arXiv:2302.06080v1 [math.RA] 13 Feb 2023

关于巴拿赫代数中的 gπ-Hirano 可逆性

HonglinZou*、Tingting Li†、Yujie Wei‡,
*浙江树人学院基础科学学院，中国杭州 310015

†扬州大学数学科学学院，中国扬州 225002

‡湖北师范大学数学与统计学院，中国黄石 435002

摘要： 在巴拿赫代数中，我们引入了一种新型广义逆，称为 gπ-Hirano 逆。首先，研究了这种逆的若干存在判据及其等价定义。随后，在较弱条件下，讨论了 a、 b 的 gπ-Hirano 可逆性与其和 $a+b$ 的 gπ-Hirano 可逆性之间的关系。最后，作为前述加法结果的应用，我们得到了巴拿赫代数上反三角矩阵 gπ-Hirano 可逆性的若干等价刻画。特别地，本文的一些结果不同于经典广义逆（如 Drazin 逆和广义 Drazin 逆）的相应结果。

关键词：gπ-Hirano逆；巴拿赫代数；谱；拟幂零性

AMS学科分类：15A09；32A65；47A10

1 引言

设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元1的复巴拿赫代数。对于 $a \in \mathcal{A}$，分别用 $\sigma(a)$和 $r(a)$表示 a 的谱和谱半径。 $\mathcal{A}^{nil}$ 和 $\mathcal{A}^{qnil}$ 分别表示 $\mathcal{A}$中所有幂零元和拟幂零元（$\sigma(a) =\{0\}$）的集合。众所周知，$a \in \mathcal{A}^{qnil}$ 当且仅当 $r(a) = 0$。元素 $a \in \mathcal{A}$ 的双重交换子定义为 $\mathrm{comm}^2(a)=\{b \in \mathcal{A} : bc = cb$，其中 $c \in \mathcal{A}$ 满足 $ca = ac\}$。

众所周知，Drazin 逆 [10] 是一种经典的广义逆，具有许多应用。迄今为止，已有许多与Drazin 逆相关的广义逆类型。下面列举其中一些。

$a \in \mathcal{A}$ [12] 的广义 Drazin 逆（或 g-Drazin 逆）是满足以下条件的元素 $x \in \mathcal{A}$

$$xax = x, \quad ax = xa \quad \text{and} \quad a - a^2x \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

*电子邮件：honglinzou@163.com
†电子邮件：littnanjing@163.com
‡电子邮件：yujiewei1994@163.com

这样的 x（如果存在）是唯一的，记作 a^d。

若元素 $x \in \mathcal{A}$ 满足以下条件，则称其为 $a \in \mathcal{A}$ [14] 的广义强 Drazin 逆（或广义强 Drazin 逆）：

$$xax = x, \quad ax = xa \quad \text{and} \quad a - ax \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

最近，巴拿赫代数中引入了 π-Hirano 逆 [11] 的概念。也就是说， $a \in \mathcal{A}$ 的 π-Hirano 逆是满足以下条件的唯一元素 x：

$$xax = x, \quad ax = xa \quad \text{and} \quad a - a^{n+2}x \in \mathcal{A}^{nil},$$

对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。受这一概念启发，我们给出广义 π-Hirano 逆的定义如下。

若元素 $x \in \mathcal{A}$ 满足以下条件，则称其为$a \in \mathcal{A}$ 的广义 π-Hirano 逆（或 gπ-Hirano 逆）：

$$xax = x, \quad ax = xa \quad \text{and} \quad a - a^{n+2}x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

一直以来，人们从多个方面（存在性、和、分块矩阵、反序律、应用等）以及在不同的背景下（算子代数、 C^*-代数、巴拿赫代数、环等）研究各种广义逆。例如，Drazin [10] 证明， $a \in R$ 是 Drazin 可逆的，当且仅当它在环 R 中是强 π-正则的（即 $a^m \in a^{m+1}R \cap Ra^{m+1}$，其中 $m \in \mathbb{N}$）。与此同时，人们在条件 $ab = ba = 0$ 下研究了和 $a + b$ 的 Drazin 可逆性。后来，在巴拿赫代数中，Koliha [12] 声称， $a \in \mathcal{A}$ 具有广义 Drazin 逆，当且仅当 0 不是 $\sigma(a)$ 的聚点。对于环的情形，Koliha 和 Patrı´cio [13] 证明，$a \in R$广义 Drazin 可逆，当且仅当 a 是拟极的。在 [11], 中，作者研究了 2×2 算子矩阵的 π-Hirano 可逆性。关于与本文相关的广义逆的更多结果，可参见 [2–6, 9, 15, 17, 18]。

上述所有结果都促使我们进一步研究巴拿赫代数中的 gπ-Hirano 逆。本文由四节组成。在第 2 节中，我们借助拟幂零元刻画 gπ-Hirano 逆，随后给出这一逆的等价定义。在第 3 节中，我们在一些较弱条件下得到了和 $a+b$ 具有 gπ-Hirano 可逆性的充分必要条件。在第 4 节中，我们研究了巴拿赫代数上几类反三角矩阵的 gπ-Hirano 可逆性。

接下来，我们介绍一些与巴拿赫代数中拟幂零性相关的著名引理。

引理1.1. [5, 引理 2.1] 设 $a, b \in \mathcal{A}$ 满足 $ab = ba$。以下结论成立：(1) 若 $a \in \mathcal{A}^{qnil}$（或 $b \in \mathcal{A}^{qnil}$），则 $ab \in \mathcal{A}^{qnil}$。(2) 若 $a, b \in \mathcal{A}^{qnil}$，则 $a + b \in \mathcal{A}^{qnil}$。

引理1.2. [1, 引理 2.4] 设 $a,b \in \mathcal{A}^{qnil}$。若 $ab=0$，则 $a+b \in \mathcal{A}^{qnil}$。

引理 1.3. [15, 引理 1.1] 设 $n \in \mathbb{N}$。那么， $a \in \mathcal{A}^{qnil}$ 当且仅当 $a^n \in \mathcal{A}^{qnil}$。

引理 1.4. [2, 引理 2.2] 设 $a \in \mathcal{A}$。那么， a 是 gs-Drazin 可逆的，当且仅当$a-a^2 \in \mathcal{A}^{qnil}$。

2 gπ-Hirano 可逆性的刻画

本节中，我们研究巴拿赫代数中以拟幂零元表示的 gπ-Hirano 逆的存在性判据。随后，利用这一刻画，我们得到 gπ-Hirano 逆的等价定义。

首先，我们给出 gπ-Hirano 逆与 g-Drazin 逆之间的关系。令 $\mathcal{A}^d$ 和 $\mathcal{A}^{g\pi H}$ 分别表示 $\mathcal{A}$ 中所有 g-Drazin 可逆元和 gπ-Hirano 可逆元构成的集合。

命题 2.1. 设 $a \in \mathcal{A}$。若 x 是 a 的 gπ-Hirano 逆，则 $a \in \mathcal{A}^d$ 且 $a^d = x$。

证明。假设 x 是 $a \in \mathcal{A}$ 的 gπ-Hirano 逆，即

$$xax = x, ax = xa \text{ and } a - a^{n+2}x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。因此，由引理1.1(1)可得

$$a - a^2x = (a - a^{n+2}x)(1 - ax) \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

所以， $a \in \mathcal{A}^d$ 和 $a^d = x$。 □

由命题 2.1 可知，gπ-Hirano 逆是 g-Drazin 逆的一个子类。根据 g-Drazin 逆的唯一性可得，若 gπ-Hirano 逆存在，则它是唯一的。因此，在巴拿赫代数中，我们用 $a^{g\pi H}$ 表示 a 的 gπ-Hirano 逆。

在 [11, 定理 2.1]，中，作者借助幂零元研究了 π-Hirano 逆的存在性。受该定理启发，借助引理1.4，我们得到了关于 gπ-Hirano 逆的相应结果。

定理 2.2。设 $a \in \mathcal{A}$。则以下条件等价：
(1) $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$; (2) $a - a^{n+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$，其中 $n \in \mathbb{N}$; (
3) $a^m - a^n \in \mathcal{A}^{qnil}$，其中 $m,n \in \mathbb{N}$ 满足 $m \neq n$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。假设 $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。那么，存在 $x \in \mathcal{A}$ 使得

$$xax = x, ax = xa \text{ and } a - a^{n+2}x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$。因此，我们有

$$a - a^{n+1} = (a - a^{n+2}x)(1 + a^{n+1}x - a^n) \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3)。显然。

(3) $\Rightarrow$ (1)。设 $n > m$。注意到

$$\begin{aligned}(a - a^{n-m+1})^m &= (a(1 - a^{n-m}))^m = a^m(1 - a^{n-m})(1 - a^{n-m})^{m-1} \\ &= (a^m - a^n)(1 - a^{n-m})^{m-1}\end{aligned}$$

且 $a^m - a^n \in \mathcal{A}^{qnil}$。因此，由引理1.1(1)和引理 1.3 可得 $a - a^{n-m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$，从而有 a^{n-m} –(a^{n-m})$^2 = a^{n-m-1}(a - a^{n-m+1}) \in \mathcal{A}^{qnil}$。因此，根据引理 1.4，我们得到 a^{n-m} 是 gs-Drazin 可逆的。令 x 为 a^{n-m}的 gs-Drazin 逆，即

$$xa^{n-m}x = x,\ xa^{n-m} = a^{n-m}x \text{ and } a^{n-m} - a^{n-m}x \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

定义 $y = a^{n-m-1}x$。接下来，我们证明 $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $a^{g\pi H} = y$。注意到事实 $x \in \text{comm}^2(a^{n-m})$。因此， $xa = ax$。于是，我们有 $ay = ya$ 和 $yay = y$。显然

$$a - a^{(n-m)+2}y = (a - a^{2n-2m+1}) + (a^{2n-2m+1} - a^{2n-2m+1}x).$$

由于

$$a - a^{2n-2m+1} = (a - a^{n-m+1})(1 + a^{n-m}) \in \mathcal{A}^{qnil}$$

and

$$a^{2n-2m+1} - a^{2n-2m+1}x = a^{n-m+1}(a^{n-m} - a^{n-m}x) \in \mathcal{A}^{qnil},$$

由引理 1.1(2)可知 $a - a^{(n-m)+2}y \in \mathcal{A}^{qnil}$。证明完毕。 □

应用定理 2.2，得到如下结果。

C推论 2.3. 设 $a \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。那么， $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 当且仅当 $a^k \in \mathcal{A}^{g\pi H}$.

证明。设 $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。由定理 2.2(1)(2)，可得 $a - a^{n+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$，其中某个$n \in \mathbb{N}$。于是，我们推出

$$a^k - (a^k)^{n+1} = a^k - (a^{n+1})^k = \left(a - a^{n+1}\right)\sum_{i=0}^{k-1} a^{ni+k-1} \in \mathcal{A}^{qnil},$$

这意味着 $a^k \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。

相反，对于某个 $m \in \mathbb{N}$，我们有 $a^k - (a^k)^{m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$。因此， $a^k - a^{km+k} \in \mathcal{A}^{qnil}$。显然，$k \neq km + k$。根据定理 2.2(1)(3)，可得 $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。 □

现在，我们可以给出巴拿赫代数中 gπ-Hirano逆的等价定义。

定理 2.4. 设 $a, x \in \mathcal{A}$。则以下各项等价:

(1) $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $a^{g\pi H} = x$; (2) $xax = x$、 $xa = ax$ 和 $a^n - ax \in \mathcal{A}^{qnil}$, 其中某个 $n \in \mathbb{N}$;

(3) $xax = x$、 $xa = ax$ 和 $a^n - a^m x \in \mathcal{A}^{qnil}$, 其中某些 m、 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $m - n \neq 1$。

证明。 (1) $\Rightarrow$(2)。显然,

$$xax = x, xa = ax \text{ and } a - a^{n+2}x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$。根据定理 2.2 中蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明以及命题 2.1, 我们看到 $a - a^{n+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$ 和 $a - a^2 x \in \mathcal{A}^{qnil}$。因此, 由引理 1.1 可得

$$a^n - ax = a^{n-1}(a - a^2 x) - (a - a^{n+1})x \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3)。这是显然的。

(3) $\Rightarrow$ (1)。利用第 (3) 项, 我们得到

$$(a - a^2 x)^n = a^n(1 - ax) = (a^n - a^m x)(1 - ax) \in \mathcal{A}^{qnil},$$

i.e. $a - a^2 x \in \mathcal{A}^{qnil}$。由于 $m - n \neq 1$, 因此我们可以考虑以下两种情况 s.

情形 1: 假设 $m - n \geq 2$。那么,

$$a^n - a^{m-1} = (a^n - a^m x) - a^{m-2}(a - a^2 x) \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

因此, 我们推得

$$(a - a^{m-n})^n = (a^n - a^{m-1})(1 - a^{m-n-1})^{n-1} \in \mathcal{A}^{qnil},$$

即 $a - a^{m-n} \in \mathcal{A}^{nil}$。所以,

$$a - a^{(m-n-1)+2}x = (a - a^2 x) + (a - a^{m-n})ax \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

情况 2: 假设 $n - m \geq 0$。根据假设 $a^n - a^m x \in \mathcal{A}^{qnil}$ 和 $ax = xa$, 我们得出

$$(a^{n-m+1} - ax)^m = (a^n - a^m x)(a^{n-m} - x)^{m-1} \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

因此, 我们得到 $a^{n-m+1} - ax \in \mathcal{A}^{qnil}$, 由此可得

$$x - a^{n-m+1}x = -x(a^{n-m+1} - ax) \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

那么,

$$a - a^{(n-m+1)+2}x = (a - a^2 x) + (x - a^{n-m+1}x)a^2 \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

因此, 由这两种情况可得 $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $a^{g\pi H} = x$。 □

由定理 2.4 可知, gπ-Hirano 逆与广义 n-强 Drazin 逆之间的关系。此外, g-Drazin 逆的等价定义如下。

注 2.5. (i) 在 *[15],* Mosi´c 中引入了广义 n-强 Drazin 逆（或 gns-Drazin 逆）的定义，其中 n 是一个固定的正整数。由定理 2.4(1)(2) 可知，若 $a \in \mathcal{A}$ 是 gns-Drazin 可逆的，则 a 是 gπ-Hirano 可逆的。反之，gπ-Hirano 逆是 gns-Drazin 逆的一种。

(ii) 定理 2.4 的第 (2) 项中，对于 $m-n=1$ 的情形，我们有 $a \in \mathcal{A}^d$，当且仅当 $a^d = x$

$$xax = x, xa = ax \ and \ a^n - a^{n+1}x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$。

(iii) 根据命题 2.1 和定理 2.4，显然 $a \in \mathcal{A}^d$，当且仅当 $a^d = x$

$$xax = x,\ ax = xa \text{ and } a - a^n x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$，当且仅当

$$xax = x,\ ax = xa \text{ and } a^m - a^n x \in \mathcal{A}^{qnil},$$

对于某个 m，$n \in \mathbb{N}$。

3 关于 gπ-Hirano 可逆性的加法结果

令 $a, b \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。那么，如果元素 a, b 满足“$k\star$”条件，则称它们满足该条件

$$ab\prod_{i=1}^{k}\alpha_i = 0, \quad \text{for any } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \{a, b\}.$$

显然，如果 a, b 满足“$k\star$”条件，那么 a, b 满足“$(k+1)\star$”条件，但一般而言，b, a 并不满足“$k\star$”条件。注意，若 $ab = 0$，则对于任意 $k \in \mathbb{N}$， a, b 满足“$k\star$”条件。此外，对于 $k = 1$、2、3，“$k\star$”条件分别化为以下特殊情形。

(1) $aba = ab^2 = 0$；(2) $abab = aba^2 = ab^2a = ab^3 = 0$；(3) $ababa = abab^2 = aba^3 = aba^2b = ab^2a^2 = ab^2ab = ab^3a = ab^4 = 0$。

“$k\star$”条件由 Cvetkovi´c-Ili´c [7] 引入。对于环中的两个 Drazin 可逆元 a, b，作者研究了在“$k\star$”条件下，和 $a+b$ 具有 Drazin 可逆性的充分条件。受此启发，本节将在巴拿赫代数中考虑“$k\star$”条件下元素 a, b 与其和 $a+b$ 的 gπ-Hirano 可逆性的等价性。

下面先给出一个关键引理。

引理 3.1. 设 a、$b \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。如果 a、b 满足“$k\star$”条件，那么

$$a, b \in \mathcal{A}^{qnil} \Longleftrightarrow a + b \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

证明. 假设 a、$b\in\mathcal{A}^{qnil}$。注意到

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+2} &= a^2(a+b)^k+\left(ba(a+b)^k+b^2(a+b)^k\right)\\ &:= x_1+(x_2+x_3).\end{aligned}$$

由于 $a,b\in\mathcal{A}$ 满足“ $k\star$”条件，我们有 $x_1(x_2+x_3)=0$, $x_2x_3=0$ 和 $x_2^2=0$.2^k-1显然，对于适当的 $p_i,q_i\in\mathcal{A}$，有 $x_1=a^{k+2}+\sum_{i=1}^{2^k-1}p_iabq_i$，其中 $i\in 1,2^{k-1}$。~~注意到~~$\left(\sum_{i=1}^{2^k-1}p_iabq_i\right)a^{k+2}=0$, $a^{k+2}\in\mathcal{A}^{qnil}$ 和 $\left(\sum_{i=1}^{2^k-1}p_iabq_i\right)a^{k+2}=0$。因此，根据引理1.2，我们得到 $x_1\in\mathcal{A}^{qnil}$。类似地，可以得到 $x_3\in\mathcal{A}^{qnil}$。所以，我们有 $(a+b)^{k+2}\in\mathcal{A}^{qnil}$，即 $a+b\in\mathcal{A}^{qnil}$。

反过来，假设 $a+b\in\mathcal{A}^{qnil}$。应用“$k\star$”条件，我们得到以下方程:

$$a(a+b)^ma^k=a^{m+k+1}\text{ and }b(a+b)^mb^{k+1}=b^{m+k+2},\text{ for any }m\in\mathbb{N}.$$

因此，我们得到

$$\|a^{m+k+1}\|=\|a(a+b)^ma^k\|\leq\|a\|^{k+1}\|\|(a+b)^m\|,$$

由此可得 $a+b\in\mathcal{A}^{qnil}$，从而

$$r(a)=\lim_{m\to\infty}\left(\|a^{m+k+1}\|^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{m}{m+k+1}}=\lim_{m\to\infty}\|a^{m+k+1}\|^{\frac{1}{m}}\leq\lim_{m\to\infty}\|a\|^{\frac{k+1}{m}}\|(a+b)^m\|^{\frac{1}{m}}=0.$$

因此， $a\in\mathcal{A}^{qnil}$。类似地，我们可以验证 $b\in\mathcal{A}^{qnil}$。 □

现在，我们在巴拿赫代数中给出条件“$k\star$”下 a、b 的 gπ-Hirano 可逆性与其和 $a+b$ 的 gπ-Hirano 可逆性之间的关系，如下所示。

定理 3.2. 设 a、$b\in\mathcal{A}$ 和 $k\in\mathbb{N}$。若 a、b 满足条件“$k\star$”，则

$$a,b\in\mathcal{A}^{g\pi H}\Longleftrightarrow a+b\in\mathcal{A}^{g\pi H}.$$

证明。设 a、$b\in\mathcal{A}^{g\pi H}$。因此，存在 m_1、$m_2\in\mathbb{N}$，使得 $a-a^{m_1+1}\in\mathcal{A}^{qnil}$且 $b-b^{m_2+1}\in\mathcal{A}^{qnil}$。取 $m=km_1m_2$。于是，我们得到 $m\geq k$ 和

$$a-a^{m+1}=\left(a-a^{m_1+1}\right)\left(1+a^{m_1}+a^{2m_1}+\cdots+a^{(km_2-1)m_1}\right)\in\mathcal{A}^{qnil}.$$

类似地， $b-b^{m+1}\in\mathcal{A}^{qnil}$。注意

$$\begin{aligned}x &:= (a+b)-(a+b)^{m+1}\\ &= \left(a-a^{m+1}\right)+\left(b-b^{m+1}\right)+\left(\sum_i s_iabt_i+\sum_i u_ibav_i\right)\\ &:= x_1+x_2+x_3,\end{aligned}$$

其中 $s_i, t_i, u_i, v_i \in \mathcal{A}$。由于 a, b 满足“$k\star$”条件，经计算可得

$$\left(\sum_i s_i abt_i\right)^2 = 0,\ \left(\sum_i u_i bav_i\right)^3 = 0 \text{ and } \left(\sum_i s_i abt_i\right)\left(\sum_i u_i bav_i\right) = 0.$$

因此，$x_3 \in \mathcal{A}^{qnil}$。显然，$x_3$ 和 x_2 满足“$k\star$”条件。由引理 3.1可知，$x_2 + x_3 \in \mathcal{A}^{qnil}$。此外，注意到 x_1 和 $x_2 + x_3$ 也满足“$k\star$”条件。再次应用引理 3.1，得到 $x \in \mathcal{A}^{qnil}$，从而有 $a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。

与上述论述类似，我们可以借助引理 3.1证明该定理的充分性。

□

由定理 3.2可直接得到以下推论。

推论 3.3。设 a、$b \in \mathcal{A}$。若 $ab = 0$，则

$$a, b \in \mathcal{A}^{g\pi H} \Longleftrightarrow a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}.$$

沿用定理 3.2证明中的相同策略，可得

定理 3.4。设 a、$b \in \mathcal{A}$和 $k \in \mathbb{N}$。若对任意 α_1、α_2、$\cdots$、$\alpha_k \in \{a, b\}$，均有 $\left(\prod_{i=1}^{k} \alpha_i\right) ab = 0$，则

$$a, b \in \mathcal{A}^{g\pi H} \Longleftrightarrow a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}.$$

注 3.5. 让我们比较在条件 $ab = 0$ 下，和为 $a+b$ 时的广义 Drazin 可逆性与 gπ-Hirano 可逆性。众所周知，对于满足 $ab = 0$ 的 a、$b \in \mathcal{A}$，有：

$$a, b \in \mathcal{A}^d \Longrightarrow a + b \in \mathcal{A}^d.$$

然而，我们不知道上述蕴含的逆命题是否成立。若在假设 $ab = ba = 0$ 下考虑广义 Drazin 可逆性，则有以下结果。

定理 3.6. 设 a、$b \in \mathcal{A}$。若 $ab = ba = 0$，则

$$a, b \in \mathcal{A}^d \Longleftrightarrow a + b \in \mathcal{A}^d.$$

证明. 必要性直接由 [12, 定理 5.7] 得出。

现在，假设 $a + b \in \mathcal{A}^d$。由 a, b 的对称性，我们只需证明 $a \in \mathcal{A}^d$。令 $x_1 = a^2(a + b)^d$ 和 $x_2 = a - a^2(a + b)^d$。那么，$a = x_1 + x_2$。由于 $ab = ba = 0$，因此有 $a(a + b) = (a + b)a$，从而得到 $a(a + b)^d = (a + b)^d a$。结合以下等式

$$a\left((a+b)^d\right)^2 = a(a+b)\left((a+b)^d\right)^3 = a^2\left((a+b)^d\right)^3 = \cdots = a^n\left((a+b)^d\right)^{n+1}$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们可以验证 $x_1 \in \mathcal{A}^d$ 和 $x_1^d = a\left((a+b)^d\right)^2$。利用

$$\left((a+b)-(a+b)^2(a+b)^d\right)x_2 = x_2^2 = x_2\left((a+b)-(a+b)^2(a+b)^d\right),$$

由引理1.1(1)和引理 1.3，我们得到 $x_2 \in \mathcal{A}^{qnil}$。注意到 $x_1x_2 = x_1x_2 = 0$，因此根据该定理的必要性，我们得到 $a \in \mathcal{A}^d$。 □

为了继续探讨和 $a+b$的和的 gπ-Hirano 可逆性，我们需要做如下准备。

首先，我们提出一个新的条件。具体而言，对于 a、$b \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，若a、b 满足“$k*$”条件，即

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\alpha_i\right)ab = \left(\prod_{i=1}^{k}\alpha_i\right)ba, \text{ for any } \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k \in \{a,b\}.$$

可以看出，若 a、b满足“$k*$”条件，则 a、b满足“$(k+1)*$”条件。此外，“$k*$”条件包含以下特例:

(1) $ab = ba$；(2) $a^2b = aba$ 和 $b^2a = bab$；(3) $a^3b = a^2ba$、$ba^2b = (ba)^2$、 $ab^2a = (ab)^2$ 和 $b^2ab = b^3a$。

设 $e \in \mathcal{A}$ 是一个幂等元（$e^2 = e$）。那么元素 $a \in \mathcal{A}$ 可表示为

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix}_e,$$

其中 $a_1 = eae$、 $a_2 = (1-e)a(1-e)$， $a_3 = ea(1-e)$，且 $a_4 = (1-e)ae$。

下文中，我们用 $\mathcal{A}_1$、 $\mathcal{A}_2$ 分别表示代数 $p\mathcal{A}p$、$(1-p)\mathcal{A}(1-p)$，其中 $p^2 = p \in \mathcal{A}$。以下引理在后续内容中起着重要作用。

引理 3.7。设 x、$y \in \mathcal{A}$ 和 $p^2 = p \in \mathcal{A}$。若 x 和 y 可表示为

$$x = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}_p \quad and \quad y = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & a \end{pmatrix}_{1-p},$$

则 (1) $a \in \mathcal{A}_1^{qnil}$ 和 $b \in \mathcal{A}_2^{qnil} \Longleftrightarrow x \in \mathcal{A}^{qnil}$ $(resp.\ y \in \mathcal{A}^{qnil})$；
(2) $a \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$ and $b \in \mathcal{A}_2^{g\pi H} \Longleftrightarrow x \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ $(resp.\ y \in \mathcal{A}^{g\pi H})$。

证明。(1) 假设 $a \in \mathcal{A}_1^{qnil}$ 和 $b \in \mathcal{A}_2^{qnil}$。由于 $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}_1}(a) \cup \sigma_{\mathcal{A}_2}(b)$，因此得到 $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{0\}$，即 $x \in \mathcal{A}^{qnil}$。

反过来，注意到 $(1-p)xp = 0$，即 $pxp = xp$。然后，根据归纳法可得，对任意 $m \in \mathbb{N}$，$a^m = (pxp)^m = px^mp$。利用条件 $x \in \mathcal{A}^{qnil}$，我们得出

$$r(a) = \lim_{m\to\infty}\|a^m\|^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty}\|px^mp\|^{\frac{1}{m}} \le \lim_{m\to\infty}\|p\|^{\frac{1}{m}}\|x^m\|^{\frac{1}{m}}\|p\|^{\frac{1}{m}} = 0.$$

因此， $a \in \mathcal{A}_1^{qnil}$。此外，由 $\sigma_{\mathcal{A}_2}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}_1}(a) \cup \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ 可知， $\sigma_{\mathcal{A}_2}(b) = \{0\}$，即 $b \in \mathcal{A}_2^{qnil}$。
(2) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$x - x^{n+1} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}_p - \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}_p^{n+1} = \begin{pmatrix} a - a^{n+1} & \triangle \\ 0 & b - b^{n+1} \end{pmatrix}_p.$$

假设 $a \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$ 且 $b \in \mathcal{A}_2^{g\pi H}$。那么，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $a - a^{m+1} \in \mathcal{A}_1^{qnil}$ 且 $b - b^{m+1} \in \mathcal{A}_2^{qnil}$。因此，根据条目 (1)， $x - x^{m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$。所以，我们得到 $x \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。充分性可类似证明。 □

注记 3.8. 引理 3.7 的条目 (2) 与 g-Drazin 逆的情形略有不同，即，若 $a \in \mathcal{A}_1^d$，则 $b \in \mathcal{A}_2^d$ 当且仅当 $x \in \mathcal{A}^d$ （ *[1,* 定理 2.*3]* ）。

引理 3.9. 设 a、$b \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。若 a、b 满足“$k*$”条件，则
(1) 若 $a \in \mathcal{A}^{qnil}$ （或 $b \in \mathcal{A}^{qnil}$），则 $ab \in \mathcal{A}^{qnil}$；(2) 若 $a \in \mathcal{A}^{qnil}$，则 $b \in \mathcal{A}^{qnil}$ 当且仅当 $a + b \in \mathcal{A}^{qnil}$；(3) 若 a、$b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$，则 $ab \in \mathcal{A}^{g\pi H}$；(4) 若 $a \in \mathcal{A}^{qnil}$、 $b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$，则 $a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。

证明。(1) 由于 a, b 满足“$k*$”条件，因此我们得出，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$(ab)^{n+k} = (ab)^k a^n b^n$。应用假设 $a \in \mathcal{A}^{qnil}$ 或 $b \in \mathcal{A}^{qnil}$，可得

$$r(ab) = \lim_{n\to\infty} \|(ab)^{n+k}\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \|(ab)^k\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

这意味着 $ab \in \mathcal{A}^{qnil}$。

(2) 假设 $a, b \in \mathcal{A}^{qnil}$。注意到 $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k a + (a+b)^k b$。令 $c = (a+b)^k a$ 且 $d = (a+b)^k b$。由“$k*$”条件可得 $cd = dc$，并且对于任意$n \in \mathbb{N}$， $c^n = (a+b)^{kn} a^n$。因此，

$$r(c) = \lim_{n\to\infty} \|c^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a+b\|^k \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

这意味着 $c \in \mathcal{A}^{qnil}$。类似地，我们有 $d \in \mathcal{A}^{qnil}$。应用引理 1.1(2)，可得 $(a+b)^{k+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$，即 $a + b \in \mathcal{A}^{qnil}$。

为证明逆命题，设 a、 $a + b \in \mathcal{A}^{qnil}$。显然， $-a$、 $a + b$ 满足“$k*$”条件。然后，根据条目（2）中必要性的证明，我们推出 $b = -a +$ （$a + b$） $\in \mathcal{A}^{qnil}$。

（3）鉴于条件 a、 $b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$，我们得到 $a - a^{m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$ 和 $b - b^{m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$。根据“$k*$”条件，我们得到

$$(ab)^{k+1} - (ab)^{m+k+1} = (ab)^k (a - a^{m+1})b + (ab)^k a^{m+1}(b - b^{m+1}).$$

令 $s = (ab)^k (a - a^{m+1})b$ 且 $t = (ab)^k a^{m+1}(b - b^{m+1})$。再次应用“$k*$”条件，可得 $s^n = (ab)^{kn}(a - a^{m+1})^n b^n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$均成立，这意味着

$$r(s) = \lim_{n\to\infty} \|s^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|ab\|^k \|b\| \lim_{n\to\infty} \|(a - a^{m+1})^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

因此， $s \in \mathcal{A}^{qnil}$。类似地， $t \in \mathcal{A}^{qnil}$。注意到 $st = ts$。因此， $s + t \in \mathcal{A}^{qnil}$，由定理 2.2(3)可得$ab \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。

(4) 设 $p = bb^{g\pi H}$。现在，我们考虑 a 和 b 关于幂等元 p的矩阵表示:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix}_p \text{ and } b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}_p.$$

显然， $b_1 \in \mathcal{A}_1^{-1}$且 $(b_1)_{\mathcal{A}_1}^{-1} = b^{g\pi H}$。此外，由 (3) 可得 $b_1 = b(bb^{g\pi H}) \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。由命题 2.1 可知， $b_2 = b - b^2b^{g\pi H} = b - b^2b^d \in \mathcal{A}_2^{qnil}$。

注意到

$$\begin{pmatrix} b_1^k a_1 b_1 & b_1^k a_3 b_2 \\ b_2^k a_4 b_1 & b_2^k a_2 b_2 \end{pmatrix}_p = b^k ab = b^{k+1}a = \begin{pmatrix} b_1^{k+1} a_1 & b_1^{k+1} a_3 \\ b_2^{k+1} a_4 & b_2^{k+1} a_2 \end{pmatrix}_p.$$

因此，我们有 $b_1^k a_3 b_2 = b_1^{k+1} a_3$，所以 $a_3 = b_1^{-1} a_3 b_2$，这意味着对于任意$n \in \mathbb{N}$，都有 $a_3 = b_1^{-n} a_3 b_2^n$。由于 $b_2 \in \mathcal{A}_2^{qnil}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|a_3\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|b_1^{-1}\| \lim_{n\to\infty} \|a_3\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|b_2^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

因此， $a_3 = 0$。此外，容易看出 $a_1 b_1 = b_1 a_1$和 a_2、b_2满足“$k*$”条件。

现在，我们有

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix}_p \text{ and } a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ a_4 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}_p.$$

由条件 $a \in \mathcal{A}^{qnil}$，根据引理 3.7(1)可得 $a_1 \in \mathcal{A}_1^{qnil}$ 和 $a_2 \in \mathcal{A}_2^{qnil}$。应用第 (2) 项，可得 $a_2 + b_2 \in \mathcal{A}_2^{qnil}$，这意味着 $a_2 + b_2 \in \mathcal{A}_2^{g\pi H}$。注意，由引理1.1(1)可知 $(p+b_1^{-1}a_1)-(p+b_1^{-1}a_1)^2 = -a_1(b_1^{-1}+a_1b_1^{-2}) \in \mathcal{A}_1^{qnil}$。因此，我们得出$p + b_1^{-1}a_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。然后，根据第 (3) 项，可得 $a_1 + b_1 = b_1(p + b_1^{-1}a_1) \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。最后，由引理 3.7(2)可推得 $a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。

□

现在，我们给出在“$k*$”条件下，和 $a + b$ 的 gπ-Hirano 可逆性的等价刻画。

定理 3.10. 设 a、$b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。如果 a、b 满足“$k*$”条件，那么

$$1 + a^{g\pi H}b \in \mathcal{A}^{g\pi H} \iff a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}.$$

证明。设 $p = aa^{g\pi H}$。那么，与引理 3.9(4) 的证明类似，我们有

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}_p \text{ and } b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}_p,$$

其中 $a_1 \in \mathcal{A}_1^{-1} \cap \mathcal{A}_1^{g\pi H}$ 和 $a_2 \in \mathcal{A}_2^{qnil}$。此外，我们有 $a_1b_1 = b_1a_1$，且 a_2, b_2 满足“$k*$”条件。利用 $b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$，根据引理 3.7(2)，得到 $b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$ 和 $b_2 \in \mathcal{A}_2^{g\pi H}$。

注意到

$$1 + a^{g\pi H}b = \begin{pmatrix} p + a_1^{-1}b_1 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_p \text{ and } a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ b_4 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}_p.$$

由引理 3.9(4)，我们有 $a_2+b_2 \in \mathcal{A}_2^{g\pi H}$。由引理 3.7(2)，我们断言，$a+b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$当且仅当 $a_1 + b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$，且 $1 + a^{g\pi H}b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 当且仅当 $p + a_1^{-1}b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。

接下来，我们只需证明 $p + a_1^{-1}b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$ 等价于 $a_1 + b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。若 $p + a_1^{-1}b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$，则根据引理 3.9(3)，$a_1 + b_1 = a_1(p + a_1^{-1}b_1) \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。反之，假设 $a_1 + b_1 \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。鉴于假设 $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$，对于某个 $m \in \mathbb{N}$，我们有$a - a^{m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$。于是得到

$$a_1^{-1} - a_1^{-m-1} = a^{g\pi H} - (a^{g\pi H})^{m+1} = -(a^{g\pi H})^{m+2}(a - a^{m+1}) \in \mathcal{A}^{qnil},$$

这意味着 $a_1^{-1} \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。因此，我们得出 $p + a_1^{-1}b_1 = a_1^{-1}(a_1 + b_1) \in \mathcal{A}_1^{g\pi H}$。证明完毕。□

与定理 3.10 对偶，我们有如下结果。

定理 3.11. 设 $a, b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。若对任意 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \{a, b\}$，都有 $ab\prod_{i=1}^{k}\alpha_i = ba\prod_{i=1}^{k}\alpha_i$，则

$$1 + a^{g\pi H}b \in \mathcal{A}^{g\pi H} \iff a + b \in \mathcal{A}^{g\pi H}.$$

请注意，定理 3.10 和定理 3.11 中充分性的推论在不假设 $b \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 的情况下仍然成立；但若去掉这一假设，则必要性的推论一般不成立。下面的例子可以说明这一点。设 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $a = 0$和 $b = 2$。那么，显然 $1 + a^{g\pi H}b = 1 \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。然而，$a + b = 2 \notin \mathcal{A}^{g\pi H}$。

4 涉及 gπ-Hirano逆的反三角矩阵

本节主要讨论巴拿赫代数上的反三角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ 为 gπ-Hirano可逆的充要条件。

作者 [16] 发现，反三角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$是Drazin 可逆的，当且仅当 $c \in \mathcal{A}$ 是 Drazin 可逆的。然而，对于gπ-Hirano情形，我们没有相应的结果，这可以从下面的例子中看出。设 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ 和 $c = 1$。显然，$1 \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。但是，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}$，因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \notin M_2(\mathcal{A})^{qnil},$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$。那么，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$成为g$\pi$-Hirano 可逆的等价条件是什么?

首先，我们考察矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$为 g-Hirano可逆的等价条件。Chen 和 Sheibani [2], 提出了 g-Hirano逆元的定义：若元素 $a \in \mathcal{A}$ 存在 $x \in \mathcal{A}$ 使得

$$xax = x, \quad ax = xa \quad \text{and} \quad a^2 - ax \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

显然，由定理 2.4 可知，g-Hirano逆元是 gπ-Hirano逆元的一个子类。记 $\mathcal{A}$中所有 g-Hirano可逆元组成的集合为 $\mathcal{A}^{gH}$。

定理 4.1. 设 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$。那么，

$$c \in \mathcal{A}^{qnil} \Longleftrightarrow M \in M_2(\mathcal{A})^{gH}.$$

证明。由 [2, 定理 2.4] 可知，$M \in M_2(\mathcal{A})^{gH}$ 当且仅当 $N := M - M^3 = -\begin{pmatrix} 2c & c \\ c^2 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$。因此，我们只需证明 $c \in \mathcal{A}^{qnil}$ 与$N \in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$等价。

假设 $c \in \mathcal{A}^{qnil}$。那么，根据引理1.1(1)，$N = -\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$。

反之，由 $N \in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$ 可得，对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，$\begin{pmatrix} 2c-\lambda & c \\ c^2 & c-\lambda \end{pmatrix}$ 是可逆的。由于

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2c-\lambda & c \\ c^2 & c-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2+2c-\lambda & \lambda \\ c^2 & c-\lambda \end{pmatrix},$$

我们推得，对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，$\begin{pmatrix} -c^2+2c-\lambda & \lambda \\ c^2 & c-\lambda \end{pmatrix}$ 是可逆的。因此，存在 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$，使得

$$\begin{pmatrix} -c^2+2c-\lambda & \lambda \\ c^2 & c-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c^2+2c-\lambda & \lambda \\ c^2 & c-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们可以得到以下等式

$$(-c^2+2c-\lambda)y + \lambda w = 0, \tag{1}$$

$$c^2y + (c-\lambda)w = 1, \tag{2}$$
$$x(-c^2+2c-\lambda) + yc^2 = 1, \tag{3}$$
$$\lambda x + y(a-\lambda) = 0. \tag{4}$$

By t由等式 (1)，我们有 $w = \frac{1}{\lambda}\left(c^2-2c+\lambda\right)y$，结合 (2) 可得

$$1 = c^2y + \frac{1}{\lambda}(c-\lambda)\left(c^2-2c+\lambda\right)y = \frac{1}{\lambda}\left(c^3-2c^2+3\lambda c-\lambda^2\right)y.$$

因此， y 是左可逆的。类似地，利用 (3) 和 (4)，我们得出 y 是右可逆的。因此， y 是可逆的，且 $y^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(c^3-2c^2+3\lambda c-\lambda^2\right)$。所以， $c^3-2c^2+3\lambda c-\lambda^2$ 是可逆的。因此，对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $0 \notin \sigma(c^3-2c^2+3\lambda c-\lambda^2)$。

现在，假设存在 $t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 使得 $t \in \sigma(c)$。那么，我们可以找到满足 $t^3-2t^2+3\lambda_0 t-\lambda_0^2 = 0$的$\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$。因此， $0 \in \sigma(c^3-2c^2+3\lambda_0 c-\lambda_0^2)$，这与对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$， $0 \notin \sigma(c^3-2c^2+3\lambda c-\lambda^2)$矛盾。因此， $\sigma(c) = \{0\}$，即$c \in \mathcal{A}^{qnil}$。 □

注 4.2. 由定理 4.1，我们得到

$$c \in \mathcal{A}^{qnil} \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}.$$

然而，一般而言，上述蕴含关系的逆命题并不成立，这可以由下面的例子看出:

例 4.3. 设 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ 和 $c = -1$。注意到 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。因此，我们得到 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{g\pi H} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。然而， $-1 \notin \mathcal{A}^{qnil}$。

接下来，我们将考虑巴拿赫代数上反三角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$的 g$\pi$-Hirano 可逆性。为便于后续参考，我们陈述如下两个引理。

引理 4.4. 设 $a, b \in \mathcal{A}$。那么， $ab \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 当且仅当 $ba \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。

证明。若 $ab \in \mathcal{A}^{g\pi H}$，则对于某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $ab-(ab)^{m+1} \in \mathcal{A}^{qnil}$。由归纳法可得，对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\left((ba)^2-(ba)^{m+2}\right)^n = b\left(ab-(ab)^{m+1}\right)^n(ab)^{n-1}a$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \| \left((ba)^2-(ba)^{m+2}\right)^n \|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|\|b\| \lim_{n\to\infty} \|(ab-(ab)^{m+1})^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

所以， $(ba)^2-(ba)^{m+2} \in \mathcal{A}^{qnil}$，这意味着 $ba \in \mathcal{A}^{g\pi H}$。 □

引理 4.5. 设 $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\left(or \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & b \end{pmatrix}\right) \in M_2(\mathcal{A})$。那么，

(1) $a \in \mathcal{A}^{qnil}$ 和 $b \in \mathcal{A}^{qnil} \Longleftrightarrow M \in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$。(

2) $a \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $b \in \mathcal{A}^{g\pi H} \Longleftrightarrow M \in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}$。

证明。(1) 假设 $M=\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$。令 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_2(\mathcal{A})$。则我们有 M 相对于幂等元 P 的如下矩阵表示:

$$M=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}_P,\ \text{where } A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\ \text{and } C=\begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

根据引理 3.7(1)，我们得到 $A\in(PM_2(\mathcal{A})P)^{qnil}$ 和 $B\in((I-P)M_2(\mathcal{A})(I-P))^{qnil}$，即 $\sigma_{PM_2(\mathcal{A})P}(A)=\{0\}$ 以及 $\sigma_{(I-P)M_2(\mathcal{A})(I-P)}(B)=\{0\}$。注意到 $\sigma_{PM_2(\mathcal{A})P}(A)\cup\{0\}=\sigma_{M_2(\mathcal{A})}(A)$。因此，$\sigma_{M_2(\mathcal{A})}(A)=\{0\}$，这意味着对于任意 $\lambda\neq 0$，$\lambda I-A$ 是可逆的。因此，$\lambda 1-a$ 是可逆的，所以 $\sigma_{\mathcal{A}}(a)=\{0\}$。故有 $a\in\mathcal{A}^{qnil}$。类似地，我们可以得到$b\in\mathcal{A}^{qnil}$。反之，应用 $\sigma_{M_2(\mathcal{A})}(M)\subseteq\sigma_{\mathcal{A}}(a)\cup\sigma_{\mathcal{A}}(b)$，我们推得 $M\in M_2(\mathcal{A})^{qnil}$。

(2) 根据第 (1) 项和定理 2.2，可直接得到第 (2) 项。 □

现在，我们可以给出在“$k\star$”条件下反三角矩阵的 gπ-Hirano 逆存在性判据如下。

定理 4.6. 设 $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}\in M_2(\mathcal{A})$ 且 $k\in\mathbb{N}$。若 a,bc 满足“$k\star$”条件，则

$$a,bc\in\mathcal{A}^{g\pi H}\iff M\in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}.$$

证明。注意到

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

由引理 4.4，可得

$$M\in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}\iff N:=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & bc\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}.$$

考虑以下分解:

$$N^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}bc & abc\\ 0 & bc\end{pmatrix}:=N_1+N_2.$$

由于 a、bc 满足“$k\star$”条件，因此 N_1 和 N_2 也满足该条件。因此，利用推论 2.3、定理 3.2 和引理 4.5(2)，我们可得

$$N\in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}\iff N^2\in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}\iff N_1,N_2\in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}\iff a,bc\in\mathcal{A}^{g\pi H},$$

证毕。 □

容易看出，若将定理 4.6 中的假设 a,bc 满足“$k\star$”条件替换为假设 bc,a 满足“$k\star$”条件，则该定理仍然成立。因此，我们立即得到以下推论。

推论 4.7. 设 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$。若 $abc=0$（或 $bca=0$），则

$$a, bc \in \mathcal{A}^{g\pi H} \Longleftrightarrow M \in M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}.$$

我们指出，在推论 4.7 中，条件 $abc=0$ 或 $bca=0$ 一般不能替换为 $acb=0$ 或 $cab=0$，以下例子可以说明这一点。

例 4.8. 设 $\mathcal{A}=M_2(\mathbb{C})$ 且 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$。(1) 若取 $a=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$b=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $c=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 a、$bc \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $acb=0$。然而，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$M-M^{n+1} \notin \mathcal{A}^{qnil}$，因此 $M \notin M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}$。(2) 若取 $a=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $b=c=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$a$、$bc \in \mathcal{A}^{g\pi H}$ 和 $cab=0$。但是，$M \notin M_2(\mathcal{A})^{g\pi H}$。

致谢。本研究得到江苏省自然科学基金（项目编号：BK20200944）、江苏省高等学校自然科学研究项目（项目编号：20KJB110001）和中国博士后科学基金（项目编号：2020M671281）的资助。

参考文献

[1] N. Castro-Gonz´alez, J.J. Koliha，关于 g-Drazin 逆的新的加法结果，爱丁堡皇家学会会刊 A 辑 134 (2004) 1085-1097。[2] H.Y. Chen, M. Sheibani，巴拿赫代数中的广义 Hirano 逆，Filomat 33 (2019) 6239-6249。[3] H.Y. Chen, M. Sheibani，环中的广义 Hirano 逆，《代数通讯》47 (2019) 2967-2978。[4] H.Y. Chen, M. Sheibani，巴拿赫代数中的广义 Jacobson 引理，《代数通讯》49 (2021) 3263-3272。[5] D.S. Cvetkovi´c-Ili´c，巴拿赫代数中因子意义下可交换的广义 Drazin 逆，《线性代数及其应用》431 (2009) 783-791。[6] D.S. Cvetkovi´c-Ili´c，分块矩阵的 Drazin 逆和 Moore–Penrose 逆的表达式及广义 Schur 补的商恒等式，《应用数学与计算》213 (2009) 18-24。[7] D.S. Cvetkovi´c-Ili´c，关于 (2, 2, 0) Drazin 逆问题的一些结果，《线性代数及其应用》438 (2013) 4726-4741。

[8] D.S. Cvetkovi´c-Ili´c, C.Y. Deng，关于 Drazin 可逆性和幂等元的一些结果，《数学分析与应用杂志》359 (2009) 731-738。[9] D.S. Cvetkovi´c-Ili´c，Y.M. Wei，《广义逆的代数性质》，丛书：数学发展，第 52 卷，施普林格，2017。[10]M.P. Drazin，结合环和半群中的伪逆，《美国数学月刊》65 (1958) 506-514。[11] A. Ghaffari, T. Haddadi, M. Sheibani，巴拿赫代数中 Hirano 逆的一种推广，Filomat (2021)（即将刊出）。[12] J.J. Koliha，广义 Drazin 逆，《格拉斯哥数学杂志》38 (1996) 367-381。[13] J.J. Koliha, P. Patri´cio，具有相同谱幂等元的环元素，《澳大利亚数学会杂志》72 (2002) 137-152。[14] D. Mosi´c，广义强 Drazin 逆的反序律，《应用数学与计算》284 (2016) 37-46。[15] D. Mosi´c，环中的广义 Drazin 逆和伪 n-强 Drazin 逆，《线性与多线性代数》69 (2021) 361-375。[16] H.L. Zou, J.L. Chen, D. Mosi´c，环上反三角矩阵的 Drazin 可逆性，《匈牙利数学科学研究》54 (2017) 489-508。[17] H.L. Zou, J.L. Chen, H.H. Zhu, Yujie Wei，环中 n-强 Drazin 可逆性的刻画，《代数及其应用杂志》20 (2021) 文章编号：2150141。[18] H.L. Zou, D. Mosi´c, K.Z. Zuo, Y.L. Chen，关于环中的 n-强 Drazin 可逆性，《土耳其数学杂志》43 (2019) 2659-2679。