arXiv:2302.06189v1 [math.AP] 13 Feb 2023

具有奇异电磁势的洛伦兹力方程的无穷多个周期解*

A. Boscaggin、W. Dambrosio 和 D. Papini

摘要

我们研究洛伦兹力方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}\right) = q\left(E(t,x)+\dot{x}\times B(t,x)\right), \qquad x\in\mathbb{R}^3,$$

在具有奇异电场 E 的物理相关情形下。假设 E 和 B 关于时间是 T-周期的，并满足进一步的适当条件，我们证明了无穷多个 T-周期解的存在性。证明基于 Lusternik–Schnirelmann 型极小极大原理，并采用非光滑临界点理论的框架。我们将结果应用于带电粒子在 Li´énard–Wiechert 势作用下的运动问题，以及相对论受迫开普勒问题。

关键词：洛伦兹力方程、周期解、非光滑临界点理论、Lusternik–Schnirelmann 范畴、Li´énard–Wiechert 势、相对论开普勒问题。AMS 主题分类：34C25、58E05、58E30、70H40、78A35。

1 引言

根据电动力学原理， [16], 缓慢加速的带电粒子在电磁场作用下的运动由洛伦兹力方程支配

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}\right) = q\left(E(t,x)+\dot{x}\times B(t,x)\right), \qquad x\in\mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

其中， m 为粒子的质量， q 为其电荷， c 为光速；此外，电场和磁场 E 和 B 通过势 V 和 A 由通常的关系给出

$$E(t,x) = -\nabla_x V(t,x) - \partial_t A(t,x), \qquad B(t,x) = \mathrm{curl}_x A(t,x). \tag{1.2}$$

众所周知（例如，见 [13]），方程 (1.1) 在形式上是下列作用泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\int_0^T mc^2\left(1-\sqrt{1-\frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}\right)dt + \int_0^T q\left(-V(t,x(t))+A(t,x(t))\cdot\dot{x}(t)\right)dt.$$

*由意大利 INdAM-GNAMPA 资助。

尽管如此，或许由于上述泛函的动能部分缺乏光滑性，直到最近，人们才开始系统地运用临界点理论的方法研究方程 (1.1)。更确切地说， [3, 4] 中在空间 $W^{1,\infty}$ 中引入了严格的变分表述，从而能够采用 Skulzkin [21], 所发展的非光滑临界点理论；由此，针对具有狄利克雷或周期边界条件的方程 (1.1) 的解，得到了若干存在性与多重性结果（另见 [14] 中对拓扑方法的运用）。然而，这两篇论文都未考虑在物理上具有重要意义的奇异电场和磁场情形。

本文旨在为这一方向的研究贡献一份力量。为此，我们借鉴了近期一项关于方程的研究 [6]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}\right) = -\nabla_x V(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

它是平面上方程（1.1）的一种形式，其中 $A \equiv 0$ 和 $q = 1$。更确切地说，在 [6] 中，考虑了具有奇异势 V 的方程（ 1.3 ），该势由 V （ t， x ） $= -\alpha/|x| - U$ （ t， x ）给出（其中 $\alpha > 0$ ），即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}\right) = -\alpha\frac{x}{|x|^3} + \nabla_x U(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.4}$$

需要指出的是， [6] 中为上述方程给出的动机并非源自电动力学，而是相对论天体力学：事实上，方程（1.4）被解释为狭义相对论中描述粒子在受迫开普勒势中运动的一个简单模型（例如参见[2] 以及 [5]中的参考文献）。当然，这一方程也可能在电磁学背景下具有研究价值；实际上，这种解释甚至更加自然，因为要严谨地处理引力理论，就应采用广义相对论的框架：关于从相对论角度对开普勒问题和库仑问题进行有趣讨论与比较，请参见 [15, 问题 34。3]

通过在非光滑临界点理论的框架下运用极小化和极小极大论证， [6] 证明了：对于任意非奇异且关于时间为 T周期的外部扰动 U，方程 (1.4) 有无穷多个 T周期解；特别是，对于任意整数 $k \neq 0$，至少存在两个绕原点 k 圈的 T周期解。当然，这一结果在很大程度上依赖于势 V的奇点 $x = 0$ ，该奇点使作用泛函定义域具有非平凡的拓扑结构：绕原点 k 圈的 T周期路径集合恰好是定义域的一个连通分支，并且其中每个分支（绕数为 $k = 0$的那个除外）都至少包含方程 (1.4) 的两个周期解。需要强调的是，这一结果具有普适性，也就是说，对 U （除了光滑性之外）不需要任何假设：归根结底，这是因为以有界速度绕原点运动的周期路径 x （因为 $|\dot{x}| < c$）先验有界。

本文给出了对 [6] 中适用于洛伦兹力方程 (1.1) 的结果的一种推广。更准确地说，我们考虑定义在形如以下形式的集合 Ω 中的静电势 $V < 0$

$$\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : x \neq r_j(t), \forall\, j = 1, \dots, N\}, \tag{1.5}$$

其中函数 $r_1, \dots, r_N$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 是 T-周期的（对某个 $T > 0$而言），属于 C^1 类，且满足 $\|\dot{r}_i\|_\infty < c$, 并且对每个 $t \in [0,T]$ 和 $i \neq j$，都有 $r_i(t) \neq r_j(t)$。此外，我们假设 V在 Ω 的边界处具有开普勒型爆炸（参见第 3 节中的假设 (V)），且磁势 A满足全局条件

$$|A(t,x)| \leq -\frac{\kappa'}{c}V(t,x), \quad \forall\, (t,x) \in \Omega, \tag{1.6}$$

其中某个 $\kappa' \in (0,1)$。在这些条件下，如果 A、V及其导数在无穷远处都趋于零，我们证明 (1.1) 存在无穷多个 T-周期解（参见定理 3.1）。

我们指出，通过集合 Ω 描述的 V 奇点结构，是以 Li´enard-Wiechert 势的相关情形为模型的（参见 [16] 和第 4 节），对应于一个带电粒子在 N运动的带电粒子 q_1、.....、q_N的作用下运动的情形。在这种情况下，函数 r_1、$\dots r_N$是产生这些势的粒子的运动定律，而 V和 A 由下式给出

$$V(t,x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{1-\eta_i(t_i,x)\cdot\beta_i(t_i)}\,\frac{1}{|x-r_i(t_i)|},\qquad \beta_i(t)=\frac{\dot r_i(t)}{c},\ \eta_i(t,x)=\frac{x-r_i(t)}{|x-r_i(t)|},$$

and

$$A_i(t,x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta_i(t_i)}{c}\,V_i(t,x),$$

其中 $t_i=t_i(t,x)$ 是所谓的推迟时间（见第 4 节中的 (4.2)）。特别地，我们注意到条件 (1.6) 得以满足，因为对于每个 $i=1$、.....、N，$\|\dot r_i\|_\infty<c$。

作为主要结果的第二个应用，回到相对论天体力学的框架下，我们可以证明在空间中存在无穷多个 T-周期解，适用于相对论受迫开普勒问题

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot x}{\sqrt{1-|\dot x|^2/c^2}}\right)=-\alpha\frac{x}{|x|^3}+\nabla_x U(t,x),\qquad x\in\mathbb{R}^3,$$

当 $U>0$ 和 $U\to 0$ 时，对于 $|x|\to+\infty$ 及其梯度（参见第 4 节中的定理 4.2）。特别地，这为上述平面情形在 [6] 中给出的结果提供了部分推广。

为证明定理 3.1，我们采用变分方法，结合了 [3, 4] 和 [6]中的论证。更确切地说，我们考虑泛函 $I\colon W^{1,}{}_T{}^{\infty}\to(-\infty,+\infty]$，其定义如下

$$I(x)=\int_0^T c^2\left(1-\sqrt{1-\frac{|\dot x(t)|^2}{c^2}}\right)dt+\int_0^T\left(-V(t,x(t))+A(t,x(t))\cdot\dot x(t)\right)dt,$$

当 x属于无碰撞路径子集 $\Lambda\subset W^{1,}{}_T{}^{\infty}$时（也就是说，对于每个$t\in[0,T]$，都有 $(t,x(t))\in\Omega$，其中 Ω 与 (1.5) 中相同），且 $\|\dot x\|_\infty\le c$时成立；否则将其延拓至 $+\infty$。该泛函满足 Skulzin 非光滑临界点理论的结构假设，其临界点可导出T-周期解，解满足方程 (1.1)；此外，该泛函在碰撞附近表现良好，即若 x_n趋近于 Λ的边界，则 $I(x_n)\to+\infty$。这些性质可利用 [3, 4, 6] 中已有的论证加以证明，并汇总于引理3.4中。

然而，另一方面，由于这是三维情形，[6] 基于绕数的方法无法使用，因此必须制定不同的策略来实现存在性和多重性。具体而言，受经典力学情形下已有经典结果的启发[1],，我们通过 Lusternik-Schnirelmann 型极小极大原理来寻找周期解。为此，我们必须解决两个主要问题。一方面，我们证明泛函 I 在任意水平值 $c>\inf I=0$处都满足 Palais-Smale 条件的一种弱形式，参见引理 3.5。另一方面，我们证明作用泛函 I 的真定义域包含范畴任意大的紧子集，从而可以定义极小极大水平

$$c_j=\inf_{A\in\mathcal{F}_j}\sup_{x\in A}I(x),\qquad j\in\mathbb{N},$$

其中 $\mathcal{F}_j$ 是定义域 I 中范畴至少为 j的紧子集族，参见引理 3.6；此外，对于任意 $j \geq 3$， $c_j > 0$ 成立，参见引理 3.7。接着，利用 [6] 中证明的一般非光滑泛函极小极大原理（参见第 2 节中的定理 2.5），我们可以证明，对于 $j \geq 3$，数值 c_j 是作用泛函的临界值。若存在由互不相同的临界值组成的序列 c_j，这便能保证方程 (1.1) 存在无穷多个周期解；然而，一般而言，这一事实似乎难以证明。因此，我们调整定理 [4, Th. 1] 证明中的论证，证明只要两个临界值重合，相应的临界值就包含无穷多个临界点。由此，我们推导出泛函 I 有无穷多个临界点。

据我们所知，这类技巧在非光滑框架中似乎是全新的，我们认为所引入的一般性 Lusternik-Schnirelmann 极小极大原理本身也具有独立的研究价值。

本文的安排如下。第 2 节介绍抽象变分框架，并给出 Lusternik-Schnirelmann 型非光滑极小极大原理（定理 2.6）。第 3 节陈述并证明主要结果（定理 3.1）。最后，第 4 节给出前文提到的应用：带电粒子在周期性李纳-维谢尔特势作用下的运动（定理 4.1），以及受扰相对论开普勒问题（定理 4.2）。

2 一项抽象结果

本节将介绍一个关于具有奇点的非光滑泛函存在无穷多个临界点的结果。更确切地说，与 [6] 一样，我们研究的是下述假设中所描述形式的泛函。

假设 2.1. $I\colon X \to (-\infty, +\infty]$ 是一个可分解为如下形式的泛函

$$I(x) = \psi(x) + \Phi(x), \quad \forall\, x \in X,$$

其中，记 $D_\psi = \{x \in X\colon \psi(x) < +\infty\}$ 和 $D_\Phi = \{x \in X\colon \Phi(x) < +\infty\}$,

1. D_Φ 在 X 和 $D_I = D_\psi \cap D_\Phi \neq \emptyset$中是开集；
2. $\psi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是凸且下半连续的；此外，对于任意非空紧集 $A \subset X$，只要 $\sup_A \psi$ 有限， ψ 就在其上连续；
3. $\Phi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 关于 D_Φ是局部利普希茨连续的，即每个 $x \in D_\Phi$ 都有一个邻域，在该邻域内 Φ 是利普希茨连续的；
4. 对于 D_I 中的任意序列 $\{x_n\}$，若 $\operatorname{dist}(x_n, \partial D_\Phi) \to 0$，则有 $I(x_n) \to +\infty$.

现在我们回顾 [19, §3.2]中的一些基本定义。

定义 2.2。设 $I\colon X \to (-\infty, +\infty]$ 满足假设 2.1。

1. 点 $x \in D_I$ 是 I 的临界点，当且仅当

$$\Phi^0(x; z - x) + \psi(z) - \psi(x) \geq 0, \quad \forall\, z \in X,$$

其中

$$\Phi^0(x; u) \coloneqq \limsup_{w \to x,\, t \to 0^+} \frac{\Phi(w + tu) - \Phi(w)}{t}.$$

2. 对于 I，水平值为 c 的 Palais-Smale（简称 PS-）序列是指 X 中满足$I(x_n) \to c$ 且

$$\Phi^0(x_n; z - x_n) + \psi(z) - \psi(x_n) \geq -\epsilon_n \|z - x_n\|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, z \in X, \tag{2.1}$$

对于某个序列 $\epsilon_n \to 0^+$。

注2.3。第 3 节中的泛函 Φ 在其定义域 D_Φ 上实际上属于 C^1 类，因此，

$$\Phi^0(x; u) = d\Phi(x)[u].$$

我们决定在非光滑微积分的框架下介绍这一更为抽象的节，因为一方面，假设 $\Phi \in C^1(D_\Phi)$ 并不能真正简化论证；另一方面，一旦考虑某个 C^1 泛函的截断，局部利普希茨泛函就会立即出现。

我们还需要考虑以下由 [3] 引入的弱 Palais-Smale 条件形式。

定义 2.4。设 $I\colon X \to (-\infty, +\infty]$ 满足假设 2.1，并假设存在一个巴拿赫空间 Y，使得 $X \subset Y$ 且具有连续嵌入。若对每个水平值 c，对于 X 中满足 $I(x_n) \to c$ 的每个 PS 序列 $\{x_n\}$，都存在 $x \in X$ 以及一个子序列 $\{x_{n_k}\}$，使得 x 是 I 的临界点，且 $I(x) = c$，并且 $x_{n_k} \to x$ 在 Y-拓扑中成立，则称泛函 I 在水平值 c 处满足弱 Palais-Smale 条件。

利用一般的非光滑极小极大原理以及 Lusternik-Schnirelmann 范畴，可以证明形如 I 的泛函存在无穷多个临界点。为方便读者，我们在此回顾范畴的定义和基本性质（参见 [1]），以及我们所使用的极小极大原理（在 [6] 中作为 [17, 定理 3.1] 的推广而建立）。

给定 $M \subset X$，$A \subset M$ 关于 M 的范畴记作 $\mathrm{cat}_X(A, M)$，它是满足下述条件的最小整数 k（若存在）：

$$A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_k,$$

其中，对每个 $i = 1, \ldots, k$，$A_i \subset M$ 在 M 中是闭且可缩的。若不存在这样的最小整数，则该范畴为无穷大。范畴具有以下性质，这些性质将在许多情形中用到：

(P1) 若 $A \subset B \subset M$，则 $\mathrm{cat}_X(A, M) \leq \mathrm{cat}_X(B, M)$;

(P2) 若 $A \subset M \subset N$，则 $\mathrm{cat}_X(A, N) \leq \mathrm{cat}_X(A, M)$;

(P3) 若 $A, B \subset M$，则 $\mathrm{cat}_X(A \cup B, M) \leq \mathrm{cat}_X(A, M) + \mathrm{cat}_X(B, M)$;

(P4) 若 $A \subset M$ 是闭集，且 $\varphi \in C(A, M)$ 是一个变形（即它与包含映射 $\iota_A\colon A \to M$ 同伦），则 $\mathrm{cat}_X(A, M) \leq \mathrm{cat}_X(\varphi(A)\ M)$。

定理 2.5. *[6, 定理 2.4]* 设 $I = \psi + \Phi$ 是满足假设 2.1 的泛函，设 B 是 X 中的闭集，$\mathcal{F}$ 是 X 中的紧集族，满足：

(1) $\mathcal{F}$ 关于扩展边界 B 是同伦稳定的，也就是说，对每个 $A \in \mathcal{F}$ 以及每个连续变形 $\eta \in C^0([0,1] \times X, X)$，使得

$$\eta(t, x) = x, \quad \forall\ (t, x) \in (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times B) \qquad \textit{and} \qquad \eta([0,1] \times A) \subset D_\Phi,$$

有 $\eta(\{1\} \times A) \in \mathcal{F}$;

(2) $c := \inf_{A\in\mathcal{F}} \sup_{x\in A} I(x) < +\infty$;

(3) 存在一个闭集 F in X，使得

$$(A \cap F) \setminus B \neq \emptyset, \quad \forall\ A \in \mathcal{F} \qquad and \qquad \sup_B I \leq \inf_F I.$$

那么，对于任意满足 lim sup $I = c$ 的序列 $\{A_n\}$ in $\mathcal{F}$，存在一个位于水平值 c 处的 PS 序列 $\{x_n\} \subset X$ at$^{n\to\infty}$ $_{A_n}$，使得 dist$(x_n, A_n) \to 0$。此外，若 inf$_F$ $I = c$，则还有 dist$(x_n, F) \to 0$。

现在我们可以陈述我们的结果了。对于每个整数 $j \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathcal{F}_j = \{A \subset D_\Phi\ :\ A \text{ compact }, \operatorname{cat}_X(A, D_\Phi) \geq j\}. \tag{2.2}$$

此外，令

$$c_j = \inf_{A\in\mathcal{F}_j} \sup_{x\in A} I(x), \tag{2.3}$$

对于每个满足 $\mathcal{F}_j$ 非空的 $j \in \mathbb{N}$。那么，我们可以证明以下结果。

定理 2.6. 设 $I = \psi + \Phi$ 是一个满足假设 2.1 且在每个水平值 $c >$ inf I 处满足弱 Palais-Smale 条件的泛函。此外，假设存在 $j_0 \in \mathbb{N}$，使得

(i) $\mathcal{F}_j \neq \emptyset$，对每个 $j \geq j_0$(ii) $c_j < +\infty$ 对每个 $j \geq j_0$(iii) $c_{j_0} >$ inf I。

于是，泛函 I 有无穷多个临界点。更确切地说：

(a1) 对每个 $j \geq j_0$， c_j 都是 I的临界值

(a2) 若对某个 $j_2 > j_1 \geq j_0$有 $c_{j_1} = c_{j_2}$，则泛函 I 在水平值 c_{j_1}处有无穷多个临界点。

证明。(a1) 固定 $j \geq j_0$。我们断言，取 $B = \emptyset$、 $F = X$和 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_j$ 时，定理 2.5 的假设均得到满足。事实上，假设 (1) 是范畴的性质（P4）的推论。此外，假设 (2) 由 (ii) 保证，而假设 (3) 显然成立，因为

$$(A \cap F) \setminus B = A \neq \emptyset, \quad \forall\ A \in \mathcal{F}_j$$

and

$$B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \sup_B I = -\infty.$$

因此，我们可以应用定理 2.5，得到在水平值 $c_j \geq c_{j_0} >$ inf I处存在一个 PS 序列。由于 I 在大于 inf I的水平值处满足弱 Palais-Smale 条件，我们可推知在水平值 c_j处存在一个临界点。

(a2) 这里的论证与 [4, 定理 1], 中的论证基本相同，但有三个主要区别。首先，我们的泛函 Φ 是奇异的且局部利普希茨连续，而不是偶的且属于 $C^1(X)$。其次，我们使用 Lusternik-Schnirelmann 范畴，而不是 Krasnoselskii

属；不过，这一点与第一个区别有关。最后，我们使用假设 2.1 中的第 2 项，这比 [4]中要求的 ψ 在其真定义域 D_ψ 上的连续性更弱。

关于弱 Palais–Smale 条件，我们用 $\|\cdot\|_Y$ 表示 Y 中的范数（见定义 2.4），并设 $B_Y(x,r) = \{u \in X\colon \ \|u-x\|_Y < r\}$，它在 X 中是开集，且相对于由 $\|\cdot\|$ 诱导的更强拓扑也为开集。

反设 I 在水平值 $c := c_{j_1} = c_{j_2}$ 处只有 $n \in \mathbb{N}$ 个临界点，我们将其记为 $x_1, \dots, x_n$，并取 $r > 0$ 使得集合 $B_Y(x_m, 2r)$ 两两不相交，且包含于 D_Φ 中（除非另有说明，闭包均相对于 X 中的范数 $\|\cdot\|$ 而取）。我们定义

$$N_\rho = B_Y(x_1,\rho) \cup \cdots \cup B_Y(x_n,\rho), \quad \forall\, \rho > 0,$$

并注意到，通过反证法并利用弱 Palais–Smale 条件，存在 $\epsilon \in (0, r^2)$，使得对于每个 $x \in I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \setminus N_r$，都存在 $\xi_x \neq x$ 使得

$$\psi(\xi_x) - \psi(x) + \Phi^0(x, \xi_x - x) < -\sqrt{\epsilon}\|\xi_x - x\|. \tag{2.4}$$

选择 $A \in \mathcal{F}_{j_2}$ 使得

$$\sup_A I \le c + \epsilon.$$

特别地，$A \subset D_\phi$ 且 $\sup_A I = \max_A I$，因为 ψ 在 A 上有界，因此根据假设 2.1，它在 A 上连续。集合 $B = A \setminus N_{2r}$ 在 X 中是紧的，且 $B \in \mathcal{F}_{j_1}$，因为

$$j_1 < j_2 \le \operatorname{cat}_X(A, D_\Phi) \le \operatorname{cat}_X(B, D_\Phi) + \operatorname{cat}_X\left(\bigcup_{m=1}^n B_Y(x_m, 2r), D_\Phi\right) = \operatorname{cat}_X(B, D_\Phi) + 1$$

由 (P3) 得。因此我们有

$$c \le \max_B I \le \max_A I \le c + \epsilon.$$

我们将 Ekeland 变分原理（另见 [4, 引理 1(iii)]）应用于映射 $\Pi\colon \mathcal{F}_{j_1} \to]-\infty, +\infty]$，使得 $\Pi(A) = \sup_A I$，因为 $\mathcal{F}_{j_1}$ 关于 Hausdorff 度量是完备的

$$\mathrm{d_H}(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} \operatorname{dist}(a,B); \sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b,A)\}$$

and Π 关于同一度量下半连续。于是，我们得到 $C \in \mathcal{F}_{j_1}$ 使得

$$\begin{aligned} \max_C I &\le \max_B I \\ \mathrm{d_H}(B,C) &\le \sqrt{\epsilon} < r \\ \sup_D I &\ge \max_C I - \sqrt{\epsilon}\delta(C,D), \quad \forall\ D \in \mathcal{F}_{j_1}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，Hausdorff 距离是度量空间中紧集之间的距离。特别地，$C \cap N_r = \emptyset$ 且集合 $S = \{x \in C\colon\ c - \epsilon \le I(x)\}$ 包含于 $I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \setminus N_r$，并且在 X中是紧的。

由于映射

$$(x_1, x_2) \mapsto \phi(\xi_x) - \phi(x_1) + \Phi^0(x_2; \xi_x - x_2) + \sqrt{\epsilon}\|\xi_x - x_1\|$$

在 $X \times D_\Phi$ 中上半连续（根据 [9, 命题 2.1.1]），且由 (2.4) 可知它在 $x_1 = x_2 = x \in S$ 上为负，因此对于每个 $x \in S$，都存在一个正数 $\delta_x < \|\xi_x - x\|$，使得 $B_X(x, \delta_x) \subset D_\Phi$，并且

$$\phi(\xi_x) - \phi(u) + \Phi^0(x + h; \xi_x - u) < -\sqrt{\epsilon}\|\xi_x - u\|, \quad \forall\, u \in \overline{B_X(x, \delta_x)},\, h \in \overline{B_X(0, \delta_x)}.$$

由于 S是紧的，存在 y_1、……、$y_\ell \in S$，使得 $S \subset B_1 \cup \cdots \cup B_\ell$，其中 $B_k = B_X\,(y_k,\ \delta_{y_k})$，$1 \le k \le \ell$。注意到，根据构造，$\xi_{y_k} \notin B_k$，因此我们可以取某个正数 $\delta \le \min\{\delta_C/2, \delta_{y_k}, \operatorname{dist}(\xi_{y_k}, \overline{B}_k \cap C) :\ 1 \le k \le \ell\}$，其中 $\delta_C := \min\{\operatorname{dist}(x, \partial D_\Phi) :\ x \in c\} > 0$，因为由（2.5）可知 $C \subset D_\Phi$。

记 η、η_k为 $C \to [0,1]$（$1 \le k \le \ell$）上的连续函数，使得

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } I(x) \ge c \\ 0 & \text{if } I(x) \le c - \epsilon \end{cases} \quad \text{and} \quad \eta_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dist}(x, C \setminus B_k)}{\sum_{m=1}^{\ell} \operatorname{dist}(x, C \setminus B_m)} & \text{if } x \in B_k \cap C \\ 0 & \text{if } x \in C \setminus B_k \end{cases}$$

从而$\sum_{k=1}^{\ell} \eta_k = 1$ 在 S上。考虑函数 $\beta : [0,1] \times C \to X$，定义如下

$$\begin{aligned} \beta(t, x) = \beta_t(x) &:= x + t\delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|}(\xi_{y_k} - x) \\ &= \left[1 - t\delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|}\right] x + t\delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|}\xi_{y_k} \end{aligned}$$

它是连续的，并且根据构造，对所有的（t，x），都满足 $\|\beta_t(x) - x\| \le \delta < \delta_C$。因此，$\beta_1$ 是 D_Φ 中 C 的一个变形（注意，β_0 在 C上是恒等映射），且 $D := \beta_1(C)$ 根据性质（P4）属于 $\mathcal{F}_{j_1}$。

由估计式

$$t\delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|} \le \delta \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\operatorname{dist}(\xi_{y_k}, \overline{B}_k \cap C)} \le \sum_{k=1}^{\ell} \eta_k(x) \le 1,$$

我们推得，$\beta_t(x)$是 x、ξ_{y_1}、……、ξ_{y_ℓ}的凸组合，因此，

$$\psi(\beta_t(x)) \le \left[1 - t\delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|}\right] \psi(x) + t\delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|}\psi(\xi_{y_k}).$$

在 Φ 的一侧，根据 Lebourg 定理 [9, 定理 2.3.7]，对于每个 $x \in C$，存在 $\tau = \tau(x) \in (0, 1)$ 和 $\zeta \in \partial\Phi(\beta_\tau(x))$，使得 $\Phi(\beta_1(x)) - \Phi(x) = \langle \zeta, \beta_1(x) - x \rangle$，其中 $\partial\Phi(x)$ 是 Φ 在 x 处的广义梯度（参见 [9, §2.1]）。因此，我们有

$$\Phi(\beta_1(x)) - \Phi(x) \le \Phi^0(\beta_\tau(x); \beta_1(x) - x) \le \delta\eta(x) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k} - x\|}\Phi^0(\beta_\tau(x); \xi_{y_k} - x)$$

根据 [9, 命题 2.1.1-2]。由此我们可以估计

$$\begin{aligned} I(\beta_1(x)) &\le \left[1-\delta\eta(x)\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k}-x\|}\right]\psi(x)+\delta\eta(x)\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k}-x\|}\psi(\xi_{y_k}) \\ &\quad+\Phi(x)+\delta\eta(x)\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k}-x\|}\Phi^0(\beta_\tau(x);\xi_{y_k}-x) \\ &= I(x)+\delta\eta(x)\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\eta_k(x)}{\|\xi_{y_k}-x\|}\left[\psi(\xi_{y_k})-\psi(x)+\Phi^0(\beta_\tau(x);\xi_{y_k}-x)\right]. \end{aligned}$$

现在，根据构造，对于所有的 $k=1,\dots,\ell$， $\|\beta_\tau(x)-x\|\le\delta\le\delta_{y_k}$，这意味着

$$\psi(\xi_{y_k})-\psi(x)+\Phi^0(\beta_\tau(x);\xi_{y_k}-x)<-\sqrt{\epsilon}\|\xi_{y_k}-x\|,\quad\forall\, x\in\overline{B}_k,\ k=1,\dots,\ell.$$

因此，我们有

$$I(\beta_1(x))<I(x)-\delta\eta(x)\sqrt{\epsilon}\sum_{k=1}^{\ell}\eta_k(x)<I(x)-\delta\eta(x)\sqrt{\epsilon}\quad\forall\, x\in S.$$

另一方面，如果 $x\in C\setminus S$，我们有 $\eta(x)=0$，并且 $I(\beta_1(x))=I(x)<c-\epsilon$。

我们可以选择 $x_0\in C$，使得 $I(\beta_1(x_0))=\max I(\beta_1(C))=\max I(D)\ge c$，因为 $D\in\mathcal{F}_{j_1}$。由此可得 $x_0\in S$，并且

$$c\le\max_D I=I(\beta_1(x_0))<I(x_0)-\delta\eta(x_0)\sqrt{\epsilon}\le I(x_0),$$

并且，因此， $\eta(x_0)=1$，且

$$\max_D I<I(x_0)-\delta\sqrt{\epsilon}\le\max_C I-\delta\sqrt{\epsilon}\le\max_C I-\mathrm{d_H}(C,D)\sqrt{\epsilon},$$

这与 (2.5) 矛盾。 □

3 主要结果

本节陈述并证明洛伦兹力方程的主要结果

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}\right)=E(t,x)+\dot{x}\times B(t,x),\qquad x\in\mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

其中，与通常一样，

$$E(t,x)=-\nabla_x V(t,x)-\partial_t A(t,x),\qquad B(t,x)=\mathrm{curl}_x A(t,x). \tag{3.2}$$

注意，不失一般性，我们已将电荷质量比归一化为 1（另一方面，我们倾向于保留光速的数值 c）。

如引言中所述，我们主要关注势V 具有奇点的情形。更确切地说，我们假设 V 的奇点由 N 个函数r_1、……、r_N描述： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 这些函数是 T-周期的（对某个 $T>0$而言），属于 C^1类，满足 $\|\dot{r}_i\|_\infty<c$，且使得$r_i(t)\ne r_j(t)$ 对每个 $t\in[0,T]$ 和 $i\ne j$均成立。因此，我们在开域上讨论方程（3.1）

$$\Omega=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\,:\,x\ne r_j(t),\,\forall\, j=1,\dots,N\}.$$

以下结果成立。

定理 3.1. 假设 $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $A : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 属于 C^1 类，并且关于第一个变量是 T-周期的，且满足以下条件：

(V) 对于每个 $(t,x) \in \Omega$，$V(t,x) < 0$，且存在 $\kappa > 0$ 和 $\delta > 0$，使得对于每个 $i = 1, \dots, N$，

$$V(t,x) \le -\frac{\kappa}{|x - r_i(t)|}, \quad \forall\ (t,x) \in \Omega \ such\ that\ |x - r_i(t)| < \delta; \tag{3.3}$$

(AV1) 存在 $\kappa' \in (0,1)$，使得

$$|A(t,x)| \le -\frac{\kappa'}{c} V(t,x), \quad \forall\ (t,x) \in \Omega;$$

(AV2) 它成立：

$$\lim_{|x|\to\infty} (|V(t,x)| + |\nabla_x V(t,x) + \partial_t A(t,x)| + |\mathrm{curl}_x A(t,x)|) = 0,$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛。

那么，方程 (3.1) 有无穷多个 T-周期解。

注 3.2. 注意，势 A 可以是正则的，也可以是奇异的：然而，在后一种情况下，A 在奇点附近的行为必须与假设 (AV1) 一致。请注意，允许出现 $A \equiv 0$ 这种情况。

注 3.3. 指出假设 (AV2) 可以替换为

$$\lim_{|x|\to\infty} (|V(t,x)| + |\nabla_x V(t,x)| + |D_x A(t,x)|) = 0,$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛。事实上，条件

$$\lim_{|x|\to\infty} (|\nabla_x V(t,x) + \partial_t A(t,x)| + |\mathrm{curl}_x A(t,x)|) = 0, \tag{3.4}$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛，用于证明弱 Palais-Smale 条件成立（参见引理 3.5 的证明，尤其是公式 (3.12)；该公式又是利用由 (3.9) 给出的 $d\Phi$ 表达式从 (3.11) 推导而来的）。若用条件取代 (3.4)，

$$\lim_{|x|\to\infty} (|\nabla_x V(t,x)| + |D_x A(t,x)|) = 0,$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛，则在公式 (3.11) 中使用 (3.8) 而非 (3.9)，同样可以得到相同结论。我们倾向于假设 (AV2)，因为在应用于李纳-维谢尔特势时，它更容易直接验证（参见 (4.11) 和 (4.12)）。

本节其余部分将用于证明定理 3.1，该定理由抽象结果定理 2.6 得出。

因此，我们首先描述变分框架；下文将运用 [3]（不过，其中不允许 V 和 A 有奇异性）以及 [6] 中给出的结果（其中 $A = 0$，但 V 是奇异的）。考虑巴拿赫空间

$$X = \left\{ x \in W^{1,\infty}(0,T;\mathbb{R}^3) : x(0) = x(T) \right\},$$

赋予其通常的范数 $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty$。我们定义泛函 $\psi\colon X \to (-\infty, +\infty]$ 为

$$\psi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}\right) dt & \text{if } \|\dot{x}\|_\infty \le c; \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据第 2 节的记号，我们因此有

$$D_\psi = \{x \in X : \|\dot{x}\|_\infty \le c\}.$$

此外，我们考虑 X 的开子集

$$\Lambda = \{x \in X : (t, x(t)) \in \Omega, \quad \forall\, t \in [0, T]\}$$

并定义 $\Phi\colon\ X \to (-\infty, +\infty]$ 为

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(-V(t, x(t)) + A(t, x(t)) \cdot \dot{x}(t)\right) dt & \text{if } x \in \Lambda; \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

从而 $D_\Phi = \Lambda$。最后，我们定义作用泛函 $I\colon\ X \to (-\infty, +\infty]$ 为

$$I(x) = \psi(x) + \Phi(x), \quad \forall\, x \in X,$$

并回顾记号 $D_I = D_\psi \cap D_\Phi$。

为进一步方便起见，我们注意到假设 (AV1) 蕴含

$$-V(t, x(t)) + \dot{x}(t) \cdot A(t, x(t)) \ge (1 - \kappa') \left(-V(t, x(t))\right), \quad \forall\, x \in D_I,\, t \in [0, T], \tag{3.5}$$

然后，根据假设 (V),

$$\Phi(x) = \int_0^T \left(-V(t, x(t)) + \dot{x}(t) \cdot A(t, x(t))\right) dt > 0, \quad \forall\, x \in D_I. \tag{3.6}$$

考虑到 $\psi \ge 0$ 并且 $I = +\infty$ 在 D_I之外，我们推得

$$I(x) > 0, \quad \forall\, x \in X. \tag{3.7}$$

在下一个引理中，我们证明该泛函满足第 2 节中的结构性假设 2.1，而且其临界点对应于洛伦兹力方程 (3.1) 的经典 T-周期解。

引理3.4。泛函 I 满足假设 2.1。此外，泛函 ψ 关于一致收敛是下半连续的，即：若 $x \in X$ 且 $\{x_n\}$ 是 D_ψ 中的一个序列，使得$x_n \to x$ 在 $[0, T]$上一致收敛，则 $x \in D_\psi$并且

$$\psi(x) \le \liminf_{n \to +\infty} \psi(x_n).$$

此外， I的每个临界点 $x \in D_I$都满足：对任意 $t \in [0, T]$，均有 $|\dot{x}(t)| < c$，并对应于方程 (3.1) 的一个经典 T-周期解。

证明。上述结论的大部分内容已在 [6, 命题 3.2] 中得到证明（而该命题又基于 [3] 中相应的结果）；事实上，泛函 ψ 与其中考虑的泛函相同，而尽管存在磁项， Φ在开集 $D_\Phi = \Lambda$上仍属于 C^1 类，其中

$$d\Phi(x)[y] = \int_0^T \left(-\nabla_x V(t, x(t)) \cdot y(t) + A(t, x(t)) \cdot \dot{y}(t) + ((D_x A(t, x(t))^T \dot{x}(t)) \cdot y(t)\right) \, dt, \tag{3.8}$$

参见 [3, 引理 1]（在上述公式中，项 $(D_x A)^T \dot{x}$ 表示雅可比矩阵 $D_x A$ 的转置与（列）向量 $\dot{x}$的乘积）。注意，通过分部积分，

$$\int_0^T A(t, x(t)) \cdot \dot{y}(t) \, dt = -\int_0^T \partial_t A(t, x(t)) \cdot y(t) \, dt - \int_0^T (D_x A(t, x(t))\dot{x}(t)) \cdot y(t) \, dt$$

由此，再结合恒等式

$$((D_x A(t, x(t))^T \dot{x}(t)) \cdot y(t) - (D_x A(t, x(t))\dot{x}(t)) \cdot y(t) = (\dot{x}(t) \times \operatorname{curl}_x A(t, x(t))) \cdot y(t),$$

我们可以将 $d\Phi$ 改写为等价形式

$$d\Phi(x)[y] = \int_0^T ((-\nabla_x V(t, x(t)) - \partial_t A(t, x(t))) \cdot y(t) + (\dot{x}(t) \times \operatorname{curl}_x A(t, x(t))) \cdot y(t)) \, dt. \tag{3.9}$$

利用此公式并回顾 (3.2)，可以用与 [6, 命题 3.3] 完全相同的论证，证明 I 的临界点会导出方程 (3.1) 的经典 T-周期解（另见[3, 定理 2]）。

唯一需要稍加注意之处，是边界爆破性质（即假设 2.1 的第 4 项）的证明；下面给出完整细节。首先，我们注意到

$$\partial D_\Phi = X \setminus \Lambda = \{x \in X : \ \exists\, i \in \{1, \dots, N\} \ \exists\, t_0 \in [0, T] : \ x(t_0) = r_i(t_0)\}.$$

因此，考虑 $\{x_n\}$ 在 D_I 中的一个序列，使得 $d_n := \operatorname{dist}(x_n, \partial D_\Phi) \to 0$ ，并相应地，取$y_n \in \partial D_\Phi$ 使得 $\|x_n - y_n\| \le 2d_n$。由于对任意 n都有 $\|\dot{x}_n\|_\infty \le c$，我们得到

$$\|\dot{y}_n\|_\infty \le c + \|\dot{y}_n - \dot{x}_n\|_\infty \le c + \|y_n - x_n\| \le c + d_n \le c + 1$$

当 n 足够大时。此外，由于对某些 $t_n \in [0, T]$ 和 $i_n \in \{1, \dots, N\}$， $y_n(t_n) = r_{i_n}(t_n)$，我们有

$$\|y_n - r_{i_n}\|_\infty \le (2c + 1)T$$

因此，序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有界。由于 $\|x_n - y_n\| \le 2d_n$，序列 $\{x_n\}$ 在 X 中也有界。因此，Ascoli-Arzel`a 定理保证存在一个连续函数 z，使得在取子序列后， $x_n \to z$ 和 $y_n \to z$ 在 $[0, T]$上一致收敛。因此， $z(0) = z(T)$，且对某些 $t_0 \in [0, T]$（序列 t_n 的极限点）和 $i_0 \in \{1, \dots, N\}$（序列 i_n 的极限点）， $z(t_0) = r_{i_0}(t_0)$。此外，在利普希茨连续性条件中取极限

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| \le c|t_2 - t_1|, \quad \text{for every } t_1, t_2 \in [0, T],$$

我们很容易看出 $z \in D_\psi \subset X$。因此，函数 $z - r_{i_0}$ 是利普希茨连续的，所以

$$\int_0^T \frac{1}{|z(t) - r_{i_0}(t)|} \, dt = +\infty.$$

因此，由 (V) 和 (AV1)，并利用 Fatou 引理，我们得到

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_0^T\left(-V(t,x_n(t))+A(t,x_n(t))\cdot\dot{x}_n(t)\right)\,dt\geq\liminf_{n\to+\infty}\int_0^T\left(-(1-\kappa')\,V(t,x_n(t))\right)\,dt$$

$$\geq(1-\kappa')\int_0^T\liminf_{n\to+\infty}\left(-V(t,x_n(t))\right)\,dt\geq\kappa\,(1-\kappa')\int_0^T\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{|x_n(t)-r_{i_0}(t)|}\,dt$$

$$=\kappa\,(1-\kappa')\int_0^T\frac{1}{|z(t)-r_{i_0}(t)|}\,dt=+\infty.$$

由于 $0\leq\psi(x_n)\leq mc^2T$，我们最终得出 $I(x_n)\to+\infty$，这正是所需的结论。 □

现在请注意

$$\inf_X I=0.$$

事实上，我们已经注意到 $I>0$，参见 (3.7)。此外，对于满足 $|\xi_n|\to+\infty$ 的序列 $x_n(t)\equiv\xi_n$，由假设 (AV2) 可直接得出 $I(x_n)=\Phi(x_n)\to 0$。鉴于此，下一个结果保证泛函 I 在每个水平值 $c>\inf I=0$ 处都满足弱 Palais-Smale 条件，这符合定义 2.4，其中 $Y=L^\infty(0,T)$。

Lem引理 3.5. 泛函 I 在每个水平值 $c>0$ 处都满足弱 Palais-Smale 条件 .

证明。设 $\{x_n\}\subset X$ 是水平值为 $c>0$ 的 Palais-Smale 序列；顺便指出，$\{x_n\}\subset D_I$，否则 $I(x_n)=+\infty$。证明分为两个步骤。

首先，我们证明序列 $\{x_n\}$ 在 L^∞ 中有界（因此在 X 中也有界）。为此，写作 $x_n=\tilde{x}_n+\bar{x}_n$，其中 $\bar{x}_n=\frac{1}{T}\int_0^T x_n$ 且 $\int_0^T\tilde{x}_n\,dt=0$。由于 $\|\dot{\tilde{x}}_n\|_\infty=\|\dot{x}_n\|_\infty\leq c$，我们有 $\|\tilde{x}_n\|_\infty$ 有界。因此，反设 $\|x_n\|_\infty$ 无界，则可取子序列使得 $|\bar{x}_n|\to+\infty$。于是 $|x_n(t)|\geq|\bar{x}_n|-\|\tilde{x}_n\|_\infty$，从而

$$\min_t|x_n(t)|\to+\infty. \tag{3.10}$$

在 (2.1) 中取 $z=\bar{x}_n$，得到

$$d\Phi(x_n)[-\tilde{x}_n]+\psi(\bar{x}_n)-\psi(x_n)\geq-\epsilon_n\|\tilde{x}_n\|,\quad\forall\,n\in\mathbb{N}, \tag{3.11}$$

也就是说，利用 (3.9)，

$$\psi(x_n)\leq\epsilon_n\|\tilde{x}_n\|+\int_0^T\left((\nabla_xV(t,x(t))+\partial_tA(t,x_n(t)))\cdot\tilde{x}_n(t)+(\dot{x}_n(t)\times\operatorname{curl}_xA(t,x_n(t)))\cdot\tilde{x}_n(t)\right)\,dt. \tag{3.12}$$

因此，回顾 $\|\tilde{x}_n\|_\infty$ 的有界性、(3.10) 以及假设 (AV2)，我们得到 $\psi(x_n)\to 0$。另一方面，出于相同的理由，$\Phi(x_n)\to 0$，从而

$$\psi(x_n)=I(x_n)-\Phi(x_n)\to c>0,$$

一个矛盾。

作为第二步，我们证明 $\{x_n\}$ 的有界性意味着存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$，它在 $L^\infty(0,T)$ 中收敛到泛函 I 在水平值 c 处的临界点 x（也就是说，满足弱 Palais-Smale 条件在水平值 c 处的定义所要求的条件）。为此，我们结合了证明 [6, 命题 3.5] 中使用的论证与证明 [3, 引理 5] 中使用的论证。 □

现在我们考虑分别在 (2.2) 和 (2.3) 中定义的集合 $\mathcal{F}_j$ 和极小极大水平 c_j，并着手证明定理 2.6 的假设 (i)-(ii)-(iii) 成立。

首先，我们处理 (i)-(ii)。

引理 3.6。对于每个整数 $j \geq 1$，有：

(i) $\mathcal{F}_j \neq \emptyset$,

(ii) $c_j < +\infty$.

证明。我们首先证明，当只有一条奇点曲线 r_1 时，(i) 成立。为此，我们在 C_T中使用以下辅助开集：$= \{x \in C([0,T],\mathbb{R}^3) : x(0) = x(T)\}$，并赋予其一致收敛拓扑：

$$\Lambda_1 = \{x \in C_T : x(t) \neq r_1(t), \quad \forall\, t \in [0,T]\}$$
$$\Lambda_0 = \{x \in C_T : x(t) \neq 0, \quad \forall\, t \in [0,T]\}$$

以及连续稠密浸入 $\iota : \ X \to C_T$。我们有 $X \cap \Lambda_1 = \iota^{-1}(\Lambda_1)$，并且根据 $[20, \text{定理 } 16]$，$\iota|_{X\cap\Lambda_1} : X \cap \Lambda_1 \to \Lambda_1$ 是一个同伦等价。由于仿射等距变换$x \mapsto x - r_1$将 Λ_1映射到 Λ_0，因此它与 $\iota|_{X\cap\Lambda_1}$的复合给出了 $X \cap \Lambda_1$ 与 Λ_0之间的一个同伦等价。利用 $[12, \text{推论 } 2.8]$,，我们推得 Λ_0 在 $\mathbb{Z}_2$ 中的杯长是无限的。由于杯长是一个同伦不变量，根据 $[10, \text{引理 } 2.9]$，我们推断 $X \cap \Lambda_1$ 包含范畴任意大的紧集。

现在，我们将证明，对于每个 $j \geq 1$，都存在一个紧的 $A \subset \Lambda \cap D_\psi$，使得 $\text{cat}_X(A,\Lambda) \geq j$；这将推出 (i) 和 (ii)，因为我们的泛函 ψ在 D_ψ上有界。我们刚刚证明了存在一个紧的 $A_1 \subset \Lambda_1$，使得 $\text{cat}_X(A_1, \Lambda_1 \cap X) \geq j$。对于每个 $\lambda > 0$和$x \in X$，我们定义 $x_\lambda = r_1 + \lambda(x - r_1)$，并注意到 $x_\lambda \in \Lambda_1 \cap X$ 当且仅当 $x \in \Lambda_1 \cap X$。我们令$A_\lambda = \{x_\lambda : x \in A_1\}$，它是紧的，且与 A_1 同胚，因此

$$\text{cat}_X(A_\lambda, \Lambda_1 \cap X) = \text{cat}_X(A_1, \Lambda_1 \cap X) \geq j \quad \forall\, \lambda > 0.$$

现在，令 $\delta := \min\{|r_1(t) - r_j(t)| : t \in [0,T],\ j = 2, \ldots, N\} > 0$。由于

$$\|x_\lambda - r_1\| = \lambda\|x - r_1\| \leq \lambda\, \text{dist}(r_1, A_1) < +\infty \quad \forall\, x \in A_1 \text{ and } \forall\, \lambda > 0,$$

对于 $\lambda < \delta/\,\text{dist}(r_1, A_1)$，我们有 $A_\lambda \subset \Lambda$ and

$$\text{cat}_X(A_\lambda, \Lambda) \geq \text{cat}_X(A_1, \Lambda_1 \cap X) \geq j$$

根据性质 (P2)。另一方面，我们有

$$\|\dot{x}_\lambda\|_\infty \leq \|\dot{r}_1\|_\infty + \lambda\|\dot{x} - \dot{r}_1\|_\infty \leq c \quad \forall\, x \in A_1 \quad \text{if } \lambda \leq \frac{c - \|\dot{r}_1\|_\infty}{\max_{x\in A_1} \|\dot{x} - \dot{r}_1\|_\infty}.$$

因此，如果 $\lambda > 0$ 足够小，我们有 $A_\lambda \subset D_\psi \cap \Lambda$ and $A_\lambda \in \mathcal{F}_j$。 □

最后，我们证明定理 2.6 的 (iii) 在 $j_0 = 3$ 下成立（同时可以证明 $c_1 = c_2 = 0$）。

引理 3.7. $c_3 > 0$成立。

证明。反设 $c_3 = 0$，即

$$\inf_{A\in\mathcal{F}_3} \sup_{x\in A} I(x) = 0.$$

于是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $A_n \in \mathcal{F}_3$，使得

$$0 \le \sup_{x\in A_n} I(x) < \frac{1}{n}.$$

当然，$A_n \subset D_I$。因此，考虑到 $I = \psi + \Phi$，且 $\psi \ge 0$ 和 $\Phi > 0$ 属于 D_I（参见（3.6）），我们得到

$$0 \le \psi(x) < \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad 0 \le \Phi(x) < \frac{1}{n}, \quad \forall\, x \in A_n. \tag{3.13}$$

特别地，注意到

$$\psi(x) \ge \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{x}(t)|^2\, dt, \quad \forall\, x \in A_n,$$

我们得到

$$||\dot{x}||_{L^2} < \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \forall\, x \in A_n, \tag{3.14}$$

因此，由索伯列夫不等式（例如，参见 [18, 命题 1.3]），

$$|\tilde{x}(t)| \le \sqrt{\frac{T}{6n}}, \quad \forall\, x \in A_n,\ t \in [0,T], \tag{3.15}$$

其中，按照惯例，我们将 $x(t)$ 写作 $= \bar{x} + \tilde{x}(t)$，且 $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt$。

现在，我们声称，任取一个满足以下性质的常数 $R > 0$

$$\max\{|r_i(t)| :\ t \in [0,T],\ i = 1,\dots,N\} \le \frac{R}{2}, \tag{3.16}$$

存在 $n^* \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \ge n^*$，

$$x \in A_n \quad \Longrightarrow \quad |x(t)| \ge 2R, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.17}$$

事实上，令 ι^* 定义如下

$$\iota^* = \inf\{-V(t,x) :\ t \in [0,T],\ |x| < 3R,\ (t,x) \in \Omega\}$$

并注意到，根据假设 (V)，$\iota^* > 0$；此外，令 $n^* \in \mathbb{N}$ 满足

$$n^* \ge \max\left(\frac{1}{(1-\kappa')\,\iota^*\,T}, \frac{2T}{R^2}\right). \tag{3.18}$$

现在反设存在 $n \ge n^*$、$x \in A_n$ 和 $t_0 \in [0,T]$，使得 $|x(t_0)| < 2R$。那么，由 (3.14) 可推知

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + \int_0^T |\dot{x}(t)|\, dt \le |x(t_0)| + \sqrt{\frac{2T}{n}}, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

因此，由 (3.18) 可得，对于任意 $t \in [0,T]$, $|x(t)| < 3R$。所以，回顾 (3.5) 和 (3.13)，有

$$\frac{1}{n^*} > \Phi(x) \geq (1-\kappa') \int_0^T -V(t,x(t))\,dt > (1-\kappa')\,\iota^*\,T,$$

这与 (3.18) 矛盾。

此时，我们注意到，由 (3.15) 和 (3.18) 可得

$$|\tilde{x}(t)| \leq R, \quad \forall\, x \in A_n,\ t \in [0,T].$$

因此，结合 (3.17)，我们推得，对每个 $n \geq n^*$,

$$x \in A_n \quad \Longrightarrow \quad |\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}(t)| \geq R, \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall \lambda \in [0,1]. \tag{3.19}$$

特别地，回顾 (3.16)，对每个 $x \in A_n$ 和 $\lambda \in [0,1]$, $\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x} \in \Lambda$。因此，由下式给出的映射$H$: $[0,1] \times A_n \to \Lambda$

$$H(\lambda, x) = \bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}$$

给出了 Λ 中从 A_n 到 $A_n' = H(1, A_n)$ 的一个变形。因此，由范畴的性质（P4），

$$\mathrm{cat}_X(A_n, \Lambda) \leq \mathrm{cat}_X(A_n', \Lambda). \tag{3.20}$$

另一方面，我们注意到，令

$$\Xi = \{x \in \Lambda\,:\, x(t) \equiv c \text{ with } |c| \geq R\},$$

from (3.19) 我们有 $A_n' \subset \Xi \subset \Lambda$。因此，由分类的性质 (P1) 和 (P2) ry,

$$\mathrm{cat}_X(A_n', \Lambda) \leq \mathrm{cat}_X(\Xi, \Lambda) \leq \mathrm{cat}_X(\Xi, \Xi). \tag{3.21}$$

集合 Ξ 显然与 $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ 同胚（其中 $B_R(0)$ 是半径为 R 的开球），因此 $\mathrm{cat}_X(\Xi, \Xi) = 2$。于是，由 (3.20) 和 (3.21) 可得

$$\mathrm{cat}_X(A_n, \Lambda) \leq 2,$$

这与 $A_n \in \mathcal{F}_3$ 这一事实矛盾。 □

由引理 3.4、3.5、3.6 和 3.7，我们可得定理 2.6 的所有假设均已满足，因此定理 3.1 得证。

4 应用

本节中，我们给出主要结果的一些应用。

第一项研究电荷在由 N 运动电荷产生的电磁场作用下的运动。

对于第二个问题，我们转而从相对论天体力学的角度解释方程 (3.1)，研究粒子在受扰开普勒势中的运动。

4.1 李纳-维谢尔势

让我们考虑带电粒子在 $m/q = 1$ 作用下的运动，其中电场由 N 运动电点电荷产生。

我们用 $q_1, \dots, q_N$ 表示运动电荷，用 $r_1, \dots, r_N$ 表示它们的轨迹。我们假设这些轨迹是 C^2 函数 $r_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, T-周期的，并且满足 $|\dot{r}_j(t)| < c$，对每个 $t \in [0, T]$ 都成立；此外，$r_i(t) \neq r_j(t)$，对每个 $t \in [0, T]$ 都成立（参见第 3 节）。现在，对 $i = 1, \dots, N$，令

$$\beta_i(t) = \frac{\dot{r_i}(t)}{c}, \quad \forall\, t \in [0, T],\ i = 1, \dots, N,$$

并注意到

$$||\beta_i||_\infty < 1. \tag{4.1}$$

此外，我们定义 $\eta_i : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\eta_i(t, x) = \frac{x - r_i(t)}{|x - r_i(t)|}, \quad \forall\, (t, x) \in \Omega$$

并通过隐式关系定义 $t_i : \Omega \to \mathbb{R}$

$$t_i = t - \frac{1}{c}\,|x - r_i(t_i)|. \tag{4.2}$$

众所周知，对每个 $i = 1, \dots, N$，数 t_i 是推迟时刻。对于固定的 $(t, x) \in \Omega$，方程 (4.2) 的解存在且唯一，这是狭义相对论中的一个标准结论；利用简单的隐函数论证即可证明，这也说明 t_i 是一个 C^1 类函数。此外，r_i 的周期性意味着，作为时间变量 t 的函数，t_i 是 T-周期的。

点电荷源 q_i, $i = 1, \dots, N$ 在点 (t, x) 处对电荷产生的 Li´enard-Wiechert 标量势和矢势分别为

$$V_i(t, x) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{1 - \eta_i(t_i, x) \cdot \beta_i(t_i)}\,\frac{1}{|x - r_i(t_i)|} \tag{4.3}$$

and

$$A_i(t, x) = \frac{\beta_i(t_i)}{c}\,V_i(t, x), \tag{4.4}$$

其中 $t_i = t_i(t, x)$，而 ε_0 为真空介电常数。为便于后文参考，回顾一下相应的电场和磁场为

$$\begin{aligned} E_i(t, x) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \Bigg(& \frac{\eta_i(t_i, x) - \beta_i(t_i)}{\gamma_i^2\,(1 - \eta_i(t_i, x) \cdot \beta_i(t_i))^3}\,\frac{1}{|x - r_i(t_i)|^2} \\ & + \frac{\eta_i(t_i, x) \times ((\eta_i(t_i, x) - \beta_i(t_i)) \times \dot{\beta}_i(t_i))}{c\,(1 - \eta_i(t_i, x) \cdot \beta_i(t_i))^3}\,\frac{1}{|x - r_i(t_i)|} \Bigg), \end{aligned}$$

其中 $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - |\beta_i|^2}$ 是洛伦兹因子，且

$$B_i(t, x) = \frac{\eta_i(t_i, x)}{c} \times E_i(t, x), \tag{4.5}$$

分别（参见 [16]）。

注意到 V_i 和 A_i （进而 E_i 和 B_i）在 Ω 中定义良好：事实上，由 (4.2) 我们首先可推出

$$x - r_i(t_i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = t_i,$$

从而可知 $(t,x) = (t_i, r_i(t_i))$；若 $(t,x) \in \Omega$，这便不可能。另一方面，若 $(t,x) \in \Omega$，则有

$$|\eta_i(t_i,x) \cdot \beta_i(t_i)| \leq ||\beta_i||_\infty$$

进而，由 (4.1) 可得，

$$1 - \eta_i(t_i,x) \cdot \beta_i(t_i) \geq 1 - ||\beta_i||_\infty > 0. \tag{4.6}$$

现在我们可以陈述关于李 ′纳-维谢尔势下周期运动的结果。

The定理 4.1. 在上述设定下，假设对每个 $i = 1$，都有 $q_i < 0, \ldots, N$。令

$$V(t,x) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t,x), \quad A(t,x) = \sum_{i=1}^{N} A_i(t,x), \tag{4.7}$$

对每个 $(t,x) \in \Omega$ 均成立，其中 V_i 和 A_i, $i = 1, \ldots, N$ 分别由 (4.3) 和 (4.4) 给出。则相应的洛伦兹力方程 (3.1) 有无穷多个 T-周期解。

证明。由定理（3.1）可得结论。我们需要证明 V 和 A 满足假设 (V)、(AV1) 和 (AV2)。

关于 (V)，假设 $q_i < 0$ 对每个 $i = 1, \ldots, N$ 都成立，这意味着对于每个 $(t,x) \in \Omega$，都有 $V(t,x) < 0$。此外，由 (4.2) 和 β_i 的定义可推出

$$c(t - t_i) = |x - r_i(t_i)| \leq |x - r_i(t)| + |r_i(t) - r_i(t_i)| \leq |x - r_i(t)| + c||\beta_i||_\infty (t - t_i), \tag{4.8}$$

由此可得

$$c(t - t_i) \leq \frac{|x - r_i(t)|}{1 - ||\beta_i||_\infty}.$$

将此估计代入 (4.8)，可得

$$|x - r_i(t_i)| \leq \frac{1}{1 - ||\beta_i||_\infty} |x - r_i(t)|.$$

这一关系结合 (4.6) 以及关于电荷的符号假设，意味着 t

$$V_i(t,x) \leq \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x - r_i(t)|},$$

对于每个 $(t,x) \in \Omega$ 都成立。回顾一下，对于每个 $(t,x) \in \Omega$ 以及 $j = 1, \ldots, N$，都有 $V_j(t,x) < 0$，我们得出

$$V(t,x) = V_i(t,x) + \sum_{j \neq i} V_j(t,x) \leq \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x - r_i(t)|},$$

对于每个 $(t,x) \in \Omega$。这证明了当 $\kappa = \max\{\kappa_i : \ i = 1, \ldots, N\}, \kappa_i = -q_i/4\pi\varepsilon_0$和 $\delta > 0$ 任意时，(3.3) 成立。

(AV1) 成立是由 (4.4) 中 A_i 的定义直接得出的。事实上，(AV1) 满足

$$\kappa' = \max\{||\beta_i||_\infty : i = 1, \dots, N\}$$

（注意，根据 (4.1)， $\kappa' < 1$ ）。

最后，我们证明 (AV2) 的有效性。首先注意到，由 (1.2) 可知，(AV2) 可以写成

$$\lim_{|x|\to+\infty} (|V(t,x)| + |\nabla_x E(t,x)| + |B(t,x)|) = 0, \tag{4.9}$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛。对于每个 $i = 1, \dots, N$，由 (4.6) 可推得

$$|V_i(t,x)| \le \frac{-q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1 - ||\beta_i||_\infty} \frac{1}{|x - r_i(t_i)|},$$

对于每个 $(t,x) \in \Omega$。现在，定义

$$\Theta = \max\{|r_i(t)| : t \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, N\},$$

显然，集合 $E = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : |x| > \Theta + 1\}$ 满足 $E \subset \Omega$，并且

$$|V_i(t,x)| \le \frac{-q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1 - ||\beta_i||_\infty} \frac{1}{|x| - \Theta}, \quad \forall\ (t,x) \in \Omega,\ |x| > \Theta + 1,$$

由此可得

$$\lim_{|x|\to+\infty} |V_i(t,x)| = 0, \quad \forall\ i = 1, \dots, N, \tag{4.10}$$

在 $t \in \mathbb{R}$ 中一致收敛。再次考虑到 (4.6)、 η_i、 β_i 和 β_i 有界这一事实，以及 Θ 的定义，我们可推出存在 $Z' > 0$ 使得

$$|E_i(t,x)| \le \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z'}{(1 - ||\beta_i||_\infty)^3} \left(\frac{1}{|x| - \Theta} + \frac{1}{(|x| - \Theta)^2} \right), \quad \forall\ (t,x) \in \Omega,\ |x| > \Theta + 1.$$

这证明了

$$\lim_{|x|\to+\infty} |E_i(t,x)| = 0, \quad \forall\ i = 1, \dots, N, \tag{4.11}$$

在 $t \in \mathbb{R}$ 中一致收敛。最后，由 (4.5) 和 (4.11)，并回想 η_i 有界，可得

$$\lim_{|x|\to+\infty} |B_i(t,x)| = 0, \quad \forall\ i = 1, \dots, N, \tag{4.12}$$

在 $t \in \mathbb{R}$ 中一致收敛。由于 (4.10)、(4.11) 和 (4.12) 对每个 $i = 1, \dots, N$ 都成立，并回想 (4.7)，我们可以得出结论：(4.9) 得以满足。 □

4.2 受迫相对论开普勒问题

考虑方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - |\dot{x}|^2/c^2}} \right) = -\alpha \frac{x}{|x|^3} + \nabla_x U(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{4.13}$$

可解释为受外力扰动的相对论开普勒问题（$m, \alpha > 0$）。

以下结果成立。

定理 4.2. 设 $U:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是一个 C^1 函数，关于第一个变量以 T为周期，满足$U(t,x)>0$，对每个 $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 均成立，并且

$$\lim_{|x|\to+\infty}(|U(t,x)|+|\nabla_x U(t,x)|)=0, \tag{4.14}$$

关于 $t\in\mathbb{R}$ 一致收敛。

于是，方程 (4.13) 有无穷多个 T-周期解。

证明。该结论由定理 3.1 得出。事实上，首先注意到这里 $\Omega=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 : x\neq 0\}$,

$$V(t,x)=-\frac{\alpha}{m|x|}-\frac{1}{m}U(t,x),\quad A(t,x)=0,\quad \forall\ (t,x)\in\Omega.$$

于是，由 U 上的符号条件，我们显然可以推出 (V)（其中 $\kappa=1$ 且 $\delta>0$ 任意）成立。此外，由于 $A\equiv 0$，假设 (AV1) 显然满足。最后，由假设 (4.14)，我们推得

$$\lim_{|x|\to+\infty}(|V(t,x)|+|\nabla_x V(t,x)|)=0,$$

关于 $t\in\mathbb{R}$ 一致收敛。再次回想 $A\equiv 0$，这就证明了 (AV2) 成立。 □

参考文献

[1] A. Ambrosetti 与 V. Coti Zelati，《奇异拉格朗日系统的周期解》，《非线性微分方程及其应用进展》，第10卷，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1993。[2] C.M. Andersen 与 H.C. von Baeyer，《关于经典标量场理论与相对论开普勒问题》，《物理年鉴》62（1971），120–134。[3] D. Arcoya、C. Bereanu 与 P.J. Torres，《洛伦兹力方程的临界点理论》，《理性力学与分析档案》232（2019），1685–1724。[4] D. Arcoya、C. Bereanu 与 P.J. Torres，《洛伦兹力方程作用积分的 Lusternik-Schnirelman 理论》，《变分法与偏微分方程》59（2020），32页。[5] A. Boscaggin、W. Dambrosio 与 G. Feltrin，《受扰相对论开普勒问题的周期解》，《SIAM 数学分析杂志》53（2021），5813–5834。[6] A. Boscaggin、W. Dambrosio 与 D. Papini，《相对论开普勒问题的周期解：一种变分方法》，《比萨高等师范学院科学学报》，即将出版（2023）。[7] T.H. Boyer，《相对论粒子在开普勒势或库仑势中的陌生轨迹》，《美国物理学杂志》72（2004），992–997。[8] K.C. Chang，《不可微泛函的变分方法及其在偏微分方程中的应用》，《数学分析与应用杂志》80（1981），102–129。[9] F.H. Clarke，《优化与非光滑分析》，《应用数学经典丛书》第5卷，SIAM，费城，马萨诸塞州，1990。

[10] E. Fadell 与 S. Husseini，《关于自由环空间范畴的注记》，美国数学会会刊107（1989），10页。[11] E. Fadell 与 S. Husseini，《欧几里得空间开子集的环空间范畴》，非线性分析17（1991），1153–1161。[12] E. Fadell 与 S. Husseini，《自由环空间中的无限杯长及其在一个N体型问题中的应用》，Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 9（1992），305–319。[13] R. Feynman、R. Leighton 与 M. Sands，《费曼物理学讲义：电动力学》，第2卷。Addison-Wesley，马萨诸塞州，1964。[14] M. Garz´on 与 P.J. Torres，《具有奇异势的洛伦兹力方程的周期解》，非线性分析：现实世界应用56（2020），6页。[15] W. Greiner，《经典力学：点粒子与相对论》，经典理论物理，施普林格，纽约，2004。[16] J.D. Jackson，《经典电动力学》，John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，1975。

[17] R. Livrea 与 S. Marano，不可微函数临界点的存在性与分类，《微分方程进展》9（2004），961–978。

[18] J. Mawhin 与 M. Willem，《临界点理论与哈密顿系统》，《应用数学科学》丛书第74卷，施普林格出版社，纽约，1989年。

[19] D. Motreanu 与 P.D. Panagiotopoulos，《半变分不等式解的极小极大定理与定性性质》，《非凸优化及其应用》第29卷，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1999年。

[20] R.S. Palais，《无限维流形的同伦理论》，《拓扑学》5（1966），1–16。

[21] A. Szulkin，《下半连续函数的极小极大原理及其在非线性边值问题中的应用》，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 3（1986），77–109。

A. Boscaggin “朱塞佩·皮亚诺”数学系，都灵大学，卡洛·阿尔贝托街10号，10123都灵，意大利 alberto.boscaggin@unito.it

W. Dambrosio “朱塞佩·皮亚诺”数学系，都灵大学，卡洛·阿尔贝托街10号，10123都灵，意大利 walter.dambrosio@unito.it

D. Papini 数学、信息学与物理科学系，乌迪内大学，科学路206号，33100乌迪内，意大利 duccio.papini@uniud.it