅当 $\{n_1 \dot{n}_k\} \cap \mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \emptyset$, $\mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \mathcal{M} \cup \mathrm{dom}(\{n_1 \dot{n}_k\})$, $\mathcal{M}' \restriction \mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, 并且对所有 $i = 1k$, $\mathcal{M}'(n_i) \in \mathcal{U}$。

定义 2.6。在 s 下，$(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G})$ 中 L-公式的真定义如下：

(1) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s R(x_1 \dot{x}_n)$ 当且仅当 $(s(x_1) \ldots, s(x_n)) \in \mathcal{M}(R)$, (2) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s x = y$ 当且仅当 $s(x) = s(y)$, (3) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s \neg\varphi$ 当且仅当 $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \not\models_s \varphi$, (4) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s (\varphi \vee \psi)$ 当且仅当 $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s \varphi$ 或 $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s \psi$, (5) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s \exists x\varphi$ 当且仅当对于某个 $a \in M_{\mathfrak{s}(x)}$, $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_{s[a/x]} \varphi$, (6) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s \exists X\varphi$ 当且仅当对于某个 $A \in \mathcal{P}(M_{n_1} \times .. \times M_{n_k}) \cap \mathcal{G}$, $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_{s[A/X]} \varphi$，其中 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$, ˜(7) $(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G}) \models_s \exists X\varphi$ 当且仅当对于某个 $A \in \mathcal{P}(M'_{n_1} \times \ldots \times M'_{n_k}) \cap \mathcal{G}$，以及 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{U}$ 中的某个 X-扩张$\mathcal{M}'$，$(\mathcal{M},\mathcal{U},\mathcal{G})' \models_{s[A/X]} \varphi$，其中 $\mathfrak{s}(X) = (n_1 \dot{n}_k)$。

下面给出了类型逻辑中可证性的刻画，它对应于类型论中的相应结果 [2]:

定理 2.7。（完备性定理）对于类型逻辑中的任意句子 φ 以及类型逻辑中的任意可数理论 T，以下条件等价：

1. $T \models \varphi$.

2. 每个 T 的 Henkin模型都满足 φ。

3. 每个可数 Henkin 模型都满足 T φ。

这一刻画表明，我们关于类型逻辑的公理以完美的方式捕捉了类型逻辑的直觉，至少在我们的 Henkin 语义确实如此的前提下。我们的 Henkin 语义与二阶逻辑的语义非常相似。

3 类型逻辑与集合论

本章将从集合论的角度考察类型逻辑。

定义 3.1。我们用 Δ_n 表示类型逻辑中这样一组公式：它们在语义上等价于一个 Σ_n 类型逻辑公式，也等价于一个 Π_n 类型逻辑公式。

定理 3.2。 *[7][6]* 对任意模型类 K 和任意 $n > 1$，以下条件等价:

(1) K 可由逻辑 Δ_n 定义。

(2) K 在列维层级中是 Δ_n-可定义的。

证明。我们只证明 $n = 2$ 的情形。一般情形类似。设 L 是一个有限词汇表，且 $\mathcal{A}$ 是一个可由二阶逻辑刻画的 L-结构。设 σ 是 ZFC 的一个较大的有限片段的合取。若对于每个 $a \in M$，其中的每个元素和 a 的每个子集都属于 M，则称模型 $(M, \in)$ 是 θ 的超传递模型。令 Sut(M) 为一个 Π_1-公式，它断言 M 是超传递的。令 Voc(x) 为“x 是一个词汇表”的标准定义。令 SO(L, x) 为二阶 L-公式类的集合论定义。令 Str(L, x) 为 L-结构的集合论定义。令 Sat($\mathcal{A}, \varphi$) 为用集合论语言书写的类型逻辑 Σ_2-片段的归纳真值定义。令

$$\begin{aligned} P(z,x,y) \quad = \quad & \mathrm{Voc}(z) \wedge \mathrm{Str}(z,x) \wedge \mathrm{SO}(z,y) \wedge \\ & \exists M(z,x,y \in M \wedge \sigma^{(M)} \wedge \mathrm{Sut}(M) \wedge (\mathrm{Sat}(z,x,y))^{(M)}) \end{aligned}$$

现在，若 L 是一个词汇表，$\mathcal{A}$ 是一个 L-结构，那么 $\mathcal{A} \models \varphi \iff P(L, \mathcal{A}, \varphi)$。这表明 $\mathcal{A} \models \varphi$ 是 $\mathcal{A}$ 和 L的一个 Σ_2 性质。

反过来，假设谓词 Φ 是 L-结构的一个 Σ_2 性质。存在一个类型逻辑的 Σ_2-句子 φ，使得对于所有 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M} \in K$ 成立，当且仅当 $\mathcal{M} \models \varphi$。

设 $\Phi = \exists x \forall y P(x, y, \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 Σ_2-性质。令 ψ 为一个类型逻辑句子，其模型在同构意义下恰好是 $\mathcal{A}$，对于这些模型，存在 $(V_\alpha, \in)$，其中有 $\alpha = \beth_\alpha$, $\mathcal{A} \in V_\alpha$，且 $(V_\alpha, \in) \models \exists x \forall y P(x, y, \mathcal{A})$。如果 $\exists x \forall y P(x, y, \mathcal{A})$ 成立，我们可以借助莱维反射原理找到 ψ 的一个模型。另一方面，假设 ψ 有一个模型 $\mathcal{A}$。不失一般性，它具有 $(V_\alpha, \in)$ 的形式，其中$\mathcal{A} \in V_\alpha$。令 $a \in V_\alpha$ 使得 $(V_\alpha, \in) \models \forall y P(a, y, \mathcal{A})$。由于在此情况下 $H_\alpha = V_\alpha$，$(H_\alpha, \in) \models \forall y P(a, y, \mathcal{A})$，其中 H_α 是遗传基数为 $< \alpha$ 的集合的集合。再次应用莱维反射原理，我们得到 $(V, \in) \models \forall y P(a, y, \mathcal{A})$，从而证明了 $\exists x \forall y P(x, y, \mathcal{A})$。

□

模型类是指具有相同词汇表且在同构下封闭的结构类。在集合论语境中，类通过其集合论定义来指称。

以下推论在 [5] 中曾被提及，但未给出证明：

推论 3.3. *[7][6]* 每个模型类都可以用类型逻辑定义。因此，类型逻辑是最强的逻辑。

逻辑 Δ_n、 $n = 2$、3、.....构成一个不断增强的逻辑序列。其模型论性质可以用集合论术语刻画，以下结果说明了这一点：

定理 3.4. *[7]* 逻辑 Δ_n 的韩夫数是 δ_n。逻辑 Δ_n 的洛文海姆数是 σ_n。逻辑 Δ_n 的判定问题是自然数的完备 Π_n-可定义集。

定理 3.5. *[4]* Δ_2 的 LST 数是第一个超紧致基数。

定理 3.6. Δ_3 的 LST 数至少是第一个可延拓基数。

定理 3.7。 Δ_n 的判定问题是自然数的完备 Π_n-集。

4 类型逻辑与数学基础

我们认为，类型逻辑可以像二阶逻辑一样为数学提供基础，同时有一个重要改进：它不依赖集合论中临时设定的 大域假设。

现在，我们将从类型逻辑的角度来思考数学基础。根据类型逻辑的观点，数学命题要么具有以下形式：

$$\mathcal{A} \models \varphi,$$

其中， $\mathcal{A}$ 是一个可用类型逻辑刻画的结构，而 φ 是一个类型逻辑句子；或者具有以下形式：

$$\models \varphi,$$

其中 φ 同样是一个类型逻辑句子。因此，数学命题要么陈述特定真，即特定结构中的真；要么陈述一般真，即在所有结构中的真。特定真可以按如下方式化归为一般真。设 $\theta_{\mathcal{A}}$ 是一个将 $\mathcal{A}$ 刻画至同构的类型逻辑句子。那么

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \models \theta_{\mathcal{A}} \to \varphi.$$

有趣的是，与二阶逻辑的情况截然不同，反过来也是成立的。设 φ 是一个仅含谓词 P_1、.....、 P_k 的类型逻辑句子。令 $X_1 X_k$ 分别为类型 $\mathfrak{s}$（P_1）.....、 $\mathfrak{s}$（P_k）中的新一元谓词变量。那么

$$\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \tilde{\forall} X_1 \ldots \tilde{\forall} X_k \varphi(X_1 \ldots X_k / P_1 \ldots P_k)$$

$$\not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\tilde{\forall} X_1 \ldots \tilde{\forall} X_k \varphi(X_1 \ldots X_k / P_1 \ldots P_k).$$

˙直观地说，这意味着：一个在某些域中讨论谓词 P_1P_k 的类型逻辑句子有效，当且仅当无论我们为 P_1P_k、 φ 取什么新的域和解释˙，它都为真。由于一般真可归约为特定真，因此我们不妨只关注特定真。

我们有什么理由可以断言 $\mathcal{A} \models \varphi$? 我们可以从类型逻辑公理推出句子 $\theta_{\mathcal{A}} \to \varphi$。当然，我们可能需要超出类型逻辑标准公理的范围，但我们已经有的类型逻辑公理足以为数学的大部分内容提供依据。

断言 φ 有模型，也就是说 $\neg\varphi$ 不是有效的，有什么依据？根据上述内容，只需从公理推出句子

$$\neg\tilde{\forall}X_1 \ldots \tilde{\forall}X_k\varphi(X_1 \ldots X_k/P_1 \ldots P_k).$$

如果比较类型逻辑与二阶逻辑，区别在于：在二阶逻辑中，为了证明数学结构的存在，我们必须作出所谓的“大域假设”；而在类型逻辑中，我们只需从一般的理解公理推出它们。但此刻，真相浮现了。我们真的能仅凭理解公理证明数学所需结构的存在吗?

事实上，我们需要更多公理来补充第一和第二理解公理。

定义4.1. 幂类型公理:

$$\begin{array}{l}\tilde{\exists}Y(\forall u\exists z_1(u = z_1) \wedge \forall z_1\exists u(u = z_1)\wedge \\ \forall x\forall y(\forall z_1 \ldots \forall z_n(Yxz_1 \ldots z_n \leftrightarrow Yyz_1 \ldots z_n) \to x = y)\wedge \\ \forall X\exists x\forall z_1 \ldots \forall z_n(Xz_1 \ldots z_n \leftrightarrow Yxz_1 \ldots z_n)),\end{array} \tag{6}$$

其中

$$\begin{array}{l}\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(z_1), \ldots, \mathfrak{s}(z_n)) \\ \mathfrak{s}(Y) = (\mathfrak{s}(x), \mathfrak{s}(z_1), \ldots, \mathfrak{s}(z_n)) \\ \mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(y) \\ \mathfrak{s}(z_1) = \ldots = \mathfrak{s}(z_n).\end{array}$$

注意，在幂类型公理中，只有 $\mathfrak{s}(u)$是自由的，因此它是一个关于单类型模型的公理，即 $\mathfrak{s}(u)$。当然，模型也可以包含其他类型；这条公理只是没有说明这些类型的任何情况。类型 $\mathfrak{s}(z_1)$只是类型 $\mathfrak{s}(u)$的一个辅助副本，正如合取项 $\forall u\exists z_1(u = z_1) \wedge \forall z_1\exists u(u = z_1)$所规定的那样。类型 $\mathfrak{s}(x)$是一个新类型，用来编码域$\mathfrak{s}(u)$上的 n元关系。编码通过谓词 Y完成。

引理4.2. 每个完全模型都满足幂类型公理。

证明。设 $\mathcal{M}$ 是一个（完整）模型， s 是到 $\mathcal{M}$ 中的赋值。令我们固定 X、 Y 和 x、 y、 z_1, ..., z_n，使得

$$\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(z_1), \ldots, \mathfrak{s}(z_n)), \mathfrak{s}(Y) = (\mathfrak{s}(x), \mathfrak{s}(z_1), \ldots, \mathfrak{s}(z_n)),$$

$\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(y)$ 且 $\mathfrak{s}(z_1) = \ldots = \mathfrak{s}(z_n)$。令 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 相同，除了新增了一个类型 $\mathfrak{s}(u)$（或者，如果该类型已存在于 $\mathcal{M}$ 中，则现在将其替换），其论域为 $\mathcal{P}(M_{\mathfrak{s}(x)})$，并且 $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}(z_1)} = M_{\mathfrak{s}(u)}$。令 s' 与 s 相同，除了

$$s'(Y) = \{(a, b_1, \ldots, b_n) \in N_{\mathfrak{s}(x)} \times M_{\mathfrak{s}(u)} \times \ldots \times M_{\mathfrak{s}(u)} : (b_1, \ldots, b_n) \in a\}.$$

现在 s' 在 $\mathcal{N}$ 中满足公式

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y (\forall z_1 \ldots \forall z_n (Y x z_1 \ldots z_n \leftrightarrow Y y z_1 \ldots z_n)) \rightarrow x = y) \wedge \\ \forall X \exists x \forall z_1 \ldots \forall z_n (X z_1 \ldots z_n \leftrightarrow Y x z_1 \ldots z_n)), \end{array}$$

因此， s 在 $\mathcal{M}$ 中满足公式（6）。

□

定义4.3. 无限类型公理:

$$\begin{array}{l} \tilde{\exists} X (\forall x \forall y \forall z ((X x y \wedge X x z) \rightarrow y = z) \\ \forall x \forall y \forall z ((X x z \wedge X y z) \rightarrow x = y) \\ \forall x \exists y X x y \\ \exists z \forall x \forall y (X x y \rightarrow \neg y = z)) \end{array} \tag{7}$$

其中 $\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(x)\ \mathfrak{s}(x))$，且 $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(y) = \mathfrak{s}(z)$。

引理 4.4. 每个完全模型都满足无限类型公理。

证明。设 $\mathcal{M}$ 是一个（完全）模型，且 s 是到 $\mathcal{M}$中的一个赋值。固定 X，以及x、 y、 z，使得 $\mathfrak{s}(X) = (\mathfrak{s}(x)\ \mathfrak{s}(x))$，且 $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(y) = \mathfrak{s}(z)$。设 $\mathcal{M}'$与 $\mathcal{M}$相同，只是增加了一个类型 $\mathfrak{s}(x)$（或者，如果该类型已存在于 $\mathcal{M}$ 中，则将其替换），其论域为 ω。设 s' 与 s 相同，只是

$$s'(X) = \{(n, n+1) : n \in \omega\}.$$

现在 s' 在 $\mathcal{M}'$ 中满足该公式

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z ((X x y \wedge X x z) \rightarrow y = z) \\ \forall x \forall y \forall z ((X x z \wedge X y z) \rightarrow x = y) \\ \forall x \exists y X x y \\ \exists z \forall x \forall y (X x y \rightarrow \neg y = z) \end{array}.$$

因此， s 在 $\mathcal{M}$ 中满足公式（7）。

□

幂类型公理使人想起集合论中的幂集公理，是论证新元素类型存在所必需的。要论证无限论域，则需要无限类型公理，就像集合论中需要无穷公理一样。请注意，幂类型公理或无限类型公理并不意味着我们只有无限模型或不可数模型。根据上述引理，这些公理在所有模型中都为真，即使是在有限模型中也是如此。

有了上述两个新公理，我们就能构造基数为任意 $< \beth_\omega$ 的数学结构，就像是在策梅洛集合论中工作一样。对于更大的结构

我们必须作出更强的假设，而这些假设很可能与集合论中的替代公理极为相似。关键在于，在二阶（及更高阶）逻辑中，我们从一种结构转向另一种结构时，必须临时作出大域假设；而在类型逻辑中，我们只需对论域作出一般性假设，正如集合论公理所断言的那样，集合具有一般性性质。

那么，类型逻辑与集合论之间有什么区别？尽管类型逻辑与集合论十分接近，但类型逻辑仍然是一种逻辑，就像一阶逻辑、二阶逻辑、无穷逻辑等一样。类型逻辑只将数学结构视为同构意义下的对象；它不偏好通过某一种构造而非另一种构造来得到结构，这与通常的数学结构观是一致的。在其模型论表述中，类型逻辑通过其 L¨owenheim-Skolem-Tarski 性质产生了有趣的反射原理。最后，类型逻辑为研究模型的复杂集合论性质提供了一个自然的模型论平台，而无需深入具体结构构造的细枝末节。

作为最强的逻辑，类型逻辑是数学中可定义性的终极标尺。任何同构不变的性质都可以用类型逻辑来度量。类型逻辑内部的规范层级 Δ_n ($n < \omega$)通过引用 Hanf 数、L¨owenheim 数和 Skolem-L¨owenheim-Tarski 数，沿着大基数层级不断上升，最终一直达到 Vopenka 原理。列维层级中属于 Δ_2 的模型类，恰好就是二阶逻辑的 Δ-扩展中可定义的模型类。对于 $n > 2$，类型逻辑对列维层级中属于 Δ_n 的模型类也提供了类似的刻画。这种逻辑是否过于强大，因而失去了实用性?对于像类型逻辑这样强的逻辑而言，其主要用途在于可定义性理论。但类型逻辑也具有一种自然的公理化，并且相对于自然的 Henkin 模型概念是完备的，因此我们也可以在类型逻辑中书写推理。这是另一种看待数学的方式，不同于集合论；在这种方式中，重点是定义，而不是构造。

参考文献

[1] Solomon Feferman. 多类型插值定理的应用。载于《塔斯基研讨会论文集》（《纯数学专题讨论会论文集》，第XXV卷，加州大学伯克利分校，伯克利，加利福尼亚州，1971年），第205–223页，普罗维登斯，罗得岛州，1974年。美国数学会。[2] Leon Henkin. 类型理论中的完备性。《符号逻辑杂志》，15:81–91，1950年。[3] David Hilbert 和 Wilhelm Ackermann.《理论逻辑基础》。Springer-Verlag，柏林，1972年。第六版，《数学科学基础丛书》第27卷。第一版于1928年出版。[4] M. Magidor. 超紧基数和可延拓基数在逻辑中的作用。《以色列数学杂志》，10:147–157，1971年。[5] J. A. Makowsky、Saharon Shelah 和 Jonathan Stavi. Δ-逻辑与广义量词。《数学逻辑年刊》，10(2):155–192，1976年。

[6] Juha Oikkonen. 二阶可定义性、博弈量词及相关表达式。Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math.，48(1):39–101，1978年。[7] Jouko V¨a¨an¨anen. 抽象逻辑与集合论。I. 可定义性。载于《逻辑学讨论会 ’78》（蒙斯，1978年），《逻辑与数学基础研究》第97卷，第391–421页。North-Holland，阿姆斯特丹，1979年。[8] Jouko V¨a¨an¨anen. 二阶逻辑还是集合论? 《符号逻辑通报》，18(1):91–121，2012年。[9] Jouko V¨a¨an¨anen. 类型逻辑与数学基础。载于《Infinity and truth》，《新加坡国立大学数学科学研究所讲义丛书》第25卷，第171–186页。World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2014年。