arXiv:2302.06102v1 [physics.comp-ph] 13 Feb 2023

使用扩展力梯度辛方法研究旋转星系中的混沌

Li-Na Zhang[1,2,3], Wen-Fang Liu[1], 和 Xin Wu[1], 2*1. *School of Mathematics, Physics and Statistics & Center of Application and Research of Computational Physics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China2. School of Physical Science and Technology, Guangxi University, Nanning 530004, China3. School of Physics and Electronics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China*

我们在旋转参考系的极坐标中，考虑了三种旋转星系模型的动力学。由于非轴对称势扰动，角动量随时间变化，动能则取决于动量和空间坐标。现有的显式力梯度辛积分器不适用于这类哈密顿问题，但近期一项先前研究提出的扩展力梯度辛方法可以适用。数值比较表明，带对称性的扩展力梯度四阶辛方法的精度优于标准四阶辛方法，但不及优化扩展力梯度四阶辛方法。我们采用带对称性的优化扩展算法，探索这些旋转星系模型中规则轨道和混沌轨道的动力学特征。势的级数展开中径向项的数量增加时，引力效应和混沌程度也随之增大。对于相同数量的势的级数展开径向项、相同能量和初始条件，三种模型中的规则轨道和混沌轨道具有相似的动力学结构。

关键词：辛积分器；混沌；星系；引力

I. 引言

动力系统中的混沌意味着，动力系统的最终状态对初始状态表现出指数敏感的依赖关系。鉴于混沌的重要性，许多研究聚焦于太阳系 [1,2] 和星系动力学 [3-7]中的混沌问题。

星系动力学中粒子的规则运动或混沌运动可能会影响质量所占的比例。文献[3,5-7] 的作者研究了椭圆星系的非旋转N体模型中处于有序运动和混沌运动的质量组分。Voglis等人 [3] 发现，在一个具有平滑中心的非旋转三轴平衡模型中，处于混沌运动的质量约占总质量的24%；在另一个具有平滑中心的非旋转三轴平衡模型中，这一比例为32%。这表明，混沌运动质量的空间分布与有序运动质量的空间分布并不一致。Muzzio等人 [7] 指出，在具有平滑中心的非旋转星系模型中，处于混沌运动的质量比例约为53%。另一方面，旋涡星系中处于有序运动或混沌运动的质量比例也得到了研究。Voglis等人 [8] 进一步表明，在旋转星系的N体模型中，旋转会导致混沌运动的质量比例增加（最高达到 $\approx 65\%$），并使李雅普诺夫数向更大的数值偏移。换言之，旋转显著增强了混沌程度，旋转模型中处于混沌运动的质量比例高于非旋转模型。棒旋星系中，沿棒端部旋臂分布的动力学结构，其空间分布对应于处于规则轨道和混沌轨道上的粒子质量分布。事实上，在棒旋星系中，混沌运动的质量几乎可以完全形成从棒端部拉格朗日点 L_1 和L_2 附近延伸出的旋臂。质量分布必然与粒子的引力相关。引力是星系中旋臂形成与保持稳定的主要驱动机制。文献 [9,10] 的作者发展了莫泽解析级数，用于表示旋转棒旋星系中不稳定拉格朗日平衡点 L_1、 L_2 附近的不变流形。这样，这些级数便可以表示旋臂；旋臂属于密度波，由混沌轨道组成。除解析理论外，其他方法，如特定的有限时间李雅普诺夫特征数、小对齐指数、截面和频率分析，也被用于将棒旋星系中的轨道分类为规则轨道和混沌轨道 [11-15]。

在极坐标下，旋转星系盘面内的二维哈密顿系统出现混沌，是由引入非轴对称势扰动所致。这些扰动会使相对于角度的角动量随时间变化，因此哈密顿系统不可积。在某些情况下，这种不可积性会导致混沌。要检测

*电子邮箱：wuxin˙1134@sina.com

混沌行为，始终需要可靠的数值结果。在某些情况下，还需要极长的积分时间。为实现更好的稳定性和更高的精度，所采用的哈密顿系统长期积分计算格式至关重要。恰当选择积分器时，自然应采用能够保持哈密顿动力学辛结构的辛格式 [16,17]。辛方法是一类几何积分算法 [18]，能使总能量的局部误差不随时间增长。标准辛方法 [19,20] 需要若干次力的计算，而力梯度辛积分器 [16,21-24] 除需要若干次力的计算外，还需要若干次力梯度的计算。由于长期表现良好，标准辛方法已用于太阳系 [1, 25] 和黑洞时空 [26-31]的研究。它们也适用于极坐标下旋转星系的二维哈密顿系统。然而，力梯度辛积分器并不适用于这类哈密顿问题，因为哈密顿系统的动能取决于动量和空间坐标。事实上，它们仅适用于这样的哈密顿系统积分：动能是动量的二次函数，势能则是坐标的函数。文献 [22-24]已证实，与同阶标准辛算法相比，力梯度辛积分器的能量误差小数个数量级。近期，我们课题组将这类力梯度积分器扩展到了可显式积分的动能情形；此时动能不仅是动量的二次函数，还取决于坐标 [32]。对原有力梯度算子作适当调整后，调整后的算子不再具有力梯度的概念，而是归属于动量算子，类似于与势相对应的算子。因此，现有的显式力梯度辛积分器 [21-24] 仍可用于扩展哈密顿系统。与现有的力梯度算法相比，扩展力梯度辛积分器保持了原有的对称性和时间可逆性。文献 [32] 的作者采用经过修改的 H´énon-Heiles 系统和弹簧摆作为两个玩具模型，测试扩展算法的数值性能。他们表明，在某些情况下，四阶 Forest-Ruth 标准辛方法无法真实呈现经过修改的 H´énon-Heiles 系统的有序与混沌动力学性质，而四阶扩展力梯度辛方法则可以。所得结果是因为 Forest-Ruth 方法的精度低于扩展力梯度算法。事实上，优化的四阶扩展力梯度辛方法的能量误差比 Forest-Ruth 方法小三个数量级。

请注意，文献 [32] 提出的扩展力梯度辛方法已被证明在对两个玩具模型进行模拟时具有良好的数值性能。现在，我们想知道这些扩展算法应用于真实的天文学和天体物理问题时，是否仍能表现出优异的性能。评估扩展力梯度辛方法在文献 [8,10]中旋转棒旋星系的三类模型中的适用性能，是本文的主要目标之一。另一方面，我们有意利用庞加莱截面和快速李雅普诺夫指标（FLI） [33]等技术，研究其中一个模型在给定势的径向项数目时，沿径向分布的规则轨道与混沌轨道所对应的动力学结构。通过这种方式，我们希望了解势的径向项数目如何影响其中一个模型的混沌。我们还希望了解，在势的径向项数目、能量和初始条件相同的情况下，这三类模型的动力学有何差异。

为实现这三个目标，本文结构安排如下。第2节介绍三种旋转棒旋星系模型。第3节将扩展四阶力梯度辛方法应用于模型 A4，并评估这些算法的性能。第4节利用庞加莱截面和快速李雅普诺夫指标技术，探究这些模型中的动力学结构。最后，第5节总结主要结果。

II. 旋转棒旋星系模型

质量为 $m_p = 1$ 的试验粒子在带有旋转棒的星系平面内运动，其在旋转参考系中的运动可用极坐标（r， ϕ）下的二维哈密顿量 [8,10] 描述

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \Omega p_\phi + \Phi(r, \phi). \tag{1}$$

这里给出上述符号的含义。Ω 是旋转参考系的图样速度。 p_r 表示坐标 r 对应的正则动量， p_ϕ 是坐标 ϕ 对应的正则动量，在静止参考系中对应角动量。 Φ（r， ϕ）表示星系在旋转参考系中的引力势，并满足泊松方程

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \tag{2}$$

其中， G 为引力常数， ρ 表示物质密度。

泊松方程解的完整表达式冗长且复杂。Harsoula 等人 [10] 将方程（2）的一个简单解作为星系棒 $m = 2$ 模态的势

$$\Phi(r, \phi) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r) \cos 2\phi + \Phi_2(r) \sin 2\phi, \tag{3}$$

其中，$\Phi_0(r)$、$\Phi_1(r)$ 和 $\Phi_2(r)$ 是 r 的函数。若 $\Phi_1(r) = \Phi_2 r = 0$，则势 $\Phi_0(r) = \Phi(r, \phi)$ 具有轴对称性，且角动量 p_ϕ 守恒。当 $\Phi_1(r) \neq 0$ 或 $\Phi_2(r) \neq 0$ 时，势 $\Phi(r, \phi)$ 为非轴对称，角动量 p_ϕ 不守恒。也就是说，方程（3）的第二项和第三项作为非轴对称势扰动的 $m = 2$ 模式。三个势函数见参考文献 [10]:

$$\Phi_0(r) = -\frac{1}{R}\left(A_{00} + \frac{1}{4}A_{20} - \frac{3}{2}A_{22}\right), \tag{4}$$

$$\Phi_1(r) = -\frac{3}{2R}\left(\frac{1}{2}A_{20} + A_{22}\right), \tag{5}$$

$$\Phi_2(r) = \frac{3}{2R}A_{21}, \tag{6}$$

其中，R 是用于描述系统大小的数值常数。该大小被视为 N体代码的边界，对应于与拉普拉斯方程解相匹配的泊松方程解。其他符号（如 A_{00} ）则按球贝塞尔函数 j_0 和 j_2 [34] 的级数展开:

$$A_{00} = \sum_{i=0}^{n} \left[B_{i00} \cdot j_0\left(\xi_{i0}\right)\right], \tag{7}$$

$$A_{20} = \sum_{i=0}^{n} \left[B_{i20} \cdot j_2\left(\xi_{i2}\right)\right], \tag{8}$$

$$A_{21} = \sum_{i=0}^{n} \left[C_{i21} \cdot j_2\left(\xi_{i2}\right)\right], \tag{9}$$

$$A_{22} = \sum_{i=0}^{n} \left[B_{i22} \cdot j_2\left(\xi_{i2}\right)\right]. \tag{10}$$

在上述势的级数展开中，n 表示径向项的数量；也就是说，势中的每个类似 A_{00} 的函数都包含 $(n + 1)$ 项。此外，$\xi_{il} = a_{il} r/R$。对于 $l = 0$，$a_{i0} = (i + 1/2)\pi$ 是方程 $j_{-1}(a_{i0}) = 0$ 的第 $(i + 1)$ 个根。对于 $l = 2$，a_{i2} 是方程 $\tan(a_{i2}) = a_{i2}$ 的解。解 a_{i2} 应限制在范围 $(i - 1/2)\pi < a_{i2} < (i + 1/2)\pi$ 内，并通过牛顿迭代法求得。

方程（7）—（10）中的系数 B_{i00}、B_{i20}、C_{i21} 和 B_{i22}，是根据 N体粒子的位置，利用 N体代码和方程（2）计算得到的。它们在三种星系模型中各不相同，这三种模型在文献 [10] 中称为模型 A、B 和 C。三种模型的性质已在论文 [8-10] 中描述。下面介绍其中一些性质。首先，模型 B 的总角动量大于模型 A，但小于模型 C。这使得沿模型 A、B 和 C 的序列，由密度波形成的旋转中央棒尺寸逐渐减小，而棒区的密度逐渐增大。其次，在哈勃时间结束时，各模型中棒的图样速度会降低，而共转半径会增大。第三，旋转会增强混沌程度，使处于混沌运动中的质量占比增加。第四，旋臂的形成几乎完全由混沌运动中的质量主导。第五，共转半径附近及其以外的所有不稳定周期轨道的不变流形，均支撑着棒的外缘和旋臂。Harsoula 通过私人通信向本文第一作者提供了这三种模型的系数。带有 $n = 19$ 的系数列于表1–3。每个模型中的 20 个系数 B_{i00}、20 个系数 B_{i20} 以及 40 个系数 C_{i21}、$B_{i22}(i = 0、19)$，分别对应单极项、四极项和三轴项。实际上，每组系数决定势 $\Phi(r、\phi)$。不同的势 $\Phi(r、\phi)$ 对应不同的星系模型。下文中，$n = 19$ 的三个模型分别对应模型 A19、B19 和 C19。同理，当 $n = 9$ 时，称为模型 A9、B9 和 C9；当 $n = 4$ 时，也称为模型 A4、B4 和 C4。

单位系统采用参考文献 [8,10] 中的定义。半质量半径 R_h 用作长度标度单位，即 $r_{scal} = r/R_h$，其中 r 表示实际距离，r_{scal} 为标度径向距离。为方便起见，后续讨论中仍将标度后的径向距离写作 r 。模型 A 的半质量半径为 $R_h = 0.1006$ ，模型 B 为 $R_h = 0.0926$ ，模型 C 为 $R_h = 0.1167$ 。系统的大小为 $R = 0.85$。这里，一个长度单位为 8 千秒差距。时间单位为半质量穿越时间 $T_{hmct} = [2R_h^3/(GM)]^{1/2} = t_{Hub}/300$，其中 t_{Hub} 表示

表 I：模型 A 中级数 (7)-(10) 的系数。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Bi00$	250670.00	214640.00	175380.00	146580.00	126550.00	112500.00	102250.00	93269.00	84659.00	76738.00
$Bi20$	16599.00	25348.00	25460.00	25455.00	27770.00	31416.00	35390.00	38187.00	39353.00	39760.00
$Ci21$	616.35	1477.80	3093.20	4784.80	5723.80	5186.10	3564.00	1766.40	220.39	-632.86
$Bi22$	-5808.00	-9799.20	-11023.00	-10369.00	-8597.30	-6413.80	-4878.40	-4209.20	-3989.60	-3932.60
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$Bi00$	69503.00	62789.00	56553.00	50735.00	45419.00	40595.00	36128.00	31941.00	27988.00	24271.00
$Bi20$	40303.00	41137.00	41938.00	42164.00	41642.00	40746.00	39745.00	38828.00	37960.00	36816.00
$Ci21$	-833.16	-816.34	-786.25	-741.98	-684.44	-601.88	-463.25	-324.97	-283.78	-344.23
$Bi22$	-3882.30	-3768.40	-3624.80	-3470.20	-3355.40	-3299.00	-3289.50	-3298.10	-3315.100	-3304.00

表 I：模型 B 中级数 (7)-(10) 的系数。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Bi00$	249850.00	208750.00	166240.00	136810.00	119540.00	109650.00	102040.00	94581.00	87464.00	80875.00
$Bi20$	19761.00	30778.00	32613.00	28562.00	24516.00	25984.00	30721.00	34872.00	37154.00	38234.00
$Ci21$	-674.22	-2590.80	-4227.30	-4246.90	-1974.70	118.46	87.73	-1623.40	-3752.10	-5087.90
$Bi22$	-6781.10	-10962.00	-11493.00	-9732.80	-7244.90	-5062.20	-3654.80	-2783.10	-2305.50	-2196.80
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$Bi00$	74509.00	68185.00	61997.00	56146.00	50708.00	45630.00	40856.00	36367.00	32180.00	28326.00
$Bi20$	39040.00	40062.00	41339.00	42345.00	42784.00	42869.00	42847.00	42584.00	41768.00	40414.00
$Ci21$	-5447.70	-5355.50	-5293.10	-5374.40	-5514.50	-5533.80	-5337.50	-5081.30	-4882.80	-4719.30
$Bi22$	-2336.40	-2490.40	-2534.30	-2495.10	-2474.00	-2468.80	-2445.60	-2417.60	-2425.40	-2463.00

一个哈勃时间。模型 A、B 和 C 的旋转参考系图样速度分别取为 $\Omega_A = 5886.65$、$\Omega_B = 6010.36$ 和 $\Omega_C = 6137.14$，换算为实际单位后对应 $20 \sim 25$ 千米·秒$^{-1}$·千秒差距$^{-1}$。

如上所述，方程（3）的第二项和第三项破坏了系统（1）的轴对称性，因此角动量 p_ϕ 会随时间变化。因此，除方程（1）的哈密顿量 H 外，不存在其他运动常数。这意味着该系统在四维相空间中具有两个自由度且不可积。数值方法是求解这一不可积问题的有效工具。

III. 数值积分器的选择

对于哈密顿量 (1) 的长期积分，首选的积分器自然是能够保持哈密顿流的辛方法。基于这一思路，我们考虑将辛积分应用于这一哈密顿问题。

A. 广义力梯度辛积分器

为方便起见，我们令 t 令 $\mathrm{p} = (p_1, p_2) = (p_r, p_\phi)$，$\mathrm{q} = (q_1, q_2) = (r, \phi)$。我们将哈密顿量 (1) 改写为

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}, q_1) + \Phi(\mathbf{q}), \tag{11}$$

表 III：模型 C 中级数 (7)–(10) 的系数。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Bi00$	249390.00	205340.00	159420.00	129900.00	114510.00	106340.00	100510.00	95098.00	89366.00	83133.00
$Bi20$	13998.00	21217.00	22367.00	25113.00	29066.00	30605.00	30582.00	31466.00	33769.00	36355.00
$Ci21$	89.08	1336.80	4085.00	5662.00	3913.40	969.22	-1143.70	-2174.50	-2900.50	-3381.60
$Bi22$	-8969.80	-14504.00	-14213.00	-10170.00	-5852.70	-3207.10	-2049.70	-1654.10	-1631.90	-1714.40
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$Bi00$	76784.00	70724.00	65078.00	59703.00	54546.00	49594.00	44931.00	40471.00	36143.00	31955.00
$Bi20$	38644.00	40349.00	41348.00	42023.00	42823.00	43574.00	43919.00	43850.00	43519.00	42874.00
$Ci21$	-3685.00	-3800.20	-3575.40	-3274.30	-3104.70	-2945.90	-2835.40	-2807.90	-2761.70	-2731.70
$Bi22$	-1706.80	-1606.50	-1571.10	-1578.70	-1567.60	-1505.90	-1508.40	-1617.50	-1786.00	-1900.20

其中，动能 T 是动量 p 和坐标 r的函数

$$T(\mathbf{p}, q_1) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \Omega p_\phi. \tag{12}$$

T 和 Φ 的李导数算子定义如下

$$\mathcal{A} = \{, T\} = \sum_{i=1}^{2} \left(T_{p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - T_{q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = p_r \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{p_\phi}{r^2} - \Omega \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{p_\phi^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial p_r}, \tag{13}$$

$$\mathcal{B} = \{, \Phi\} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial p_\phi}, \tag{14}$$

其中，符号 $\{,\}$ 表示泊松括号。显然， T 和 Φ 可以精确解析求解，而$\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 则对应其求解器。

求解　器 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 可以对称组合成一个二阶辛蛙跳积分器　　r

$$\mathrm{M2} = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{\tau \mathcal{B}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} = e^{\tau(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \frac{\tau^3}{12}[\mathcal{B},[\mathcal{A},\mathcal{B}]] + \frac{\tau^3}{24}[\mathcal{A},[\mathcal{B},\mathcal{A}]]}, \tag{15}$$

其中 τ 为时间步长，两个对易子为

$$\mathcal{C} = [\mathcal{B}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] = [\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}] = 2\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}, \tag{16}$$

$$\mathcal{D} = [\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{A}]] = 2\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{A}. \tag{17}$$

在式（15）的第二行中，第一项 τ（$\mathcal{A}+\mathcal{B}$）对应于哈密顿量（1）的数值解，第二项和第三项对应于数值解中剩余的局部截断误差，其阶为$\mathcal{O}$（τ^3）。由于存在此类局部截断误差，算法 M2 可使显式数值解达到二阶精度。利用求解器 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，Forest 和 Ruth 的四阶辛方法 [19]可由下式建立:

$$\mathrm{M4} = e^{\alpha\tau\mathcal{A}} e^{\beta\tau\mathcal{B}} e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau\mathcal{A}} e^{(1-2\beta)\tau\mathcal{B}} e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau\mathcal{A}} e^{\beta\tau\mathcal{B}} e^{\alpha\tau\mathcal{A}}, \tag{18}$$

其中 $\beta = 1/(2 - \sqrt[3]{2})$ 和 $\alpha = \beta/2$。

如果式 (12) 第二项中的 r^2 缺失，则式 (13) 中的 $\mathcal{A}$ 是一个仅作用于位置坐标的位置算子。 $\mathcal{C} = 2\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 类似于动量算子 $\mathcal{B}$，后者仅作用于动量。事实上， $\mathcal{C}$ 是一个与引力势的力梯度相对应的、可精确解析求解的算子。然而，$\mathcal{D}$ 是一个动量与位置混合算子，并非可精确解析求解的解析求解器。鉴于这些事实，在一类称为力梯度辛积分算法 [16,21-24]的显式辛积分器中， $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 的组合应运而生。

现在，式 (12) 第二项中的 r^2 仍然存在。尽管式 (13) 中的 $\mathcal{A}$ 是一个动量与位置混合算子，但在这种情况下它仍然是一个可精确解析求解的解析求解器。 $\mathcal{C}$ 是一个可精确解析求解的解析求解器吗？在我们之前的工作 [32] 中，我们对这一问题的回答是肯定的。事实上，可以通过式 (16) 第二行中作用于动量和位置的算子给出答案。容易验证，$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}q_i = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}p_i \equiv 0$、 $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}q_i \equiv 0$、$\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{A}q_i \equiv 0$，以及

$$\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}p_i = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \Phi_{q_i q_j} \Phi_{q_k} T_{p_j p_k}, \tag{19}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{A}p_i = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \Phi_{q_j} \Phi_{q_k} T_{q_i p_j p_k}, \tag{20}$$

其中 $\Phi_{q_j} = \partial\Phi/\partial q_j$、 $\Phi_{q_k} = \partial\Phi/\partial q_k$，且 $\Phi_{q_i q_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial q_j}$、 $T_{p_j p_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial p_j \partial p_k}$、 $T_{q_i p_j p_k} = \frac{\partial^3 T}{\partial q_i \partial p_j \partial p_k}$。显然， $\mathcal{C}$ 也是一个动量算子:

$$\mathcal{C} = 2\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} (2\Phi_{q_i q_j}\Phi_{q_k} T_{p_j p_k} + \Phi_{q_j}\Phi_{q_k} T_{q_i p_j p_k}) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

式 (21) 中的动量算子 $\mathcal{C}$ 不再是引力势的力梯度，但可以视为参考文献 [16,21-24] 中力梯度因子的扩展。毫无疑问，它是一个精确的解析求解器，与动量算子 $\mathcal{B}$ 类似。

由三个算子 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 构成的对称复合方法可以得到各种显式辛算法。例如，Chin [22] 提出了一种包含算子 $\mathcal{C}$ 的五阶段四阶辛方法，其形式为

$$\mathrm{N4} = e^{\frac{\tau}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathcal{A}} e^{\frac{\tau}{2}\left(\mathcal{B}+\frac{\tau^2}{24}(2-\sqrt{3})\mathcal{C}\right)} e^{\frac{\tau}{\sqrt{3}}\mathcal{A}} e^{\frac{\tau}{2}\left(\mathcal{B}+\frac{\tau^2}{24}(2-\sqrt{3})\mathcal{C}\right)} e^{\frac{\tau}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathcal{A}}.$$

Omelyan 等人 [24] 还构造了一种包含算子 $\mathcal{C}$的七阶段四阶优化辛算法:

$$\mathrm{N4P} = e^{\theta\tau\mathcal{A}} e^{\lambda\tau\left[\mathcal{B}+(2\xi+\chi)\tau^2\mathcal{C}\right]} e^{(1-2\theta)\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{(1-2\lambda)\tau\left[\mathcal{B}+(2\xi+\chi)\tau^2\mathcal{C}\right]} e^{(1-2\theta)\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{\lambda\tau\left[\mathcal{B}+(2\xi+\chi)\tau^2\mathcal{C}\right]} e^{\theta\tau\mathcal{A}}, \tag{21}$$

其中时间系数为

$$\begin{aligned}
\theta &= 0.1159953608486416 \times 10^{0}, \\
\lambda &= 0.2825633404177051 \times 10^{0}, \\
\chi &= 0.3035236056708454 \times 10^{-2}, \\
\xi &= 0.1226088989536361 \times 10^{-2}.
\end{aligned}$$

优化的概念是使时间系数最小化五阶截断误差首项的范数。

此前的工作[32]讨论了包含扩展算子 $\mathcal{C}$ 的算法的构造机制。事实上，作用于原始系统（1）的扩展力梯度算法，等价于作用于修正哈密顿系统的标准辛方法（例如不含扩展算子 $\mathcal{C}$的 M4 方法）。

B. 数值测试

模型 A4 用作测试模型，以评估 M4、N4 和 N4P 算法的性能。作为比较，还使用了具有自适应步长的八阶和九阶龙格-库塔-费尔伯格积分器 [RKF8(9)] 。时间步长为 $\tau = 0.0005 \times T_{hmct} = 0.0005 \times t_{hub}/300 = 0.0005/82.4/300 \approx 2.0 \times 10^{-8}$ (秒·兆秒差距/千米)=2.0×10^{-5}(秒·千秒差距/千米) $\approx 2.0 \times 10^{-5}$ (9.5×10^{8} 年) $= 0.19 \times 10^{5}$ 年。简言之，我们的代码中使用 $\tau \approx 2.0 \times 10^{-5}$ (秒·千秒差距/千米)。参考文献 [8] 的作者指出，这一时间步长是合适的选择，因为在这段时间内，势棒与粒子实际密度的棒之间的滞后最小，而且数值阻滞力矩在一个哈勃时间内的累积效应很小。

系统 (1) 的能量为 $E = H = -7 \times 10^{6}$。初始条件为 $r = 0.164/R_h = 0.164/0.1006$,$\phi = 1.89\pi$, $p_r = 0$。初始动量 $p_\phi > 0$ 由 $E = H$确定。图 1(a) 绘出了这几种算法的相对能量误差$|\Delta H/H_0| = |(E_t - E)/E|$ ，其中 E_t 是时刻 t 的数值能量。这里，每种算法均采用 2.5×10^{8} 个步长，对应的时间为 $t \approx 5056.63$ (秒·千秒差距/千米)。三种辛方法 M4 、 N4 和 N4P 的能量误差均未出现长期增长，这是这些辛方法固有的优势。在三种辛积分器中，不含扩展算子的标准四阶辛方法 M4$\mathcal{C}$ 精度最差，而采用扩展力梯度算子的四阶优化辛算法 N4P $\mathcal{C}$ 精度最佳。这些数值结果表明，在精度方面，采用扩展力梯度算子优于不采用该算子。优化方法也优于相应的非优化方法。与这些辛方法不同，非辛积分器 RKF8(9) 的能量误差会随时间增长。RKF8(9) 的精度优于 N4P，但计算效率低于 N4P，如表 4 所示。以 RKF8(9) 的解为参考解，我们得到图 1(b) 中三种辛算法 M4、N4 和 N4P 的相对位置误差。结果表明，M4 方法的位置误差仍然最大，而 N4P 方法的位置误差最小。采用许多其他能量值和初始条件时，这些积分器的数值性能不会受到影响。事实上，积分器的数值性能与参数和初始条件 [16-32]的选择无关。尽管如此，测试积分器性能时仍有必要选择有界轨道。因此，仍然需要适当选择参数和初始条件。

由于带有扩展力梯度算子的四阶优化辛算法 N4P $\mathcal{C}$ 在稳定能量误差方面表现最佳，因此采用该算法研究轨道动力学。

表 IV：图 1 中各算法的相对能量误差、相对径向误差和 CPU 时间。请注意，-12.2 表示误差为 $10^{-12.2}$ 阶，-2.1 表示误差为 $10^{-2.1}$ 阶。CPU 时间中的 $17'42''$ 表示 17 分钟 42 秒。

方法	RKF8(9)	M4	N4	N4P
$\lvert\Delta H/E\rvert$	-12.2	-8.6	-9.5	-11.0
$\lvert\Delta r/r_0\rvert$	/	-2.1	-2.9	-3.4
Time	$17'42''$	$4'30''$	$5'43''$	$6'57''$

IV. 规则与混沌动力学

文献 [10] 的作者将莫泽不变流形理论应用于混沌旋臂。从拉格朗日点 L_1、 L_2 或 L_1 和 L_2 附近的不稳定周期轨道出发的不变流形，可用级数来描述。级数的收敛性为研究初始条件位于不稳定点 L_1 或 L_2 不变流形邻域内的混沌轨道提供了一种解析方法。每个拉格朗日点周围级数的收敛域称为莫泽域。莫泽域内轨道与远心点截面的交点形成了该区域的螺旋结构。初始条件接近莫泽收敛域边界、但位于边界之外的混沌轨道会成为混沌吸引子。这类混沌轨道也可通过庞加莱截面和快速李雅普诺夫指标（FLI） [33] 来识别。庞加莱截面法展示粒子轨迹与相空间截面的交点，可清晰描述保守四维系统的相空间结构。庞加莱截面上的一个或多个孤立点对应周期轨道。庞加莱截面上的科尔莫哥洛夫-阿诺德-莫泽（KAM）环面对应规则的准周期轨道。如果图中有许多随机分布在某一区域内的点，则运动是混沌的。总之，庞加莱映射中各点的分布可以表明运动是否混沌。对于有序轨道和混沌轨道，偏差向量的长度随时间增长的速率截然不同。快速李雅普诺夫指标利用这两种截然不同的增长速率来区分有序与混沌情形。莫泽不变流形理论要用于研究混沌轨道，要求描述不稳定平衡点或不稳定周期轨道附近哈密顿动力学的级数收敛。对于稳定不变点或稳定周期轨道周围不收敛的比尔科夫正规形级数，该理论可能不太适用。用于探测混沌的庞加莱截面和快速李雅普诺夫指标方法则不受此限制。显然，与莫泽不变流形理论相比，它们能够在更大的区域内探测混沌轨道。本文采用庞加莱截面和快速李雅普诺夫指标方法，研究三类棒旋星系模型 A、B 和 C 的动力学行为。所研究的轨道并不限于不稳定拉格朗日点 L_1 和 L_2 附近的轨道。我们主要关注这几类模型在动力学行为上的差异。此外，还考察了势的级数展开中径向项的数量（$n+1$）对每组模型动力学行为的影响。

A. 模型 A4、A9 和 A19

参数和初始条件与图 1 相同，但 r 和 p_ϕ 的初始值不同。模型 A4 在初始间距 r 的两个范围内呈现出不同的相空间结构，如图 2(a) 和 (b) 中通过平面 $\phi=\pi/2$、 $p_\phi>0$ 下的庞加莱截面所示。图 2(a) 中的三条轨道是 KAM 环面，对应于轨道的规则性。图 2(b) 中一条初始间距为 $r=4.430/0.1006$、另一条初始间距为 $r=4.424/0.1006$ 的轨道，在截面上似乎没有明显不同的相空间结构，但它们呈现出不同的规则与混沌动力学特征，这些特征可通过图 2(c) 中的快速李雅普诺夫指标（FLI）方法清晰地识别出来。快速李雅普诺夫指标（FLI）是指参考文献 [35] 中定义的、针对两条相近轨道的指标：

$$\mathrm{FLI}=\log_{10}\frac{d(t)}{d(0)}, \tag{22}$$

其中， $d(0)$ 和 $d(t)$ 分别是时刻 0 和 t 时两条相邻轨道之间的距离。初始间距为 $r=4.430/0.1006$ 的轨道对应于快速李雅普诺夫指标随时间按幂律递增（$\log_{10}t$），属于规则轨道。然而，初始间距为 $r=4.424/0.1006$ 的轨道对应于快速李雅普诺夫指标随时间按指数律递增，应属于混沌轨道。经过 5×10^4 积分步数后，快速李雅普诺夫指标随时间呈现完全不同的增长规律，能够有效区分有序与混沌这两种情况。

图 3(a) 中模型 A9 的相空间结构与图 2 中模型 A4 的相空间结构有所不同。对于模型 A4，当初始间距 r 处于较小的 $1.45<r<1.7$ 范围内时，轨道为规则的 KAM 环面（未

绘制）。然而，模型 A9 中初始间距为 $r = 0.153/0.1006$的轨道有多个双曲点。图 3(c) 中的快速李雅普诺夫指标证实了其混沌性。图 2(a) 中模型 A4 在 $10 < r < 12.3$ 范围内没有混沌轨道，但图 2(b) 和 (c) 中模型 A9 在 $10 < r < 12.3$ 范围内有两条初始间距分别为 $r = 1.210/0.1006$和 $r = 1.235/0.1006$的混沌轨道。

在图4(a)中考察模型 A19 时，初始间距为 $r = 0.163/0.1006$的轨道是规则 KAM 环面。另一条初始间距为 $r = 0.154/0.1006$的轨道由许多岛构成，因此仍然是规则的。然而，第三条初始间距为 $r = 0.160/0.1006$的轨道是混沌的，因为它包含许多随机分布在一个区域内的离散点。从 A4 到 A9 再到 A19，$1.45 < r < 1.7$ 这一小范围内的混沌程度似乎有所增强。与图3(b)中的 A9 相比，图4(b)中 A19 在 $10 < r < 12.5$ 范围内的混沌似乎更强。当图2(c)中的初始间距 r 从20跨越到23时，初始间距为 $r = 2.230/0.1006$的有序轨道内部存在许多规则 KAM 环面轨道。初始间距为 $r = 2.230/0.1006$ 和 $r = 2.290/0.1006$的两条轨道之间存在一个小的混沌区域。借助图4(d)中的快速李雅普诺夫指标（FLI）方法，可以清楚地识别初始间距为 $r = 2.230/0.1006$的轨道的规则性，以及初始间距为 $r = 2.290/0.1006$ 的轨道的混沌性。

从图2—4可以看出，随着径向项的数量n 增多，混沌轨道的数量和程度似乎也会增加。图5清楚地展示了这一结果，其中列出了模型 A4、A9 和 A19 中快速李雅普诺夫指标随初始间距 r 的变化关系。换言之，图5表明，对于每个模型，规则轨道和混沌轨道的相空间结构分布取决于初始间距的范围 r。每个快速李雅普诺夫指标都是经过 5×10^4 积分步数后得到的。7 是有序情形与混沌情形之间快速李雅普诺夫指标的临界值。快速李雅普诺夫指标不超过7，表明有界轨道具有规则性；而大于7则对应有界轨道的混沌性。关于 n 导致混沌轨道的数量和程度增加这一结果，是基于 n势的级数展开中径向项的数量。 n 增加意味着径向项的数量增加。等价地说，势中的非线性引力相互作用效应增强了。

B. 模型B4、B9和B19

图6展示了模型 B4 在两种初始间距范围 r内的相空间结构。在图6(a)中，初始间距为 $r = 0.750/0.0926$、处于 $7.2 < r < 8.2$ 范围内的轨道存在微弱混沌。图6(b)中，处于 $10.0 < r < 12.2$ 范围内的两条轨道是规则的 KAM 环面。然而，在图4(c)中，初始间距为$r = 3.746/0.0926$、处于 $40.25 < r < 43$ 范围内时会出现混沌。图6(d)还展示了面板(a)中的混沌轨道以及面板(c)中的两条轨道的动力学特征。图6(b)和(c)中模型 B4 的相空间结构与图 2 (a)和(b)中图 2 中的模型 A4 相似。

图 7(a) 和 (b) 中模型 B9 的相空间结构看起来也与图 3(a) 和 (b) 中模型 A9 的相似。初始间距 $r = 0.157/0.0926$ 和 $r = 0.139/0.0926$对应图 7(a) 中由三个环组成的两条规则轨道。正如图 7(c) 中的快速李雅普诺夫指标所示，图 7(a) 中 $r = 0.141/0.0926$以及图 7(b) 中 $r = 1.128/0.0926$对应的轨道呈现混沌。

与图 7(a) 和 (b) 中的模型 B9 相比，模型 B19 在图 8(a) 和 (b) 中 $1.425 < r < 1.7$ 和 $10 < r < 12.25$ 的范围内似乎具有更强的混沌性。对于属于 $1.425 < r < 1.7$范围的初始间距 r，图 8(a) 中模型 B19 的轨道动力学行为与图 4(a) 中模型 A19 的大不相同。然而，图 8(b) 和 (c) 中模型 B19 的相空间结构也与图 4(b) 和 (c) 中模型 A19 的相似。图 8(d) 中的快速李雅普诺夫指标支持图 8(c) 中 $r = 2.368/0.0926$ 和 $r = 2.420/0.0926$对应的两条轨道具有混沌性。

图9中快速李雅普诺夫指标与初始间距之间的关系清楚地表明，B 系列模型中的混沌轨道数量和程度会随着 n 的增加而增加。

C. 模型 C4、C9 和 C19

对于模型 C，在图 10(a) 中从 $n = 4$ 到图 10(c) 中的 $n = 9$，再到图 10(e) 中的 $n = 19$ 这一范围内，混沌似乎有所增强。图 10(b)、(d) 和 (f) 中的 $10 < r < 12.2$ 范围也有同样的结果。图 11 中快速李雅普诺夫指标与初始间距 r 之间的关系表明，随着 n 的增加，混沌会增强。

通过上述演示可以得出几点结论。模型 A、B 和 C 的三种类型具有相同的表达式，但图样速度 Ω 以及系数 B_{i00}、B_{i20}、C_{i21} 和 B_{i22} 存在差异。当径向项数 n、能量 E 和初始条件相同时，三个模型具有相似的动力学行为。每个模型中有序轨道和混沌轨道的动力学结构沿径向

方向呈现不同的分布。径向项数 n 增加时，引力效应增强，从而导致混沌程度加剧。值得注意的是，模型 A、B 和 C 中旋臂的主要结构形成于 3 至 5 个标度半径之间，如文献 [8] 和 [10] 所示。标度径向距离的某些范围，例如从 40 到 43 的标度径向距离范围，似乎距离旋臂的主要结构非常遥远。这些结果表明，混沌既可能发生在靠近旋臂主要结构的径向距离处，也可能发生在远离旋臂主要结构的径向距离处。此外，我们发现的混沌轨道并不局限于不稳定平衡点 L_1 和 L_2 附近的区域。因此，本文选取的能量不同于 [8-10] 中的能量。

V. 结论

本文主要研究旋转参考系下采用极坐标描述的三类旋转星系模型，即模型 A、B 和 C。它们的表达式相同，但图样速度 Ω 和系数 B_{i00}、B_{i20}、C_{i21} 和 B_{i22} 不同。当这些模型中包含与轴对称性偏差较大的势时，角动量 p_ϕ 不再是运动常数。在这种情况下，动能是动量和空间坐标的函数。

现有的显式力梯度辛积分器 [21-24] 不适用于当前的哈密顿问题。然而，我们此前工作 [32] 中提出的扩展力梯度辛方法仍然适用。数值测试表明，不含扩展力梯度算子的四阶对称辛方法，其精度低于含该算子的方法。尤其是，优化后的扩展力梯度辛方法比相应的未优化方法精度更高。

我们采用含扩展力梯度算子的四阶优化辛算法，研究这些旋转星系模型中规则轨道和混沌轨道的动力学特征。通过庞加莱截面和快速李雅普诺夫指标技术可以看出，势的径向项数增加会增强引力效应和混沌程度。在径向项数、能量和初始条件相同的情况下，这三类模型具有相似的动力学结构。

作者贡献：软件和论文初稿撰写，L. Z.；方法学，W. L.；监督、概念化、论文审阅与编辑以及经费获取，X. W.。所有作者均已阅读并同意发表该稿件。

经费：本研究得到国家自然科学基金（项目编号：11973020和11533004）以及广西自然科学基金（项目编号：2019GXNSFDA245019）的资助。

数据可用性声明：本文是一项理论工作。所有数据均在文中计算并给出。

机构审查委员会声明：不适用。

知情同意声明：不适用。

致谢：第一作者非常感谢Harsoula博士提供表1–3中的级数系数。作者还感谢匿名审稿人提出的有益建议。

利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

[1] Sussman, G.T.; Wisdom, J. 冥王星具有混沌性的数值证据， *Science* **1988**，241，433-437。[2] Murray, C.D.; Dermott, S.F. 太阳系动力学，剑桥大学出版社（1999）。[3] Voglis, N.; Kalapotharakos, C.; Stavropoulos, I. 星系N体模型中有序运动和混沌运动中的质量组分。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2002**，337，619。[4] Manos, T.; Athanassoula, E. 棒旋星系中的规则轨道与混沌轨道——I. 应用SALI/GALI方法探索其在若干模型中的分布。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2011**，415，629-642。[5] Kalapotharakos, C.; Voglis, N.; Contopoulos, G. 由施加的中心质量导致的三轴星系N体模型的混沌与长期演化。 *Astron.* & *Astrophys.* **2004**，428，905。[6] Kalapotharakos, C.; Voglis, N. 椭圆星系自洽模型中的整体动力学。 *Celest. Mech. Dyn.*，，。 *Astron.* **2005** 92 157

[7] Muzzio, J.C.; Carpintero, D.D.; Wachlin, F.C. 自洽三轴恒星系统中规则轨道与混沌轨道的空间结构。 *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **2005**，91，173。[8] Voglis, N.; Stavropoulos, I.; Kalapotharakos, C. 旋转星系自洽模型中的混沌运动与螺旋结构。Mon. *Not. R. Astron. Soc.* **2006**，372，901。[9] Tsoutsis, P.; Efthymiopoulos, C.; Voglis, N. 不变流形的合并与棒旋星系的螺旋结构。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2008**，387，1264。

[10] Harsoula, M.; Efthymiopoulos, C.; Contopoulos, G. 混沌旋臂的解析形式。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , , . **2016** 459 748
[11] Voglis, N.; Harsoula, M.; Contopoulos, G. 棒旋星系中的轨道结构。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2007**, 381, 757. [12] Athanassoula, E.; Romero-G´omez, M.; Bosma, A.; Masdemont, J.J. 棒旋星系中的环与螺旋结构——III. 更多比较及其与观测的联系。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2010**, 407, 1433-1448. [13] Bountis, T.; Manos, T.; Antonopoulos, C. 哈密顿棒旋星系模型中的复杂统计。 *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **2012** 113 63 80 , , - .

[14] Machado, R.E.G.; Manos, T. 暗物质晕中棒旋星系含时模型的混沌运动及形态学组成部分的演化。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2016**, 458, 3578-3591. [15] Mondal, D.; Chattopadhyay, T. 星系棒在旋臂形成中的作用：通过轨道与逃逸动力学进行研究-I. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **2021**, 133, 43. [16] Ruth, R.D. 一种正则积分技术。 *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **1983**, 30, 2669. [17] Feng, K.; Qin, M. 哈密顿方程计算中的辛方法。 *Lecture Note in Math.* **1987**, 1297 1, . [18] Hairer, E.; Lubich, C.; Wanner, G. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* 2 2006 ,

第版。（Springer，柏林，）。[19] Forest, E.; Ruth, R. 四阶辛积分。 *Physica D* **1990**, 43, 105. [20] Yoshida, H. 高阶辛积分器的构造。 *Phys. Lett. A* **1990**, 150, 262. [21] Suzuki, M. 无界算子的混合指数乘积公式及其在蒙特卡罗模拟中的潜在应用。 *Physics Letters A* **1995**, 201, 425-428. [22] Chin, S. A. 通过复合算子分解构造辛积分器。 *Phys. Lett. A* **1997**, 226, 344. [23] Omelyan, I.P.; Mryglod, I.M.; Folk, R. 用于经典与量子系统运动积分的高阶力梯度算法构造。 *Phys. Rev. E* **2002**, 66, 026701. [24] Omelyan, I.P.; Mryglod, I.M.; Folk, R. 辛解析可积分解算法：分类、推导及其在分子动力学、量子力学和天体力学模拟中的应用。 *Comput. Phys. Commun.* **2003**, 151 272, . [25] Wisdom, J.; Holman, M. 多体问题的辛映射。 *Astron. J.* **1991**, 102, 1528-1538. [26] Wang, Y.; Sun, W.; Liu, F.; Wu, X. 广义相对论中显式辛积分器的构造。I. Schwarzschild黑洞。 *The Astrophysical Journal* **2021**, 907, 66. [27] Wang, Y.; Sun, W.; Liu, F.; Wu, X. 广义相对论中显式辛积分器的构造。II. Reissner-Nordstr¨om黑洞。《天体物理学杂志》2021年，909，22。[28] Wang, Y.; Sun, W.; Liu, F.; Wu, X. 广义相对论中显式辛积分器的构造。III. Reissner-Nordstr?m-(反)德西特黑洞。 *The Astrophysical Journal Supplement Series* **2021**, 254, 8. [29] Wu, X; Wang, Y.; Sun, W.; Liu, F. 广义相对论中显式辛积分器的构造。IV. Kerr黑洞。 *The Astrophysical Journal* **2021**, 914, 63. [30] Sun, W.; Wang, Y.; Liu, F.; Wu, X. 应用显式辛积分器研究磁化Kerr黑洞周围带电粒子的混沌。 *European Physical Journal C* **2021**, 81, 785. [31] Zhou, N.; Zhang, H.; Liu, W.; Wu, X. 关于Schwarzschild时空显式辛积分器构造的说明。 *The Astrophysical Journal* **2022**, 927, 160. [32] Zhang, L.; Wu, X.; Liang, E. 辛方法中力梯度算子的调整。 *Mathematics* **2021**, 9, 2718. [33] Froeschl´e, C.; Lega, E. 关于辛映射的结构。快速Lyapunov指标：一种极其灵敏的工具。 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **2000**, 78, 167. [34] Allen, A.J.; Palmer, P.L.; Papaloizou, J. 一种用于无碰撞动力系统的保守数值技术：径向与圆形轨道不稳定性的比较。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **1990**, 242, 576. [35] Wu, X.; Huang, T.; Zhang, H. 弯曲时空中基于两条邻近轨道计算的Lyapunov指标。 *Phys. Rew. D* **2006**, 74 083001, .

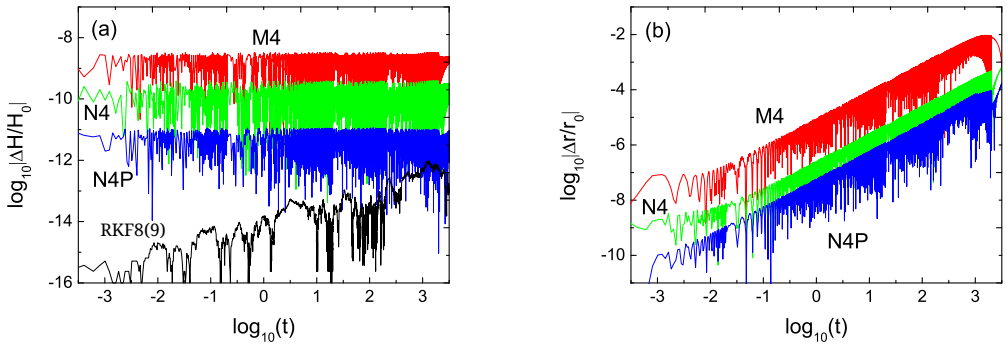


图 1：（a）标准四阶辛方法 M4、扩展力梯度四阶辛方法 N4、优化扩展力梯度四阶辛方法 N4P 以及非辛积分器 RKF8(9) 分别作用于模型 A4 时的相对能量误差 $\Delta H/H_0 = (E_t - E)/E$。 E_t 是系统（1）在时间 t 时的数值能量，且能量为 $E = -7 \times 10^6$。时间步长为 $\tau = 0.0005 \times T_{hmct} \approx 2 \times 10^{-5}$（秒·千秒差距/千米）。初始条件为 $r = 0.164/R_h = 0.164/0.1006$、 $\phi = 1.89\pi$ 和 $p_r = 0$。 p_ϕ 的正初始值由 $E = H$ 确定。三种辛方法不会使能量误差产生长期漂移，而非辛积分器 RKF8(9) 会产生长期漂移。在精度方面，M4 是这些辛积分器中最差的，而 N4P 是最好的。（b）由 RKF8(9) 给出的径向间距 r_0 与由其中一种辛方法给出的径向间距 r 之间的相对位置误差 $\Delta r/r_0 = (r - r_0)/r_0$。N4 的位置误差小于 M4，但大于 N4P。

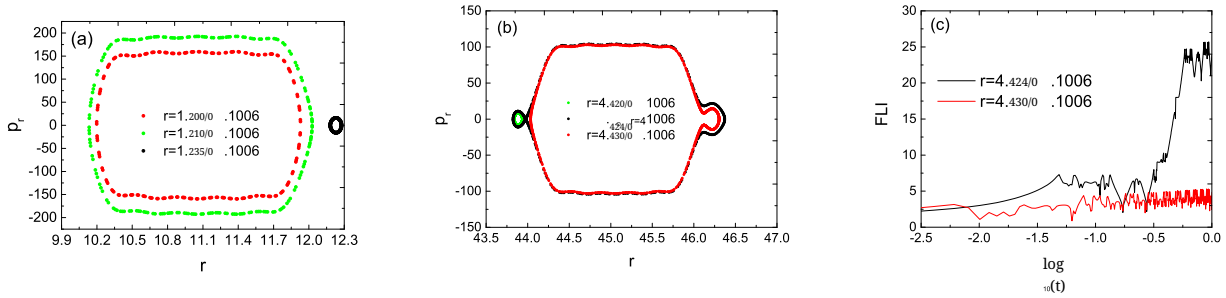


图2：（a）和（b）：模型 A4 在 $\phi = \pi/2$with $p_\phi > 0$ 平面上的庞加莱截面上的相空间结构。规则轨道和混沌轨道的动力学结构沿径向距离 r 呈现不同的空间分布。参数和初始条件（除 r and p_ϕ 外）与图1相同。结构考察范围为 $10 < r < 12.4$（a）和 $43.5 < r < 46.5$（b）。（c）：（b）图中两条轨道的快速李雅普诺夫指标。快速李雅普诺夫指标显示了 $r = 4.430/0.1006$ 轨道的规则性以及 $r = 4.424/0.1006$ 轨道的混沌性。

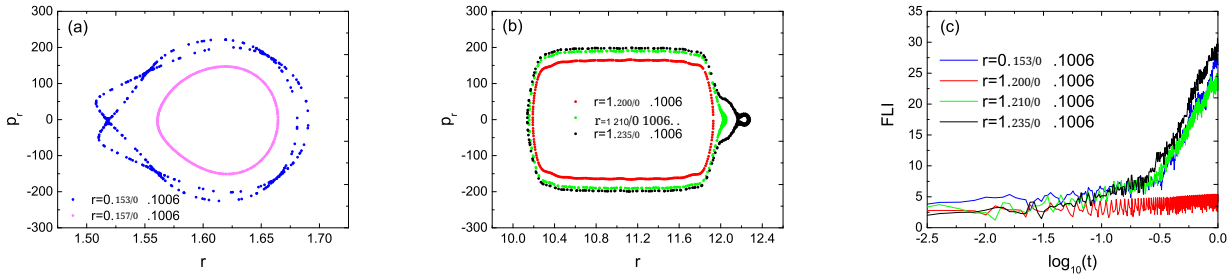


图3：(a) 和 (b)：模型 A9 在庞加莱截面上的相空间结构。结构分别考察了 $1.5 < r < 1.7$ (a) 和 $10 < r < 12.4$ (b) 的范围。图3(b)中的初始条件与图2(a)中的相同。然而， $r = 1.210/0.1006$ 和 $r = 1.235/0.1006$ 对应的轨道是混沌的，而 $r = 1.200/0.1006$ 对应的轨道是规则的。(c)：面板 (a) 和 (b) 中若干轨道的快速李雅普诺夫指标。快速李雅普诺夫指标表明， $r = 1.200/0.1006$ 对应的轨道具有规则性，而 $r = 0.153/0.1006$、 $r = 1.210/0.1006$ 和 $r = 1.235/0.1006$对应的三条轨道具有混沌性。

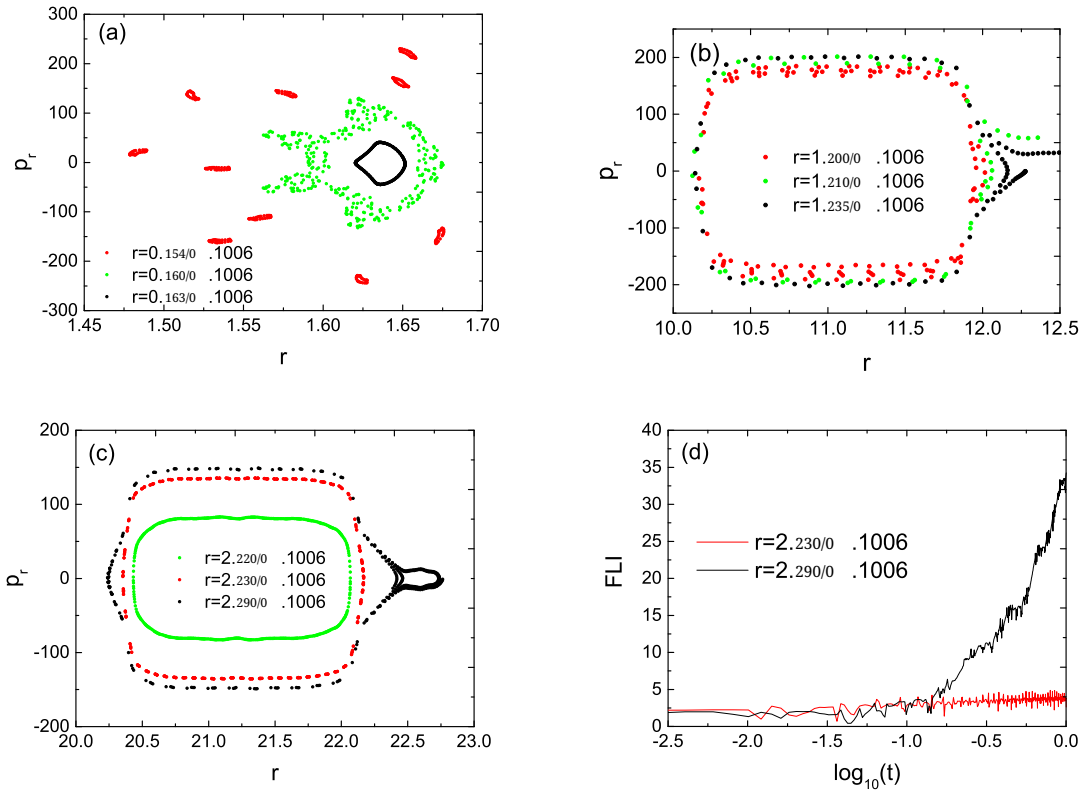


图4：(a)-(c)：模型 A19 在 Poincar´e 截面上的相空间结构。(a)：考察范围为 $1.45 < r < 1.7$ 内的结构。 $r = 0.163/0.1006$ 对应的轨道是有序的 KAM 环面，而 $r = 0.154/0.1006$ 对应的轨道虽然有许多岛，但仍是规则的。然而， $r = 0.160/0.1006$ 对应的轨道是混沌的。(b)：考察范围为 $10 < r < 12.4$ 内的结构。图4(b)中的初始条件与图2(a)中的相同。(c)：考察范围为 $20 < r < 23$ 内的结构。在 $r = 2.230/0.1006$ 对应的有序轨道内部，有若干规则 KAM 环面轨道。在 $r = 2.230/0.1006$ 和 $r = 2.290/0.1006$ 对应的两条轨道之间存在一个小的混沌区域。(d)：(c)图中两条轨道的快速李雅普诺夫指标（FLI）。 $r = 2.230/0.1006$ 对应的轨道，其 FLI 随时间 $\log_{10} t$ 按幂律增长，因此是有序的；而 $r = 2.290/0.1006$ 对应的轨道，其 FLI 随时间呈指数律增长，因此是混沌的。快速李雅普诺夫指标的计算持续进行，直至积分步数达到 5×10^4。

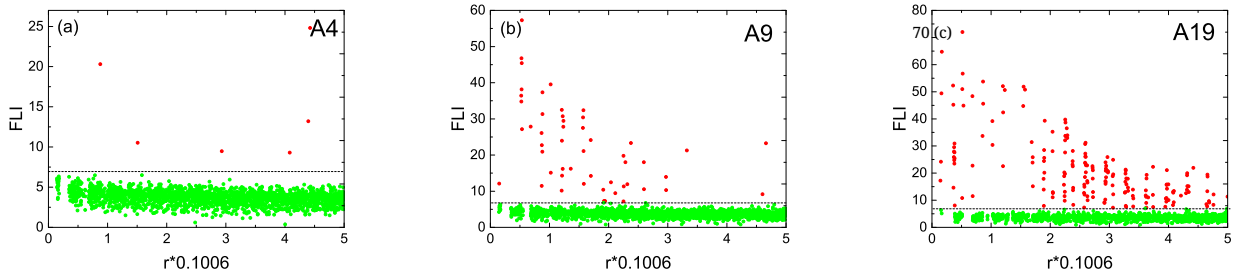


图5：快速李雅普诺夫指标随初始间距 r 的变化关系，分别对应模型 (a) A4、(b) A9 和 (c) A19。每个快速李雅普诺夫指标均在经过 5×10^4 积分步数后获得。不超过 7 的快速李雅普诺夫指标表明有界轨道具有规则性，而大于 7 的则表明有界轨道具有混沌性。在模型 A19 中，许多 r 值对应混沌，而在模型 A4 中，只有少数 r 值对应混沌。显然，随着径向项数 n 增加，混沌更容易出现，其程度也随之增强。

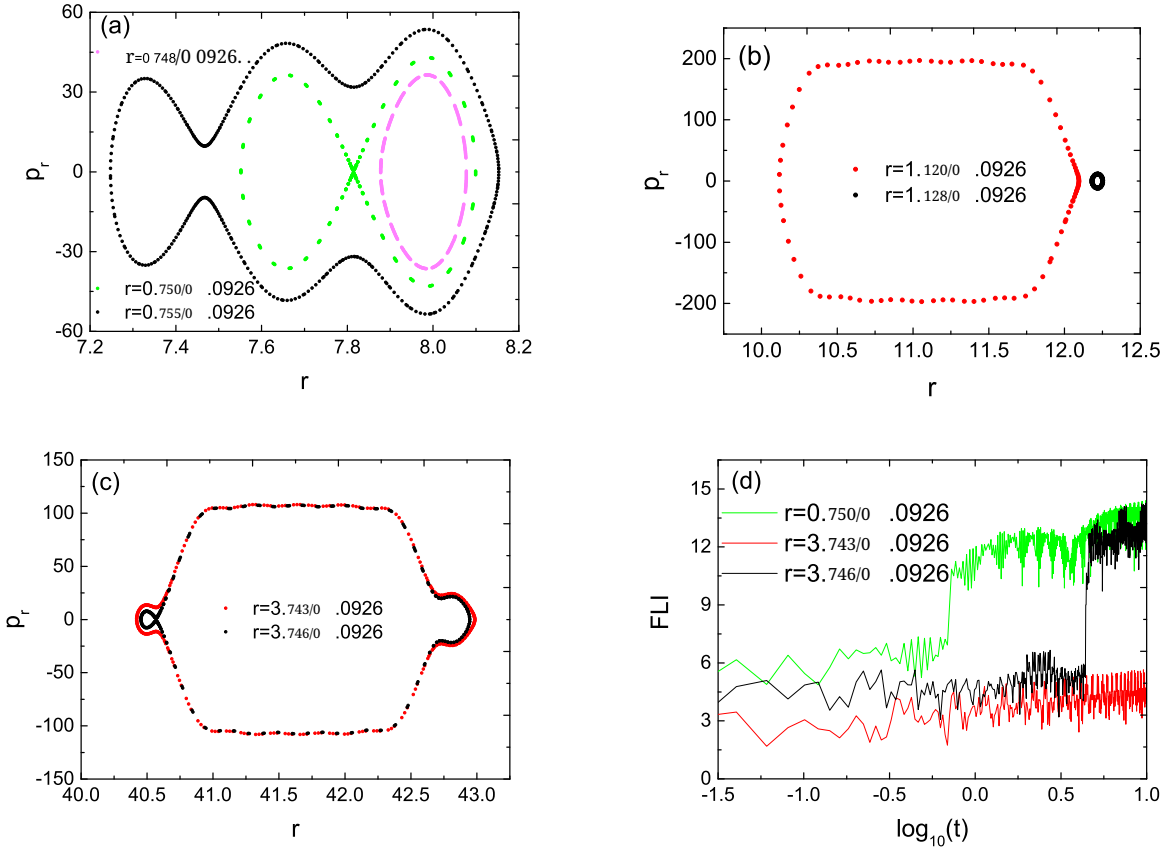


图6：与图2类似，但考虑模型B4。(a)：结构的范围为 $7.2 < r < 8.2$。(b)：结构的范围为 $12.0 < r < 12.2$。(c)：结构的范围为 $40 < r < 43$，且与图 2(b) 中的结构相似。(d)：快速李雅普诺夫指标显示了面板 (a) 和 (c) 中两条轨道的混沌性，以及面板 (c) 中轨道的规则性。

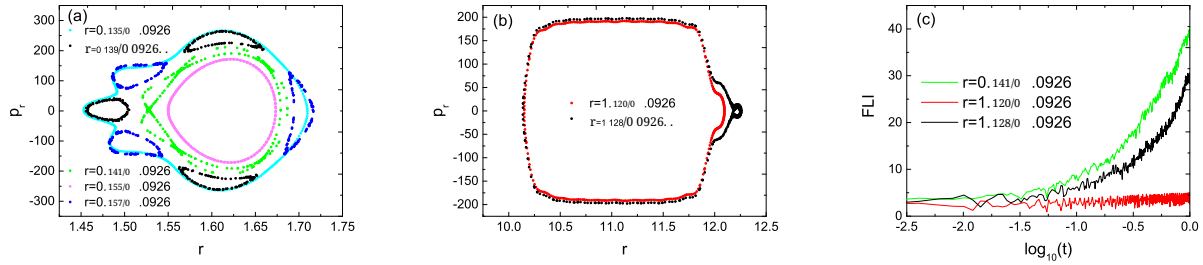


图 7：与图 3 类似，但考虑的是模型 B9。面板 (a) 和 (b) 中的相空间结构分别类似于图 3 (a) 和 (b) 中的结构。图 7(b) 中的初始条件与图6(b) 中的相同。$r = 1.128/0.0926$ 的轨道是混沌的，而 $r = 1.120/0.0926$ 的轨道是规则的。(c)：快速李雅普诺夫指标显示了面板 (a) 和 (b) 中两条轨道的混沌性，以及面板 (b) 中轨道的规则性。

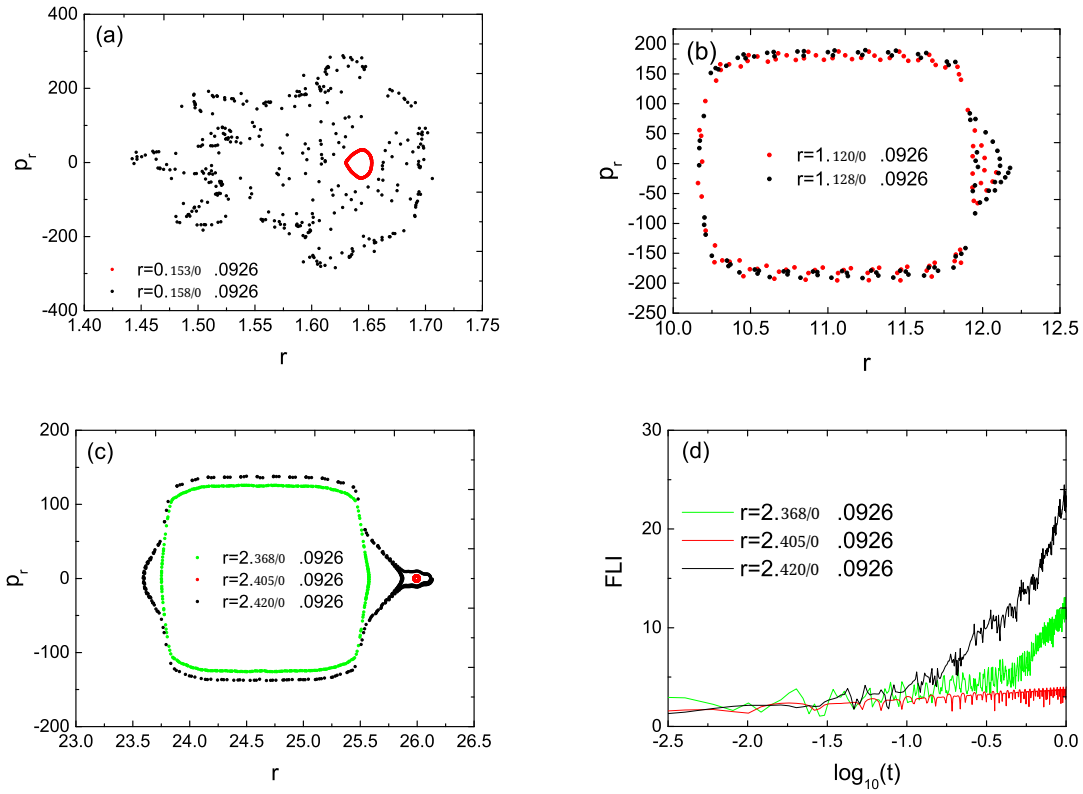


图8：与图4类似，但考虑模型 B19。(a)面板中的相空间结构与图4(a)中的略有不同，但(b)和(c)面板中的这些结构分别与图2(b)和(c)中的结构相似。图8(b)中的初始条件与图6(b)中的相同。(d)：快速李雅普诺夫指标显示了(c)面板中两条轨道的混沌性，以及(c)面板中轨道的规则性。

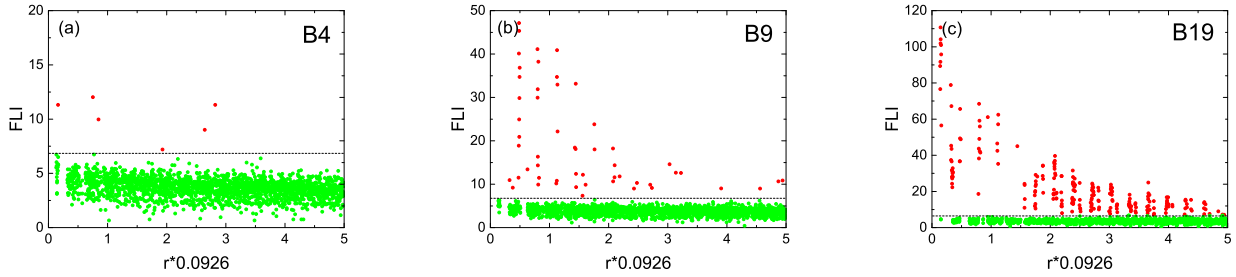


图9：与图5类似，但将模型A替换为B系列模型。随着径向项数增加，混沌程度变得更强 n。

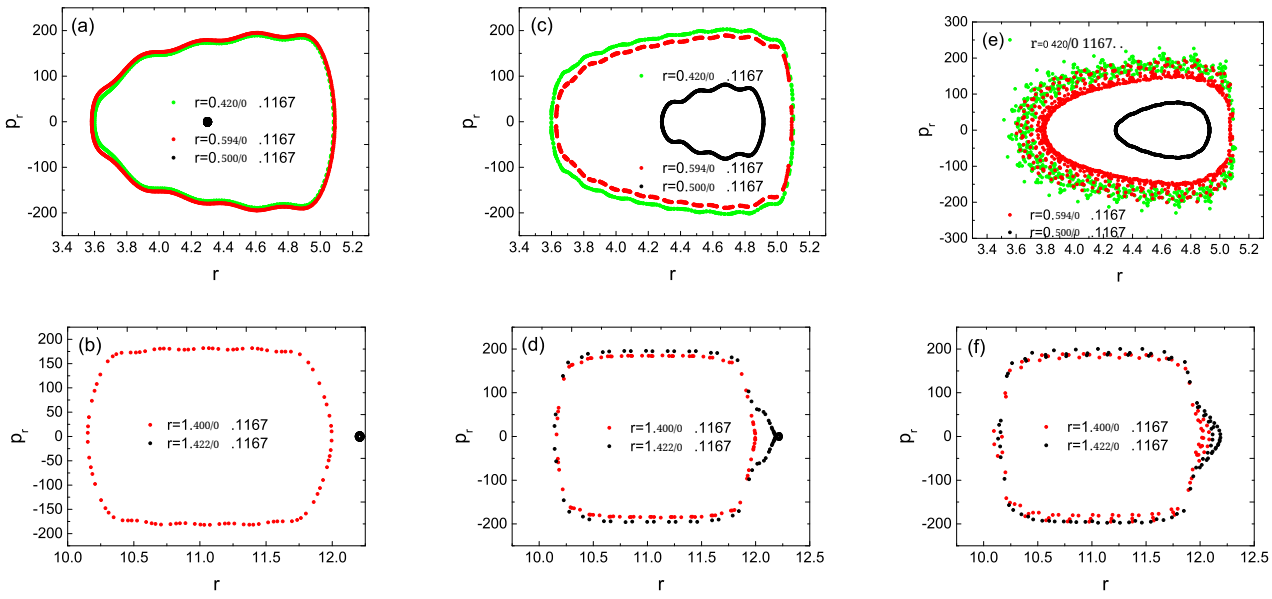


图10：（a）和（b）：模型C4在庞加莱截面上的相空间结构。考察的结构范围为 $3.5 < r < 5.1$ 和 $11.9 < r < 12.2$。（c）和（d）：模型C9在庞加莱截面上的相空间结构。（e）和（f）：模型C19在庞加莱截面上的相空间结构。

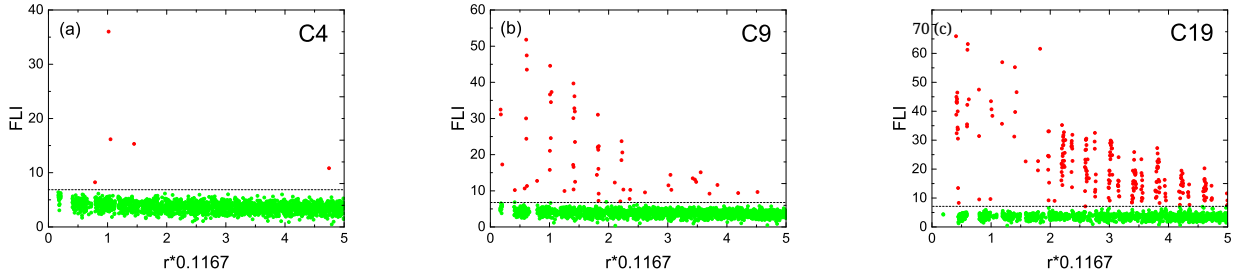


图11：与图5类似，但将模型A替换为模型 C。随着径向项数 n 增加，混沌程度也随之增加。