arXiv:2302.06172v1 [cs.DM] 13 Feb 2023

关于 $G(n, d/n)$ 上硬核模型及相关模型的格劳伯动力学混合时间

CHARILAOS EFTHYMIOU* 和 WEIMING FENG†

摘要。我们研究随机图 $G(n, d/n)$ 上逸度为 λ的硬核模型的单点格劳伯动力学。我们证明，对于随机图 $G(n, d/n)$ 的典型实例，当逸度为$\lambda < \frac{d^d}{(d-1)^{d+1}}$时，格劳伯动力学的混合时间为 $n^{1+O(1/\log\log n)}$。

我们的结果改进了 Bez´akov´a、Galanis、Goldberg 和 Stefankovi˘c 最近提出的优雅算法 [; ICALP'22]。其中的算法是一种基于马尔可夫链蒙特卡罗的抽样算法，但并非格劳伯动力学。我们这里的算法更简单，因为使用的是经典的格劳伯动力学。此外，我们证明的混合时间界小于 Bez´akov´a 等人的论文中的界，因此我们的算法也更快。

我们证明中的主要挑战是处理度无界的顶点。关于通过分支值刻画的谱独立性，我们给出了更强的结果，并证明我们的吉布斯分布满足熵的近似张量化。我们猜想，对于$G(n, d/n)$，这里得到的界是最优的。

作为我们对硬核模型分析的推论，我们还得到了 $G(n, d/n)$ 上单体-二聚体模型的格劳伯动力学混合时间的界。我们为该模型得到的界略优于硬核模型的相应结果

* 英国考文垂 CV4 7AL，华威大学。电子邮箱：Charilaos.Efthymiou@warwick.ac.uk。
† 英国爱丁堡 EH8 9AB，爱丁堡大学。电子邮箱：wfeng@ed.ac.uk。

1. 引言

硬核模型以及与之相关的稀疏随机图 $G(n, d/n)$ 上独立集几何问题，是离散数学中的一个基础研究领域 [Fri90, DM11], ；在计算机科学中，人们在随机约束满足问题的背景下研究它们 [CE15, GS14],；而在统计物理中，它们则被视为无序系统的实例。借助所谓的腔方法 [KMR+07, BKZZ13], ，物理学家对 $G(n, d/n)$ 的独立集作出了一些令人瞩目的预测，例如高阶副本对称性破缺等。物理学家的预测通常在数学上并不严谨。关于独立集的大多数预测至今仍未解决，因为研究中的一些基本自然对象（如配分函数或自由能）极具分析难度。

逸度为 $\lambda > 0$ 的硬核模型，是底层图 G 的独立集上的一个分布，其中每个独立集 σ 被赋予概率测度 $\mu(\sigma)$，其与 $\lambda^{|\sigma|}$ 成正比，其中 $|\sigma|$ 是 σ 的基数。在此，我们考虑底层图是稀疏随机图 $G(n, d/n)$ 的典型实例的情形。该随机图有 n 个顶点，每条边都以概率 $p = d/n$ 独立出现。量 $d > 0$ 对应于期望度。对于本文而言，期望度是有界常数，即我们有 $d = \Theta(1)$，因此该图是稀疏的。

我们关注的是使用格劳伯动力学从上述分布中进行近似采样。这是一种经典且广受欢迎的近似采样算法。该过程之所以广受欢迎，主要是因为它简单，并且提供了强有力的近似保证。格劳伯动力学在采样方面的效率通过混合时间来研究。

近年来，关于最坏情形实例中格劳伯动力学混合时间的研究成果“呈爆发式增长”，例如 [ALO20、CLV21、CFYZ22、Eft22]。结合此前的困难性结果 ˇ [Sly10、SS14、GSV16]，可以说，对于最坏情形实例，硬核模型的格劳伯动力学行为，以及相关的近似采样计数问题，都已得到充分理解。具体而言，对于最大度为 Δ 的图，任意逸度 $\lambda < (\Delta-1)^{\Delta-1}/(\Delta-2)^{\Delta}$ 下，格劳伯动力学都具有 $O(n\log\ n)$ 的混合时间，而困难性结果表明，这一区域 λ 已是最佳可能结果。

上述关于 λ 的上界与硬核模型在无限 Δ-正则树 [Kel85] 上唯一性/非唯一性相变的临界点一致。在讨论这一问题时，或许有必要指出，临界点取决于最大度。随机图 $G(n, d/n)$ 的情形与最坏情形的不同之处正在于此。

对于 $G(n, d/n)$，以及我们在此考察的期望度 d 范围，通常图中几乎所有顶点（例如 99%）的度都非常接近 d。另一方面，$G(n, d/n)$ 的最大度可达 Θ（对数 n 对数对数 n），也就是说，它没有上界。鉴于这一观察，自然可以预期，对于取决于期望度而非最大度的逸度，硬核模型上的格劳伯动力学具有较快的混合速度。请注意，这意味着可以使用格劳伯动力学从逸度为 λ 的硬核模型中进行采样，而 λ 可以远大于最坏情况界所暗示的取值。

对于 $d > 1$，令 $\lambda_c(d) = \frac{d^d}{(d-1)^{(d+1)}}$。本文的主要结果之一如下：我们证明，对于任意 $d > 1$，以及 $G(n, d/n)$ 的典型实例，逸度为 $\lambda < \lambda_c(d)$ 的硬核模型上的格劳伯动力学，其混合时间为 $n^{1+\frac{C}{\text{对数对数}\,n}} = n^{1+o(1)}$，其中 $C > 0$ 是仅依赖于 λ 和 d 的某个绝对常数。

我们猜想，关于混合时间的界是紧的。此外，基于[CE15], 中的直觉以及 [BKZZ13], 中的统计物理学预测，我们猜想逸度 λ 的界 $\lambda_c(d)$也是紧的，具体而言：对于 $\lambda > \lambda_c(d)$，不能排除存在一个区域，在该区域内可以进行高效的近似采样；然而，其近似保证弱于我们在这里得到的结果。

ˇ 我们的结果改进了近期在 [BGGS22] 中针对相同分布（即 $G(n, d/n)$上的硬核模型）提出的优雅抽样算法。与我们在此考察的算法类似，该算法依赖于马尔可夫链蒙特卡罗方法。作者利用谱独立性[ALO20、CLV21] 证明，对于任意 $\lambda < \lambda_c(d)$以及任意小的常数 $\theta > 0$，其底层马尔可夫链的混合时间呈 $O\left(n^{1+\theta}\right)$ 。 [BGGˇS22] 中的算法所依据的思想让人联想到 [Moi19] 中为近似计数而引入的变量标记技术，该技术随后又在 [FGYZ21a、FHY21、JPV21a、GGGY21]中得到进一步应用。在本文中，我们采用一种不同且更直接的方法，直接分析格劳伯动力学。

ˇ 值得注意的是，这两种算法——即本文中的算法和 [BGGS22], 中的算法——允许的逸度 λ范围相同。另一方面，我们在此研究的算法是（简单得多的）格劳伯动力学，而我们在此得到的运行时间保证在渐近意义上更优。

ˇ 该领域以往的研究，即使是在 [BGGS22], 之前，为了证明其结果并避免使用最大度，也一直关注 $G(n, d/n)$的各种参数，例如期望度 ˇ[EHSV18], 或联结常数 [SSSY17]。事实证明，这些参数彼此并没有太大差异。本文采用分支值这一概念，它与先前的参数有一定关联。

分支值的概念及其在建立谱独立性方面的应用，最初由ˇ [BGGS22]提出。不幸的是，其中的结果不足以推出格劳伯动力学的快速混合。其用于谱独立性（及其他方面）的分析工具似乎不太能够妥善处理度无界的顶点。本文在谱独立性方面得到了比ˇ [BGGS22] 更强的结果，具体而言，我们的结果更具一般性，也更精确。尤其是，我们的分析能够处理任意度的顶点，同时采用更精细的矩阵范数来建立谱独立性，这让人联想到 [Eft22]中引入的那些范数。此外，为了建立快速混合结果，我们还利用了 [CFYZ22]中的结果，从而能够处理图中度无界的情形。

2. 结果

考虑固定图 $G = (V, E)$，其有 n 个顶点。给定参数 $\lambda > 0$，我们称其为逸度，并将硬核模型 $\mu = \mu_{G,\lambda}$ 定义为图 G 的独立集上的一个分布。具体而言，每个独立集 σ 都被赋予概率测度 $\mu(\sigma)$，定义如下：

$$\mu(\sigma) \propto \lambda^{|\sigma|} \ , \tag{1}$$

其中， $|\sigma|$ 等于独立集 σ 的大小。

我们用 $\{\pm 1\}^V$ 表示硬核模型的构型，即 G 的独立集。特别地，赋值 $+1$ 表示该顶点属于独立集，而赋值 -1 则表示相反情况。我们常使用物理学术语，将赋值为 $+1$ 的顶点称为“占据”，而将赋值为 -1 的顶点称为“未占据”。

我们使用离散时间的（单点）格劳伯动力学，从上述分布中近似采样。格劳伯动力学是一条马尔可夫链，其状态空间为分布μ的支撑集。通常，我们假设该链从任意构型 $X_0 \in \{\pm 1\}^V$ 开始。对于 $t \geq 0$，从状态 X_t 转移到 X_{t+1} 按照以下步骤进行：

(1) 均匀随机地选择一个顶点 v。(2) 对每个不同于 v 的顶点 w，设置 $X_{t+1}(w) = X_t(w)$。
(3) 根据 μ 在 v 处的边缘分布设置 $X_{t+1}(v)$，条件是 v 的邻居具有由 X_{t+1} 指定的构型。

众所周知，当马尔可夫链满足一组称为遍历性的技术条件时，它会收敛到唯一的平稳分布。对于我们在此考虑的情形，格劳伯动力学显然具有遍历性，而平稳分布就是相应的硬核模型 μ。

令 P为一个遍历马尔可夫链 $\{X_t\}$ 的转移矩阵，该马尔可夫链具有有限状态空间 Ω和平衡分布 μ。对于 $t \geq 0$和 $\sigma \in \Omega$，令 $P^t(\sigma, \cdot)$表示初始状态满足

链 $X_0 = \sigma$的分布。马尔可夫链 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 的混合时间定义为

$$T_{\text{mix}} = \max_{\sigma\in\Omega} \min\left\{t > 0 \mid \|P^t(\sigma,\cdot) - \mu\|_{\text{TV}} \leq \frac{1}{2\text{e}}\right\} .$$

我们关注的是当底层图为 $G(n, d/n)$ 的典型实例时，硬核模型的格劳伯动力学混合时间，其中期望度 $d > 0$ 假设为一个固定数。

2.1. 硬核模型的混合时间。对于 $z > 1$，我们令函数 $\lambda_c(z) = \frac{z^z}{(z-1)^{(z+1)}}$。[Kel85]的一个众所周知的结果表明，在 k 元树上，硬核模型的唯一性区域满足$k \geq 2$，且对任意满足以下条件的 λ 均成立：

$$\lambda < \lambda_c(k) .$$

以下定理是本文的主要结果。

定理 2.1. 对于固定的 $d > 1$ 和任意 $\lambda < \lambda_c(d)$，存在一个常数 $C > 0$，使得以下结论成立：设 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 是图 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$ 上逸度为 λ 的硬核模型。对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以概率 $1 - o(1)$，$\mu_{\boldsymbol{G}}$ 上的格劳伯动力学具有如下混合时间

$$T_{\text{mix}} \leq n^{\left(1+\frac{C}{\log\log n}\right)} .$$

2.2. 单体-二聚体模型的扩展。利用我们为证明定理 2.1 所开发的技术，我们得到了图 $G(n, d/n)$ 上单体-二聚体模型的格劳伯动力学混合时间界。

给定固定图 $G = (V, E)$ 和参数 $\lambda > 0$（我们称之为边权重），我们将单体-二聚体模型 $\mu = \mu_{G,\lambda}$ 定义为图 G 的匹配上的一个分布，使得每个匹配 σ 被赋予概率测度 $\mu(\sigma)$，其定义如下：

$$\mu(\sigma) \propto \lambda^{|\sigma|} , \tag{2}$$

其中 $|\sigma|$ 等于匹配 σ中的边数。

注意，硬核模型考虑的是 G顶点上的构型，而单体-二聚体模型考虑的是边上的构型。与独立集类似，我们使用 $\{\pm 1\}^E$ 来编码 G的匹配。具体而言，在边 e 上的赋值 $+1$表示该边属于匹配，而 -1则表示相反。

对于单体-二聚体模型，格劳伯动力学 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 的定义可以自然地推广。也就是说，假设马尔可夫链从任意构型 $X_0 \in]\pm 1^E$开始。对于 $t \geq 0$，从状态 X_t 转移到 X_{t+1} 的过程如下：

(1) 均匀随机地选择一条边 e。(2) 对于每条不同于 e的边 f，设定 $X_{t+1}(f) = X_t(f)$。(3) 根据 μ 在 e处的边缘分布设定 $X_{t+1}(e)$，条件是 e 的邻居具有由 X_{t+1}指定的构型。

我们考虑单体-二聚体分布的情形，其中底层图是$G(n, d/n)$的一个实例。我们证明以下结果。

定理 2.2。对于固定的 $d > 1$ 和任意的 $\lambda > 0$，存在一个常数 $C > 0$，使得以下结论成立：设 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 为图 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$上边权重为 λ 的单体-二聚体模型。对于 $\boldsymbol{G}$的实例，以概率$1 - o(1)$，$\mu_{\boldsymbol{G}}$ 上的格劳伯动力学具有如下混合时间

$$T_{\text{mix}} \leq n^{\left(1+C\sqrt{\frac{\log\log n}{\log n}}\right)} .$$

定理 2.2 的证明见第 8 节。

对于一般图上的单体-二聚体模型，已知的最佳结果是 Jerrum-Sinclair 链 [JS89]，的 $\tilde{O}(n^2 m)$ 混合时间，其中 $m = |E|$ 表示边数。对于最大度有界的图

maximum degree $\Delta = O(1)$，谱独立性技术证明了格劳伯动力学 [CLV21] 的 $O(n\log n)$ 混合时间。然而，由于随机图的最大度通常无界，该结果无法直接应用于随机图 $G(n, d/n)$。对于 $G(n, d/n)$ 上的单体-二聚体模型， [BGG˙S22] 给出了运行时间为 $n^{1+\theta}$ 的抽样算法，其中 $\theta > 0$ 是任意小的常数； [JPV21b] 还在特殊情形 $\lambda = 1$ 下证明了格劳伯动力学的 $n^{2+o(1)}$ 混合时间。我们在定理 2.2 中的结果证明了格劳伯动力学的 $n^{1+o(1)}$ 混合时间，从而改进了此前关于常数为 λ 的随机图 $G(n, d/n)$ 上单体-二聚体模型的所有结果。

我们指出，对于单体-二聚体模型，我们实际上证明了在所有满足 $\Delta \log^2 \Delta = o(\log^2 n)$ 的图上，格劳伯动力学的 $n^{1+o(1)}$ 混合时间。更一般的结果见定理 8.1。

请注意，除第 8 节外，本文其余部分都专注于硬核模型，即证明定理 2.1。

记号。假设我们给定了图 $G = (V, E)$ 上的吉布斯分布 μ。我们将 μ 的支撑集记为 Ω。

假设 Ω 是 G 的顶点上的构型集合。那么，对于任意 $\Lambda \subseteq V$ 和任意 $\tau \in \{\pm 1\}^{\Lambda}$，我们令 $\mu^{\Lambda,\tau}$（如果 Λ 根据上下文是明确的，则记为 μ^{τ}）表示在构型于 Λ 上为 τ 的条件下的分布 μ。或者，我们使用记号 $\mu(\cdot \mid (\Lambda, \tau))$ 表示同一个条件分布。我们将 $\mu^{\Lambda,\tau}$ 的支撑集记为 $\Omega^{\tau} \subseteq \Omega$。如果 Ω^{τ} 非空，则称 τ 是可行的。

对于任意子集 $S \subseteq V$，令 μ_S 表示 μ 在 S 上的边缘分布，而令 Ω_S 表示 μ_S 的支撑集。自然地，我们定义条件边缘分布。也就是说，对于 $\Lambda \subseteq V \setminus S$ 和 $\sigma \in \{\pm 1\}^{\Lambda}$，令 $\mu^{\Lambda,\sigma}_S$（如果上下文已明确 Λ，也可记作 μ^{σ}_S）表示在 Λ 上的构型为 σ 的条件下， S 上的边缘分布。或者，我们用 $\mu_S(\cdot \mid (\Lambda, \sigma))$ 表示 μ^{σ}_S。令 Ω^{σ}_S 表示 μ^{σ}_S 的支撑集。

上述关于 G 顶点上构型的所有记号，都可以自然地推广到图 G 的边上构型。由于推广后的记号与上述记号非常相似，这里不再赘述。

2.3. 硬核模型——快速混合的熵张量化。我们通过利用熵的近似张量化这一概念来证明定理 2.1。

设 μ 是一个支撑集为 $\Omega \subseteq \{\pm 1\}^V$ 的分布。对于任意函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，记 $\mu(f) = \sum_{x \in \Omega} \mu(x) f(x)$，即 $\mu(f)$ 是相对于 μ 的 f 的期望值。定义 f 关于 μ 的熵为

$$\mathrm{Ent}_{\mu}(f) = \mu\left(f \log \frac{f}{\mu(f)}\right) \ ,$$

其中约定 $0 \log 0 = 0$。

设 $\tau \in \Omega_{V \setminus S}$，其中 $S \subset V$。定义函数 $f_{\tau}\colon \Omega^{\tau}_S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，令对于所有 $\sigma \in \Omega^{\tau}_S$ *， $f_{\tau}(\sigma) = f(\tau \cup \sigma)$。令 $\mathrm{Ent}^{\tau}_S(f_{\tau})$ 表示 f_{τ} 关于条件分布 μ^{τ}_S 的熵。此外，记

$$\mu(\mathrm{Ent}_S(f)) = \sum_{\tau \in \Omega_{V \setminus S}} \mu_{V \setminus S}(\tau) \mathrm{Ent}^{\tau}_S(f_{\tau}) \ ,$$

即， $\mu(\mathrm{Ent}_S(f))$ 是关于测度 $\mu_{V \setminus S}(\cdot)$ 的熵 $\mathrm{Ent}^{\tau}_S(f_{\tau})$ 的平均值。当 $S = \{v\}$ 时，即集合 S 是一个单元素集合，我们将 $\mu(\mathrm{Ent}_{\{v\}}(f))$ 简写为 $\mu(\mathrm{Ent}_v(f))$。

定义 2.3（熵的近似张量化）。支撑集为 $\Omega \subseteq \{\pm 1\}^V$ 的分布 μ 满足常数为 $C > 0$ 的熵的近似张量化，当且仅当对所有 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，都有

$$\mathrm{Ent}_{\mu}(f) \leq C \cdot \sum_{v \in V} \mu\left(\mathrm{Ent}_v(f)\right) \ .$$

*稍微滥用一下记号，我们用 $\tau \cup \sigma$ 表示在 S 处与 τ 一致、在 $V \setminus S$ 处与 σ 一致的构型。

可以借助平衡分布 μ的熵的近似张量化来建立格劳伯动力学混合时间的界。具体而言，若 μ 满足常数为 C的熵的近似张量化，那么每次格劳伯动力学转移之后，当前分布与平稳分布之间的Kullback–Leibler散度†至少会按因子（$1-C/n$）衰减，其中 $n=|V|$ 是变量的数量。

就格劳伯动力学的混合时间而言，如果分布 μ 满足参数为 C 的熵的近似张量化，那么以下众所周知的关系成立（例如，参见 [CLV21，事实 3.5]）：

$$T_{\mathrm{mix}} \le \left\lceil Cn\left(\log\log\frac{1}{\mu_{\min}}+\log(2)+2\right)\right\rceil, \qquad \text{where } \mu_{\min}=\min_{x\in\Omega}\mu(x)\ . \tag{3}$$

由上述内容可知，定理 2.1 是以下结果的一个推论。

定理 2.4（硬核模型张量化）。对于任意固定的 $d>1$和任意 $\lambda<\lambda_c(d)$，存在一个常数$A>0$，它仅取决于 d 和 λ，使得以下结论成立：

设 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 为图 $\boldsymbol{G}\sim G(n,d/n)$ 上逸度为 λ 的硬核模型。对于 $\boldsymbol{G}$的实例，以概率 $1-o(1)$，$\mu_{\boldsymbol{G}}$满足参数为 $n^{A/\text{双对数}\,n}$的熵的近似张量化。

定理 2.1 的证明。定理 2.1 可由定理 2.4 和 (3) 得出。

具体而言，将定理 2.4 的结果代入 (3)，可得：对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以概率 $1-o(1)$ 有

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{mix}} &\le n^{1+\frac{A}{\log\log n}}\left(\log\log\frac{1}{\mu_{\min}}+\log(2)+2\right)\\ &\le n^{1+\frac{A}{\log\log n}}\left(\log\log\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)^n+\log(2)+2\right)\\ &= n^{1+\frac{A}{\log\log n}}\left(\log n+\log\log(1+\lambda+\lambda^{-1})\right)\le n^{1+\frac{2A}{\log\log n}}\ . \end{aligned}$$

对于第二种推导，我们注意到，对于硬核分布 $\mu=\mu_{\boldsymbol{G}}$，$\mu_{\min}$ 至少为 $\min\{1,\lambda^n\}/(1+\lambda)^n$，这意味着 $\mu_{\min}\ge(1+\lambda+\lambda^{-1})^{-n}$。

注意，通过令 $C=2A$，即可由上述结果推出定理 2.1。 □

3. 我们的方法与贡献

本节介绍我们为证明结果所采用的方法。我们重点关注硬核模型。

3.1. 熵的张量化与块分解。我们利用近期在[CP20]中提出的熵的块分解这一概念，证明熵的张量化，即定理 2.4 中所述的结果。具体而言，我们基于 [CLV21] 中提出的框架，建立熵的张量化与熵的块分解之间的联系。

[CLV21] 中的框架依赖于底层图的最大度有界这一假设。否则，它所导出的结果并不强有力。在本文的设定中，直接套用这种方法无法给出张量化常数的理想界，因为 $G(n,d/n)$ 的典型实例具有无界的最大度。为此，我们采用了 [CFYZ22]中的技术。

给定图 $G=(V,E)$ 和整数 $\ell\ge 0$，我们令 $\binom{V}{\ell}$ 表示所有满足 $|S|=\ell$ 的子集 $S\subseteq V$。

†对于离散空间 $\mathcal{X}$上的离散概率分布 P 和 Q，Kullback–Leibler散度定义为$D_{\mathrm{KL}}(P||Q)=\sum_{x\in\mathcal{X}}P(x)\log\frac{P(x)}{Q(x)}$。

定义 3.1（ℓ-块熵分解）。设 μ 是 $\{\pm 1\}^V$ 上的一个分布，$1 \le \ell \le |V| = n$ 是一个整数。若对所有 f，μ 都满足参数为 C 的 ℓ 块熵分解，则有：$\Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}$

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \le \frac{C}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S \in \binom{V}{\ell}} \mu\left(\mathrm{Ent}_S(f)\right) \ . \tag{4}$$

ℓ 熵的块分解这一概念是熵的近似张量化的推广。具体而言，满足参数为 C 的 $\ell = 1$ 熵的块分解的分布，也满足参数为 C/n 的熵的近似张量化。

对于 $G(n, d/n)$ 上的硬核模型，我们证明了以下定理，这是本文的主要技术成果之一。

定理 3.2。对于固定的 $d > 1$ 以及任意 $0 < \lambda < \lambda_c(d)$，考虑 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$，并令 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 为逸度为 λ 的 $\boldsymbol{G}$ 上的硬核模型。对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以 $1 - o(1)$ 的概率，以下结论成立：存在一个常数 $K = K(d, \lambda) > 0$，使得

$$\frac{1}{\alpha} = K \frac{\log n}{\log \log n} \ ,$$

对于任意 $1/\alpha \le \ell < n$，$\mu_{\boldsymbol{G}}$，满足参数为 $C = (\frac{en}{\ell})^{1+1/\alpha}$ 的 ℓ-块熵分解。

下面概述我们如何使用 ℓ-块因子分解，尤其是定理 3.2，来建立定理 2.4 中的熵张量化结果。

注意，定理 3.2 本质上意味着：假设 $G = (V, E)$ 是 $G(n, d/n)$ 的一个典型实例。那么，逸度为 $\lambda < \lambda_c(d)$ 的 G 上的硬核模型 μ 满足：对于任意 $f: \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ 我们有

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \le \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha} \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S \in \binom{V}{\ell}} \mu\left(\mathrm{Ent}_S(f)\right) \ , \tag{5}$$

其中 $\ell = \lceil \theta n \rceil$ 和 $\theta \in (0, 1)$ 是一个满足 $\lceil \theta n \rceil \ge 1/\alpha = \Omega(\log\ n/\log\log\ n)$ 的常数。

令 $G[S]$ 为由集合 S 中的顶点诱导出的 G 的子图。在式 (5) 的右侧，熵是相对于条件分布 μ_S^τ 计算的；该分布对应于在 $V \setminus S$ 上满足边界条件 τ 时，子图 $G[S]$ 上的硬核模型。

我们用 $C(S)$ 表示 $G[S]$ 中连通分量的集合。稍微滥用一下记号，我们也用 $U \in C(S)$ 表示分量 U 中顶点的集合。不难看出，对于 $\tau \in \Omega_{V \setminus S}$，硬核模型 μ_S^τ 可分解为各连通分量 $U \in C(S)$ 上吉布斯边缘分布的乘积分布，即

$$\mu_S^\tau = \bigotimes_{U \in C(S)} \mu_U^\tau \ .$$

我们使用以下关于乘积分布上熵分解的结果 [Ces01、CMT15、CLV21]。

引理 3.3（[CLV21，引理 4.1]）。对于任意 $S \subseteq V$、任意 $\tau \in \Omega_{V \setminus S}$、任意 $f: \Omega_S^\tau \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，

$$\mathrm{Ent}_S^\tau(f) \le \sum_{U \in C(S)} \mu_S^\tau[\mathrm{Ent}_U(f)] \ .$$

结合引理 3.3 和 (5)，我们得到

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \le \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha} \mathbb{E}_{\boldsymbol{S} \sim \binom{V}{\ell}} \left[\sum_{U \in C(\boldsymbol{S})} \mu\left(\mathrm{Ent}_U(f)\right)\right] \ , \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{S} \sim \binom{V}{\ell}$ 表示 $\boldsymbol{S}$ 是从 $\binom{V}{\ell}$ 中均匀随机选取的元素。

上述步骤使我们能够将近似张量化的证明归结为证明 $C(\boldsymbol{S})$ 中各连通分量的情形。我们选择参数 $\ell = \lceil \theta n \rceil$，使得 $C(\boldsymbol{S})$ 中的连通分量通常都较小。

鉴于上述内容，只需证明两个结果即可得到定理 2.4：第一个结果是，为每个 $k > 0$，推导 k 在 $C(\boldsymbol{S})$ 中各连通分量的熵的近似张量化常数的一个界。第二个结果是，为 $\boldsymbol{S} \sim \binom{V}{\ell}$，推导 $C(\boldsymbol{S})$ 中连通分量大小的尾界。

引理 3.4。对于任意固定的 $d > 0$，对于任意 $\lambda < \lambda_c(d)$，考虑 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$。对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以概率 $1 - o(1)$，以下结论成立：

对于满足 $|H| = k$ 的任意 $k \geq 1$ 和 $H \subseteq V$，在 $\boldsymbol{G}[H]$ 上、逸度为 λ 的硬核模型 μ_H 满足熵的近似张量化，其常数为

$$\mathrm{AT}(k) \leq \min\left\{2k^2\left(1+\lambda+1/\lambda\right)^{2k+2},\, 3\log\left(1+\lambda+1/\lambda\right)\cdot\left((1+\lambda)k\right)^{2+2\eta}\right\} \quad , \tag{7}$$

其中 $\eta = B(\log\, n)^{1/r}$，而 $B = B(d, \lambda)$ 和 $r = r(d) \in (1, 2)$ 是依赖于 d、λ 的常数。

关于 $C(\boldsymbol{S})$ 中连通分量的大小，我们使用以下来自 [BGG˙S22] 的结果。

引理 3.5（[BGG˙S22]）。设 $d > 1$ 为常数。存在常数 $L = L(d)$，使得对 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$，以下结论以至少 $1 - o(1)$ 的概率成立。设 $\boldsymbol{S} \sim \binom{V}{\ell}$，并令 $C_v \subseteq \boldsymbol{S}$ 为在 $\boldsymbol{G}[\boldsymbol{S}]$ 中与顶点 v 属于同一连通分量的顶点集合。对于任意整数 $k \geq \log n$，有

$$\Pr[|C_v| = k] \leq (2\mathrm{e})^{\mathrm{e}Lk}\left(\frac{2\ell}{n}\right)^k \leq (2\mathrm{e})^{\mathrm{e}Lk}\,(2\theta)^k \quad .$$

定理 2.4 可由定理 3.2 与引理 3.5 和引理 3.4 合并得出。定理 2.4 的完整证明见第 5 节。

3.2. 具有分支值的谱独立性。我们分析中的一个重要环节，是为 $G(n, d/n)$ 的典型实例上的硬核模型建立谱独立性界。

对于最坏情况的图实例（即非随机实例），通常我们会建立吉布斯分布参数的一个区域内的谱独立性，该区域用底层图的最大度 Δ表示。至于 $G(n, d/n)$，最大度似乎并不是这个问题中合适的图参数。

这里，我们采用分支值这一概念。分支值的概念及其在建立谱独立性中的应用，最早由 [BGGS22]提出。不幸的是，其中的结果不足以推出格劳伯动力学的快速混合。这里，我们在谱独立性方面推导出比 [BGGS22] 更强的结果，具体而言，这些结果更一般也更精确。在我们的分析中，我们能够处理任意度的顶点；同时，我们使用一种更精细的矩阵范数来建立谱独立性，这让人联想到 [Eft22]中引入的范数。此外，我们利用 [CFYZ22] 中的结果处理图的无界度，从而建立快速混合结果。

在进一步讨论细节之前，我们先介绍一些基本概念。首先介绍成对影响矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ \tau}_{G}$ 以及相关概念——谱独立性。这些概念最早由 [ALO20]引入。本文采用 [FGYZ21b]中引入的绝对版本。

考虑一个固定图 $G = (V, E)$。假设给定构型空间 $\{\pm 1\}^V$上的一个吉布斯分布 μ。我们如下定义成对影响矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ \tau}_{G}$：对于一个顶点集合 $\Lambda \subset V$ 以及 Λ处的一个构型 τ，矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ \tau}_{G}$ 以 $V \setminus \Lambda$中的顶点为索引；对于任意两个彼此不同的顶点 v、$w \in V \setminus \Lambda$，如果给定 τ时，w可以取两个值 ± 1，则有

$$\mathcal{I}^{\Lambda,\tau}_{G}(w, u) = ||\mu_u(\cdot \mid (\Lambda, \tau), (\{w\}, +)) - \mu_u(\cdot \mid (\Lambda, \tau), (\{w\}, -))||_{\mathrm{TV}} \quad ; \tag{8}$$

如果给定 τ 后，w在 ± 1 中只能取一个值，那么我们有 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ \tau}_{G}(w, u) = 0$。此外，对于所有 $w \in V \setminus \Lambda$，我们有 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ \tau}_{G}(w, w) = 0$。也就是说，$\mathcal{I}^{\Lambda,\ \tau}_{G}$的对角线始终为零。

回想一下，上文中，$\mu_u(\cdot \mid (\Lambda, \tau), (\{w\}, 1))$ 是顶点 u 的吉布斯边缘分布，条件是 Λ 处的构型为 τ，且 w 处的构型为 1。对于 $\mu_u(\cdot \mid (\Lambda, \tau), (\{w\}, -1))$，也有类似结论。

定义 3.6（谱独立性）。对于实数 $\eta > 0$，图 $G = (V, E)$ 上的吉布斯分布 μ_G 是 η-谱独立的，如果对于大小为 k 的任意 $0 \le k \le |V| - 2$, $\Lambda \subseteq V$ 以及 $\tau \in \{\pm 1\}^{\Lambda}$，$\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}$ 的谱半径满足 $\rho(\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}) \le \eta$。

我们利用矩阵范数来界定 $\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}$ 的谱半径。具体而言，我们使用 $\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}$ 的以下范数

$$\left|\left| D^{-1} \cdot \mathcal{I}_G^{\Lambda,\tau} \cdot D \right|\right|_{\infty}, \tag{9}$$

其中 D 是以 $V \setminus \Lambda$ 中的顶点为索引的对角矩阵，满足

$$D(u,u) = \begin{cases} \deg_G(v)^{1/\chi} & \text{if } \deg_G(v) \ge 1 \\ 1 & \text{if } \deg_G(v) = 0 \end{cases}, \tag{10}$$

其中参数 χ 将在后文给出。

设 $G = (V, E)$ 为一个固定图。对于任意顶点 $v \in V$ 和整数 $\ell \ge 0$，我们用 $N_{v,\ell}$ 表示图 G 中以 v 为起点、包含 $\ell+1$ 个顶点的简单路径数量。根据定义，有 $N_{v,0} = 1$。

定义 3.7（d-分支值）。设 $d \ge 1$ 为一个实数，$G = (V, E)$为一个图。对于任意顶点$v \in V$，d-分支值 S_v 定义为 $\sum_{\ell \ge 0} N_{v,\ \ell}/d^{\ell}$。

我们建立了谱独立性结果，利用了与以下概念类似的 d-分支值概念。

定理 3.8。设 $d > 1$ 为一个实数，$G = (V, E)$为一个图。设 μ_G 为逸度为 $\lambda < \lambda_c(d)$ 的硬核模型。对于任意满足以下条件的 $\alpha > 0$：对所有 $v \in V$，d-分支值 $S_v \le \alpha$，以下结论成立：μ_G 是 η-谱独立的，且

$$\eta \le C_0 \cdot \alpha^{1/r},$$

其中 $C_0 = C_0(d, \lambda)$，而量 $r = r(d) \in (1, 2)$ 是常数。

定理 3.8 是我们得到的一个更强结果（即定理 6.2）的特例。此外，请注意，定理 3.8 不一定是关于 $G(n, d/n)$ 的。事实上，为了将上述结果用于 $G(n, d/n)$，我们需要给出其分支值的界。为此，我们使用以下来自 [BGGS22] 的结果。

引理 3.9（[BGG˘S22，引理 9]）。设 $d \ge 1$。对于任意固定的 $d' > d$，在 $1 - o(1)$ 的概率下，对$\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$，$G$ 中每个顶点的 d'-分支因子至多为 $\log n$。

值得一提的是，此处的引理 3.9 是 [BGGS22], 中引理 9 的一个较弱版本，也就是说，我们实际上并不需要该结果的全部强度。

在结束这一简短的谱独立性导论部分时，我们要指出，对于我们的结果，我们采用的是针对硬核模型的所谓完全谱独立性，该概念由 [CFYZ21, CFYZ22] 引入。与（标准）谱独立性相比，这是一个更一般的概念。进一步讨论请参见第 4.2 节。

4. 基于稳定性与谱独立性的熵因子分解

E

本节将证明定理 3.2 中所述的硬核模型在 $G(n, d/n)$ 上的 ℓ-块熵分解。为此，我们采用 [CFYZ22] 中的技术。这意味着，我们通过边缘分布比的稳定性以及所谓的完全谱独立性来研究 $G(n, d/n)$ 上的硬核模型。

4.1. 吉布斯边缘分布比与稳定性。考虑固定图 $G=(V,E)$ 及其上的吉布斯分布μ。对于顶点 $w\in V$、区域 $K\subseteq V\setminus\{w\}$ 和 $\tau\in\{\pm1\}^K$，我们考虑 w 处的边缘分布比，记作 $R^{K,\tau}(w)$，使得

$$R_G^{K,\tau}(w)=\frac{\mu_w(+1\mid K,\tau)}{\mu_w(-1\mid K,\tau)}\ . \tag{11}$$

回顾一下，$\mu_w(\cdot\mid K,\tau)$ 表示吉布斯分布 $\mu(\cdot\mid K,\tau)$ 在顶点 w 处的边缘分布。另请注意，上述结论允许 $R^{K,\tau}(w)=\infty$，例如，当 $\mu_w(-1\mid K,\tau)=0$且 $\mu_w(+1\mid K,\tau)\neq0$时。

定义 4.1（边缘稳定性）。设 $\zeta>0$ 为实数。若对于任意 $w\in V$、任意 $\Lambda\subset V$、在 Λ 处的任意构型 σ 以及任意 $S\subseteq\Lambda$，吉布斯分布 μ_G 在 $G=(V,E)$ 上满足

$$R_G^{\Lambda,\tau}(w)\le\zeta\qquad\textit{and}\qquad R_G^{\Lambda,\tau}(w)\le\zeta\cdot R_G^{S,\tau_S}(w)\ . \tag{12}$$

关于 $G(n,d/n)$ 处硬核边缘分布的稳定性，我们证明如下结果。

定理 4.2（硬核模型的稳定性）。对于任意固定的 $d>0$，对于任意 $\lambda<\lambda_c(d)$，考虑 $\boldsymbol{G}\sim G(n,d/n)$，并令 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 上逸度为 λ 的硬核模型。对于实例 $\boldsymbol{G}$，$\mu_{\boldsymbol{G}}$ 以概率 $1-o(1)$ 是 $2(1+\lambda)^{2\log n\log\log n}$-边缘稳定的。

证明。令 $\zeta=2(1+\lambda)^{2\log n\log\log n}$。此外，令 $N(w)$ 为 w 的邻居集合。

对于任意 $\Lambda\subseteq V$ 和任意 $\tau\in\{\pm\}^\Lambda$，我们有 $\mu_w(+1\mid\Lambda,\tau)\le\frac{\lambda}{1+\lambda}$。可以看出，当 $N(w)\subseteq\Lambda$ 且对于每个 $u\in N(w)$，都有 $\tau(w)=-1$ 时，等式成立。注意到，$R^{\Lambda,\tau}_{\boldsymbol{G}}(w)$ 随吉布斯边缘分布 $\mu_w(+1\mid\Lambda,\tau)$ 的值递增，因此显然有

$$\Pr\left[R^{\Lambda,\tau}_{\boldsymbol{G}}(w)\le\lambda<\zeta\quad\forall\Lambda\subseteq V\right]=1\ . \tag{13}$$

剩下要证明的是

$$\Pr\left[R^{\Lambda,\tau}_{\boldsymbol{G}}(w)\le\zeta\cdot R^{S,\tau_S}_{\boldsymbol{G}}(w)\quad\forall\Lambda\subset V,\,\forall S\subset\Lambda\right]=1-o(1)\ . \tag{14}$$

根据 (13)，只需证明以下结论即可推出 (14)：

$$\Pr\left[R^{S,\tau_S}_{\boldsymbol{G}}>2\lambda\,(1+\lambda)^{-2\frac{\log n}{\log\log n}}\quad\forall\Lambda\subset V,\,\forall S\subset\Lambda\right]=1-o(1)\ . \tag{15}$$

若存在 $u\in N(w)$ 使得 $\tau(u)=+1$，则 $R^{\Lambda,\tau}_{\boldsymbol{G}}(w)=0$，并且 (14) 显然成立，因为 $R^{S,\tau_S}_{\boldsymbol{G}}(w)\ge0$。我们重点考虑所有顶点 $u\in N(w)\cap\Lambda$ 均满足 $\tau(u)=-1$ 的情形。

令 $\mathcal{E}$ 表示 $N(w)$ 中没有任何顶点被占据这一事件，而令 γ_S 表示在吉布斯分布 $\mu(\cdot\mid S,\tau_S)$ 下事件 $\mathcal{E}$ 的概率。众所周知，可以证明

$$R^{S,\tau_S}_{\boldsymbol{G}}=\frac{\frac{\lambda}{1+\lambda}\gamma_S}{1-\frac{\lambda}{1+\lambda}\gamma_S}\ .$$

注意到函数 $f(x)=\frac{x}{1-x}$ 在 $x\in(0,1)$ 上递增，而 $\gamma_S\ge(\frac{1}{1+\lambda})^{\deg_{\boldsymbol{G}}(w)}$，因此我们有

$$R^{S,\tau_S}_{\boldsymbol{G}}\ge\frac{\frac{\lambda}{1+\lambda}(\frac{1}{1+\lambda})^{\deg_{\boldsymbol{G}}(w)}}{1-\frac{\lambda}{1+\lambda}(\frac{1}{1+\lambda})^{\deg_{\boldsymbol{G}}(w)}}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^{\deg_{\boldsymbol{G}}(w)+1}-\lambda}\ .$$

由上可立即得到 (15)。具体而言，由上述不等式以及引理 B.1 可知，对于任意固定数 $\epsilon>0$，$\boldsymbol{G}$ 中的最大度以概率 $1-o(1)$ 小于 $(1+\epsilon)\log n\log\log n$。

定理 4.2 的证明至此完成。 □

4.2.（完整）谱独立性。成对影响矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ _G{}^{\tau}}$ 和谱独立性这两个概念，正如我们在第 3.2 节中引入的那样，通常用于建立格劳伯动力学谱隙的界，进而推导马尔可夫链混合时间的界。

[CLV21], 的作者进一步利用谱独立性，获得了熵的近似张量化。遗憾的是，直接应用他们的技术不足以证明我们的张量化结果，主要原因是我们在 $G(n,d/n)$ 中通常会遇到无界的度。

在这项工作中，我们结合了 [CLV21] 的思想与相关概念——完全谱独立性，以建立定理 3.2 中关于熵的分解结果。具体而言，我们利用完全谱独立性与熵的块分解之间的联系；这一联系由 [CFYZ22] 建立（详见下一节）。

由于成对影响矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda,\ _G{}^{\tau}}$ 和谱独立性的概念非常重要，因此我们再回顾一遍，尽管它们已在第 3.2 节中定义。考虑一个固定图 $G=(V,E)$。假设给定了构型空间 $\{\pm1\}^V$ 上的一个吉布斯分布 μ。

我们将成对影响矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}$ 定义如下：对于顶点集合 $\Lambda\subset V$ 以及在 Λ处的构型τ，矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}$ 以 $V\setminus\Lambda$中的顶点为索引。对于任意两个互不相同的顶点 v和 $w\in V\setminus\Lambda$，如果在给定 τ的情况下，w 可以取值 ±1 中的两个值，则有

$$\mathcal{I}_G^{\Lambda,\tau}(w,u)=||\mu_u(\cdot\mid(\Lambda,\tau),(\{w\},+))-\mu_u(\cdot\mid(\Lambda,\tau),(\{w\},-))||_{\mathrm{TV}}\ ; \tag{16}$$

如果在给定 τ的情况下，w 在 ±1 中只能取一个值，则有 $\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}(w,u)=0$。此外，对于所有 $w\in V\setminus\Lambda$，我们有 $\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}(w,w)=0$。也就是说，$\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau}$ 的对角线始终为零。

回顾上文，$\mu_u(\cdot\mid(\Lambda,\tau),(\{w\},1))$是顶点 u的吉布斯边缘分布，条件是 Λ处的构型为 τ，且 w处的构型为 1。对于 $\mu_u(\cdot\mid(\Lambda,\tau),(\{w\},-1))$，也有类似的结论。

定义4.3（谱独立性）。对于实数 $\eta>0$，图 $G=(V,E)$ 上的吉布斯分布 μ_G 是 η-谱独立的，如果对于任意大小为 k 的 $0\le k\le|V|-2$, $\Lambda\subseteq V$ 以及 $\tau\in\{\pm1\}^{\Lambda}$，$\mathcal{I}^{\Lambda}$的谱半径$_{G}{}^{\tau}$ 满足 $\rho(\mathcal{I}^{\Lambda}_{\cdot,G}{}^{\tau})\le\eta$。

接下来我们介绍完全谱独立性。首先，考虑磁化操作的概念。

定义4.4（磁化操作）。设 μ_G 是图 $G=(V,E)$ 上的吉布斯分布。对于任意局部场 $\vec{\phi}\in\mathbb{R}^V_{>0}$，磁化分布 $\vec{\phi}*\mu$ 满足

$$\forall\sigma\in\{\pm1\}^V,\quad(\vec{\phi}*\mu)(\sigma)\propto\mu(\sigma)\prod_{v\in V:\sigma_v=+1}\phi_v\ .$$

$\vec{}$ $\vec{}$我们用 $\phi*\mu$ 表示 $\phi*\mu$，其中 ϕ 是取值为 ϕ的常数向量。

假设 μ 是图 G上逸度为 λ的硬核模型。显然，磁化后的分布 $\phi*\mu$ 可以视为非齐次硬核模型，其中每个顶点 v 都有自己的逸度 $\lambda_v=\lambda\cdot\phi_v$。

定义 4.5（完全谱独立性）。对于两个实数 $\eta>0$ 和 $\xi>0$，$G=(V,E)$ 上的吉布斯分布 μ_G 若对所有 $\vec{\phi}\in(0,1+\xi]^V$，磁化分布 $\vec{\phi}*\mu$ 都是 η-谱独立的，则称其为 (η,ξ)-完全谱独立。

对于随机图 $G(n,d/n)$ 上的硬核模型，我们证明以下结果。

定理 4.6。对于任意固定的 $d>1$ 和 $\lambda<\lambda_c(d)$，存在有界常数 $r=r(d,\lambda)\in(1,2)$, $B=B(d,\lambda)>0$ 以及 $s=s(d,\lambda)>0$，使得以下结论成立：

考虑 $\boldsymbol{G}\sim G(n,d/n)$，并设 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 上的硬核模型，其逸度为 λ。对于 $\boldsymbol{G}$的实例，以概率$1-o(1)$, $\mu_{\boldsymbol{G}}$是 $(B\cdot(\log\ n)^{1/r},s)$-完全谱独立的。

定理 4.6 的证明见第 6 节。

4.3. 熵的块分解——定理 3.2 的证明。以下定理出自 [CFYZ22], , 它使我们能够利用定理 4.2 关于吉布斯边缘分布的稳定性的结果，以及定理 4.6 关于完全谱独立性的结果，推导出熵的 ℓ-块分解参数的一个界。

定理 4.7（[CFYZ22，引理 2.3]）。设 $\eta > 0$、$\xi > 0$ 和 $\zeta > 0$ 为参数。设 μ_G 是定义在 $G = (V, E)$ 上的吉布斯分布。若 μ_G 是 (η, ξ)-完全谱独立且 ζ-边缘稳定的，则对于任意 $1/\alpha \leq \ell < n$， μ_G 满足参数为 $C = (\frac{en}{\ell})^{1+1/\alpha}$ 的熵的块分解，其中

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{2\eta}, \frac{\log(1+\xi)}{\log(1+\xi)+\log 2\zeta}\right\} .$$

定理 3.2 的证明。由定理 4.6 可得：以概率 $1-o(1)$，对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，有 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 是 (η, s)-完全谱独立的，其中 $s = s(d, \lambda)$ 为常数，而

$$\eta = B \cdot (\log n)^{1/r} = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right),$$

其中 $B = B(d, \lambda)$ 和 $r = r(d, \lambda) \in (1, 2)$ 是定理 4.6 陈述中指定的常数。上面的第二个等式由注意到 $1/r < 1$ 与 1 保持着正距离而得。

此外，由定理 4.2 可知：对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以 $1 - o(1)$ 的概率，分布 $\mu_{\boldsymbol{G}}$ 是 ζ-边缘稳定的，其中

$$\zeta \leq 2(1+\lambda)^{2\frac{\log n}{\log\log n}} .$$

综上，将上述数值代入定理 4.7，即可得出该定理。 □

5. 熵的近似张量化

本节证明与熵的近似张量化相关的结果，即定理 2.4 和引理 3.4。

5.1. 定理 2.4 的证明。本节给出定理 2.4 的完整证明。回顾一下我们在第 3.1 节中对证明步骤所作的概述。

定理 2.4 的证明。由定理 3.2 可知：对于 $d > 1$ 和 $\lambda < \lambda_c(d)$，考虑 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$，并令 $\mu = \mu_{\boldsymbol{G}}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 上逸度为 λ 的硬核模型。设区间 $(0, 1)$ 内的数 $\theta = \theta(d, \lambda)$ 为一个参数，其取值稍后指定。于是，对于 $\ell = \lceil \theta n \rceil$，且对任意 f，关于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以 $1 - o(1)$ 的概率，有： $\Omega \to \mathbb{R}_{>0}$

$$\mathrm{Ent}_{\mu}(f) \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha} \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S \in \binom{V}{\ell}} \mu\left(\mathrm{Ent}_S(f)\right). \tag{17}$$

回忆一下， $C(S)$ 表示 $\boldsymbol{G}[S]$ 中连通分量的集合，而 $\boldsymbol{G}[S]$ 是由 S 中的顶点诱导出的子图。稍微滥用一下记号，我们用 $U \in C(S)$ 表示其中顶点的集合

连通分量 U。根据 th 根据吉布斯分布的条件独立性以及引理 3.3，我们有 e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\mu(f) &\le \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha} \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S\in\binom{V}{\ell}} \sum_{U\in C(S)} \mu\left(\mathrm{Ent}_U(f)\right) \\
\text{(by Lemma 3.4)} \quad &\le \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha} \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S\in\binom{V}{\ell}} \sum_{U\in C(S)} \mathrm{AT}(|U|) \sum_{v\in U} \mu[\mathrm{Ent}_v(f)] \\
&\le \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha} \sum_{v\in V} \mu[\mathrm{Ent}_v(f)] \sum_{k>1} \mathrm{AT}(k)\Pr[|C_v|=k] \ , \qquad (18)
\end{aligned}$$

其中 C_v 是 $\boldsymbol{G}[S]$ 中的连通分量，S 是从 $\binom{V}{\ell}$ 中均匀随机采样的。为了界定 (18) 右侧最内层的求和，我们针对 k 区分两种情况。对于 $1\le k\le \log n$，我们使用平凡界 $\Pr[|C_v|=k]\le 1$，而引理 3.4 表明

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\log n} \mathrm{AT}(k)\Pr[|C_v|=k] &\le \sum_{k=1}^{\log n} \mathrm{AT}(k) = \sum_{k=1}^{\log n} 3\log\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)\cdot((1+\lambda)k)^{2+2\eta} \\
&\le 3\log\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)\cdot\log n\cdot((1+\lambda)\log n)^{2+2\eta} \\
&\le 3\log\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)\cdot((1+\lambda)\log n)^{3+2\eta} \ ,
\end{aligned}$$

其中 $\eta = B(\log\ n)^{1/r}$，常数 $B = B(d,\lambda)$ 和 $r = r(d)$ 满足 $\in(1,2)$。简单计算可得

$$\sum_{k=1}^{\log n} \mathrm{AT}(k)\Pr[|C_v|=k] \le 3\log\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)\cdot((1+\lambda)\log n)^{3+2\eta} \le n^x \ , \qquad (19)$$

对 $x = o\Big($ $\frac{1}{\log}$ $\log\ n\Big)$。

对于 $k\ge\log\ \ n$，我们利用引理 3.5 中的界来估计 $\Pr[|C_v|=k]$，而由引理 3.4 可得

$$\sum_{k\ge\log n} \mathrm{AT}(k)\Pr[|C_v|=k] \le 2k^2\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)^{2k+2}(2\mathrm{e})^{\mathrm{e}Lk}(2\theta)^k \ ,$$

其中 $L = L(d)$ 是引理 3.5 中的参数。我们选取足够小的 $\theta = \theta(d,\lambda)$，使得

$$\forall k\ge 1, \quad 2k^2\left(1+\lambda+\lambda^{-1}\right)^{2k+2}(2\mathrm{e})^{\mathrm{e}Lk}(2\theta)^k \le (1/2)^k \ .$$

这意味着

$$\sum_{k\ge\log n} \mathrm{AT}(k)\Pr[|C_v|=k] \le \sum_{k\ge\log n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \le 1 \ . \qquad (20)$$

将 (19)、(20) 代入 (18)，得到：对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，以 $1-o(1)$ 的概率有

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \le \left(\frac{\mathrm{e}}{\theta}\right)^{1+1/\alpha}\left(n^{\left(\frac{1}{\log\log n}\right)}+1\right)\sum_{v\in V}\mu[\mathrm{Ent}_v(f)] \ .$$

由于根据定理 3.2，我们有 $\frac{1}{\alpha} = K(\text{对数 } n \text{ 对数对数 } n)$，其中 $K = K(d,\lambda)$ 是一个常数，且 $\theta = \theta(d,\lambda)$ 也是一个常数，因此上述不等式可写为：存在一个常数 $A = A(d,\lambda)$，使得

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \le n^{\left(\frac{A}{\log\log n}\right)}\sum_{v\in V}\mu[\mathrm{Ent}_v(f)] \ .$$

以上即完成定理 2.4 的证明。 □

5.2. 引理 3.4 的证明。引理 3.4 可由以下结果作为推论得出 t.

引理 5.1. 设 $\lambda > 0$，图 $G = (V, E)$，且 μ_G 是定义在 G 上、逸度为 λ 的硬核模型。设 $M \subseteq V$ 是顶点的一个子集，且 $\sigma \in \{\pm 1\}^{V \setminus M}$ 在 $V \setminus M$ 上。条件分布$\mu_M(\cdot \mid V \setminus M, \sigma)$ 满足熵的近似张量化，其常数为

$$C = 2|M|^2 \left(1 + \lambda + 1/\lambda\right)^{2|M|+2} \ . \tag{21}$$

此外，若 μ 是 η-谱独立的，且某个数 η 满足相应条件，则 $\mu_M(\cdot \mid V \setminus M, \sigma)$ 满足熵的近似张量化，其常数为

$$C = 3\log\left(1 + \lambda + 1/\lambda\right) \cdot \left((1+\lambda)|M|\right)^{2+2\eta} \ . \tag{22}$$

根据引理 5.1，引理 3.4 的证明是直接的。为求完整，下面给出其证明。

引理 3.4 的证明。式 (7) 中的第一个界直接由引理 5.1 的第一部分得出。现在证明式 (7) 中的第二个界。

根据定理 4.6，以概率 $1 - o(1)$，$\mu_{\boldsymbol{G}}$ 是 $(B(\log\ n)^{1/r}, s)$-完全谱独立的，其中 $r = r(d, \lambda) \in (1, 2)$，$B = B(d, \lambda) > 0$ 且 $s = s(d, \lambda) > 0$。因此，$\mu_{\boldsymbol{G}}$ 以概率 $1 - o(1)$ 是$B(\log\ n)^{1/r}$-谱独立的。由此，(7) 中的第二个界可由引理 5.1 的第二部分推出。□

引理 5.1 的证明。注意，该结果针对固定图 G。此外，由于我们讨论的是熵的张量化，不失一般性，假设 $|M| \geq 2$。

为简洁起见，我们用 π 表示分布 $\mu_M(\cdot \mid V \setminus M, \sigma)$。我们用 $\Omega \subseteq \{\pm 1\}^M$ 表示分布 π 的支撑集。令 P: $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示在 π 上的格劳伯动力学的转移矩阵。容易验证，在 Ω 上的格劳伯动力学是遍历的。

π 的 Poincaré 不等式为: π

$$\forall f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \quad \gamma \mathrm{Var}_\pi[f] \leq \frac{1}{|M|} \sum_{v \in \Lambda} \pi[\mathrm{Var}_v(f)] \ ,$$

其中 γ 是t he Poincaré 常数，也称为 P的谱隙。π 的对数 Sobolev 不等式为: t

$$\forall f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \quad \alpha \mathrm{Ent}_\pi[f] \leq \frac{1}{|M|} \sum_{v \in \Lambda} \pi[\mathrm{Var}_v(\sqrt{f})] \ ,$$

其中 α 是对数-Sobolev常数。

以下这个广为人知的不等式出自 [CMT15，命题 1.1]，它联系了 C（即我们想要界定的近似张量化常数）与对数-Sobolev常数 α。我们有:

$$C \leq \frac{1}{\alpha |M|} \ .$$

根据 [DSC96，推论 A.4]，我们得到 γ 与 α之间的以下关系:

$$\alpha \geq \frac{1 - 2\pi_{\min}}{\log(1/\pi_{\min} - 1)} \cdot \gamma, \qquad \text{where } \pi_{\min} = \min_{\sigma \in \Omega} \pi(\sigma) \ .$$

我们不妨假设 $|\Omega| \geq 3$，因为 $|\Omega| \leq 2$ 是平凡情形，此时 $C \leq 1$。由此可得 $\pi_{\min} \leq \frac{1}{3}$。结合上述两个不等式，得到

$$C \leq \frac{3\log(1/\pi_{\min})}{|M|\gamma} \ . \tag{23}$$

接下来，我们利用 Cheeger不等式推导谱隙的一个粗略下界 γ。回顾一下，Cheeger不等式意味着

$$\gamma \geq \Phi^2/2 \ , \tag{24}$$

其中

$$\Phi = \min_{\Omega_0 \subseteq \Omega : \pi(\Omega_0) \le \frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(\Omega_0)} \sum_{x \in \Omega_0} \sum_{y \in \Omega \setminus \Omega_0} \pi(x) P(x,y) \ ,$$

且（如上所定义） P 是格劳伯动力学的转移矩阵。

由于格劳伯动力学是遍历的，对于任意 $\Omega_0 \subset \Omega$，存在 $x \in \Omega_0$ 和 $y \in \Omega \setminus \Omega_0$，使得 $P(x,y) > 0$。根据格劳伯动力学的定义，这样的 x 和 y 满足 $P(x,y) \ge \frac{1}{|M|} \min\{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\}$。因此，我们有

$$\Phi \ge \frac{2\pi_{\min}}{|M|} \min\left\{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right\} \ . \tag{25}$$

将 (24) 和 (25) 代入 (23)，得到

$$C \le \frac{3}{2} \frac{|M| \log(1/\pi_{\min})}{\left(\pi_{\min} \cdot \min\left\{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right\}\right)^2} \ .$$

最后，对于硬核模型，量 $\pi_{\min}$ 可以下界为

$$\pi_{\min} \ge \frac{\min\{1, \lambda^{|M|}\}}{(1+\lambda)^{|M|}} \ , \tag{26}$$

这意味着

$$C \le 2|M|^2 \left(1 + \lambda + 1/\lambda\right)^{2|M|+2} \ .$$

以上证明了 (21)。

我们继续证明（22）。回顾一下，现进一步假设 μ 是 η-谱独立的。根据谱独立性的定义，很容易看出 π 也是谱独立的。因此，对于任意 $0 \le k \le |M| - 2$、任意满足 $|S| = k$ 的 $S \subseteq M$ 以及任意可行钉扎 $\sigma \in \{\pm 1\}^S$，影响矩阵 $\mathcal{I}_\pi^{S,\sigma}$ 的谱半径满足

$$\rho(\mathcal{I}_\pi^{S,\sigma}) \le \eta \ .$$

此外，给定关于 S 的任意条件 σ，对于任意 $v \notin S$，有 $\pi^{S,\sigma}_v(+1) \le \frac{\lambda}{1+\lambda}$。这意味着对于任意 u、$v \notin S$，有

$$\mathcal{I}_\pi^{S,\sigma}(u,v) \le \frac{\lambda}{1+\lambda} \ ,$$

这进一步意味着

$$\frac{\rho(\mathcal{I}_\pi^{S,\sigma})}{|M| - k - 1} \le \frac{\lambda}{1+\lambda} \ .$$

根据 [FGYZ21b，定理 3.2],，谱隙 γ 可以下界为

$$\gamma \ge \left(\frac{1}{(1+\lambda)|M|}\right)^{2+2\eta} \ .$$

为完整起见， [FGYZ21b] 中的定理 3.2 可在附录中作为引理 A.1 找到。将上述结果代入（23），得到

$$C \le \frac{3\log(1/\pi_{\min})}{|M|} \cdot \left((1+\lambda)|M|\right)^{2+2\eta} \ .$$

最后，根据（26）中的下界，我们有

$$C \le 3\log\left(1 + \lambda + 1/\lambda\right) \cdot \left((1+\lambda)|M|\right)^{2+2\eta} \ .$$

以上完成了引理 3.4 的证明。 □

6. 定理 4.6 的证明——完全谱独立性

本节将证明，在 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$ 的典型实例上，逸度为 $\lambda < \lambda_c(d)$ 的硬核模型 μ 以定理 4.6 所述的方式满足完全谱独立性。

首先，我们针对具有给定 d 分支值的固定图上的硬核模型，建立谱独立性界（见定义 3.7），其中 $d > 1$ 满足某些条件。关键的是，逸度 λ 的上界为 $\lambda_c(d)$。

我们引入非齐次硬核模型，即每个顶点 u 都有其自身的逸度 λ_u。具体而言，对于满足 $\boldsymbol{\lambda}_v \in \mathbb{R}_{>0}$ 的 $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_v)_{v \in V}$，对所有 $v \in V$，我们定义非齐次硬核模型 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$，使得对于任意 $\sigma \in \{\pm\}^V$，都有

$$\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}(\sigma) \propto \prod_{v \in V : \sigma_v = +} \boldsymbol{\lambda}_v \ . \tag{27}$$

为简洁起见，下文记 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty$ 为在以下对象上的最大值 $\{\boldsymbol{\lambda}_v\}_{v \in V}$。

注意，我们采用势函数方法来建立谱独立性。具体而言，我们使用 [SSSY17] 中的以下引理。

引理 6.1（[SS˘SY17]）。设 $d > 1$ 和 $\lambda > 0$ 是满足 $\lambda < \lambda_c(d)$ 的参数。设 $\chi = \chi(d) \in (1, 2)$ 是定义为 $\chi = (1 - \frac{d-1}{2}\log(1 + \frac{1}{d-1}))^{-1}$ 的参数。设 $a = \frac{\chi}{\chi - 1}$ 和 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$。则存在 $0 < \kappa = \kappa(\lambda) < 1/d$，使得对于任意整数 $k \geq 1$，以下结论成立：对于任意 $x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$ 和 $x = \lambda \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+x_i}$，均有 $\Phi(x)^a \sum_{i=1}^k \left(\frac{x}{(1+x_i)\Phi(x_i)} \right)^a \leq \kappa^{a/\chi}$。

我们针对固定图上的非齐次硬核模型，根据其 d-分支值，推导出以下关于谱独立性的一般结果 Git。

定理 6.2。令 $d > 1$ 为一个实数。对于图 $G = (V, E)$，令 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 为满足 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty < \lambda_c(d)$ 的非齐次硬核模型。

对于任意满足以下条件的 $\alpha > 0$：对所有 $v \in V$，其 d-分支值 $S_v \leq \alpha$，均有：$\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 是 η-谱独立的，且

$$\eta \leq W \cdot \alpha^{1/\chi} \ ,$$

其中 $W = W(d, ||\boldsymbol{\lambda}||_\infty)$，而量 $\chi = \chi(d) \in (1, 2)$ 来自引理 6.1。

注意，定理 6.2 讨论的是非齐次硬核模型的谱独立性，而定理 4.6 讨论的是（齐次）硬核模型的完全谱独立性。

我们由定理 6.2 和引理 3.9 证明定理 4.6。

定理 4.6 的证明。回顾一下，在定理 4.6 中，我们假设 $\lambda < \lambda_c(d)$。这意味着我们可以˜ ˜选择 d 使得 $d > d$，而

$$\lambda < \lambda_c(\tilde{d}) \ .$$

注意，这个不等式是严格的。上述结论可由以下事实得出：函数 $\lambda_c(x)$ 连续且˜严格递减，适用于 $x > 1$。另外，选择 λ 使得

$$\lambda < \tilde{\lambda} < \lambda_c(\tilde{d}) \ .$$

˜ ˜ ˜ ˜ ˜注意，两个量 λ 和 d 仅依赖于 d, λ，即我们有 $d = d(d, \lambda)$ 和 $\lambda = \lambda(d, \lambda)$。

我们通过证明以下结论来证明该定理：以概率 $1 - o(1)$，对于 $\boldsymbol{G}$ 的实例，逸度为 λ 的 $\boldsymbol{G}$ 上的硬核模型（记作 $\mu_{\boldsymbol{G}}$）是 (η, s)-完全谱独立的，其中

$$\eta = B \cdot (\log n)^{\frac{1}{r}} \qquad \text{and} \qquad s = \tilde{\lambda}/\lambda - 1 \ , \tag{28}$$

对于常数 $B = B(d, \lambda) > 0$ 和 $r = r(d) \in (1, 2)$。

首先考虑固定图 $G=(V,E)$ 和外部场 $\vec{\phi}\in[0,1+s]^V$。显然，分布 $\vec{\phi}*\mu_G$ 对应于非齐次硬核模型 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 满足 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty\le\tilde{\lambda}<\lambda_c(d)$。

定理 6.2 对 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 给出了如下结论：对于任意满足 d-分支值 $S_v\le\alpha$ 对所有 $v\in V$ 均成立的 $\alpha>0$，分布 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 是 ζ-谱独立的，其中

$$\zeta\le W\cdot\alpha^{1/\chi}\ , \tag{29}$$

对于定理 6.2 中指定的 $W=W(d,||\boldsymbol{\lambda}||_\infty)$，而量 $\chi=\chi(d)\in[1,2)$ 则来自引理 6.1。由此可知，μ_G，具有逸度 λ 的 G 上的（齐次）硬核模型是 $(B\cdot\alpha^{1/\chi},s)$-完全谱独立的。

注意，由于 W 取决于 d 和 $\lambda=||\boldsymbol{\lambda}||_\infty$，而后两者又取决于 d、λ，因此 W 只取决于 d 和 λ。同理，上述参数 χ 只取决于 d 和 λ。

就 G 而言，引理 3.9 意味着，我们进行如下处理：以 $1-o$ 的概率，对所有 $v\in V$，均满足 $S_v\le\log n$。(1) 鉴于这一观察，只需令 $B=W(d,||\boldsymbol{\lambda}||_\infty)$ 且 $r=\chi(d)$，即可由 (29) 得出该定理。□

6.1. 通过加权总影响给出特征值的一个界——定理 6.2 的证明。我们使用以下结果来证明定理 6.2。

定理 6.3. 设 $d>1$ 为一个实数，$G=(V,E)$ 为一个图。对于 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^V_{>0}$，令 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 为定义在 G 上的非齐次硬核模型，并假设 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty<\lambda_c(d)$。此外，令 $\mathcal{I}_G$ 为由 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$ 诱导的影响矩阵。

对于任意满足以下条件的 $\alpha>0$：对所有 $v\in V$，d-分支值 $S_v\le\alpha$，结论如下：存在一个常数 $W=W(d,||\boldsymbol{\lambda}||_\infty)$，使得

$$\forall r\in V,\quad \sum_{u\in V}\mathcal{I}_G(r,u)\cdot\deg_G(u)^{1/\chi}\le W\cdot(\alpha\cdot\deg_G(r))^{1/\chi}\ ,$$

其中 $\chi=\chi(d)\in[1,2)$ 来自引理 6.1。

定理 6.3 在第 7 节中证明。现在，我们准备证明定理 6.2。

定理 6.2 的证明。为证明定理 6.2，我们关注 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_G$ 的谱半径，即 $\rho(\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_G)$，并证明对于任意的 $\Lambda\subset V$ 和 $\sigma\in\{\pm1\}^\Lambda$，都有

$$\rho(\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_G)\le W\cdot\alpha^{1/\chi}\ , \tag{30}$$

一旦证明上述结论，定理 6.2 便立即成立。

在证明 (30) 之前，我们先作一些有用的观察。假设图 $G=(V,E)$ 上有一个逸度为 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^V_{>0}$ 的非齐次硬核模型，并且顶点集合 Λ 上的构型为 τ。那么，容易验证，该分布与图 $G'=(V',E')$ 上逸度为 $(\boldsymbol{\lambda}_v)_{v\in V'}$ 的非齐次硬核模型相同，其中 G' 可按以下方式由 G 得到：从 G 中移除每个满足以下任一条件的顶点 w：属于 Λ，或有一个邻居 $u\in\Lambda$ 满足 $\tau(u)=+1$，也就是说，在 τ 下，u 是“占据”的。

此外，分别考虑由上述吉布斯分布诱导的矩阵 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_G$ 和 $\mathcal{I}_{G'}$。不难看出，$\mathcal{I}_{G'}$ 是 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_G$ 的一个主子矩阵，它是通过移除与顶点 $w\in V\setminus\Lambda$ 对应的行和列得到的；这些顶点有一个邻居 $u\in\Lambda$，满足 $\tau(u)=+1$。请注意，从 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_G$ 中移除以得到 $\mathcal{I}_{G'}$ 的那些行和列，其元素均为零。

利用上述观察，通过线性代数中的简单推导即可验证：与 $\mathcal{I}_{G'}$ 相比，$\mathcal{I}^{\Lambda,\tau}_G$ 可能具有的任何额外特征值都只能等于零。因此，我们得到这两个矩阵的谱半径满足以下关系：

$$\rho(\mathcal{I}^{\Lambda,\tau}_G)=\rho(\mathcal{I}_{G'})\ .$$

此外，注意到移除顶点时，分支值不会增加。因此，如果 G、$\boldsymbol{\lambda}$、d 和 α 满足定理 6.2 中的条件，那么 G'、$(\boldsymbol{\lambda}_v)_{v\in V'}$、$d$ 和 α 也满足相同的条件。

鉴于以上所有内容且不失一般性，我们可以忽略钉扎，并考虑影响矩阵 $\mathcal{I}_G$。

因此，我们不证明（30），而是考虑以下等价问题。考虑图 $G=(V,E)$，并设 $\alpha>0$ 和 $d>1$ 满足：对于所有 $v\in V$，d-分支值为 $S_v\le\alpha$。此外，对于满足 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty<\lambda_c(d)$ 的 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^V_{>0}$，考虑 G 上的非齐次硬核模型 $\mu=\mu_G$，其逸度为 $\boldsymbol{\lambda}$；令 $\mathcal{I}_G$ 为相应的成对影响矩阵（无边界条件）。

只需证明

$$\rho(\mathcal{I}_G)\le W\alpha^{1/\chi}\ , \tag{31}$$

对于定理 6.2 的陈述中指定的 W、α、χ。

为此 我们使用第 3.2 节中引入的矩阵范数。具体而言，众所周知 t

$$\rho(\mathcal{I}_G)\le\left|\left|D^{-1}\cdot\mathcal{I}_G\cdot D\right|\right|_\infty\ , \tag{32}$$

其中，D 是由 $V\setminus\Lambda$ 中的顶点索引的对角矩阵，使得

$$D(u,u)=\begin{cases}\deg_G(v)^{1/\chi} & \text{if } \deg_G(v)\ge 1\\ 1 & \text{if } \deg_G(v)=0\ ,\end{cases}$$

而 $\chi=\chi(d)\in(1,2)$来自引理 6.1。

注意到 $\mathcal{I}_G$和 D 是非负矩阵，根据矩阵范数 $||\cdot||_\infty$的定义，有

$$\begin{aligned}\left|\left|D^{-1}\cdot\mathcal{I}_G\cdot D\right|\right|_\infty&=\max_{v\in V}\sum_{u\in V}\frac{\mathcal{I}_G(v,u)\cdot D(u,u)}{D(v,v)}\\&=\max_{\substack{v\in V:\\ \deg_G(v)>0}}\sum_{u\in V}\frac{\mathcal{I}_G(v,u)\cdot\deg_G(u)^{1/\chi}}{\deg_G(v)^{1/\chi}}\\&\le W\alpha^{1/\chi}\ .\end{aligned}$$

第二个等式源于以下观察：对于孤立顶点 v，即 $\deg_G(v)=0$，对于所有 $u\in V$，都有 $\mathcal{I}_G(v,u)=0$。最后一个不等式源于定理 6.3。因此，将上述结果代入（32）即可得到（31）。

定理得证。 □

7. 通过自回避游走树界定总影响——定理 6.3 的证明

设 $G=(V,E)$ 为一个图，并假设 V 中的顶点存在一个全序。

G 中的自回避游走（SAW）是路径 $v_1,v_2,\dots,v_\ell$，其中各顶点属于 G，且满足：对所有 $i\ne j$，$v_i\ne v_j$。固定一个顶点 $r\in V$。我们定义自回避游走树 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$，即从 r 出发的自回避游走树，如下所示：考虑图 G 中所有从顶点 r 出发的游走 $v_0,\dots,v_\ell$ 所组成的集合，即 $v_0=r$，并且满足以下两种情况之一

K.1: $v_0,\dots,v_\ell$ is a self-avoiding walk,

K.2: $v_0,\dots,v_{\ell-1}$是自回避游走，且存在 $j\le\ell-3$ 使得 $v_\ell=v_j$。

集合中的每一条游走都对应 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 中的一个顶点。若 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 中的两个顶点所对应的游走相邻，则这两个顶点相邻。注意，在图 G 中，如果一条游走比另一条多延伸一个顶点‡，则认为这两条游走相邻。

‡例如，游走 $P'=w_0,w_1,\dots,w_\ell$ 和 $P=w_0,w_1,\dots,w_\ell,w_{\ell+1}$ 彼此相邻。

我们还采用以下术语：对于 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 中对应于游走 $v_0, \ldots, v_\ell$ 的顶点 u，我们称“u 是 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 中顶点 v_ℓ 的一个副本”。对于图 G 中的每个顶点 v，我们用 C_v 表示自回避游走树 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 中 v 的副本集合。

对于 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^V$，考虑图 G 上的非齐次硬核模型 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$。我们指定图 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 上的非齐次硬核模型 $\mu_{T,\boldsymbol{\lambda}}$，使得 C_v 中所有顶点的逸度均为 $\boldsymbol{\lambda}_v$，对所有 $v \in V$ 均如此。

我们用 Λ 表示自回避游走树 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 中闭环顶点的集合，也就是对应于 K.2 类型路径的那些顶点。令 $\sigma \in \{\pm 1\}^\Lambda$ 表示由自回避游走树按以下方式得到的钉扎：对于对应于路径 w_0 的 $z \in \Lambda$，我们设定 $\sigma(z)$，使得

(a) 若 $w_\ell > w_{\ell-1}$，则 -1；(b) 否则为 $+1$。

Λ 是 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 的叶节点的子集，因此，σ 是对叶节点子集的钉扎。注意，T 中可能存在不属于 Λ 的叶节点。这些叶节点是 G 中度为 1 的顶点的副本。

上述构造得到自回避游走树 $T = T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 上的条件硬核分布 $\mu^{\Lambda,\sigma}_{T,\boldsymbol{\lambda}}$，。令 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T$ 表示由 $\mu^{\Lambda,\sigma}_{T,\boldsymbol{\lambda}}$，诱导的影响矩阵。

回想一下，$\mathcal{I}_G$ 对应于由 $\mu_{G,\boldsymbol{\lambda}}$诱导的影响矩阵。我们有以下结果，它刻画了影响矩阵 $\mathcal{I}_G$ 与 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T$ 之间的关系。

引理 7.1（[CLV20，引理 8] ）。对于 G中的每个顶点 $v \neq r$，均有

$$\mathcal{I}_G(r,v) = \sum_{u \in C_v} \mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T(r,u) \ .$$

上述结果非常有用，因为它使我们能够借助矩阵$\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T$ 来研究影响矩阵 $\mathcal{I}_G$；由于其底层树结构，矩阵$\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T$ 更易于分析。鉴于上述结果，我们还使用了 [ALO20]中的以下结果。

引理 7.2（[ALO20，引理 B.2]）。考虑树 $T = (V_T, E_T)$，并令 μ 为 $\{\pm 1\}^V$上的一个吉布斯分布。对于任意三个顶点 u、v、$w \in V_T$，若 u位于从 v到 w的路径上，则对任意 $M \subseteq V \setminus \{u,v,w\}$和任意 $\tau \in \{\pm 1\}^M$，有

$$\mathcal{I}^{M,\tau}(v,w) = \mathcal{I}^{M,\tau}(v,u) \cdot \mathcal{I}^{M,\tau}(u,w) \ .$$

注意，在 [ALO20] 中，影响矩阵的定义方式与本文略有不同。具体而言，本文定义的矩阵 $\mathcal{I}_G$ 可由 [ALO20] 中的影响矩阵对其元素取绝对值而得。尽管引理 7.2 是针对 [ALO20],中的影响矩阵证明的，但显然，它对本文定义的影响矩阵也成立。

我们要用到的一个观察是，对于 $z \notin \Lambda$ 中所有的顶点，$T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 都具有以下性质：设 $z \in C_w$ 对 $w \in V$成立，则有

$$\deg_T(z) = \deg_G(w) \ . \tag{33}$$

根据引理7.1和引理 7.2，只需从根节点出发，对树 $T_{\mathrm{SAW}}(r)$ 上的总影响进行界定，即可推出定理 6.3。以下是本节的主要技术结果。

命题 7.3. 设 $d > 1$为一个实数，$T = (V_T, E_T)$ 为一棵以 $r \in V$为根节点的树。设 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^V_{>0}$满足 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty < \lambda_c(d)$。令 $\mu_{T,\boldsymbol{\lambda}}$ 为定义在 T 上的非齐次硬核模型，其逸度为 $\boldsymbol{\lambda}$。对于任意满足 d- 分支值 $S_r \leq \alpha$ 的 $\alpha > 0$，以下结论成立：

存在一个常数 $D = D(d, ||\boldsymbol{\lambda}||_\infty)$，使得对于 T 的叶节点的任意 Λ 子集，以及任意 $\sigma \in \{\pm 1\}^\Lambda$，都有

$$\sum_{u \in V \setminus \{r\}} \mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T(r,u) \cdot \deg_T(u)^{1/\chi} \leq D \cdot (\alpha \cdot \deg_T(r))^{1/\chi} \ ,$$

其中 $\chi = \chi(d) \in (1, 2)$ 的定义见引理 6.1。

定理 6.3 的证明。给定图 G，固定一个顶点 $r \in V$。我们的重点是界定加权和$\sum_{u\in V} |\mathcal{I}_G(r,u)|\deg_G(u)^{1/\chi}$。

我们构造自回避游走树 $T = T_{\mathrm{SAW}}(r)$，并按照第 7 节开头的描述，对叶顶点 Λ 的一个子集进行钉扎 σ。我们在 T 上考虑非齐次硬核模型，其中每个顶点 w（即 T 中 $v \in V$ 的一个副本）的逸度为 $\boldsymbol{\lambda}_v$。令 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T$ 表示与该分布相对应的影响矩阵。

引理 7.1 表明，对于任意 $u \in V$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_G(r,u)\cdot \deg_G(u)^{1/\chi} &= \deg_G(u)^{1/\chi}\cdot \sum_{v\in C_u} \mathcal{I}_T^{\Lambda,\sigma}(r,v)\\ &= \deg_G(u)^{1/\chi}\cdot \sum_{v\in C_u\setminus\Lambda} \mathcal{I}_T^{\Lambda,\sigma}(r,v) \qquad (34)\\ (\text{by (33)}) &= \sum_{v\in C_u\setminus\Lambda} \mathcal{I}_T^{\Lambda,\sigma}(r,v)\deg_T(v)^{1/\chi}\\ &= \sum_{v\in C_u} \mathcal{I}_T^{\Lambda,\sigma}(r,v)\deg_T(v)^{1/\chi}\ . \qquad (35)\end{aligned}$$

在 (34) 和 (35) 中，我们都使用了如下观察：对于所有 $w \in C_v \cap \Lambda$，有 $\mathcal{I}^{\Lambda,\sigma}_T(r,w) = 0$，也就是说，由于 w 的赋值固定为 $\sigma(w)$，根节点对 w 的影响为零。因此，我们得到

$$\sum_{u\in V} \mathcal{I}_G(r,u)\cdot \deg_G(u)^{1/\chi} = \sum_{u\in V}\sum_{v\in C_u} \mathcal{I}_T^{\Lambda,\sigma}(r,v)\deg_T(v)^{1/\chi}\ . \qquad (36)$$

令 $\widetilde{d}$ 为方程 $\lambda_c(\widetilde{d}) = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_c(d))$ 的解。注意，$\widetilde{d}$ 仅取决于 d 和 λ。此外，我们有

$$(a)\quad \lambda < \lambda_c(\widetilde{d}) < \lambda_c(d) \qquad \text{and} \qquad (b)\quad \widetilde{d} > d\ .$$

(a)中的不等式由以下事实得出：$\lambda_c(d)$是 λ、$\lambda_c(d)$和 $\lambda < \lambda_c(d)$的平均值。此外，(b)由以下观察得出：$\lambda_c(d) > \lambda_c(d)$，且 $\lambda_c(x)$关于 $x > 1$单调递减。

令r为ϕ_r在自回避游走树 $T = T_{\mathrm{SAW}}(G,r)$ 中的d-分支值。令 ψ_r 为图 G中顶点 r 的 d-分支值。注意，G中存在唯一一个与自回避游走树的根节点对应的顶点。

我们声称存在一个常数 $K = K(d,\lambda) > 1$，使得

$$\phi_r \le K\cdot\psi_r \le K\cdot\alpha, \qquad (37)$$

其中，满足 $\alpha \ge \psi_r$ 的 α 在定理 6.3 的陈述中给出。

在证明 (37) 成立之前，我们先说明如何利用它证明定理 6.3。利用具有 d 分支值的命题 7.3（注意 $\lambda < \lambda_c(d)$），可得：存在常数$D = D(d,\lambda)$ 和 $\chi = \chi(d)$，使得

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V} \mathcal{I}_T^{(\Lambda,\sigma)}(r,u)\cdot\deg_T(u)^{1/\chi} &\le D\left(\phi_r\cdot\deg_T(r)\right)^{1/\chi}\\ (\text{by (37)}) \quad &\le D\cdot\left(K\cdot\alpha\cdot\deg_T(r)\right)^{1/\chi}\ .\end{aligned}$$

综上，将上述不等式代入 (36) 并令 $W = D\cdot K^{1/\chi}$，即可推出定理 6.3。注意，W 是一个仅依赖于 d 和 λ 的常数。

通过证明 (37) 成立，我们完成定理 6.3 的证明。令 $N_r^T(\ell)$ 表示从根节点 r出发、长度为 ℓ 的简单路径在 T中的数量。固定树 T中的一条此类路径 $P = (v_0 = r, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$。根据自回避游走树 T的定义，P对应于 G中的以下两类路径之一。

类型 1： P是图 G中从 r 出发、长度为 ℓ 的一条简单路径；
类型 2：前缀 $v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ 是一条长度为 $\ell-1$、从图 G 中的 r 出发的简单路径，并且 v_ℓ 是闭环顶点，使得对于某个 $i \le \ell-3$，有 $v_\ell = v_i$。
令 $N^G_{r,\ell}$ 表示图 G 中从 r 出发且属于类型 1 的长度为 ℓ 的路径数。令 $\bar{N}^G_{r,\ell}$ 表示图 G 中从 r 出发且属于类型 2 的长度为 ℓ 的路径数。我们有如下关系

$$\forall \ell \ge 1, \quad N^T_{r,\ell} = N^G_{r,\ell} + \bar{N}^G_{r,\ell} \;\le\; N^G_{r,\ell} + \ell N^G_{r,\ell-1} \ . \tag{38}$$

对于第二个不等式，我们利用如下观察：$\bar{N}^G_{r,\ell} \le \ell N^G_{r,\ell-1}$。

回顾一下，ϕ_r 是自回避游走树 $T = T_{\mathrm{SAW}}(G, r)$ 中 r 的 d-分支值。我们有

$$\begin{aligned}
\phi_r &= \sum_{\ell \ge 0} \frac{N^T_{r,\ell}}{\widetilde{d}^\ell} = 1 + \sum_{\ell \ge 1} \frac{N^T_{r,\ell}}{\widetilde{d}^\ell} \\
(\text{by (38)}) \quad &\le 1 + \sum_{\ell \ge 1} \frac{N^G_{r,\ell}}{\widetilde{d}^\ell} + \sum_{\ell \ge 0} \frac{(\ell+1) N^G_{r,\ell}}{\widetilde{d}^{\ell+1}} \\
&= \sum_{\ell \ge 0} \frac{N^G_{r,\ell}}{\widetilde{d}^\ell} \left(1 + \frac{\ell+1}{\widetilde{d}}\right) \ .
\end{aligned}$$

由于 $\widetilde{d} > d > 1$ 且 d 由 d 和 λ 确定，因此存在一个常数 $K = K(d, \lambda) \ge 1$，使得

$$\forall \ell \ge 0, \quad \frac{1}{\widetilde{d}^\ell} \left(1 + \frac{\ell+1}{\widetilde{d}}\right) \le \frac{K}{d^\ell} \ .$$

进而，上述结论意味着

$$\phi_r \le K \cdot \sum_{\ell \ge 0} \frac{N^G_{r,\ell}}{d^\ell} = K \cdot \psi_r \le K \cdot \alpha.$$

这就证明了 (37)。
以上内容完成了定理 6.3 的证明。 □

7.1. 命题 7.3 的证明。对于 $\Lambda \subseteq V_T \setminus \{r\}$ 和 $\sigma \in \{\pm 1\}^\Lambda$，回顾第 4.1 节中根节点 $R^{K,\ \tau}_{T}(r)$ 处的边缘分布比，使得

$$R^{\Lambda,\sigma}_T(r) = \frac{\mu_r(+1 \mid \Lambda, \sigma)}{\mu_r(-1 \mid \Lambda, \sigma)} \ . \tag{39}$$

另外，回顾 $\mu_r(\cdot \mid \Lambda, \sigma)$ 表示吉布斯分布 $\mu_{T,\ \lambda}(\cdot \mid \Lambda, \sigma)$ 在根节点 r 处的边缘分布。
对于顶点 $u \in V_T$，我们令 T_u 表示包含 u 及其所有后代的 T 的子树。我们始终假设 T_u 的根节点是顶点 u。略微滥用记号，我们令 $R^{\Lambda,\ \sigma}_{u}$ 表示子树 T_u 在根节点处的边缘分布比，其中吉布斯分布现在是相对于 T_u 而定义的，同时我们施加边界条件 $\sigma(K \cap T_u)$。

令 v_1、v_2、...、v_k 表示 v 的子节点，则可以得到以下递推关系

$$R^{\Lambda,\sigma}_v = \boldsymbol{\lambda}_v \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + R^{\Lambda,\sigma}_{v_i}} \ . \tag{40}$$

令 $A \subseteq V_T$ 包含所有满足以下条件的 $w \in V_T$：从根节点 r 到 w 的路径上存在顶点 $v \in \Lambda$。此外，令 B 包含所有满足以下条件的 $w \in V_T$：w 有一个子节点 $u \in \Lambda$，且 $\sigma(u) = +1$。定义集合

$$F = \Lambda \cup A \cup B \ .$$

给定条件 (Λ, σ)，标准做法是证明，对于任意 $w \in F$，$\mathcal{I}_T(r, w) = 0$。我们将$V_T \setminus F$中的顶点称为自由顶点。

我们定义如下参数集 $(\alpha_v)_{v\in V}$：对于每个叶顶点 v，有 $\alpha_v = 1$。对于每个非叶顶点 v，令 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 表示 v 的子节点，并定义 $\alpha_v = 1+\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{v_i}$。不难验证，$\alpha_v$ 是以 v 为根节点的子树 T_v 中 $v \in V$ 的 d-分支值。因此，有 $\alpha_r \le \alpha$。

为简洁起见，在下文中，我们分别将 $\mathcal{I}^{\Lambda}{}_{,T}{}^{\sigma}$ 和 $R^{\Lambda}{}_{,v}{}^{\sigma}$ 简记为 $\mathcal{I}_T$ 和 R_v。令 $L(h)$ 表示距根节点 r 的距离为 h 的所有顶点的集合。令 $\chi \in (1,2)$ 表示引理 6.1 中的参数，$\Phi(\cdot)$ 表示其中的函数。我们声称

$$\forall h \ge 1, \quad \sum_{v\in L(h)\setminus F}\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi}\frac{\mathcal{I}_T(r,v)}{R_v\Phi(R_v)} \le d^{1/\chi}\sqrt{\deg_T(r)}(d\kappa)^{(h-1)/\chi} \ , \tag{41}$$

其中

$$\kappa = \sup_{0<x\le||\boldsymbol{\lambda}||_\infty}\kappa(x) < 1/d, \tag{42}$$

是参数，其中函数 $\kappa(x)$ 在引理 6.1 中给出。因此，(41) 中的参数 κ 仅依赖于 $||\boldsymbol{\lambda}||_\infty$。我们指出，上述不等式中的所有比值都有定义，因为 $\alpha_r \ge 1$，且对于任意自由顶点 $v \notin F$，均有 $0 < R_v < \infty$。

在证明 (41) 成立之前，我们先说明如何利用它来证明该命题。注意，对于所有 $v \in V_T$，都有 $\alpha_v \ge 1$。由于 $d > 1$，我们有

$$\alpha_v \ge 1 + \frac{1}{d}(\deg_T(v) - 1) \ge \frac{\deg_T(v)}{d} \ .$$

注意，$\mathcal{I}_T(r,v) = 0$ 对所有固定的 $v \in F$ 均成立。因此，加权总影响可界定如下 ws

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V_T: v\neq r}\mathcal{I}_T(r,v)\cdot\deg_T(v)^{1/\chi} &= \sum_{v\in V_T\setminus F: v\neq r}\mathcal{I}_T(r,v)\cdot\deg_T(v)^{1/\chi} \\
&\le \sum_{v\in V_T\setminus F: v\neq r}|\mathcal{I}_T(r,v)|(d\alpha_v)^{1/\chi} \\
&= (d\alpha_r)^{1/\chi}\sum_{v\in V_T\setminus F: v\neq r}\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi}|\mathcal{I}_T(r,v)| \\
\text{(since } R_v\Phi(R_v)\le 1) \quad &\le (d\alpha_r)^{1/\chi}\sum_{v\in V_T\setminus F: v\neq r}\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi}\frac{|\mathcal{I}_T(r,v)|}{R_v\Phi(R_v)} \\
&= (d\alpha_r)^{1/\chi}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{v\in L(h)\setminus F}\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi}\frac{|\mathcal{I}_T(r,v)|}{R_v\Phi(R_v)} \ .
\end{aligned} \tag{43}$$

注意，在 (43) 中，不等式 $R_v\Phi(R_v) \le 1$ follows from 引理6.1中 $\Phi(\cdot)$ 的定义。将 (41) 代入上述不等式，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V: v\neq r}\mathcal{I}_T(r,v)\cdot\deg_T(v)^{1/\chi} &\le \left(d^2\alpha_r\right)^{1/\chi}\sqrt{\deg_T(r)}\sum_{h=1}^{\infty}(d\kappa)^{(h-1)/\chi} \\
\text{(since } d\kappa<1) \quad &\le (d^2\alpha_r)^{1/\chi}\sqrt{\deg_T(r)}\cdot\frac{1}{1-(d\kappa)^{1/\chi}} \\
\left(\text{by } \frac{1}{2}<\frac{1}{\chi}<1\right) \quad &\le \left(d^2\alpha_r\deg_T(r)\right)^{1/\chi}\cdot\frac{1}{1-(d\kappa)^{1/\chi}} \\
(\text{by } \alpha_r\le\alpha) \quad &\le \frac{d^{2/\chi}\alpha^{1/\chi}}{1-(d\kappa)^{1/\chi}}\cdot\deg_T(r)^{1/\chi} \ .
\end{aligned}$$

令参数 $D = D(d, ||\boldsymbol{\lambda}||_\infty) = {}_{1-\frac{d^{2/\chi}}{d\kappa}}()^{1/\chi}$，该命题随即成立。

通过证明 (41) 成立，我们完成命题 7.3 的证明。我们对 h 使用归纳法证明 (41)。基础情形对应于 $h = 1$。令 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 表示根节点 r 的所有自由子节点，即 $v_i \notin F$。另外，令 Γ 表示 r 的所有子节点构成的集合。考虑从 r 到自由子节点 $v_i \notin F$ 的影响。对于硬核模型 $\mu_{T,\boldsymbol{\lambda}}$，由标准方法可知

$$\mathcal{I}_T(r, v_i) = \frac{R_{v_i}}{1 + R_{v_i}} \ . \tag{44}$$

因此，我们得到

$$\frac{\mathcal{I}_T(r, v_i)}{R_{v_i}\Phi(R_{v_i})} = \frac{\sqrt{R_{v_i}(R_{v_i}+1)}}{R_{v_i}+1} = \sqrt{\frac{R_{v_i}}{R_{v_i}+1}} \le 1 \ .$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in L(1)\setminus F} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi} \frac{\mathcal{I}_T(r,v)}{R_v\Phi(R_v)} &\le \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_{v_i}^{1/\chi}}{\alpha_r^{1/\chi}} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_{v_i}^{1/\chi}}{(1+\frac{1}{d}\sum_{v_j\in\Gamma}\alpha_{v_j})^{1/\chi}} \\
(\text{by } \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \Gamma) \quad &\le \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_{v_i}^{1/\chi}}{(1+\frac{1}{d}\sum_{j=1}^k \alpha_{v_j})^{1/\chi}} \\
&\le d^{1/\chi} \cdot \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_{v_i}^{1/\chi}}{(\sum_{j=1}^k \alpha_{v_j})^{1/\chi}} \ .
\end{aligned}$$

令 $q \ge 1$ 满足 $\frac{1}{q} + \frac{1}{\chi} = 1$。注意到 $q = \frac{\chi}{\chi-1}$，而由于 $\chi \in (1, 2)$，我们有 $\frac{1}{q} \le \frac{1}{2}$。根据 Hölder 不等式，我们得到

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{v_i}^{1/\chi} \le k^{1/q} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_v\right)^{1/\chi} \le \sqrt{\deg_T(r)} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{v_i}\right)^{1/\chi} \ .$$

这意味着

$$\sum_{v\in L(1)\setminus F} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi} \frac{\mathcal{I}_T(r,v)}{R_v\Phi(R_v)} \le d^{1/\chi}\sqrt{\deg_T(r)} \cdot (d\kappa)^0 \ .$$

以上证明了归纳法的基础情形。

现在我们专注于证明归纳步骤。对于 $\ell \ge 1$，假设当 $h = \ell$ 时（41）成立。我们证明，当 $h = \ell + 1$ 时（41）也成立。

对于任意自由顶点 $v \in L(\ell+1) \setminus F$，$v$ 的父节点 $u \in L(\ell)$ 必须是自由的（$u \notin F$），这是由于 F 的定义。对于任意 $u \in L(\ell) \setminus F$，令 u_1、u_2、.....、$u_{k(u)}$ 表示顶点 u 的自由子节点，其中 $0 \le k(u) \le \deg_T(u)$。

由引理 由 7.2 可知，对所有 $[i] \in k(u)$，$\mathcal{I}_T(r, u_i) = \mathcal{I}_T(r, u) \cdot \mathcal{I}_T(u, u_i)$。因此，我们得到

$$\sum_{v\in L(\ell+1)\setminus F} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi} \frac{\mathcal{I}_T(r,v)}{R_v\Phi(R_v)} = \sum_{u\in L(\ell)\setminus F} \left(\frac{\alpha_u}{\alpha_r}\right)^{1/\chi} \frac{\mathcal{I}_T(r,u)}{R_u\Phi(R_u)} \sum_{i=1}^{k(u)} \left(\frac{\alpha_{u_i}}{\alpha_u}\right)^{1/\chi} \frac{\mathcal{I}_T(u,u_i)}{R_{u_i}\Phi(R_{u_i})} R_u\Phi(R_u) \ . \tag{45}$$

由（44）可得

$$\sum_{i=1}^{k(u)}\left(\frac{\alpha_{u_i}}{\alpha_u}\right)^{1/\chi}\frac{\mathcal{I}_T(u,u_i)}{R_{u_i}\Phi(R_{u_i})}R_u\Phi(R_u)\le\sum_{i=1}^{k(u)}\left(\frac{\alpha_{u_i}}{\alpha_u}\right)^{1/\chi}\frac{R_u\Phi(R_u)}{(R_{u_i}+1)\Phi(R_{u_i})}$$

$$\text{(by Hölder's inequality)}\quad\le\left(\frac{\sum_{i=1}^{k(u)}\alpha_{u_i}}{\alpha_u}\right)^{1/\chi}\left(\Phi(R_u)^q\sum_{i=1}^{k(u)}\left(\frac{R_u}{(R_{u_i}+1)\Phi(R_{u_i})}\right)^q\right)^{1/q},\tag{46}$$

其中 $q=(1-1/\chi)^{-1}$。利用 (40) 中的递推关系、引理 6.1 以及 (42) 中 κ 的定义，我们得到 e

$$\left(\Phi(R_u)^q\sum_{i=1}^{k(u)}\left(\frac{R_u}{(R_{u_i}+1)\Phi(R_{u_i})}\right)^q\right)^{1/q}\le\kappa^{1/\chi}\ .$$

将上述结果代入 (46)，得到

$$\sum_{i=1}^{k(u)}\left(\frac{\alpha_{u_i}}{\alpha_u}\right)^{1/\chi}\frac{\mathcal{I}_T(u,u_i)}{R_{u_i}\Phi(R_{u_i})}R_u\Phi(R_u)\le\left(\frac{\sum_{i=1}^{k(u)}\alpha_{u_i}}{\alpha_u}\right)^{1/\chi}\kappa^{1/\chi}\le(d\kappa)^{1/\chi}\ ,\tag{47}$$

其中，最后一个不等式成立是因为

$$\alpha_u=1+\frac{1}{d}\sum_{w:w\text{ is a child of }u}\alpha_w\ge\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k(u)}\alpha_{u_i}\ .$$

将 (47) 代入 (45)，得到

$$\sum_{v\in L(\ell+1)\setminus F}\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_r}\right)^{1/\chi}\frac{\mathcal{I}_T(r,v)}{R_v\Phi(R_v)}\le(d\kappa)^{1/\chi}\sum_{u\in L(\ell)\setminus F}\left(\frac{\alpha_u}{\alpha_r}\right)^{1/\chi}\frac{\mathcal{I}_T(r,u)}{R_u\Phi(R_u)}$$

$$\le d^{1/\chi}\sqrt{\deg_T(r)}(d\kappa)^{\ell/\chi}\ .$$

这就证明了归纳步骤，并完成了 (41) 的证明。

命题得证。 □

8. 单体-二聚体模型——定理 2.2 的证明

我们首先介绍线图的概念。给定一个图 $G=(V,E)$，我们有图 L 的线图 G，其中 L 中的每个顶点都是 G 中的一条边；当且仅当 $e\cap f\neq\emptyset$时， e和 $f\in E$ 在 L 中相邻。另请注意，如果 Δ 是 G的最大度，那么 L 中的最大度至多为 2Δ。

这里我们使用一个标准观察：在图 $G=(V,E)$上、边权重为 λ 的单体-二聚体模型，对应于在线图 L 上、逸度为 λ的硬核模型。

我们通常将单体-二聚体模型视为关于 $\{\pm1\}^E$ 的分布，其中对于任意 $X\in\{\pm1\}^E$，任意 $e\in E$, $X_e=+1$分别表示 e 属于匹配和 e 不属于匹配。定理 2.2 是以下更一般结果的一个推论。

定理 8.1. 对于任意常数 $\lambda>0$，存在两个常数 $M_1=M_1(\lambda)$ $M_2=M_2(\lambda)$，使得对于任何具有 n 个顶点、最大度为 $\Delta\ge2$ 且有 $m\ge10^6(1+\lambda+1/\lambda)^3\Delta^{3/2}$ 条边的图 $G=(V,E)$，以下结论成立：

设 μ_G 为边权重为 λ的 G 上的单体-二聚体模型。则 μ_G上的格劳伯动力学具有如下混合时间：

$$T_{\text{mix}}\le(M_1\Delta)^{M_2\sqrt{\Delta}}n\log n.$$

具体而言，定理 8.1 推出定理 2.2，这是因为对于 $G(n, d/n)$ 的实例，以 $1-o(1)$ 的概率，最大度为 $\Delta = \Theta(\text{对数 } n \text{对数对数 } n)$（例如参见引理 ~~8.1)，~~ 而边数为 $\Theta(n) = \omega(\Delta^{3/2})$。注意，边数的界可由 Chernoff 界直接得到。根据定理 8.1，我们知道，对于 $G(n, d/n)$ 的实例，以 $1-o(1)$ 的概率，

$$T_{\text{mix}} \leq n^{1+C\sqrt{\frac{\log\log n}{\log n}}},$$

其中某个常数 C 仅取决于 λ和 d。

从现在起，我们将重点转向证明定理 8.1。与硬核模型的情形一样，我们考虑单体-二聚体模型更一般的非齐次版本。也就是说，考虑图 $G = (V, E)$，并令 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_e)_{e\in E} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^E$ 为赋予图 G 每条边的权重。令 $\mu_{\boldsymbol{\lambda}}$ 为所有匹配 σ 上的分布，使得 $\mu_{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma) \propto \prod_{e\in E:\ \sigma(e)=+1} \lambda_e$。

我们有以下结果，可由 [BGK+07、CLV21] 直接推出。

引理 8.2。对于任意最大度为 Δ 的图 $G = (V, E)$，以及任意边权重 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_e)_{e\in E} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^E$，由 G 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 指定的单体 - 二聚体模型的吉布斯分布是 $\left(2\sqrt{1 + ||\boldsymbol{\lambda}||_\infty \Delta}\right)$- 谱独立的。

[CLV21] 中的定理 6.1 与引理 8.2 相同，唯一的区别是前者针对齐次边权重，即 $\lambda_e = \lambda$ 对所有 $e \in E$均成立。结合 [CLV21] 中的谱独立性分析与 [BGK+07]中的相关性衰减分析，可以推广该定理并得到引理 8.2。

此外，我们有以下关于完全谱独立性的推论。

推论 8.3. 对于任意常数 $\lambda > 0$ 以及任意图 $G = (V, E)$，若其有 n 个顶点且最大度为$\Delta \geq 2$，则以下结论成立：

设 μ为 G 上的单体-二聚体模型，边权重为 λ。那么，存在常数 $K = 4\sqrt{1+\lambda}$，使得 μ_G 是 (η, ξ)-完全谱独立的，条件为

$$\eta \leq K\sqrt{\Delta} \qquad \textit{and} \qquad \xi = 1.$$

证明。考虑 $\mu_{\boldsymbol{\lambda}}$，即 G 上的非齐次单体-二聚体模型，其边权重为 $\boldsymbol{\lambda} \in (0, \lambda(1+\xi)]^E$。只需证明 $\mu_{\boldsymbol{\lambda}}$ 具有参数为 η的谱独立性。根据引理 8.2，我们有$\mu_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是 $\left(2\sqrt{1 + ||\boldsymbol{\lambda}||_\infty \Delta}\right)$-谱独立的。因此，我们有

$$2\sqrt{1 + ||\boldsymbol{\lambda}||_\infty \Delta} = 2\sqrt{1 + \lambda(1+\xi)\Delta} = 2\sqrt{1 + 2\lambda\Delta} \leq K\sqrt{\Delta}\ .$$

□

我们还推导出了边缘稳定性结果。

定理 8.4（单体-二聚体模型的稳定性）。对于任意常数 $\lambda > 0$，设图 $G = (V, E)$ 有n 个顶点，最大度为 $\Delta \geq 2$，令 μ 为 G上边权重为 λ的单体-二聚体模型。则 μ 是 $(\lambda+2)^3\Delta^2$-边缘稳定的。

证明。设 $\zeta = (\lambda+2)^3\Delta^2$。对于 $\Lambda \subseteq E$，给定可行构型 $\tau \in \{\pm\}^\Lambda$ 和 $e \in E \setminus \Lambda$，令 e处吉布斯边缘分布的比值为

$$R_G^{\Lambda,\tau}(e) = \frac{\mu_e^{\Lambda,\tau}(+1)}{\mu_e^{\Lambda,\tau}(-1)}\ . \tag{48}$$

回顾一下，对于边缘稳定性，我们需要满足：对于任意 $S \subseteq \Lambda$,

$$R_G^{\Lambda,\tau}(e) \leq \zeta \qquad \text{and} \qquad R_G^{\Lambda,\tau}(e) \leq \zeta \cdot R_G^{S,\tau_S}(e)\ . \tag{49}$$

第一个界很容易得到，因为 $R^{\Lambda}{}_{G}{}^{\tau}(e) \leq \mu^{\Lambda}{}_{e}{}^{\tau}(+1) \leq \frac{\lambda}{1+\lambda} \leq \zeta$。我们重点讨论第二个界。

假设 $e=\{u,w\}$。令 N_u （分别为 N_w）表示与 u （分别为 w）关联、但不包括边 e 的边集。我们可以假设 $N_u \cup N_v$ 中的边都没有被 τ 设为 $+1$；否则， $R^{\Lambda,\tau}_G(e)=0$，且 (49) 显然成立。

接下来，我们推导 $\mu^{S,\tau_S}_e(+1)$ 的一个下界。令集合 $F_u = N_u \setminus S$ 和 $F_w = N_w \setminus S$。此外，令 $F_e = F_u \cup F_w$。我们称 F_e 为自由边集，因为它对应于在 τ_S 下未固定的边集。

令 $\boldsymbol{\sigma}$ 按照 $\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}$ 中的分布取值，我们有

$$\mu^{S,\tau_S}_e(+1) \geq \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot \Pr[\forall f\in F_e,\, \boldsymbol{\sigma}(f)=-1]\ . \tag{50}$$

我们用 Ω 表示 $\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}$ 的支撑集。我们将 Ω 划分为两部分

$$\Omega_- = \{\sigma\in\Omega \mid \forall f\in F_e,\, \sigma(f)=-1\}$$
$$\Omega_+ = \{\sigma\in\Omega \mid \exists f\in F_e,\, \sigma(f)=+1\}\ .$$

暂且假设 $\Omega_+\neq\emptyset$，即该集合非空。

对于一个构型 $\sigma\in\Omega_+$，注意到满足 $\sigma(f)=\sigma(f')=1$ 的边 f、$f'\in F_e$ 至多有两条。因此，在 σ 下， F_e 中被设为 $+1$ 的边数至少为 1，至多为 2。此外，由于 σ 是一个匹配，如果有两条边 f、$f'\in F_e$ 满足 $\sigma(f)=\sigma(f')=1$，那么它们必定属于不同的集合，例如 $f\in F_u$ 和 $f'\in F_w$。

对于 $\sigma\in\Omega_+$，设 $\eta\in\Omega_-$ 是一个构型，其在 F_e之外的边的赋值与 σ 一致。注意，由于 $\eta\in\Omega_-$，对于所有 $f\in F_e$，我们有 $\eta(f)=-1$。

此外，注意到 η 和 σ 的构型至多在两条边上不同，我们有 th at

$$\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}(\eta) \geq \frac{\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}(\sigma)}{\max\{\lambda^2,1\}} \geq \frac{\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}(\sigma)}{1+\lambda^2}\ . \tag{51}$$

最后，注意到 σ 可由 η 以及 F_e 中两个构型不一致的边唯一确定；也就是说，回想一下，我们假设 σ 和 τ 仅在 F_e处不一致。因此，利用（51），我们得到

$$\frac{\sum_{\eta\in\Omega_-}\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}(\eta)}{\sum_{\tau\in\Omega_+}\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}(\tau)} \geq \frac{1}{(1+\lambda^2)(|F_u|+1)\times(|F_w|+1)} \geq \frac{1}{(1+\lambda^2)\Delta^2}\ .$$

上述结果意味着：对于 $\Omega_+\neq\emptyset$，我们有

$$\Pr[\forall f\in F_e,\, \boldsymbol{\sigma}(f)=-1] \geq \left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)\ , \tag{52}$$

其中回想一下， $\boldsymbol{\sigma}$ 的分布如 $\mu^{S,\tau_S}_{E\setminus S}$所示。此外，对于 $\Omega_+=\emptyset$ 的情形，显然 $\Pr[\forall f\in F_e,\, \boldsymbol{\sigma}(f)=-1]=1$。

因此，我们有

$$\mu^{S,\tau_S}_e(+1) \geq \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\Pr[\forall f\in F_e,\, \boldsymbol{\sigma}(f)=-1] \geq \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right).$$

由于 $R^{\Lambda,\tau}_G(e)$ 随 $\mu^{S,\tau_S}_e(+1)$ 的值增大而增大，我们利用上述结果得到

$$R^{S,\tau_S}_G(e) \geq \frac{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)} \geq \frac{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)}\cdot\frac{R^{\Lambda,\tau}_G(e)}{\lambda}.$$

在第二个不等式中，我们利用了这样一个事实： $R^{\Lambda,\tau}_G(e)\leq\lambda$。

注意到上述结果，即可证明式 (49) 中的第二个不等式

$$\frac{1-\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+(1+\lambda^2)\Delta^2}\right)}\cdot\lambda\le\zeta=(\lambda+2)^3\Delta^2. \qquad \square$$

定理 8.4 的证明至此完成。

最后，我们给出熵的近似张量化的如下界。

引理 8.5. 考虑由 $G=(V,E)$ 和边权重 $\lambda>0$ 指定的单体-二聚体模型的吉布斯分布 μ。对于任意 $k\ge 1$ 和 $H\subseteq E$ 使得 $|H|=k$，以及任意可行钉扎 $\tau\in\{\pm\}^{E\setminus H}$，条件分布 $\mu^{E\setminus H}_{,\,H}{}^{\tau}$ 满足熵的近似张量化，其常数为

$$\mathrm{AT}(k)\le 2k^2\left(1+\lambda+1/\lambda\right)^{2k+2}\ .$$

与定理 8.4 的情形类似，引理 8.5 可直接由引理 3.4（即第一个界）推出，只需利用单体-二聚体模型在 G 上与其线图 L 上的硬核模型之间的联系。因此，我们省略引理 8.5 的证明。

现在我们可以证明定理 8.1。

定理 8.1 的证明。我们设定参数

$$\eta=4\sqrt{1+\lambda}\cdot\sqrt{\Delta},\quad \xi=1,\quad \zeta=(\lambda+2)^3\Delta^2\ .$$

根据推论 8.3 和定理 8.4，吉布斯分布 μ 是 (η,ξ)-完全谱独立的，并且是 ζ-边缘稳定的。设参数

$$\alpha=\min\left\{\frac{1}{2\eta},\frac{\log(1+\xi)}{\log(1+\xi)+\log 2\zeta}\right\}\ .$$

通过简单计算即可验证

$$\frac{1}{\alpha}\le 100(1+\lambda)\sqrt{\Delta}\ .$$

令 $m=|E|$ 并设 $\ell=\lceil\theta m\rceil$，其中

$$\theta=\frac{1}{400\mathrm{e}\Delta(1+\lambda+1/\lambda)^2}\ . \tag{53}$$

由于我们假设 $m\ge 10^6(1+\lambda+1/\lambda)^3\Delta^{3/2}$，因此有 $1/\alpha\le\ell<m$。根据定理 4.7，吉布斯分布 μ 满足参数为

$$C=\left(\frac{em}{\ell}\right)^{1+1/\alpha}\le\left(\frac{e}{\theta}\right)^{1+1/\alpha}\le\frac{1}{2}(A\Delta)^{B\sqrt{\Delta}}\ , \tag{54}$$

其中常数 $A=A(\lambda)$ 和 $B=B(\lambda)$。

令 Ω 表示 μ 的支撑集。对于任意 $f\colon\ \Omega\to\mathbb{R}_{>0}$，我们有

$$\mathrm{Ent}_\mu(f)\le\frac{C}{\binom{m}{\ell}}\sum_{S\in\binom{E}{\ell}}\mu\left(\mathrm{Ent}_S(f)\right)\ ,$$

其中 C 是式 (54) 中的参数，而请回忆 $m=|E|$。

我们需要考虑由边子集 S 诱导的子图。对于任意 $S\subseteq E$，令 $C(S)$ 表示 $G(V,S)$ 中至少包含一条边的连通分量集合。稍微滥用一下记号，我们用 $U\in C(S)$ 表示连通分量 U 中的边集。

根据　根据吉布斯分布的条件独立性和引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\mu(f) &\le \frac{C}{\binom{m}{\ell}} \sum_{S\in\binom{E}{\ell}} \sum_{U\in C(S)} \mu\left(\mathrm{Ent}_U(f)\right) \\
\text{(by Lemma 8.5)} \quad &\le \frac{C}{\binom{m}{\ell}} \sum_{S\in\binom{E}{\ell}} \sum_{U\in C(S)} \mathrm{AT}(|U|) \sum_{e\in U} \mu[\mathrm{Ent}_e(f)] \\
&\le C \sum_{e\in E} \mu[\mathrm{Ent}_e(f)] \sum_{k\ge 1} \mathrm{AT}(k) \Pr[|C_e| = k] \\
&\le C \sum_{e\in E} \mu[\mathrm{Ent}_e(f)] \sum_{k\ge 1} \left(2k^2 \left(1+\lambda+1/\lambda\right)^{2k+2}\right) \Pr[|C_e| = k] \ ,
\end{aligned}$$

其中， C_e 是 $G(V,S)$中包含 e的连通分量，而 S 是从 $\binom{E}{\ell}$ 中均匀随机抽样得到的。此时，我们需要给概率项 $\Pr[|C_e| = k]$ 找一个界。

考虑 G的线图 L 。注意， L 的最大度 Δ_L 至多为 2Δ。此外，令v_e 表示 L 中对应于 G里的边 e 的顶点。

假设我们抽取 ℓ 个顶点　　从图 L中均匀随机抽样。令 $C(v_e)$表示 L[中的连通分量　　$\hat{}$
S]包含顶点 v_e的连通分量。那么，显然概率 $\Pr[|C_e| = k]$ 等于概率 $\Pr[|C(v_e)| = k]$。回想一下，$\Pr[|C_e| = k]$ 指的是从 G 中均匀随机选取边，而 $\Pr[|C(v_e)| = k]$指的是从 L中均匀随机选取顶点。

由 [CLV21，引理 4.3], 可得

$$\begin{aligned}
\Pr[|C_e| = k] = \Pr[|C(v_e)| = k] &\le \frac{\ell}{m}(2\mathrm{e}\Delta_L\theta)^{k-1} \le \frac{\ell}{m}(4\mathrm{e}\Delta\theta)^{k-1} \\
&\le \left(\frac{1}{100(1+\lambda+1/\lambda)^2}\right)^{k-1} \ ,
\end{aligned}$$

the 最后一个不等式由 (53) 中定义的 $\ell = \lceil \theta m \rceil$ for θ 推出。由此可得 th　　at

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\mu(f) &\le C \sum_{e\in E} \mu[\mathrm{Ent}_e(f)] \sum_{k\ge 1} \left(2k^2 \left(1+\lambda+1/\lambda\right)^{2k+2}\right) \left(\frac{1}{100(1+\lambda+1/\lambda)^2}\right)^{k-1} \\
&\le (A\Delta)^{B\sqrt{\Delta}} \sum_{e\in E} \mu[\mathrm{Ent}_e(f)],
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 (54) 得出。注意到 $m \le n\Delta$。我们有

$$T_{\mathrm{mix}} \le \left\lceil (A\Delta)^{B\sqrt{\Delta}} m \left(\log\log\frac{1}{\mu_{\min}} + \log(2) + 2\right)\right\rceil \le (M_1\Delta)^{M_2\sqrt{\Delta}} n\log n,$$

其中 $M_1 = M_1(\lambda)$ 和 $M_2 = M_2(\lambda)$ 是仅依赖于 λ 的两个常数。 □

致谢

Charilaos Efthyymiou 获得了 EPSRC New Investigator Award（资助编号：EP/V050842/1）以及华威大学离散数学与应用中心（DIMAP）的支持。

Weiming Feng 获得欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的资助（资助协议编号：947778）。

Weiming Feng 谨向 Heng Guo 致谢，感谢他提供的有益讨论。

[ALO20] Nima Anari、Kuikui Liu 和 Shayan Oveis Gharan。高维扩张图中的谱独立性及其在硬核模型中的应用。载于 FOCS，第 1319–1330 页，2020 年。[BGGˇS22] Ivona Bez´akov´a、Andreas Galanis、Leslie Ann Goldberg 和 Daniel ˇStefankoviˇc。通过谱独立性在有界度图之外实现快速采样。载于 ICALP，LIPIcs 第 229 卷，第 21:1–21:16 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022 年。[BGK+07] Mohsen Bayati、David Gamarnik、Dimitriy Katz、Chandra Nair 和 Prasad Tetali。用于计算匹配数的简单确定性近似算法。载于 STOC，第 122–127 页。ACM，2007 年。[BKZZ13] Jean Barbier、Florent Krzakala、Lenka Zdeborov´a 和 Pan Zhang。重新审视随机图上的硬核模型。Journal of Physics: Conference Series，473(1):012021，2013 年 12 月。[CE15] Amin Coja-Oghlan 和 Charilaos Efthymiou。随机图中的独立集。Random Struct. Algorithms，47(3):436–486，2015 年。[Ces01] Filippo Cesi。吉布斯随机场的熵准因子分解与对数 Sobolev 不等式。《概率论及相关领域》，120(4):569–584，2001 年。[CFYZ21] Xiaoyu Chen、Weiming Feng、Yitong Yin 和 Xinyuan Zhang。通过谱独立性实现任意度数下的格劳伯动力学快速混合。载于 FOCS，第 137–148 页。IEEE，2021 年。[CFYZ22] Xiaoyu Chen、Weiming Feng、Yitong Yin 和 Xinyuan Zhang。二状态反铁磁自旋系统的最优混合。载于 FOCS，第 588–599 页。IEEE，2022 年。[CLV20] Zongchen Chen、Kuikui Liu 和 Eric Vigoda。通过压缩实现直至唯一性阈值的格劳伯动力学快速混合。载于 FOCS，第 1307–1318 页，2020 年。arXiv:2004.09083。[CLV21] Zongchen Chen、Kuikui Liu 和 Eric Vigoda。格劳伯动力学的最优混合：通过高维扩张实现熵因子分解。载于 STOC，2021 年。arXiv:2011.02075。[CMT15] Pietro Caputo、Georg Menz 和 Prasad Tetali。高温下熵的近似张量化。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)，24(4):691–716，2015 年。[CP20] Pietro Caputo 和 Daniel Parisi。通过空间混合实现相对熵的块因子分解。arXiv 预印本 arXiv:2004.10574，2020 年。[DM11] Varsha Dani 和 Cristopher Moore。利用加权二阶矩方法研究随机图中的独立集。载于 RANDOM，Lecture Notes in Computer Science 第 6845 卷，第 472–482 页。Springer，2011 年。[DSC96] P. Diaconis 和 L. Saloff-Coste。有限马尔可夫链的对数 Sobolev 不等式。Ann. Appl. Probab.，6(3):695–750，1996 年。[Eft22] Charilaos Efthymiou。利用拓扑方法超越唯一性的谱独立性。CoRR，abs/2211.03753，2022 年。[EHSV18] Charilaos Efthymiou、Thomas P. Hayes、Daniel Stefankovic 和 Eric Vigoda。稀疏随机图上的随机着色采样。载于 SODA，第 1759–1771 页，2018 年。[FGYZ21a] Weiming Feng、Heng Guo、Yitong Yin 和 Chihao Zhang。在局部引理区域快速采样并计数 k-SAT 解。《ACM 杂志》，68(6):40:1–40:42，2021 年。[FGYZ21b] Weiming Feng、Heng Guo、Yitong Yin 和 Chihao Zhang。超越布尔域的谱独立性带来的快速混合。载于 SODA，第 1558–1577 页，2021 年。[FHY21] Weiming Feng、Kun He 和 Yitong Yin。在局部引理区域对约束满足解进行采样。载于 STOC，第 1565–1578 页。ACM，2021 年。[Fri90] Alan M. Frieze。随机图的独立数。Discret. Math.，81(2):171–175，1990 年。[GGGY21] Andreas Galanis、Leslie Ann Goldberg、Heng Guo 和 Kuan Yang。随机 CNF 公式的解计数。SIAM J. Comput.，50(6):1701–1738，2021 年。[GS14] David Gamarnik 和 Madhu Sudan。稀疏随机图上局部算法的局限。载于 ITCS，第 369–376 页。ACM，2014 年。[GˇSV16] Andreas Galanis、Daniel ˇStefankoviˇc 和 Eric Vigoda。反铁磁伊辛模型与硬核模型配分函数的不可近似性。Combinatorics, Probability and Computing，25(04):500–559，2016 年。[JPV21a] Vishesh Jain、Huy Tuan Pham 和 Thuy-Duong Vuong。原子约束满足问题的采样 Lov´asz 局部引理。arXiv 预印本 arXiv:2102.08342，2021 年。[JPV21b] Vishesh Jain、Huy Tuan Pham 和 Thuy Duong Vuong。谱独立性、与平稳分布的耦合以及格劳伯动力学的谱隙。arXiv 预印本 arXiv:2105.01201，2021 年。[JS89] Mark Jerrum 和 Alistair Sinclair。永久式的近似计算。SIAM J. Comput.，18(6):1149–1178，1989 年。[Kel85] F. P. Kelly。计算机通信系统的随机模型。Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)，47:379–395，1985 年。[KMR+07] Florent Krzakala、Andrea Montanari、Federico Ricci-Tersenghi、Guilhem Semerjian 和 Lenka Zdeborov´a。随机约束满足问题的吉布斯态与解集。Proc. Natl. Acad. Sci. USA，104(25):10318–10323，2007 年。

[Moi19] Ankur Moitra. 近似计数、Lovász 局部引理与图模型中的推断。《ACM 杂志》，66(2):10:1– 10:25，2019年。[Sly10] Allan Sly. 唯一性阈值处的计算转变。载于 FOCS，页码 287–296，2010年。[SS14] Allan Sly 和 Nike Sun. d-正则图上的二自旋模型计数。《概率年刊》，42(6):2383–2416，2014年。[SSˇSY17] Alistair Sinclair、Piyush Srivastava、Daniel ˇStefankoviˇc 和 Yitong Yin. 空间混合与联结常数：最优界。《概率论及相关领域》，168(1-2):153–197，2017年。

附录 A. 谱独立性给出的谱隙界

设 $\mu = \mu_G$ 是图 $G = (V, E)$ 上支撑集为 $\Omega \subseteq \{\pm 1\}^V$ 的吉布斯分布。令 P 表示 μ_G 上格劳伯动力学的转移矩阵。众所周知，P 的特征值均为非负实数 $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_{|\Omega|} \geq 0$。$P$ 的谱隙定义为 $1 - \lambda_2$。谱独立性与谱隙之间存在如下关系。

引理 A.1（[FGYZ21b，定理 3.2]）。设 $\eta \geq 0$ 和 $0 \leq \varphi < 1$ 为两个参数。设 $G = (V, E)$ 是一个具有 $n = |V|$ 个顶点的图。吉布斯分布 μ_G 在 $G = (V, E)$ 上的支撑集满足：对于任意 $0 \leq k \leq n - 2$、大小为 k 的 $\Lambda \subseteq V$ 以及可行构型 $\tau \in \{\pm 1\}^{\Lambda}$，

$$\rho(|\mathcal{I}_G^{\Lambda,\tau}|) \leq \eta \qquad \textit{and} \qquad \rho(|\mathcal{I}_G^{\Lambda,\tau}|) \leq \frac{\varphi}{n-k-1}.$$

μ_G 上的格劳伯动力学的谱隙至少为

$$1 - \lambda_2 \geq \frac{(1-\varphi)^{2+2\eta}}{n^{1+2\eta}}.$$

附录 B. $G(n, p)$ 的结构性质

引理 B.1. 对于实数 $d > 0$ 和 $\epsilon > 0$，令 Δ 为图 $\boldsymbol{G} \sim G(n, d/n)$ 的最大度。则有如下结论：以 $1 - o(1)$ 的概率，图 $\boldsymbol{G}$ 满足

$$(1-\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n} \leq \Delta \leq (1+\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}.$$

利用一阶和二阶矩方法，可以用标准方法推导出上述结果。