arXiv:2302.06154v1 [math.CO] 13 Feb 2023

蝴蝶网络的一般位置问题

R. Prabha[a]、S. Renukaa Devi[b, c]、Paul Manuel[d]

[a] 数学系，Ethiraj女子学院，金奈，泰米尔纳德邦，印度 prabha75@gmail.com[b] 马德拉斯大学研究学者，金奈，泰米尔纳德邦，印度[c] 数学系，Avichi文理学院，金奈，泰米尔纳德邦，印度 renukaadevim@gmail.com[d] 信息科学系，生命科学学院，科威特大学，科威特 pauldmanuel@gmail.com, p.manuel@ku.edu.kw

摘要

一般位置集 S 是一个集合 $S \subseteq V(G)$，其中 G 中不存在三个顶点S 位于同一条最短路径上。G 中基数最大的此类集合称为 G 的 gp- 集，其基数称为 G 的 gp- 数，记作 gp(G)。提出一般位置问题的作者指出，蝴蝶网络的一般位置问题尚未解决 [10]。解决给定网络的一般位置问题的一种著名方法，是使用其等距路径覆盖数作为上界。蝴蝶网络的一般位置问题一直未能解决，因为这种方法不适用于蝴蝶网络。本文采用一种新方法，以等距圈覆盖数作为上界。这种方法颇具意义且实用，因为它为解决尚无解的网络一般位置问题开辟了新途径。

关键词：一般位置问题；测地线；gp数；等距圈覆盖；蝴蝶网络。

AMS 2020 年学科分类：05C12，05C82。

1 引言

定义和术语请参阅 [2]。图 G 中任意两个顶点 x, y 之间的 $distance$ $d(x, y)$ 是 G 中最短 x, y 路径的长度；这样的路径称为 $geodesic$。若 G 中的子图 H 满足，对于所有 $x, y \in V(H)$，均有 $d_G(x, y) = d_H(x, y)$，则称其为 $isometric\ subgraph$。覆盖 G 所有顶点所需的最少等距圈数称为 $isometric\ cycle\ cover\ number$,$ic(G)$。

若集合 $S \subseteq V(G)$ 中任意三个顶点都不同时位于 G 的某条最短路径上，则称其为 $general\ position\ set$。G 的 gp-set 是 G 中基数最大的 一般位置集，记为 gp(G)。若 G 是一个图，则一般位置问题是寻找 G 中规模最大的 一般位置集。在 [9]，Paul Manuel 等人受「不共线三点」问题和一般位置子集选择问题 [3, 4, 12] 的启发，提出了一般位置问题，并进一步证明该问题是 NP 完全的。上述问题已在许多文章中得到研究 [1,5–7,14]。在 [10]，Paul Manuel 等人运用单调测地线标记策略，确定了无限网格和无限对角网格的 gp(G)。此外，他们还利用等距路径覆盖解决了 Beneš 网络的一般位置问题。在同一篇论文中，作者指出，等距路径覆盖策略无法用于蝴蝶网络，并断言证明 r维蝴蝶网络的 gp数为 2^r 仍是一项挑战。本文采用一种新颖的方法，通过考察蝴蝶网络的等距圈覆盖，解决了蝴蝶网络的一般位置问题。

2 蝴蝶网络

r-$dim\ butterfly\ network$ $BF(r)$有顶点 $[w, q]$，其中 $q \in \{0, 1\}^r$ 和 $w \in\{0, 1, \ldots, r\}$。若 $|w - w'| = 1$，且$q = q'$ 或 q 与 q' 恰好在第 wth 位不同，则顶点 $[w, q]$ 和 $[w', q']$ 相邻。$BF(r)$有 $r + 1$ 层，每层有2^r 个顶点，共有 $r2^{r+1}$ 条边。第 0 层和 r 层的顶点是 2 度顶点，其余顶点是 4 度顶点 [8,13]。$BF(r)$有两种标准图示，分别为普通表示和菱形表示；更多详情可参见 [8]。本文将始终使用$BF(r)$的菱形表示。为方便起见，我们分别用 X 和 Y 表示所有 2 度顶点和 4 度顶点的集合。进一步地，我们将 $BF(r)$中的任意顶点 $[w, q]$记为 $[a_1a_2 \cdots a_r, r], a_i \in \{0, 1\}$（参见图 1）。注意，$BF(r)$由 $BF(r-2)$的四个互不相交的副本组成，分别记为 $BF(1)(r-2)$、$BF(2)(r-2)$、$BF(3)(r-2)$和 $BF^{(4)}(r-2)$。X 在第 0 层和第 r 层的顶点分别记为 X_0 和 X_r。令 X'_0、X''_0、X'_r 和 X''_r 分别表示连接 $BF^{(1)}(r-2)$与 $BF(4)(r-2)$、$BF(2)(r-2)$与 $BF^{(3)}(r-2)$、$BF(1)(r-2)$与 $BF(2)(r-2)$、以及$BF(3)(r-2)$与 $BF^{(4)}(r-2)$的 X 顶点（参见图 2）。

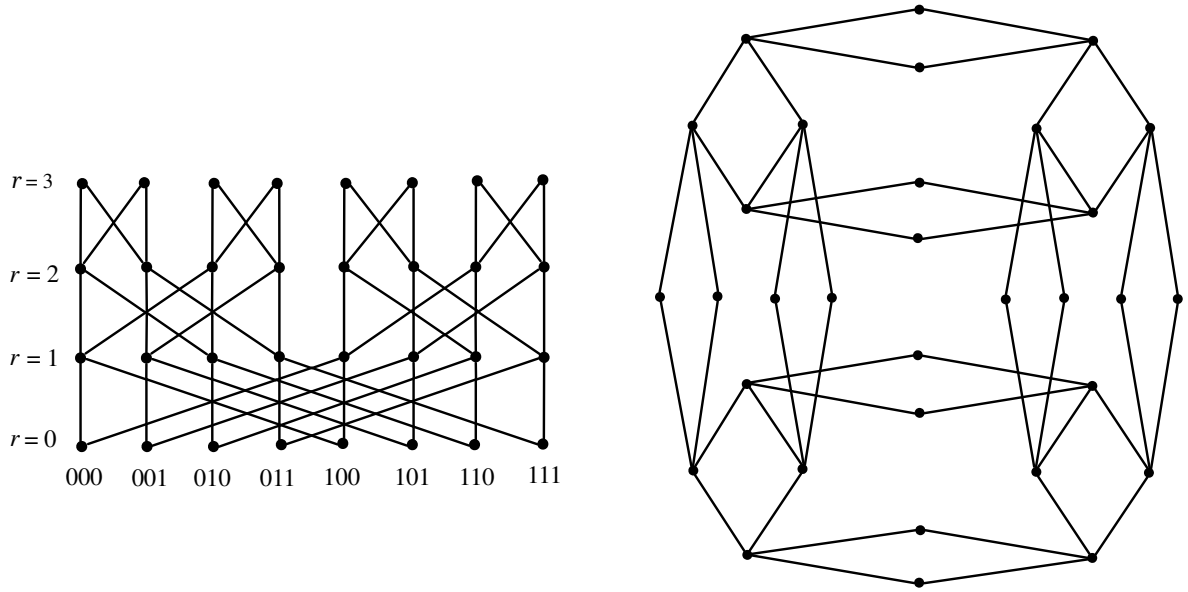

图 1： $BF(3)$ 的标准表示和菱形表示

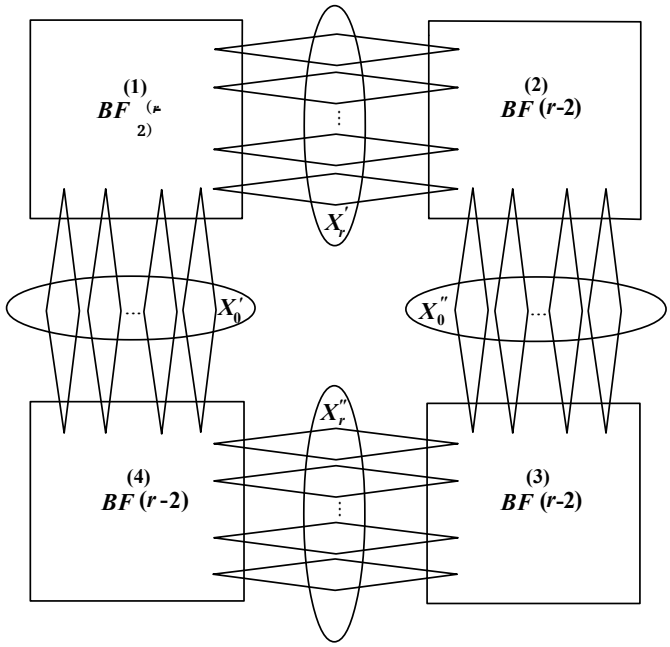

图 2： $BF(r)$

接下来，我们按如下步骤展开：首先考虑作者在 [11] 中构造的蝴蝶网络的边不相交等距圈覆盖（参见图 3）。利用

以等距圈覆盖数作为上界，我们计算$BF(r)$的gp数。

我们首先陈述需要用到的 [11] 和 [9]中的结果。

引理 2.1。[11] 如果 $r \geq 3$，那么 $E(BF(r))$ 可以由一组 $S(r)$ 边不相交的、长度为 $4r$的等距圈划分，其中 $|S(r)| = 2^{r-1}$，且 $S(r)$中的每个等距圈在第 *0* 层有两个顶点（参见图 *3*）。

命题 2.2。[9] 给定一个图 G、$\mathrm{gp}(G) \leq 2\mathrm{ip}(G)$，以及$\mathrm{gp}(G) \leq 3\mathrm{ic}(G)$。

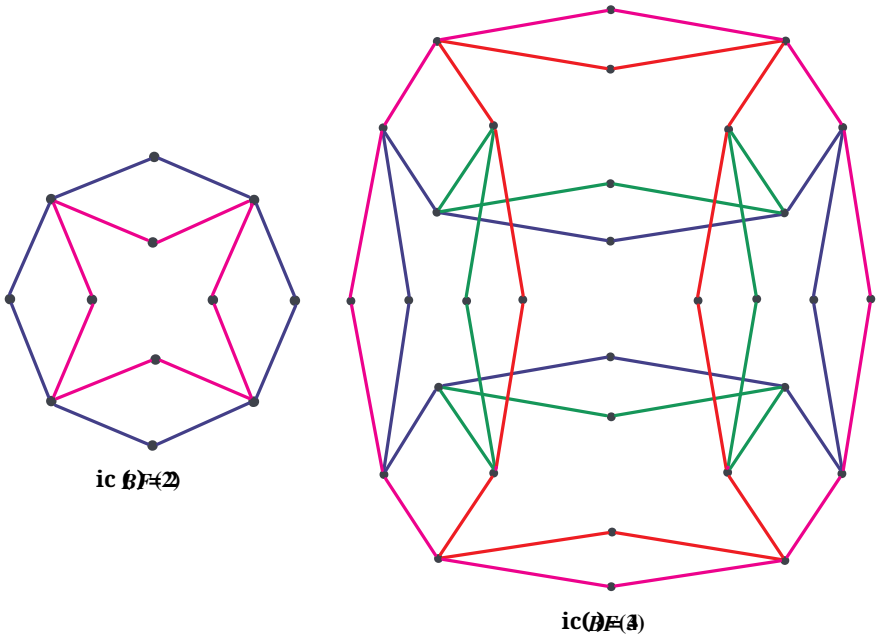

图 3： $BF(2)$ 和 $BF(3)$ 的等距圈覆盖。

接下来，我们着手计算 $BF(r)$ 的任意一般位置集所含 2 度顶点数的上界。

引理 2.3. 若 S 是 $BF(r)$ 的一个一般位置集，且 X 是 $BF(r)$ 的所有 *2* 度顶点构成的集合，则 $|S \cap X| \leq 2^r$。

证明。假设 $|S \cap X| > 2^r$。那么 $S \cap X_0 \neq \emptyset$ 和 $S \cap X_r \neq \emptyset$。此外，$|S \cap X_0| > 2^{r-1}$ 或 $|S \cap X_r| > 2^{r-1}$成立。不失一般性，我们可以假设 $|S \cap X_0| > 2^{r-1}$。这意味着 $S \cap X_0' \neq \emptyset$ 和 $S \cap X_0'' \neq \emptyset$。选取两个顶点 x, y，使得 $x \in S \cap X_0', y \in S \cap X_0''$。那么对于任意 $z \in S \cap X_r$，注意到 $\{x, y, z\}$ 不处于一般位置，这与 S 是 $BF(r)$ 的一般位置集相矛盾。因此得证。

定理 2.4. $\mathrm{gp}(BF(r)) = 2^r + 2^{r-2}$, $r \geq 2$.

证明。 $\mathrm{gp}(BF(r)) \geq 2^r + 2^{r-2}$ 由以下事实可知： $S = \{[a_1a_2\ldots a_{r-1}1, 0] : a_1a_2\ldots a_{r-1}$ 是任意二进制序列$\} \cup \{[1a_2a_3\ldots a_r, r] :$ $a_2a_3\ldots a_r$ 是任意二进制序列$\} \cup \{[0a_2a_3\ldots a_{r-1}0, 1] :$ $a_2a_3\ldots a_{r-1}$ 是任意二进制序列$\}$ 是 $BF(r)$的一个一般位置集（参见图 4）。

断言： $\mathrm{gp}(BF(r)) \leq 2^r + 2^{r-2}$。

令 $C_1, C_2, \ldots, C_{2^{r-1}}$ 表示由引理 2.1 构造的 $BF(r)$的 2^{r-1} 等距圈。注意，每个2度顶点恰好属于一个等距圈，而每个4度顶点恰好属于 $BF(r)$中的两个等距圈。换言之，恰好有一个等距圈经过每个 $x \in S \cap X$ ，恰好有两个等距圈经过每个 $y \in S \cap Y$（参见图 3）。

现在我们在以下情形下计算 S **情形（i）** $S \cap X = \emptyset$。根据命题 2.2 $|S \cap Y| \leq 3.2^{r-2} < 2^r$。**情形（ii）** $S \cap Y = \emptyset$。根据引理 2.3 $|S \cap X| \leq 2^r$。**情形（iii）** $S \cap X \neq \emptyset$ 和 $S \cap Y \neq \emptyset$。现在**子情形（i）** $|S \cap (X \cap V(C_i))| = 1, \quad 1 \leq i \leq 2^{r-1}$。

由于 $\mathrm{gp}(C_n) = 3$, $n \geq 5$, $|S \cap (Y \cap V(C_i))| \leq 2, \quad 1 \leq i \leq 2^{r-2}$。根据命题 2.2 $|S| \leq 2^{r-1} + 2.2^{r-2} \leq 2^r$。

子情形（ii） $|S \cap (X \cap V(C_i))| = 2, 1 \leq i \leq 2^{r-1}$.

通过类似的论证 $|S \cap (Y \cap V(C_i))| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq 2^{r-2}$ 因此 $|S| \leq 2^r + 2^{r-2}$。证明至此完成。

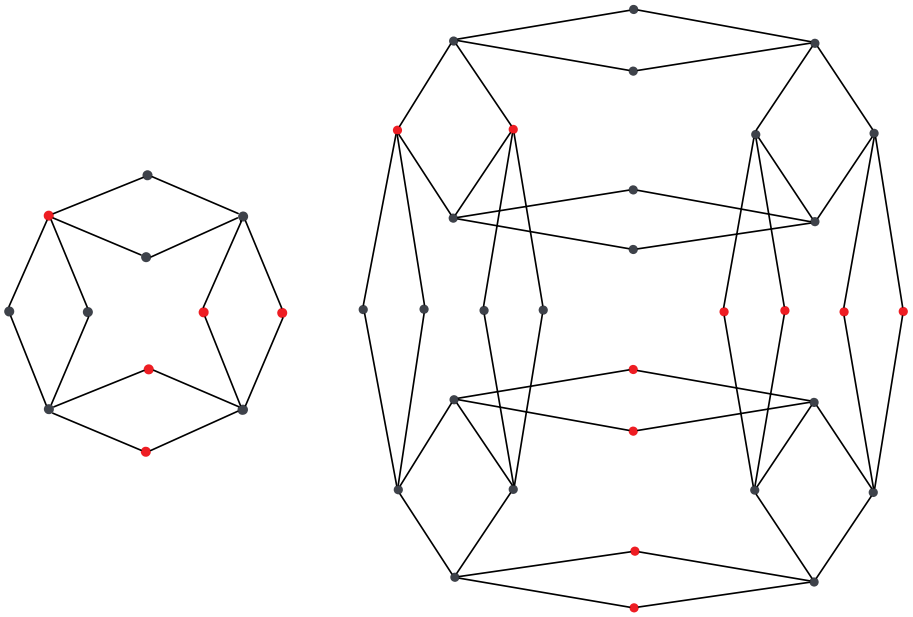

图 4： $BF(2)$ 和 $BF(3)$ 的一般位置集

.

参考文献

[1] B. S. Anand、S. V. Ullas Chandran、M. Changat、S. Klavˇzar、E. J. Thomas, 《一般位置集的刻画及其在余图和二部图中的应用》, 《应用数学与计算》359（2019）84–89。[2] J.A. Bondy、U.S.R. Murty, 《图论》, 数学研究生教材244, 施普林格, 2008。[3] H. E. Dudeney, 《数学游戏》, Nelson, 爱丁堡, 1917。[4] V. Froese、I. Kanj、A. Nichterlein、R. Niedermeier, 《寻找处于一般位置的点》, 《国际计算几何与应用杂志》27（2017）277–296。[5] M. Ghorbani、S.Klavˇzar、H. R. Maimani、M. Momeni、F. Rahimi-Mahid、G. Rus, 《克尼泽图及若干图运算上的一般位置问题》, 《数学讨论：图论》41（2021）1199–1213。[6] S. Klavˇzar、B. Patk´os、G. Rus、I. G. Yero, 《笛卡尔网格上的一般位置集》, arXiv [math.CO]（2019年7月25日）。[7]S. Klavˇzar、I. G. Yero, 《一般位置问题与强分辨图》, 《开放数学》17（2019）1126–1135。[8] P. Manuel、M.I. Abd-El-Barr、I. Rajasingh、B. Rajan, 《Benˇes网络的高效表示及其应用》, 《离散算法杂志》6（2008）11–19。[9] P. Manuel、S. Klavˇzar, 《图论中的一般位置问题》, 《澳大利亚数学学会公报》98（2018）177–187。[10] P. Manuel、S. Klavˇzar, 《若干互连网络上的图论一般位置问题》, 《信息基础》163（2018）339–350。[11] Paul Manuel、Sandi Klavzar、R. Prabha、Andrew Arokiaraj, 《蝴蝶网络的测地线覆盖问题》, arXiv:2210.12675v1 [math.CO] 232022年10月。[12]M. Payne、D. R. Wood, 《一般位置子集选择问题》, 《美国工业与应用数学学会离散数学杂志》27（2013）1727–1733。[13] B.Rajan、I. Rajasingh、P. Venugopal, 《有向蝴蝶网络的最小度量维数》, 第五届亚洲数学会议论文集, 马来西亚, 2009。[14] E.J. Thomas、S.V. Ullas Chandran, 《具有较大一般位置数的图类的刻画》, 《AKCE国际图与组合学杂志》17（2020）935–939。