arXiv:2302.05970v1 [math.CA] 12 Feb 2023

量子树的重建技术

Sergei A. Avdonin[1], Kira V. Khmelnytskaya[2], VladislavV. Kravchenko[31] 阿拉斯加大学数学与统计系，费尔班克斯，AK 99775，美国[2] 克雷塔罗自治大学工程学院，钟山，Las Campanas街区，西北环路无门牌号，Quer´étaro，Qro. 邮编76010，M´éxico[3] Cinvestav数学系，Quer´étaro校区，西北环路#2000，Real de Juriquilla住宅区，Quer´étaro，Qro.，76230，M´éxico 电子邮箱：s.avdonin@alaska.edu、khmel@uaq.edu.mx、vkravchenko @math.cinvestav.edu.mx

2023年2月14日

摘要

研究了从若干点处给定的Weyl矩阵恢复量子树图上势的反问题。提出了一种求其数值解的方法。总体方法基于叶剥离法，并结合了斯图姆-刘维尔方程解的贝塞尔函数的纽曼级数（NSBF）表示式。在每一步中，对所产生的反问题的求解都归结为处理NSBF系数。

叶剥离法可以将一般反问题局部化为丛上的局部问题，而基于 NSBF 表示的方法则将局部问题拆分为独立边上的双谱反问题，并将其化为关于 NSBF系数的线性代数方程组。此外，每条边上的势都可由第一个 NSBF系数恢复。所提出的方法可实现为高效的数值算法，并通过数值测试加以展示。

1 引言

量子图，尤其是量子图上的反问题，在科学和工程领域有着广泛的应用，并引出了许多颇具挑战性的问题，涉及现代数学的诸多领域，从组合学到偏微分方程和谱理论。近年来，出现了不少关于量子图的综述和论文集，其中包括 Berkolaiko 和 Kuchment [13] 以及 Mugnolo [29]撰写的首批相关专著。量子图上反问题的理论是应用数学中一个蓬勃发展的研究领域，致力于建立存在性和唯一性结果，并探索可行的求解方法（例如，参见 [25, 35, 12, 8, 9, 4]）。

迄今为止，探讨适用于量子图上逆问题数值解的方法的论文寥寥无几 [12, 3, 7, 6]。由于度量图上微分方程的空间离散化问题极为困难，甚至正向边值

图上的问题也带来了相当大的数值挑战（例如参见 [2]），因此，高效求解逆问题的一条有前景的途径似乎是借助并利用解的解析表示式。文献 [7, 6] 中针对星形图提出了这种方法。该方法基于对斯图姆-刘维尔方程解采用非常特殊的函数级数表示

$$-y'' + q(x)y = \rho^2 y, \quad x \in (0, L), \quad q \in L_1(0, L), \quad \rho \in \mathbb{C}.$$

这些表示式具有所谓贝塞尔函数的纽曼级数（NSBF）的形式（参见例如 [33, 第十六章], [34] 以及该主题的近期专著 [11] 和其中的参考文献），其来源是 [21] 中将变换算子核（参见例如 [16], [18], [27], [28], [31]）展开为傅里叶-勒让德级数。这些 NSBF 表示式具有若干独特性质，使其特别适用于求解逆谱问题。级数余项的界与 $\mathrm{Re}\,\rho$无关。这使得在 ρ 的大区间上处理近似解（NSBF 的部分和）成为可能，且精度不会降低。此外，已知 NSBF 表示式的第一个系数，便可恢复斯图姆-刘维尔方程的势；这在实践中确保了令人满意的数值结果，即便只取较少的级数项，因而每一步只需求解较少的线性代数方程亦然。

在本文中，我们将这种基于 NSBF 表示的方法推广到任意量子树。具体做法是，将[8], 中提出的叶剥离法与关于计算分枝点处解及其导数的新思路相结合。本文考虑的反问题是：根据一组点 $\rho = \rho_k$, $k = 1, \dots, K$处给定的韦尔矩阵，近似恢复量子树上的势。量子图的韦尔矩阵实际上就是其狄利克雷到诺伊曼映射。它在量子图研究的各个方面都发挥着重要作用，包括谱理论 [35] 和可控性[8]。该反问题的物理意义，是根据系统在若干频率下的测量响应，恢复由量子图建模的微分算子。

叶剥离法可以将树上的反问题局部化为丛上的反问题；丛是指一个星形子图，其中除一条边外，其余边均为叶边（边界边）。恢复丛上叶边的势后，即可将这些边移除，而叶剥离法则可以计算所得较小树的韦尔矩阵。重复这一过程有限次，便可逐步遍历整棵树，最终将反问题化为星形图上的反问题。 [6], 提出了借助 NSBF 表示求解该问题的方法，因此本文将发展一种求解丛上局部逆问题的方法，并提出计算应用叶剥离法所需的其他辅助函数的技术。

事实上，整体方法在于将图上的反问题归结为对各边上解的 NSBF系数进行运算。在求解局部问题时，第一步是在每条边的端点（该端点对应于层的公共顶点）处，计算叶边上一对线性无关解的 NSBF系数。这一步使我们能够将问题分解为叶边上的独立问题。第二步，利用所得的 NSBF系数，计算每条叶边上势的狄利克雷-狄利克雷特征值和诺伊曼-狄利克雷特征值。上文提到的 NSBF 表示的第一个特征保证了能够以统一的精度计算数百个

特征值。因此，在层的每条叶边上，我们得到一个双谱斯图姆–刘维尔逆问题。关于此类问题的唯一性和可解性的结果已广为人知，例如可见于 [15], [27], [32], [36]。对于这一问题，我们应用 [19] 中的方法，该方法同样涉及 NSBF 表示。该方法可以计算某些乘子常数 [14]，这些乘子常数将与同一组特征值相关的诺伊曼-狄利克雷特征函数联系起来，但这些特征函数是在区间的相反端点处归一化的。由此得到一个关于其 NSBF 表示系数的线性代数方程组，此时这些系数对应于区间内部的点。通过求解该方程组，我们可以得到第一个系数，并据此恢复势。值得一提的是，NSBF 表示最初用于求解有限区间上的斯图姆–刘维尔逆问题，见 [17]。随后，[17] 中的方法在 [18] 和 [23], [24] 中得到了改进。在这些论文中，线性代数方程组借助盖尔范德-列维坦积分方程得到。在 [19] 中，研究者发展了另一种方法，其基础是考察在相反端点处归一化的特征函数；这一思想随后被用于 [7], [20], [6]，并且在本文求解各边上的双谱反问题时也采用了这一思想。

因此，本文的主要成果是提出了一种高效方法，用于求解量子树上的反问题，即根据韦尔矩阵恢复势。我们讨论了该方法的数值实现，并给出了数值示例。

在第2节中，我们回顾韦尔矩阵的定义并 formulates 反问题。在第3节中，我们用每条边上的基本解系表示魏尔解，并回顾斯图姆-刘维尔方程解的 NSBF 表示，以及其中一些相关性质。在第4节中，我们详细说明叶剥离法。在第5节中，我们详细介绍所提出的局部逆问题求解方法。在第6节中，我们总结在树上求解反问题的整体方法。在第7节中，我们讨论该方法的数值实现和数值示例。最后，第8节给出一些总结性评论。

2 问题设定

设 Ω 是一个有限、连通、无圈的紧图（树图），由 P 条边e_1,...,e_P和 $P+1$ 个顶点 $V=\{v_1,...,v_{P+1}\}$组成。记号 $e_j \sim v$ 表示边 e_j与顶点 v相接。每条边 e_j 都对应于实数轴上的一个区间 (0, L_j)。Ω 的边界 $\Gamma=\{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$ 是图中所有叶节点（外部顶点）的集合。与某个 γ_j 相邻的边称为叶边或边界边。

令 $q \in L_2$(Ω) 为实值，λ 为复数。定义在图 Ω 上的连续函数 u 是由 $u_j \in C[0, L_j]$ 个函数组成的 P 元组，并满足内部顶点 v 处的连续性条件：对于所有 e_i、$e_j \sim v$，$u_i(v) = u_j(v)$。于是 $u \in C$(Ω)。

我们称函数 u 是方程的一个解

$$-u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x) \tag{2.1}$$

在图 Ω 上，若除满足 (2.1) 外还满足以下条件

$$u \in C(\Omega) \tag{2.2}$$

and

$$\sum_{e_j \sim v} \partial u_j(v) = 0, \quad \text{for all } v \in V \setminus \Gamma. \tag{2.3}$$

这里， $\partial u_j(v)$ 表示 u 在顶点 v 处沿边 e_j 、从该顶点向外方向的导数。(2.3) 中的求和遍及与内部顶点 v 相接的所有边。条件 (2.3) 称为基尔霍夫-诺伊曼条件。

考虑方程 (2.1) 的一个解 w_i ，它在除一个叶子顶点 γ_i 之外的所有叶子顶点处均为零，而在该顶点处等于一。也就是说， w_i 是方程 (2.1) 的一个解，满足

$$w_i(\gamma_i) = 1 \quad \text{and} \quad w_i(\gamma_j) = 0 \text{ for all } j \neq i.$$

这样的解 w_i 称为与叶子顶点 γ_i 对应的 Weyl解。由于方程 (2.1) 的狄利克雷谱为实数，对于任意 γ_i ， Weyl解对所有 $\lambda \notin \mathbb{R}$均存在且唯一。

定义 2.1 由元素 $M_{ij}(\lambda) = \partial w_i(\gamma_j)$， $i, j = 1, \ldots, m$ 组成的 $m \times m$矩阵函数 $M(\lambda)$， $\lambda \notin \mathbb{R}$，称为韦尔矩阵。

事实上，对于固定的 λ，韦尔矩阵表示由 Ω 和 $q \in L_2(\Omega)$ 定义的量子图的狄利克雷到诺伊曼映射。确实，如果 u 是方程 (2.1) 的一个解，并且在边界顶点 $u(\gamma, \lambda) = f(\lambda)$ 处满足狄利克雷条件，那么 $\partial u(\gamma, \lambda) = M(\lambda) f(\lambda), \lambda \notin \mathbb{R}$。

本文所考虑的问题可以表述如下。

问题 2.2 给定 Ω 以及有限多个点 λ_k, $k = 1, \ldots, K$ 处的韦尔矩阵，近似求出势 $q(x)$。

当韦尔矩阵乃至其主对角线在所有位置均已知时，势 $q(x)$ 可被唯一确定（例如参见 [35]）。有限多个点处的韦尔矩阵信息只能使我们近似恢复势 $q(x)$。

这一反问题的实际意义显而易见。韦尔矩阵的各项表示由量子图描述的物理系统在一端受到单位脉冲作用、同时其他端被隔离时的响应。根据在若干取值 λ_k, $k = 1, \ldots, K$ 处的响应信息，我们可以近似恢复整个树图上的斯图姆-刘维尔方程 (2.1)。

3 基本解系与韦尔解

我们用 $\varphi_i(\rho, x)$ 和 $S_i(\rho, x)$ 表示该方程的解

$$-y''(x) + q_i(x) y(x) = \rho^2 y(x), \quad x \in (0, L_i) \tag{3.1}$$

满足初始条件

$$\varphi_i(\rho, 0) = 1, \quad \varphi_i'(\rho, 0) = 0,$$

$$S_i(\rho,0)=0,\quad S_i'(\rho,0)=1.$$

这里，$q_i(x)$ 是势 $q(x)$ 在边 e_i 上的分量，且 $\rho=\sqrt{\lambda}$，$\operatorname{Im}\rho\geq 0$。对于叶边 e_i，将其叶子顶点 γ_i 设为零较为方便。于是，Weyl解 $w_i(\rho,x)$ 的形式为

$$w_i(\rho,x)=\varphi_i(\rho,x)+\mathbf{M}_{ii}(\rho^2)S_i(\rho,x)\quad\text{on the adjacent edge } e_i$$

and

$$w_i(\rho,x)=\mathbf{M}_{ij}(\rho^2)S_j(\rho,x)\quad\text{on every leaf edge } e_j,\quad j\neq i.$$

在内部边上 e_j 我们有

$$w_i(\rho,x)=a_{ij}(\rho)\varphi_j(\rho,x)+b_{ij}(\rho)S_j(\rho,x),$$

其中，哪个顶点位于零点的选择是任意的，通常因子 $a_{ij}(\rho)$、$b_{ij}(\rho)$ 是未知的。

定理 3.1（[21]）方程 (3.1) 的解 $\varphi_i(\rho,x)$ 和 $S_i(\rho,x)$，以及它们关于 x 的导数，具有以下级数表示

$$\varphi_i(\rho,x)=\cos(\rho x)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n}(\rho x),\tag{3.2}$$

$$S_i(\rho,x)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho x),\tag{3.3}$$

$$\varphi_i'(\rho,x)=-\rho\sin(\rho x)+\frac{\cos(\rho x)}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n}(\rho x),\tag{3.4}$$

$$S_i'(\rho,x)=\cos(\rho x)+\frac{\sin(\rho x)}{2\rho}\int_0^x q_i(t)\,dt+\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sigma_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho x),\tag{3.5}$$

其中，$\mathbf{j}_k(z)$ 表示 k 阶球贝塞尔函数，$\mathbf{j}_k(z):=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{k+\frac{1}{2}}(z)$（例如，参见 *[1]*）。系数$g_{i,n}(x)$、$s_{i,n}(x)$、$\gamma_{i,n}(x)$ 和 $\sigma_{i,n}(x)$ 可通过简单的递归积分过程计算（参见 *[21]* 或 *[18,* 第 9.*4]* 节），计算从以下内容开始

$$g_{i,0}(x)=\varphi_i(0,x)-1,\quad s_{i,0}(x)=3\left(\frac{S_i(0,x)}{x}-1\right),\tag{3.6}$$

$$\gamma_{i,0}(x)=g_{i,0}'(x)-\frac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt,\quad \sigma_{i,0}(x)=\frac{s_{i,0}(x)}{x}+s_{i,0}'(x)-\frac{3}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt.$$

对于每个 $\rho\in\mathbb{C}$，所有级数都逐点收敛。对于每个 $x\in[0,L_i]$，级数在变量 ρ 的复平面的任意紧集上一致收敛，并且其部分和的余项具有与 $\operatorname{Re}\rho$ 无关的估计。特别地，对于部分和

$$\varphi_{i,N}(\rho,x):=\cos(\rho x)+\sum_{n=0}^{N}(-1)^n g_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n}(\rho x)$$

and

$$S_{i,N}(\rho,x):=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n s_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho x)$$

我们有如下估计

$$|\varphi_i(\rho,x)-\varphi_{i,N}(\rho,x)|\le\frac{2\varepsilon_{i,N}(x)\,\sinh(Cx)}{C}\quad and\quad |S_i(\rho,x)-S_{i,N}(\rho,x)|\le\frac{2\varepsilon_{i,N}(x)\,\sinh(Cx)}{C} \tag{3.7}$$

对于属于条带 $|\mathrm{Im}\ \rho|\le C$, $C\ge 0$ 的任意 $\rho\in\mathbb{C}$，其中 $\varepsilon_{i,N}(x)$ 是一个正函数，当 $N\to\infty$ 时趋于零。导数也满足类似的估计。

粗略地说，当 $\mathrm{Re}\,\rho$ 取较小值和较大值时，近似解及其导数对精确解的逼近程度同样好。在研究直接和逆谱问题时，这一点尤其方便，因为这类问题需要对参数 ρ 的较大取值范围进行运算。级数表示 (3.2)-(3.5) 的这一独特特征，源于它们是由变换算子积分核的精确傅里叶-勒让德级数表示导出的（见第 9 节 [21], [18, Sect. 9.4]；关于变换算子理论，请参阅 [27], [28], [31], [36]）。

此外，以下结论成立。

定理 3.2 对于任意 $\varepsilon>0$，存在这样的 $N\in\mathbb{N}$，使得函数 $S_i(\rho,L_i)$ 和 $\varphi_i(\rho,L_i)$ 的所有零点，分别由函数 $S_{i,N}(\rho,L_i)$ 和 $\varphi_{i,N}(\rho,L_i)$ 的相应零点逼近，且误差一致地有界于 ε。此外，$S_{i,N}(\rho,L_i)$ 和 $\varphi_{i,N}(\rho,L_i)$ 没有其他零点。

这一结论的证明与 [22] 中命题 7.1 的证明完全类似，具体做法是利用 (3.7)、正则斯图姆-刘维尔问题的特征函数的性质以及鲁歇定理。

这类级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n J_{\nu+n}(z)$$

称为贝塞尔函数的纽曼级数（NSBF）。

注意到，公式 (3.6) 表明，可以从级数 (3.2) 或 (3.3) 的前几个系数中恢复势 $q_i(x)$。事实上，我们有

$$q_i(x)=\frac{g_{i,0}''(x)}{g_{i,0}(x)+1} \tag{3.8}$$

and

$$q_i(x)=\frac{(xs_{i,0}(x))''}{xs_{i,0}(x)+3x}. \tag{3.9}$$

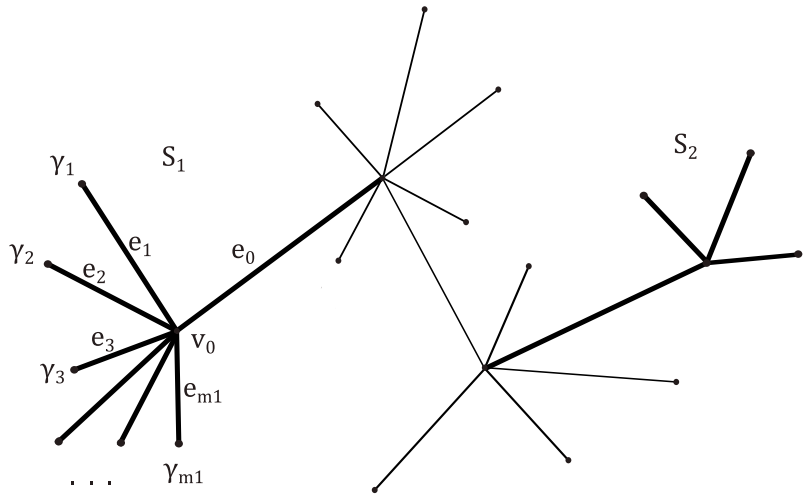

图 1：树图的一个示例，其中两个丛 S_1 和 S_2 用粗线标出。这里， v_0 是脱落顶点， e_0 是 S_1 的茎边。

4 叶剥离

总体策略基于叶剥离法（在 [8] 中提出），并结合使用第3节中的 NSBF 表示。

定义 4.1 树图的一个星形子图称为丛，若其中除一条边外，其余所有边都是叶边。丛中唯一的内部顶点称为脱落顶点。唯一一条不是叶边的边称为该丛的茎边。

图 1 展示了一个恰有两个丛 S_1 和 S_2 的树图示例。这里， v_0 是脱落顶点， e_0 是 S_1 的茎边。

非星形图的树图至少包含一个丛 [5], [10]。 [6] 中提出的方法可以根据韦尔矩阵中与丛的叶边对应的若干元素，恢复丛所有叶边上的势。之后，叶剥离法用于计算新树图（较小的树图）的韦尔矩阵；该树图由切除丛的叶边得到，因此脱落顶点成为新的叶子顶点。

重复这一叶剥离过程，最终会得到一个反问题：根据韦尔矩阵恢复星形图的势。针对这个问题，基于 NSBF 表示的方法已在 [6] 中提出。首先，让我们更详细地说明叶剥离法。

考虑一棵树图 Ω，并假设 S_1 是它的层，具有一个脱落顶点 v_0 和一条茎边 e_0。不失一般性，我们假设 γ_1、.....、γ_{m_1} 是属于 S_1 的叶节点。用 Ω 表示子图 $\Omega = \Omega \setminus \{e_1, \ldots, e_{m_1}\}$，它由从 Ω 中移除 S_1 的叶边 $\widetilde{\ }$ 得到，因此顶点 v_0 是 Ω 的一个叶子顶点，而 e_0 是相应的叶边 $\widetilde{\ }$。我们记作 $\gamma_0 = v_0$。用 M 表示 Ω 的韦尔矩阵。

假设层S_1的每条叶边 e_1，.....， e_{m_1} 上的势 $q(x)$已知，因此 $q_1(x)$.....， $q_{m_1}(x)$也已知，以及

$$\varphi_i(\rho, L_i),\ S_i(\rho, L_i),\ \varphi_i'(\rho, L_i),\ S_i'(\rho, L_i) \quad \text{for } 1 \le i \le m_1. \tag{4.1}$$

~叶剥离法所解决的问题，是利用 M 和 (4.1) 计算 M。

我们从元素 $\mathbf{M}_{00}(\rho^2)$ 开始，它是 Ω 上的 Weyl解

~ ~$\widetilde{w}_0(\rho,x)$ 在 γ_0 处的导数；该解在 γ_0 处取值为 1，在 Ω 的所有其他叶节点处取值为 0，也就是说，在 γ_j 处（$j = m_1+1,\dots,m$）。注意，

$$\widetilde{w}_0(\rho,x) = \frac{w_1(\rho,x)}{w_{11}(\rho,\gamma_0)} \quad \text{on } \widetilde{\Omega}.$$

下文中，记号 $w_{ij}(\rho,x)$ 表示我们考虑解 $w_i(\rho,x)$ 的第 j 个分量，也就是边 e_j 上的解 $w_i(\rho,x)$。因此，

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{00}(\rho^2) = \frac{\partial w_{10}(\rho,\gamma_0)}{w_{11}(\rho,\gamma_0)} = -\sum_{j=1}^{m_1} \frac{\partial w_{1j}(\rho,\gamma_0)}{w_{11}(\rho,\gamma_0)},$$

其中，$w_{10}(\rho,x)$ 是 $w_1(\rho,x)$ 在 e_0 上的一个分量。这可以写成如下形式:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{00}(\rho^2) =$$

$$-\frac{1}{\varphi_1(\rho,L_1)+\mathbf{M}_{11}(\rho^2)S_1(\rho,L_1)}\left(\varphi_1'(\rho,L_1)+\mathbf{M}_{11}(\rho^2)S_1'(\rho,L_1)+\sum_{j=2}^{m_1}\mathbf{M}_{1j}(\rho^2)S_j'(\rho,L_j)\right).$$

接下来，很容易看出

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{0i}(\rho^2) = \partial\widetilde{w}_0(\rho,\gamma_i) = \frac{\partial w_{1i}(\rho,\gamma_i)}{w_{11}(\rho,\gamma_0)} = \frac{\mathbf{M}_{1i}(\rho^2)}{w_{11}(\rho,\gamma_0)} = \frac{\mathbf{M}_{1i}(\rho^2)}{\varphi_1(\rho,L_1)+\mathbf{M}_{11}(\rho^2)S_1(\rho,L_1)}$$

当 $i =$ ~$m_1+1,\dots,m$。因此，我们得到了韦尔矩阵 $\mathbf{M}(\rho^2)$ 的第一行 .

现在选取 $i \in \{m_1+1,\dots,m\}$，并考虑 Ω 上的如下解:

$$u(\rho,x) := w_i(\rho,x) - \alpha w_1(\rho,x)$$

其中 α 是一个待定义的常数。注意，

$$u(\rho,\gamma_i) = 1$$

and

$$u(\rho,\gamma_j) = 0 \quad \text{for } j = m_1+1,\dots,m \text{ and } j \neq i.$$

Mo此外，α 可以选择为使得另外 $u(\rho,\gamma_0) = 0$。事实上，取 e

$$\alpha = \frac{w_i(\rho,\gamma_0)}{w_1(\rho,\gamma_0)}.$$

Then

$$u(\rho,\gamma_0) = w_i(\rho,\gamma_0) - \frac{w_i(\rho,\gamma_0)}{w_1(\rho,\gamma_0)} w_1(\rho,\gamma_0) = 0$$

因此，采用这种 α 选择后，我们有

$$\widetilde{w}_i(\rho,x)=u(\rho,x)=w_i(\rho,x)-\frac{w_i(\rho,\gamma_0)}{w_1(\rho,\gamma_0)}w_1(\rho,x)\quad \text{for } i=m_1+1,\dots,m \tag{4.2}$$

~是 Ω 上的韦尔解。因此，

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{M}}_{i0}(\rho^2)=\widetilde{w}'_{i0}(\rho,\gamma_0)&=w'_{i0}(\rho,\gamma_0)-\frac{w_{i1}(\rho,\gamma_0)}{w_{11}(\rho,\gamma_0)}w'_{10}(\rho,\gamma_0)\\&=w'_{i0}(\rho,\gamma_0)-w_{i1}(\rho,\gamma_0)\widetilde{\mathbf{M}}_{00}(\rho^2).\end{aligned} \tag{4.3}$$

我们有

$$w_{i1}(\rho,\gamma_0)=\mathbf{M}_{i1}(\rho^2)S_1(\rho,L_1)$$

and

$$w'_{i0}(\rho,\gamma_0)=-\sum_{j=1}^{m_1}\mathbf{M}_{ij}(\rho^2)S'_j(\rho,L_j).$$

因此，式 (4.3) 中的所有项均已知，所以可以计算ρ^2处韦尔矩阵 M(ρ^2)中对应于 γ_0 的第一列~。

最后，对于 $j=m_1+1$，.....，根据 (4.2) 中的 m，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{M}}_{ij}(\rho^2)=\partial\widetilde{w}_i(\rho,\gamma_j)&=\mathbf{M}_{ij}(\rho^2)-\frac{w_i(\rho,\gamma_0)}{w_1(\rho,\gamma_0)}\mathbf{M}_{1j}(\rho^2)\\&=\mathbf{M}_{ij}(\rho^2)-w_i(\rho,\gamma_0)\widetilde{\mathbf{M}}_{0j}(\rho^2)\\&=\mathbf{M}_{ij}(\rho^2)-\mathbf{M}_{i1}(\rho^2)S_1(\rho,L_1)\widetilde{\mathbf{M}}_{0j}(\rho^2).\end{aligned}$$

~至此，韦尔矩阵 M(ρ^2) 的计算完成。

5 局部问题的解

我们所说的局部问题，是指恢复层的叶边$e_1,\dots,e_{m_1}$上的势 $q(x)$，以及式（4.1）中的所有函数。

正如上一节所示，叶剥离法使我们能够将树图上的反问题的解归结为依次求解各层上的局部问题。求解每个局部问题后，可以移除相应的层，并使用叶剥离法计算剩余树图的韦尔矩阵。最后，在移除所有可能的层之后，得到一个星形图上的反问题；事实上，这个问题可用与本节所述求解局部问题相同的方法求解。

设 S为一个层，其叶边为 $e_1,\dots,e_{m_1}$。假设对于$1\le i,j\le m_1$ 以及一组取值 $\rho=\rho_k$，已知M$_{ij}$(ρ^2)。根据这些信息，我们尝试恢复势 $q_i(x)$，$i=1,\dots,m_1$。所提出的求解方法包含几个步骤。

首先，我们计算每个 i =1, . . . , m_1 对应的常数 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$，即式（3.2）和（3.3）中的系数在边的端点 $\{g_{i,n}$ 处的取值。

这第一步使我们能够拆分问题，将其化简为边上的一系列独立逆问题。实际上，已知系数 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ 后，我们便可在第二步中计算势 $q_i(x)$、 $x \in [0, L_i]$ 对应的狄利克雷－狄利克雷谱和诺伊曼－狄利克雷谱，从而得到关于 $q_i(x)$ 的双谱逆问题。

第三步中，借助表示式 (3.2) 以及满足端点 L_i 处初始条件的 (3.1) 的解 $T_i(\rho, x)$ 的类似级数表示，求解双谱逆问题：

$$T_i(\rho, L_i) = 0, \quad T_i'(\rho, L_i) = 1. \tag{5.1}$$

双谱逆问题被化为一个线性代数方程组，由此得到系数 $g_{i,\,0}(x)$。最后，由 (3.8) 计算势 $q_i(x)$。

5.1 系数 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$的计算

已知 $\mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2)$， $1 \le i, j \le m_1$，意味着对于每个 $i = 1, \dots, m_1$，我们都有以下等式

$$\begin{gathered}\varphi_i(\rho_k, L_i) + \mathbf{M}_{ii}(\rho_k^2) S_i(\rho_k, L_i) = \mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2) S_j(\rho_k, L_j), \\ \mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2) S_j(\rho_k, L_j) = \mathbf{M}_{il}(\rho_k^2) S_l(\rho_k, L_l),\end{gathered}$$

对所有 $j, l \ne i$, $1 \le j, l \le m_1$ 均成立。因此，对于每个 ρ_k，利用表示式 (3.2) 和，我们有以下方程 (3.3)

$$\begin{aligned}&\rho_k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_{i,n}(L_i) \mathbf{j}_{2n}(\rho_k L_i) + \mathbf{M}_{ii}(\rho_k^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s_{i,n}(L_i) \mathbf{j}_{2n+1}(\rho_k L_i) \\ &- \mathbf{M}_{ii+1}(\rho_k^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s_{i+1,n}(L_{i+1}) \mathbf{j}_{2n+1}(\rho_k L_{i+1}) \\ &= \mathbf{M}_{ii+1}(\rho_k^2) \sin(\rho_k L_{i+1}) - \rho_k \cos(\rho_k L_i) - \mathbf{M}_{ii}(\rho_k^2) \sin(\rho_k L_i), \quad \text{for } i = 1, \dots, m_1,\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，对于 $i = m_1$，我们将 $i+1$ 替换为 1（循环规则），以及这些方程

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s_{j,n}(L_j) \mathbf{j}_{2n+1}(\rho_k L_j) - \mathbf{M}_{ij+1}(\rho_k^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s_{j+1,n}(L_{j+1}) \mathbf{j}_{2n+1}(\rho_k L_{j+1}) \\ &= \mathbf{M}_{ij+1}(\rho_k^2) \sin(\rho_k L_{j+1}) - \mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2) \sin(\rho_k L_j),\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $j = 1$、…、m_1、 $j \ne i$、 $j+1 \ne i$，并且再次，对于 $j = m_1$，我们将 $j+1$ 替换为 1。

假设在 K 个点 ρ_k^2 处给定了 $\mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2)$、 $1 \le i$、 $j \le m_1$。为了计算所有 $i = 1$、…、m_1 对应的系数有限集 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$，我们采用以下策略。固定 i，并考虑相应的方程 (5.2) 和 (5.3)。对于每个 i，我们有一个形式为 (5.2) 的方程和 $m_1 - 2$ 个形式为 (5.3) 的方程。对每个 ρ_k^2 考虑这些 $m_1 - 1$ 个方程，可得到 $K(m_1 - 1)$ 个方程，其中有 $(m_1 + 1)(N + 1)$ 个未知数。这里的未知数是 m_1 组系数 $\{s_{j,n}(L_i)\}_{n=0}^N$（对应 $j = 1$、…、m_1）以及一组系数 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$。因此，我们至少需要 $K = \left\lceil \frac{(m_1+1)(N+1)}{m_1 - 1} \right\rceil$ 个点 ρ_k^2，在这些点处韦尔矩阵 $\mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2)$、 $1 \le i$、 $j \le m_1$ 的元素已知。这里 $\lceil x \rceil$ 表示

大于或等于 x 的最小整数。由此得到的方程组使我们能够计算固定 i 对应的 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$。总共，我们考虑 m_1 个这类线性代数方程组，以计算所有 $i=1$、...、m_1 对应的系数集 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$。

然而，一个重要的观察是，为了求出系数$\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$, $i=1,\ldots,m_1$，无需考虑形式为 (5.3) 的方程，或者至少无需考虑所有这类方程。事实上，只需考虑方程 (5.2) 即可，这意味着要恢复边 e_i 上的势函数，我们需要知道主对角线元素 $M_{ii}(\rho_k^2)$，以及某个 $j\neq i$ 对应的 $\mathbf{M}_{ij}(\rho_k^2)$，例如 $\mathbf{M}_{ii+1}(\rho_k^2)$（此时，$i=m_1$，$i+1$ 被 1 替代）。在这种情况下，对于每条边 e_i，我们利用每个 ρ_k 对应的形式为 (5.2) 的方程，计算出 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$、$\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$ 和 $\{s_{i+1,n}(L_{i+1})\}_{n=0}^{N}$，也就是 $3(N+1)$ 个未知数。正如 [6], 所示，最终，恢复的势函数的精度相当，无论是使用所有形式为 (5.3) 的方程、其中一部分，还是完全不使用这些方程。

5.2 Red边上双谱逆问题简介 e

如前一小节所述，第一步将层上的问题化为m_1 边上的独立问题。因此，考虑一条边 e_i，在此阶段我们已计算出系数 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$。现在利用它们计算势 $q_i(x)$、$x\in[0,L_i]$对应的狄利克雷-狄利克雷谱和诺伊曼-狄利克雷谱。为此，需要借助在端点处求得的近似解

$$\varphi_{i,N}(\rho,L_i)=\cos(\rho L_i)+\sum_{n=0}^{N}(-1)^n g_{i,n}(L_i)\mathbf{j}_{2n}(\rho L_i)$$

and

$$S_{i,N}(\rho,L_i)=\frac{\sin(\rho L_i)}{\rho}+\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n s_{i,n}(L_i)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho L_i).$$

事实上，由于 $S_i(\rho,x)$（以及 $S_{i,\ N}(\rho,x)$）满足原点处的狄利克雷条件，$S_i(\rho,L_i)$的零点恰好是狄利克雷-狄利克雷特征值的平方根。也就是说，$S_i(\rho,L_i)$是以下斯图姆-刘维尔问题的特征函数

$$-y''+q_i(x)y=\lambda y,\quad x\in(0,L_i), \tag{5.4}$$

$$y(0)=y(L_i)=0, \tag{5.5}$$

其零点与数值 $\{\mu_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 重合，其中 $\mu_{i,\ k}^2$ 是问题 (5.4)、(5.5) 的特征值。反过来，函数 $S_{i,\ N}(\rho,L_i)$ 的零点近似于 $S_i(\rho,L_i)$ 的零点（见上文定理 3.2）。因此，奇异数 $\{\mu_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 可由函数 $S_{i,\ N}(\rho,L_i)$ 的零点近似得到。

同样的推理也适用于函数 $\varphi_{i,\ N}(\rho,L_i)$，其零点近似于奇异数 $\{\nu_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$；这些奇异数是诺伊曼-狄利克雷特征值的平方根，也就是斯图姆-刘维尔问题在 (5.4) 条件下并满足以下边界条件时的特征值

$$y'(0)=y(L_i)=0. \tag{5.6}$$

因此，在每条边 e_i 上，我们都得到一个经典的反问题：从两个谱中恢复势$q_i(x)$，该问题将在下一步中加以研究。

5.3 双谱逆问题的解

为求解所得到的反问题，我们采用 [6]中 वकिसति的方法。为完整起见，现简要介绍如下。在这一阶段，我们已有两个奇异数有限序列 $\{\mu_{i,k}\}_{k=1}^{K_D}$ 和 $\{\nu_{i,k}\}_{k=1}^{K_N}$，它们分别是问题（5.4）、（5.5）以及（5.4）、（5.6）的特征值的平方根；此外，还有两个数列 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$和 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^{N}$，它们分别是（3.3）和（3.2）中的系数在端点处的取值。

考虑满足 L_i 处初始条件的方程 (5.4) 的解 $T_i(\rho, x)$:

$$T_i(\rho, L_i) = 0, \quad T_i'(\rho, L_i) = 1.$$

与解 (3.3) 类似，解 $T_i(\rho, x)$ 可表示为级数

$$T_i(\rho, x) = \frac{\sin(\rho(x - L_i))}{\rho} + \frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho(x - L_i)), \tag{5.7}$$

其中 $t_{i,\ n}(x)$ 是相应的系数，类似于 (3.3) 中的 $s_{i,\ n}(x)$。

注意，对于 $\rho = \nu_{i,\ k}$，解 $\varphi_i(\nu_{i,\ k}, x)$ 和 $T_i(\nu_{i,\ k}, x)$ 线性相关，因为它们都是问题 (5.4)、(5.6) 的特征函数。因此存在这样的实常数 $\beta_{i,\ k} \neq 0$，使得

$$\varphi_i(\nu_{i,k}, x) = \beta_{i,k} T_i(\nu_{i,k}, x). \tag{5.8}$$

此外，回想起 $\varphi_i(\nu_{i,\ k}, 0) = 1$，便可轻易求出这些乘子常数。因此,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta_{i,k}} &= T_i(\nu_{i,k}, 0) \approx T_{i,N}(\nu_{i,k}, 0) \\ &= -\frac{\sin(\nu_{i,k} L_i)}{\nu_{i,k}} - \frac{1}{\nu_{i,k}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t_{i,n}(0)\mathbf{j}_{2n+1}(\nu_{i,k} L_i),\end{aligned} \tag{5.9}$$

这里考虑到了奇数阶球贝塞尔函数是奇函数。系数 $\{t_{i,n}(0)\}_{n=0}^{N}$ 借助奇异数 $\{\mu_{i,k}\}_{k=1}^{K_D}$ 按如下方式计算。由于函数 $T_i(\mu_{i,\ k}, x)$、$k = 1$、2,... 是问题 (5.4)、(5.5) 的特征函数，因此有 $T_i(\mu_{i,\ k}, 0) = 0$，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t_{i,n}(0)\mathbf{j}_{2n+1}(\mu_{i,k} L_i) = -\sin(\mu_{i,k} L_i), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由此得到一个用于计算系数 $\{t_{i,n}(0)\}_{n=0}^{N}$ 的线性代数方程组，其形式为

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t_{i,n}(0)\mathbf{j}_{2n+1}(\mu_{i,k} L_i) = -\sin(\mu_{i,k} L_i), \quad k = 1, \cdots, K_D.$$

现在，在计算出 $\{t_{i,n}(0)\}_{n=0}^{N}$ 后，我们根据（5.9）计算乘子常数 $\{\beta_{i,k}\}_{k=1}^{K_N}$。

接下来，我们利用方程（5.8）为系数 $g_{i,\ n}(x)$ 和 $t_{i,\ n}(x)$ 构造一个线性代数方程组。事实上，方程（5.8）可以写成如下形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n}(\nu_{i,k}x) - \frac{\beta_{i,k}}{\nu_{i,k}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t_{i,n}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\nu_{i,k}\,(x-L_i))$$
$$= \frac{\beta_{i,k}}{\nu_{i,k}}\sin\left(\nu_{i,k}\,(x-L_i)\right) - \cos\left(\nu_{i,k}x\right).$$

我们计算出多少个诺伊曼–狄利克雷奇异数 $\nu_{i,\ k}$ 就有多少个这样的方程。为便于计算，我们选取某个自然数 N_c ——即待计算的系数 $g_{i,\ n}(x)$ 和 $t_{i,\ n}(x)$ 的数量。更确切地说，我们选取区间 $x_m \in (0, L_i)$ 内一个足够稠密的点集，并在每个 x_m 处考虑以下方程

$$\sum_{n=0}^{N_c}(-1)^n g_{i,n}(x_m)\mathbf{j}_{2n}(\nu_{i,k}x_m) - \frac{\beta_{i,k}}{\nu_{i,k}}\sum_{n=0}^{N_c}(-1)^n t_{i,n}(x_m)\mathbf{j}_{2n+1}(\nu_{i,k}\,(x_m-L_i))$$
$$= \frac{\beta_{i,k}}{\nu_{i,k}}\sin\left(\nu_{i,k}\,(x_m-L_i)\right) - \cos\left(\nu_{i,k}x_m\right), \quad k=1,\dots,K_N.$$

求解该方程组，我们便可在区间 $(0, L_i)$ 内一个足够稠密的点集上求得 $g_{i,\ 0}(x_m)$，从而得到 $g_{i,\ 0}(x)$，以及 $t_{i,\ 0}(x)$（后文将用到）。最后，借助（3.8）计算 $q_i(x)$。

5.4 函数的计算(4.1)

在层的每条叶边 e_i 上计算出 $q_i(x)$ 后，原则上我们可以通过在 e_i上求解相应的柯西问题，来计算函数（4.1）（这是应用剥叶过程所需要的）。然而，这显然不是最理想的选择，因为这意味着要针对 ρ_k 的 K 个不同取值，以及数值恢复的 $q_i(x)$ 求解柯西问题。相反，我们再次使用 NSBF 表示，以及前一步骤中已经计算出的函数$g_{i,\ 0}(x)$ 和 $t_{i,\ 0}(x)$这一事实。在 [21] （另见 [18, 第 9.4]节）中，我们建立了用于计算 NSBF 表示（3.2）–（3.5）系数的递归积分过程。该过程要求已知 $[0, L_i]$ 上一个不为零的解 $f(x)$，其满足以下方程

$$f''(x) - q_i(x)f(x) = 0$$

满足初始条件

$$f(0) = 1,$$

以及其导数 $f'(x)$。记

$$h := f'(0),$$

它是一个复数。随后，利用递归积分过程，可以根据 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 计算出 (3.2)-(3.5) 中所有的 NSBF系数。更确切地说，我们将计算解 $\varphi_{i,h}(\rho, x)$、 $S_i(\rho, x)$ 及其一阶导数，其中 $\varphi_{i,h}(\rho, x)$ 是满足初始条件的 (3.1) 的一个解

$$\varphi_{i,h}(\rho, 0) = 1, \quad \varphi'_{i,h}(\rho, 0) = h,$$

而 $S_i(\rho, x)$ 是上文定义的解。显然,

$$\varphi_i(\rho, x) = \varphi_{i,h}(\rho, x) - hS_i(\rho, x). \tag{5.10}$$

首先，我们先求得这样一个处处非零的解 $f(x)$，然后简要回顾递归积分过程。

由 (3.6) 可得

$$\varphi_i(0, x) = g_{i,0}(x) + 1.$$

此外，由 (5.7) 可得

$$T_i(0, x) = (x - L_i)\left(\frac{t_{i,0}(x)}{3} + 1\right),$$

其中我们考虑了 $\mathrm{j}_1(z) \sim \frac{z}{3}$, $z \to 0$。首先假设零不是诺伊曼-狄利克雷特征值，即 $\varphi_i(0, L_i) \neq 0$。那么 $\varphi_i(0, x)$ 和 $T_i(0, x)$ 线性无关，因此复值解

$$f(x) := \varphi_i(0, x) + \mathrm{i}T_i(0, x)$$

在 $[0, L_i]$ 中没有零点（i 表示虚数单位）。我们有 $h = f'(0) = \mathrm{i}T_i'(0, 0) = \mathrm{i}\big(1 + \frac{1-L_i}{3}t_{i,0}'(0)\big)$。反之，如果零是诺伊曼-狄利克雷特征值，我们可以利用阿贝尔公式构造线性无关的解 $\psi_i(x) := \varphi_i(0, x)\int_0^x \frac{dt}{\varphi_i^2(t,\ x)}$。那么 $f(x) := \varphi_i(0, x) + \mathrm{i}\psi_i(x)$ 且 $h = -\mathrm{i}\varphi_i'(0,\ L_i)$。无论哪种情况，我们都有一个处处非零的解 $f(x)$，因此可以应用递归积分过程。借助该过程，我们计算得到两个函数序列 $\{\beta_n(x)\}_{n=-1}^{\infty}$ 和 $\{\xi_n(x)\}_{n=-1}^{\infty}$。首项由以下等式定义

$$\beta_{-1}(x) = \frac{1}{2}, \quad \beta_0(x) = \frac{(f(x) - 1)}{2}, \quad \xi_{-1}(x) = \frac{1}{4}\int_0^x q(s)\,ds, \quad \xi_0(x) = \frac{f'(x) - h}{2} - \frac{1}{4}\int_0^x q(s)\,ds,$$

而所有其他元素均按如下方式构造

$$\beta_n(x) = \frac{2n+1}{2n-3}\left(\beta_{n-2}(x) + \frac{c_n}{x^n}f(x)\theta_n(x)\right),$$

$$\xi_n(x) = \frac{2n+1}{2n-3}\left(\xi_{n-2}(x) + \frac{c_n}{x^n}\left(f'(x)\theta_n(x) + \frac{\eta_n(x)}{f(x)}\right) - \frac{c_n - 2n + 1}{x}\beta_{n-2}(x)\right),$$

其中

$$\eta_n(x) = \int_0^x \big(tf'(t) + (n-1)f(t)\big)\beta_{n-2}(t)t^{n-2}\,dt, \quad \theta_n(x) = \int_0^x \frac{1}{f^2(t)}\big(\eta_n(t) - f(t)\beta_{n-2}(t)t^{n-1}\big)dt$$

对于 $n = 1$、2、.....和 $c_n = 1$，若 $n = 1$，则为 $c_n = 2$；否则为 $(2n - 1)$。

最后,

$$\varphi_{i,h}(\rho, x) = \cos(\rho x) + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta_{2n}(x)\mathbf{j}_{2n}(\rho x),$$

$$S_i(\rho, x) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \frac{2}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta_{2n+1}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho x),$$

$$\varphi'_{i,h}(\rho,x)=-\rho\sin(\rho x)+\cos(\rho x)\left(\frac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt+h\right)+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi_{2n}(x)\mathbf{j}_{2n}(\rho x)$$

and

$$S'_i(\rho,x)=\cos(\rho x)+\frac{\sin(\rho x)}{2\rho}\int_0^x q_i(t)\,dt+\frac{2}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi_{2n+1}(x)\mathbf{j}_{2n+1}(\rho x).$$

这些用于 将 mulas 与（5.10）结合起来，可以计算出函数（4.1）。

6 方法总结

给定一棵树图 Ω，以及在若干个值 $\rho_k^2,\ k=1,\dots,K$ 处的韦尔矩阵 M(ρ^2)。第一步，我们识别出一个层 S_1 ，并对其应用第 5 节所述的局部逆问题求解过程。根据该过程，我们计算层的每条叶边 e_i 对应的 NSBF系数集合 $\{g_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ 和 $\{s_{i,n}(L_i)\}_{n=0}^N$ （见第 5.1 小节）。接着，我们计算每条叶边上的狄利克雷–狄利克雷谱和诺伊曼–狄利克雷谱（见第 5.2 小节），从而得到关于 e_i 的逆双谱问题。该问题通过第 5.3 小节所述的方法求解。按照第 5.4 小节的说明，我们得到 $q_i(x)$，此外还得到函数 (4.1)。由此，我们便完整求解了层 S_1 上的局部问题，其中该层为 $\widetilde{\ }$。下一步，移除 S_1 的叶边，并按照第 4 节所述的叶剥离法，计算较小的新树图 Ω 对应的韦尔矩阵 M(ρ^2)，其中该树图为 $\widetilde{\ }$。

重复这一系列步骤，直到得到最终的星形图；对于该星形图，在前一步中已通过叶剥离法获得了相应的韦尔矩阵。对于这个最后的问题，应用第5节中的方法，其中 m_1 为星形图的边数。显然，在最后一步中无需计算函数 (4.1)，因此算法在恢复所有边上的势 $q(x)$ 后停止。

下一节将讨论该方法的数值实现以及一些数值示例。

7 数值示例

Fo对于数值测试，我们考虑图2所示类型的树图 .

例1. 考虑图2中的一个由九条边组成的图， $m=8$、 $m_1=5$，边的长度 e_0、.....、 e_8 为

$$L_0=1.4,\ L_1=\frac{e}{2},\ L_2=1,\ L_3=\frac{\pi}{2},\ L_4=\frac{\pi}{3},\ L_5=\frac{e^2}{4},\ L_6=1.1,\ L_7=1.2,\ L_8=1. \tag{7.1}$$

势的相应九个分量定义如下

$$q_0(x)=J_0(9x)+1,\ q_1(x)=|x-1|+1,\ q_2(x)=e^{-(x-\frac{1}{2})^2},\ q_3(x)=\sin(8x)+\frac{2\pi}{3},$$

$$q_4(x)=\cos\left(9x^2\right)+2,\ q_5(x)=\frac{1}{x+0.1},\ q_6(x)=\frac{1}{(x+0.1)^2},\ q_7(x)=e^x,$$

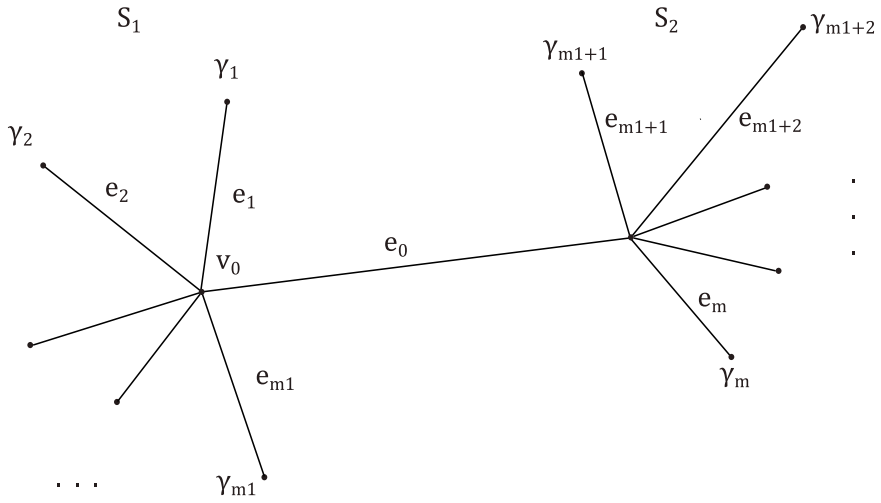

图 2：数值测试中考虑的树图。

$$q_8(x) = \begin{cases} -35.2x^2 + 17.6x, & 0 \le x < 0.25 \\ 35.2x^2 - 35.2x + 8.8, & 0.25 \le x < 0.75 \\ -35.2x^2 + 52.8x - 17.6, & 0.75 \le x \le 1, \end{cases} .$$

势 $q_8(x)$（来自 [14], [30]）在下文中称为鞍势。为了计算若干点 ρ_k^2 处的韦尔矩阵（直接问题），我们采用了 [6] 中的方法。我们取了 180 个点 ρ_k，根据规则 $\rho_k = 10^{\alpha_k} + 0.1i$ 选取，其中 α_k 在 $[0, 2]$ 上均匀分布。这种选择得到的点集在$\rho = 1 + 0.1i$ 附近分布更密集，而在 $\rho = 100 + 0.1i$附近分布更稀疏。在所有计算中，N 均取为$N = 9$ （十个系数 $g_{i,\ n}(L_i)$ 和十个系数 $s_{i,\ n}(L_i)$）。

图 3 展示了精确势函数（实线）以及使用所提出的算法计算得到的重建势函数（以星号标记）。

鞍势情况下的相对误差最大，在端点 $x = 1$ 附近约为 0.085。所有其他势函数的计算精度都高得多。

值得考察在每条边上两个谱的计算精度。例如，表 1 列出了借助 Matslise 软件包 [26] 计算得到的 e_2 上的一些“精确”狄利克雷-狄利克雷特征值（第一列）、按照第 5.2 小节所述方法通过求 $S_{2,9}(\rho, L_2)$ 的零点得到的近似特征值，以及所列各特征值的绝对误差。$S_{2,9}(\rho, L_2)$ 的零点是通过将该函数转换为区间 (0, 650) 上的样条函数，并使用 Matlab 命令 fnzeros 计算得到的。值得注意的是，即使对于较大的指标，绝对误差和相对误差仍然非常小。

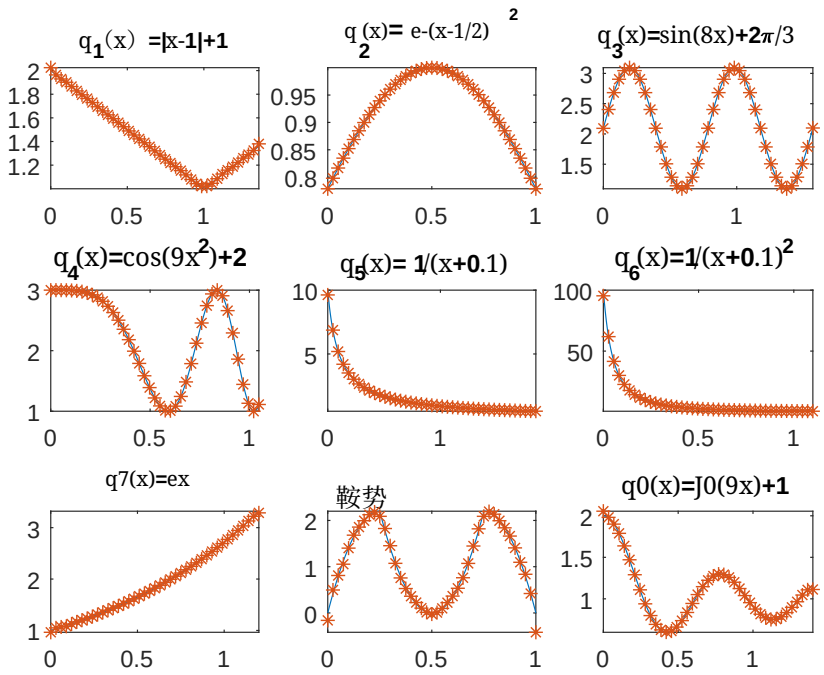

图 3：例1中量子图的势，该势根据在180个点处给出的韦尔矩阵，并结合 $N = 9$恢复得到。

表 1： $q_2(x)$ 的狄利克雷-狄利克雷特征值			
n	λ_n	$\widetilde{\lambda}_n$	$\lvert\lambda_n - \widetilde{\lambda}_n\rvert$
1	10.8381543818	10.8381543825	$7.1 \cdot 10^{-10}$
11	1195.1450218516	1195.1450218560	$4.4 \cdot 10^{-9}$
51	25671.7636244	25671.7636252	$8.0 \cdot 10^{-7}$
101	100680.7570614	100680.7570623	$9.4 \cdot 10^{-7}$
201	398742.8099714	398742.8099723	$9.9 \cdot 10^{-7}$

诺伊曼-狄利克雷特征值也得到了类似的结果。

值得注意的是，剥叶过程所造成的误差是如何累积的。为此，我们考虑第二个例子，其中第一个层中的势函数在第二个层中重复出现。

例2。考虑图 2 中的一个图，它由十八条边组成， $m = 17$、 $m_1 = 9$，边 e_1、...、 e_9 的长度为

$$L_1 = \frac{e}{2},\, L_2 = 1,\, L_3 = \frac{\pi}{2},\, L_4 = \frac{\pi}{3},\, L_5 = \frac{e^2}{4},\, L_6 = 1.1,\, L_7 = 1.2,\, L_8 = 1,\, L_9 = 1.4.$$

势函数 $q_1(x)$ ...、 $q_8(x)$ 的相应八个分量按照前一个例子的方式定义，此外， $q_9(x) = J_0(9x) + 1$。接下来， $q_{i+9}(x) = q_i(x)$，以及对于 $i = 1$，...，8 的 $L_{i+9} = L_i$，还有 $q_0(x) = q_9(x)$、 $L_0 = L_9$。也就是说，第一层的叶边上的九个势函数分量全部取自例1中的势函数， e_0 上的势函数分量取自例1，而第二个层上的八个势函数分量为例1中的 $q_1(x)$ ...、 $q_8(x)$。所有其他参数均按照例1进行选取。图 4 展示了计算结果。值得注意的是，在应用剥叶过程之前恢复的势函数（前九个势函数）与应用之后恢复的势函数（后九个势函数）的精度没有显著差异。在势函数 $q_9(x)$ 和 $q_0(x)$ 的情况下，观察到的差异最大。事实上， $q_9(x)$ 的最大相对误差约为 0.003，而 $q_0(x)$ 在右端点处的最大相对误差为 0.175。有趣的是，剥叶过程之后，所有其他势函数的恢复精度实际上没有变化。例如， $q_5(x)$ 的最大相对误差为 0.037583，而其“孪生”势函数 $q_{14}(x)$ 的最大相对误差为 0.037590。

因此，剥叶过程不会造成显著的误差累积，而且显然可以重复应用，从而求解相当复杂树图上的逆问题。

值得注意的是，在配备英特尔酷睿 i7 处理器的笔记本电脑上使用 Matlab 2017，整个计算只需几秒钟。

8 结论

我们提出了一种用于求解量子树图上逆问题的新方法，即从韦尔矩阵中恢复势。该方法基于叶剥离法以及利用贝塞尔函数的诺伊曼级数表示式求解斯图姆-刘维尔方程。利用给定数据求解丛上的局部逆问题，而这些问题又可归结为

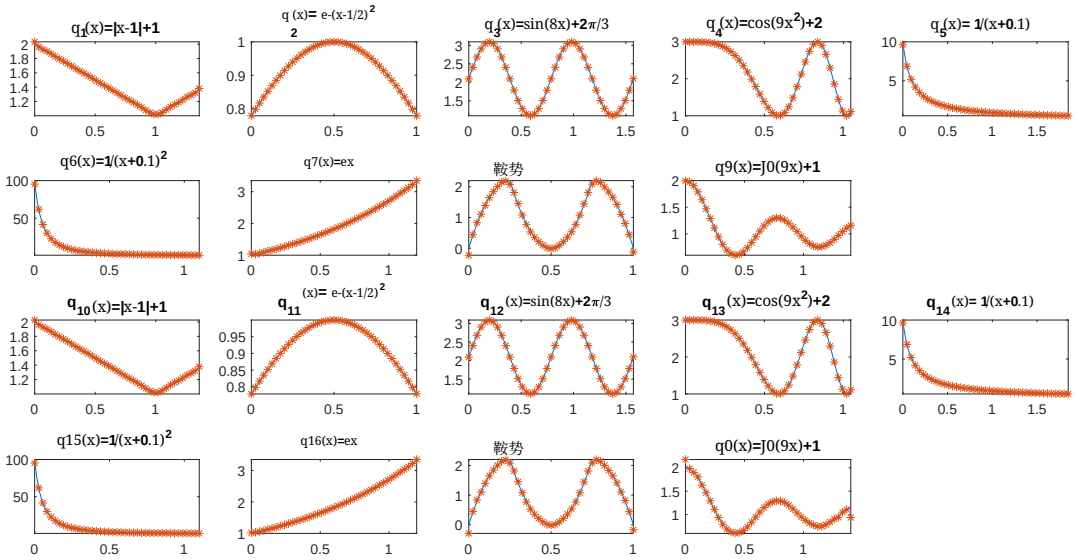

图4：从给定于180个点处的韦尔矩阵中恢复的例2量子图的势，其中 $N = 9$。

叶边上的双谱逆斯图姆-刘维尔问题。叶剥离法可以移除势已恢复的边，并计算较小树的韦尔矩阵。将叶剥离法与基于贝塞尔函数的诺伊曼级数表示式的方法相结合，得到了一种简单、直接且精确的数值算法。数值示例展示了该算法的性能。

经费支持 谢尔盖·阿夫多宁的研究部分由美国国家科学基金会（资助编号 DMS 1909869）以及莫斯科基础与应用数学中心资助。弗拉迪斯拉夫·克拉夫琴科的研究由墨西哥的墨西哥国家科学技术委员会通过项目284470资助，并在俄罗斯科学与高等教育部的支持下，依照协议075-02-2022-893，部分于南方联邦大学区域数学中心开展。

数据可用性 支持本研究结论的数据可在合理请求后获取。

声明
利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Abramovitz M. 和 Stegun I. A.（1972），《数学函数手册》，纽约：Dover。

[2] Arioli M. 和 Benzi M.（2018），量子图的有限元方法。《IMA 数值分析杂志》，38，第 3 期，1119–1163。

[3] Avdonin S.、Belinskiy B. 和 Matthews J.（2011），半轴上的反问题：局部方法，《淡江数学杂志》，42，第 3 期，1–19。[4] Avdonin S. 和 Bell J.（2015），确定定义在树图上的神经元电缆模型的物理参数，《反问题与成像杂志》，9，第 3 期，645-659。[5] Avdonin S.、Choque Rivero A.、Leugering G. 和 Mikhaylov V.（2015），关于双速度类树图反问题，《应用数学与力学杂志》，95，第 12 期，1490–1500。[6] Avdonin S. A.、Khmelnytskaya K. V. 和 Kravchenko V. V. 从Weyl矩阵恢复量子星形图上的势。arXiv:2210.15536。[7] Avdonin S. A. 和 Kravchenko V. V.（2023），求解量子星形图上逆谱问题的方法。《反问题与病态问题杂志》，31，第 1 期，31-42。[8] Avdonin S. 和 Kurasov P.（2008），量子树反问题，《反问题与成像》，2，第 1 期，1–21。[9] Avdonin S.、Leugering G. 和 Mikhaylov V.（2010），关于弹性弦类树网络上的一个反问题，《应用数学与力学杂志》，90，第 2 期，136–150。[10] Avdonin S. 和 Zhao Yu.（2021），度量树图上波动方程的叶剥离法。《反问题与成像》，15，第 2 期，185–199。[11] Baricz A.、Jankov D. 和 Pog´any T. K.（2017），贝塞尔型与库默尔型函数级数。《数学讲义》，2207。施普林格，查姆。[12] Belishev M. 和 Vakulenko A.（2006），图上的反问题：用边界控制法恢复弦树，《反问题与病态问题杂志》，14，29-46。[13] Berkolaiko G. 和 Kuchment P.（2013），《量子图导论》，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州。[14] Brown B. M.、Samko V. S.、Knowles I. W.、Marletta M.（2003），斯图姆–刘维尔方程的逆谱问题，《反问题》，19，235–252。[15] Chadan Kh.、Colton D.、P¨aiv¨arinta L.、Rundell W.（1997），《反散射与逆谱问题导论》。工业与应用数学学会，费城。[16] Karapetyants A. N. 和 Kravchenko V. V.（2022），《数学物理方法：经典与现代》。Birkh¨auser，查姆。[17] Kravchenko V. V.（2019），关于一种求解斯图姆–刘维尔反问题的方法，《反问题与病态问题杂志》，27，401–407。[18] Kravchenko V. V.（2020），《斯图姆–刘维尔正问题与反问题：一种求解方法》，Birkh¨auser，查姆。[19] Kravchenko V. V.（2022），谱完备化与斯图姆–刘维尔逆问题。《数学方法与应用科学》；1-15。doi:10.1002/mma.8869。

[20] Kravchenko V. V., Khmelnytskaya K. V. 和 C¸etinkaya F. A.（2022），根据输出边界数据恢复非均匀性，《Mathematics》，10，4349，https://doi.org/10.3390/math10224349。[21] Kravchenko V. V., Navarro L. J. 和 Torba S. M.（2017），用贝塞尔函数的纽曼级数表示一维薛定谔方程的解，《Appl. Math. Comput.》314，173–192。[22] Kravchenko V. V. 和 Torba S. M.（2015），变换算子的解析逼近及其在高精度求解谱问题中的应用，《Journal of Computational and Applied Mathematics》275，1-26。[23] Kravchenko V. V. 和 Torba S. M.（2021），求解斯图姆–刘维尔逆问题的直接方法，《Inverse Probl.》37，015015（32页）。[24] Kravchenko V. V. 和 Torba S. M.（2021），根据韦尔函数恢复斯图姆–刘维尔问题的实用方法，《Inverse Probl.》37，065011（26页）。[25] Kurasov P. 和 Nowaczyk M.（2005），量子图的逆谱问题，《J. Phys. A.》38，4901-4915。[26] Ledoux V., Daele M.V. 和 Berghe G.V.（2005），MATSLISE：用于斯图姆–刘维尔方程和薛定谔方程数值求解的 MATLAB 软件包，《ACM Trans. Math. Softw.》31，532–554。[27] Levitan B. M.（1987），斯图姆–刘维尔逆问题，VSP，Zeist。[28] Marchenko V. A.（2011），斯图姆–刘维尔算子及其应用：修订版，美国数学学会 Chelsea 出版社。[29] Mugnolo D.（2014），网络上演化方程的半群方法，《理解复杂系统》，施普林格，查姆。[30] Rundell W. 和 Sacks P. E.（1992），经典斯图姆–刘维尔逆问题的重建技术，《Math. Comput.》58，161–183。[31] Shishkina E. L. 和 Sitnik S. M.（2020），变换、奇异微分方程和分数阶微分方程及其在数学物理中的应用，Elsevier，阿姆斯特丹。[32] Savchuk A. M., Shkalikov A. A.（2005），具有广义函数势的斯图姆–刘维尔算子逆问题：根据两个谱进行重建，《Russ. J. Math. Phys.》12，507–514。[33] Watson G. N.（1996），《贝塞尔函数理论论著》，第2版，重印本，剑桥大学出版社，剑桥。[34] Wilkins J. E.（1948），贝塞尔函数的纽曼级数，《Trans. Amer. Math. Soc.》64，359–385。

[35] Yurko V. A.（2005），图上的逆斯图姆-刘维尔算子，《Inverse Problems》21，1075-1086页。[36] Yurko V. A.（2007），《逆谱问题理论导论》，Fizmatlit，莫斯科，（俄文）。