arXiv:2302.06192v2 [math.QA] 5 Aug 2023

关于幺模模范畴

HARSHIT YADAV

摘要。设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个正合左 $\mathcal{C}$-模范畴。若有限多张量范畴 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$（由 $\mathcal{M}$ 上的右正合 $\mathcal{C}$-模自函子构成）是幺模的，我们就称 $\mathcal{M}$ 为幺模模范畴。本文给出了幺模模范畴的多种刻画、性质和例子。作为第一个应用，我们利用幺模模范畴，在任意有限张量范畴的 Drinfeld 中心中构造（交换）弗罗贝尼乌斯代数对象。当 $\mathcal{C}$ 是一个幺半对偶范畴，且 $\mathcal{M}$ 是一个幺模的枢纽左 $\mathcal{C}$-模范畴时，这些弗罗贝尼乌斯代数对象还是对称的。第二个应用是对有限维 Hopf 代数的有限维表示范畴上的幺模模范畴进行分类；这回答了 Shimizu [Shi22] 提出的问题。借助这一结果，我们给出了一个有限张量范畴的例子，其范畴莫里塔等价类中不包含任何幺模张量范畴。

目录

1. 引言 2 1.1. 主要结果 3 1.2. 致谢 4 2. 幺半范畴背景 4 2.1. 幺半范畴与模范畴 5 2.2. 幺半范畴中的对偶 6 2.3. 有限多张量范畴及其模范畴 7 2.4. 幺半范畴中的代数 10 2.5. Drinfeld 中心 11 3. 幺模模范畴 12 3.1. 定义与基本性质 12 3.2. 幺模模范畴导出的弗罗贝尼乌斯代数 14 3.3. 球结构情形 16 4. 幺模正余模代数 17 4.1. 正合余模代数与中山函子 18 4.2. Radford 同构 19 4.3. Rep(A) 上的幺模结构 22 4.4. Taft 代数示例 24 4.5. 进一步的评论与问题 26 附录 A. Rep(A) 的中山函子及其扭曲的 Rep(H)-模结构 27 参考文献 30

2020 数学主题分类。 16T05, 18M15, 18M20.关键词和短语。 Frobenius 代数，Hopf 代数，有限张量范畴，幺模模范畴。

1. 引言

单模性是一个源远流长的经典概念，其根源可追溯至线性代数。基于单模矩阵（行列式为 $= \pm 1$）的定义，单模性也被用于格、双线性形式、拓扑群、Hopf 代数、泊松代数、张量范畴等领域。在本文中，我们通过定义并研究幺模模范畴，为相关文献增添了新的成果。

这一方向的研究始于对局部紧拓扑群的研究。这类群配备有一个左不变且右不变的哈尔测度；当左不变哈尔测度同时也是右不变时，我们称该群为幺模 [HR12]。作为这一概念的推广，Sweedler[Swe69] 引入了霍普夫代数的左积分和右积分的概念。随后，如果一个有限维霍普夫代数 H 的特征标恒等于 H [LS69] 的单位元，则称其为幺模；该特征标衡量左积分与右积分之间的差异。例如，半单霍普夫代数是幺模的 [LS69]。Etingof 和 Ostrik [EO04] 为任意张量范畴 $\mathcal{C}$ 定义了特征标的一个类似概念，称为特征可逆对象，记作 D。于是，如果 D 同构于$\mathcal{C}$的单位对象，则称 $\mathcal{C}$ 为幺模 。正如所预期的那样：

- 张量范畴 Rep(H) 是幺模的，当且仅当 H 是幺模的；并且
- 半单张量范畴是幺模的 [ENO04]。事实上，半单情形下的许多结果都可以推广到幺模情形。

张量范畴的单模性是其拓扑应用中的一项关键性质。Reshetikhin-Turaev 不变量 [RT91], 的非半单推广以某些张量范畴为输入来定义，要求输入范畴是幺模的。另一类重要的不变量 Turaev-Viro 不变量 [TV92], 则以球面融合范畴为输入构造。然而，在非半单情形下，球面张量范畴的定义[DSPS18] 要求底层范畴是幺模的。近期的研究（如 [BDR22] ）也采用幺模（辫带）张量范畴来构造四维流形的不变量。

在本文中，我们定义有限张量范畴上的正合模范畴何时称为幺模。以下定义的灵感来自 [FSS20，注 4.27]。

定义 1.1。 若一个正合左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 的右正合左 $\mathcal{C}$-模自函子所构成的多张量范畴 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是幺模的，则称该范畴为幺模 。

我们研究幺模模范畴的主要动机，是为了在模张量范畴（MTC）中函子性地构造（交换、特殊、对称）Frobenius 代数。MTC 是数学研究二维有理共形场论（CFT） [FRS02] 和三维拓扑量子场论（TQFT） [RT91]的重要模型。对于由模张量范畴 $\mathcal{C}$建模的二维共形场论， $\mathcal{C}$ 中的交换对称 Frobenius 代数对象与一组相容的体场关联函数[FS17]之间存在双射。另一方面，对于使用模张量范畴 $\mathcal{C}$ [Tur92、KL01、BDSPV15], 构造的三维拓扑量子场论，可以利用 $\mathcal{C}$ 中的交换、特殊、对称 Frobenius 代数，通过构造局部模范畴来产生新的模张量范畴 [Par95、Sch01、KJO02、LW22]。

尽管以往的工作（如 [FFRS06] ）已经处理了模张量范畴为半单情形下弗罗贝尼乌斯代数对象的构造，但近期关于构造非半单共形场论[FS21a] 和拓扑量子场论 [DRGG$^+$22]的研究，需要在一般模张量范畴中对弗罗贝尼乌斯代数对象进行新的构造。在本文中，我们针对由球面张量范畴的 Drinfeld 中心得到的模张量范畴，解决了这一需求

更一般地，我们利用幺模模范畴，在任意有限张量范畴的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中构造“良好”的弗罗贝尼乌斯代数对象。

1.1. 主要结果

以下讨论所需的背景材料见第 2 节。设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个精确的左 $\mathcal{C}$-模范畴。我们构造 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中（特殊、可分、对称）Frobenius 代数的策略，是构造以 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 为目标的 Frobenius 单张量函子。这类函子保持 Frobenius 代数，并可用于将输入范畴中的（特殊、可分、对称）Frobenius 代数传递到 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中。

为了构造这类函子，我们采用幺模模范畴；相关研究见第 3 节。以下由 [Shi20] 引入的函子起着重要作用。

$$\Psi := \Psi_{\mathcal{M}} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}), \qquad (c, \sigma) \mapsto (c \triangleright -, s^{\sigma}).$$

在先前工作 [Shi16、FGJS22、Yad22], 的基础上，我们给出模范畴幺模性的若干刻画如下。特别地，我们得到以下结果。

定理 A。（定理 3.15）设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴，且 $\mathcal{M}$ 是一个不可分解、正合的左 $\mathcal{C}$-模范畴。则以下各条件等价。

（a） $\mathcal{M}$ 是幺模模范畴。（b）$\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}$（$\mathcal{M}$）是幺模张量范畴。（c） Ψ^{ra}（$\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}$）是 $\mathcal{Z}$（$\mathcal{C}$）中的 *Frobenius* 代数。（d） Ψ^{ra} 是 *Frobenius* 单张量函子。

这里，对于任意函子 F， F^{la}（分别地， F^{ra}）表示 F的左伴随函子（分别地，右伴随函子）。特别地，(d) 部分在 Drinfeld 中心中给出了一系列 Frobenius 代数。此外，以下结果描述了函子 Ψ^{ra} 以及利用它得到的代数何时是可分的或特殊的。

推论 B。（推论 3.16）设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴，且 $\mathcal{M}$ 是一个不可分解、幺模的左 $\mathcal{C}$-模范畴。则， Ψ^{ra} 是可分的（分别地，特殊的）*Frobenius* 单张量函子，当且仅当 *Frobenius* 代数 Ψ^{ra}（$\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}$）在 $\mathcal{Z}$（$\mathcal{C}$）中是可分的（分别地，特殊的）。

我们的目标是构造特殊的对称 Frobenius 代数。然而，要讨论对称 Frobenius 代数，我们必须转到枢轴范畴设定。当 $\mathcal{C}$ 是枢纽的，且 $\mathcal{M}$ 是一个枢纽左 $\mathcal{C}$-模范畴时，范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 和 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 都是枢纽的 [Sch15, Shi19], ，而 Ψ是一个枢轴函子。接下来，以下结果给出了确保函子 Ψ^{ra} 是枢轴函子所需的充分条件。当这些条件满足时， Ψ^{ra} 便成为在 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中构造特殊对称 Frobenius 代数的工具。

定理 C。 (定理 3.20,3.21) 设 $\mathcal{C}$ 是一个主有限张量范畴，而 $\mathcal{M}$ 是一个不可分解、幺模且枢纽的左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，

- Ψ_{ra} 是一个枢纽 *Frobenius* 单张量函子。
- Ψ_{ra} 是特殊枢纽 *Frobenius* 单张量函子，当且仅当 $\dim(\Psi_{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})) \neq 0$。

注 1.2。 给定 $F \in \mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，函子 $F \circ F^{\mathsf{la}}$ 是 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N})$ 中的一个代数。接着可以证明，代数 $\Psi^{\mathsf{ra}}(F \circ F^{\mathsf{la}})$ 同构于 [FS21b]中引入的代数 $\mathsf{Nat}(F, F)$。 [FS21b，推论 1.9] 给出了充分条件，

在这些条件下，代数 Nat(F, F) 是对称 Frobenius。这个结果促使我们在本文中研究函子 Ψ^{ra} 。

在第 4 节中，我们考虑 $\mathcal{C} := \mathsf{Rep}(H)$ 是有限维 Hopf 代数 H 的有限维表示范畴的情形。在这种情况下，每个正合左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 都具有 $\mathsf{Rep}(A)$ 的形式，其中 A 是一个左 H-余模代数。我们运用 [Shi19、SS21] 中的结果，计算 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 的特征可逆对象 $D_{\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}$。为了理解 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 何时是幺模的，即 $D_{\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}$ 与 $\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}$ 何时同构，我们引入正合 H-余模代数的幺模元（定义 4.33），并得到以下结果。

定理 D。（定理 4.36）设 H 是一个有限维 *Hopf* 代数，且 A 是一个正合左H-余模代数。则左 Rep（H）-模范畴 Rep（A） 是幺模的，当且仅当 A含有一个幺模元。

关于 $\mathcal{M}$ 的单模性问题（根据定义，这等价于$\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$的单模性）最近也在 [Shi22]中得到了研究，讨论的是代数 A 存在类群状余积分的情形。定理 D 给出了在不作此类假设的情况下，模范畴 $\mathsf{Rep}(A)$ 为幺模的明确条件，从而回答了 [Shi22，第 7 个问题。25]此外，当余代数代数 [存在类群状余积分时，定理 D 归结为 Shimizu 的结果10]，；参见推论 A 。4.41

一个自然的问题是：每个有限张量范畴是否都存在一个幺模模范畴？我们得到以下结果，对这个问题给出了否定答案。

定理 E。（定理4.45）设 $T(\omega)$ 表示 *Taft* 代数。那么，范畴$\mathsf{Rep}(T(\omega))$不存在线幺模模范畴。

我们在第4.5节以若干评述和问题为本文作结。

1.2. 致谢

作者谨此感谢 Chelsea Walton 在整个项目期间给予的指导与支持。我们还要感谢 Anh-Tuong Nguyen 和 Kenichi Shimizu 提供的有益交流。作者获得了莱斯大学 Nettie S. Autrie 研究奖学金的部分资助。

2. 幺半范畴背景

本文在代数闭域 $\Bbbk$上展开。我们将在第 2.1节回顾幺半范畴及其上的模范畴，在第 2.2节回顾刚性范畴和枢轴范畴，在第 2.3节回顾有限张量范畴及其模范畴，在第 2.4节回顾幺半范畴中的代数，并在第 2.5节回顾 Drinfeld 中心。关于更多细节，读者可参阅教材 [ML13]，[EGNO16] 和 [TV 17] 。

2.1. 幺半范畴与模范畴

2.1.1. 幺半范畴

一个范畴 $\mathcal{C}$ 配备了一个函子 $\otimes\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$（称为<测牌 id='4'>张量积）、一个对象 $\mathbb{1}\in\mathcal{C}$（称为<测牌 id='7'>单位对象）以及自然同构

$$X\otimes(Y\otimes Z)\cong(Z\otimes Y)\otimes Z,\ \ X\otimes\mathbb{1}\cong X\cong\mathbb{1}\otimes X,\quad \text{for all } X,Y,Z\in\mathcal{C}, \tag{2.1}$$

如果 (2.1) 中的同构满足五边形公理和三角形公理，则称其为幺半范畴。如果这些同构都是恒等态射，我们称 $\mathcal{C}$ 为严格单模范畴。根据 Mac Lane 相干定理 [ML13, VII.2], ，我们可以（并且将会）假设所有幺半范畴都是严格的。我们用 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 表示范畴 $\mathcal{C}$ 及其相反张量积 $\otimes^{\mathrm{rev}}$，即 $X\otimes^{\mathrm{rev}}Y:=Y\otimes X$。我们将 $\mathcal{C}$ 的相反范畴记为 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。于是，$(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\otimes,\mathbb{1})$ 和 $(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}},\otimes^{\mathrm{rev}},\mathbb{1})$ 都是幺半范畴。

辫状单模范畴 是一个幺半范畴 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1})$，并配备自然同构 $c=\{c_{X,Y}\colon X\otimes Y\to Y\otimes X\}_{X,\ Y\in\mathcal{C}}$（称为编织），满足六边形公理。编织 c 在 $\mathcal{C}$ 上的镜像 c' 定义为 $c'_{X,\ Y}:=c^{-1}_{Y,X}$。我们将用 $\mathcal{C}^{\mathrm{mir}}$ 表示辫状单模范畴 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1},c')$。

2.1.2. 单模函子

设 $(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ 和 $(\mathcal{D},\otimes_{\mathcal{D}},\mathbb{1}_{\mathcal{D}})$ 是两个幺半范畴。

从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的单模函子 是一个元组 (F,F_2,F_0)，由函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$、自然变换 $F_2=\{F_2(X,Y)\colon\ F(X)\otimes_{\mathcal{D}}F(Y)\to F(X\otimes_{\mathcal{C}}Y)\}_{X,\ Y\in\mathcal{C}}$ 以及态射 $F_0\colon\ \mathbb{1}_{\mathcal{D}}\to F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ 组成，并满足某些相容条件。若单模函子 (F,F_2,F_0) 中的 F_2 和 F_0 是$\mathcal{D}$中的同构（分别为恒等映射），则称其为强幺半（分别称为严格）单模函子。若 F 是强幺半函子，且是底层范畴之间的等价，则称其为单模等价。

从 $\mathcal{C}$到 $\mathcal{D}$的余单模函子 是一个元组 (F,F^2,F^0)，由函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$、自然变换 $F^2=\{F^2(X,Y)\colon\ F(X\otimes_{\mathcal{C}}Y)\to F(X)\otimes_{\mathcal{D}}F(Y)\}_{X,Y\in\mathcal{C}}$ 以及态射 $F^0\colon\ F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\to\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ 组成，并且满足 $(F_{\mathrm{op}},(F^2)^{\mathrm{op}},(F^0)^{\mathrm{op}})\colon\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 是一个单模函子。

一个弗罗贝尼乌斯单张量函子 [DP08，定义 1] 是一个元组 $(F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D},F_0,F_2,F^2,F^0)$，其中 (F,F_2,F_0) 是一个单模函子，(F,F^2,F^0) 是一个余单模函子，并且对所有 $X,Y,Z\in\mathcal{C}$，以下条件成立：

$$\begin{aligned}(\mathsf{Id}_{F(X)}\otimes_{\mathcal{D}}F_2(Y,Z))\,(F^2(X,Y)\otimes_{\mathcal{D}}\mathsf{Id}_{F(Z)})&=\ F^2(X,Y\otimes_{\mathcal{C}}Z)F_2(X\otimes_{\mathcal{C}}Y,Z),\\(F_2(X,Y)\otimes_{\mathcal{D}}\mathsf{Id}_{F(Z)})\,(\mathsf{Id}_{F(X)}\otimes_{\mathcal{D}}F^2(Y,Z))&=\ F^2(X\otimes_{\mathcal{C}}Y,Z)F_2(X,Y\otimes_{\mathcal{C}}Z).\end{aligned}$$

如果范畴 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是 $\Bbbk$-线性的，那么，若函子 F 满足：$F_2(X,Y)\circ F^2(X,Y)=\beta_2\mathsf{Id}_{F(X\otimes Y)}$ 对某个 $\beta_2\in\Bbbk^\times$ 成立，则称其为 可分 函子。若此外，对于某个 $\beta_0\in\Bbbk^\times$ 还有 $F^0\circ F_0=\beta_0\mathsf{Id}_{\mathbb{1}}$ 成立，则称 F 为 特殊。

2.1.3. $\mathcal{C}$-模范畴

设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。左 $\mathcal{C}$-模范畴 是一个范畴 $\mathcal{M}$，配备函子$\triangleright\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$（称为 $\mathcal{C}$ 的作用）以及自然同构

$$(X\otimes Y)\triangleright M\cong X\triangleright(Y\triangleright M),\ \ \mathbb{1}\triangleright M\cong M\qquad\text{for all } X,Y\in\mathcal{C},M\in\mathcal{M}$$

它们满足某些相干条件。类似地，可以定义右 $\mathcal{C}$-模范畴和双模范畴。根据 Mac Lane 相干定理的一个变体（参见 [EGNO16，注 7.2.4]），我们可以（并且将会）假设上述同构都是恒等映射。

2.1.4. $\mathcal{C}$-模函子

设 $(\mathcal{M}, \triangleright_{\mathcal{M}})$ 和 $(\mathcal{N}, \triangleright_{\mathcal{N}})$ 为左 $\mathcal{C}$-模范畴。一个左 $\mathcal{C}$-模函子是一个元组 (F, s)，其中：

- $F\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个函子，并且
- $s = \{s_{X,M}\colon\ F(X \triangleright_{\mathcal{M}} M) \to X \triangleright_{\mathcal{N}} F(M)\}_{X\in\mathcal{C},\ M\in\mathcal{M}}$ 是满足 s_X 的自然同构

$$\otimes_{Y,M} = (\mathsf{Id}_X \triangleright_{\mathcal{N}} s_{Y,M}) \circ\ s_{X,Y\triangleright M}, \qquad s_{\mathbb{1},M} = \mathsf{Id}_{F(M)} \qquad\qquad (X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}).$$

类似地，可以定义右 $\mathcal{C}$-模函子和双模函子。

例 2.2 $({}_F\mathcal{M}, \triangleright_F)$。设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是幺半范畴，且 $(\mathcal{M}, \triangleright)$ 是一个左 $\mathcal{D}$-模范畴。给定一个强幺半函子 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，我们将范畴 $\mathcal{M}$ 记作 $({}_F\mathcal{M}, \triangleright_F)$，其上的 $\mathcal{C}$- 作用定义为

$$X \triangleright_F M := F(X) \triangleright M, \qquad (X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}).$$

那么 $({}_F\mathcal{M}, \triangleright_F)$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。在这种情况下，我们称 $\mathcal{M}$ 为*(F-)*扭曲左 $\mathcal{C}$-模范畴。

设 $(F, s^F), (G, s^G) : (\mathcal{M}, \triangleright_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, \triangleright_{\mathcal{N}})$ 是左 $\mathcal{C}$-模函子。左 $\mathcal{C}$-模自然变换是一个自然变换 $\eta\colon\ F \to G$，满足

$$(\mathsf{Id}_X \triangleright_{\mathcal{N}} \eta_M) \circ s^F_{X,M} = s^G_{X,M} \circ \eta_{X\triangleright_{\mathcal{M}} M} \qquad\qquad (X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}).$$

2.2. 幺半范畴中的对偶

如果幺半范畴中的每个对象 X 都配有左对偶和右对偶，则称该幺半范畴是刚性的；也就是说，存在对象 ${}^\vee X$（左对偶）以及余评价映射 $\mathsf{ev}_X\colon\ {}^\vee X \otimes X \to \mathbb{1}$, $\mathsf{coev}_X\colon\ \mathbb{1} \to X \otimes {}^\vee X$，还存在对象 $X^\vee$（右对偶）及其余评价映射 $\widetilde{\mathsf{ev}}_X\colon\ X \otimes X^\vee \to \mathbb{1}$, $\widetilde{\mathsf{coev}}_X\colon\ \mathbb{1} \to X^\vee \otimes X$，它们满足通常的蛇形关系。

映射 $X \mapsto {}^\vee X$ 和 $X \mapsto X^\vee$ 可延拓为从 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 到 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的幺半等价。我们可以并且将会用一个等价的幺半范畴替换 $\mathcal{C}$，并以适当的方式选取对偶，以确保 ${}^\vee(-)$ 和 $(-)^\vee$ 都是严格幺半的，且互为逆映射，[Shi15，引理 5.4]。

2.2.1. 枢轴范畴

带有左对偶的幺半范畴称为 枢纽的，如果它带有一个自然同构 $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_X\colon\ X \to {}^{\vee\vee}X\}_{X\in\mathcal{C}}$，满足 $\mathfrak{p}_{X\otimes Y} = \mathfrak{p}_X \otimes \mathfrak{p}_Y$。在枢轴范畴中，对每个对象 X，${}^\vee X$ 也是 X 的右对偶，其余评价映射为

$$\widetilde{\mathrm{coev}}_X := (\mathsf{Id}_{{}^\vee X} \otimes \mathfrak{p}_X^{-1})\mathrm{coev}_{{}^\vee X} \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathrm{ev}}_X := \mathrm{ev}_{{}^\vee X}(\mathfrak{p}_X \otimes \mathsf{Id}_{{}^\vee X}).$$

对象 $X \in \mathcal{C}$（相对于枢纽结构 $\mathfrak{p}$）的（量子）维数定义为单位对象的如下自同态。

$$\dim(X) := \dim^{\mathfrak{p}}_{\mathcal{C}}(X) = \widetilde{\mathrm{ev}}_X \circ \mathrm{coev}_X \in \mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}).$$

若 $\mathcal{C}$ 是 $\Bbbk$-线性的，且 $\mathsf{End}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \cong \Bbbk$，则 $\mathsf{dim}(X)$ 是一个标量。

2.2.2. 枢轴弗罗贝尼乌斯函子

设我们有一个从刚性幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的弗罗贝尼乌斯单张量函子 (F, F_2, F_0, F^2, F^0)。由 [DP08，定理 2]，F，$({}^\vee X)$ 是 $F(X)$ 的左对偶，其中 $X \in \mathcal{C}$。因此，由对偶对象的唯一性可得唯一的一族自然同构 $\zeta_X^F\colon F({}^\vee X) \to {}^\vee F(X)$。将枢轴函子的定义从 [NS07] 推广，可得以下枢轴弗罗贝尼乌斯函子的定义。

定义 2.3. 若两个枢轴范畴之间的弗罗贝尼乌斯单张量函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 满足 ${}^\vee(\zeta_X^F) \circ \mathfrak{p}^{\mathcal{D}}_{F(X)} = \zeta^F_{{}^\vee X} \circ F(\mathfrak{p}^{\mathcal{C}}_X)$ 对所有 $X \in \mathcal{C}$均成立，则称其为枢纽的。

引理 2.4. [Yad22，引理 2.7] 设 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ 是刚性幺半范畴之间的弗罗贝尼乌斯单张量函子序列。若 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$、 $\mathcal{E}$ 是枢纽的，且 F、 G 是枢轴函子，则它们的复合 $G \circ F$也如此。□

接下来，我们来看当 F 是枢轴弗罗贝尼乌斯单函子时， $\mathcal{C}$ 中对象 X 的维数与 $\mathcal{D}$中 $F(X)$ 的维数之间有何关系。

引理 2.5. 设 $F\colon (\mathcal{C},\ \mathfrak{p}) \to (\mathcal{D},\ \mathfrak{q})$ 是一个枢轴弗罗贝尼乌斯单函子。那么

$$\dim^{\mathfrak{q}}_{\mathcal{D}}(F(X)) = F^0\ F(\widetilde{\mathrm{ev}}_X)\ F_2(X, {}^\vee X)\ F^2(X, {}^\vee X)\ F(\mathrm{coev}_X)\ F_0. \tag{2.6}$$

P余锥。 这可根据 ζ_X^F 的定义，通过直接计算得出。 □

引理 2.7。 设 $(F, F_2, F_0, F^2, F^0)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是枢轴特殊弗罗贝尼乌斯幺半群函子（常数为 β_0, β_2），它在枢轴幺半群范畴 $(\mathcal{C}, \mathfrak{p})$ 与 $(\mathcal{D}, \mathfrak{q})$之间。若 $\mathrm{End}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \cong \Bbbk$，则，

$$\dim^{\mathfrak{q}}_{\mathcal{D}}(F(X)) = \beta_2\beta_0 \dim^{\mathfrak{p}}_{\mathcal{C}}(X)\, \mathsf{Id}_{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}.$$

证明。 以下计算证明了该结论。

$$\begin{aligned}
\dim^{\mathfrak{q}}_{\mathcal{D}}(F(X)) &\overset{(2.6)}{=} F^0\ F(\widetilde{\mathrm{ev}}_X)\ F_2(X, {}^\vee X)\ F^2(X, {}^\vee X)\ F(\mathrm{coev}_X)\ F_0 \\
&= F^0\ F(\widetilde{\mathrm{ev}}_X)\ (\beta_2 \mathsf{Id}_{F(X\otimes {}^\vee X)})\ F(\mathrm{coev}_X)\ F_0 \\
&= \beta_2\ F^0\ F(\widetilde{\mathrm{ev}}_X \circ \mathrm{coev}_X)\ F_0 \\
&= \beta_2 \dim^{\mathfrak{p}}_{\mathcal{C}}(X)\ F^0\ F_0\, \mathsf{Id}_{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}} \\
&= \beta_2\beta_0\ \dim^{\mathfrak{p}}_{\mathcal{C}}(X)\, \mathsf{Id}_{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}.
\end{aligned}$$ □

2.3. 有限多张量范畴及其模范畴

对于 $\Bbbk$-代数 A，令 $\mathsf{Rep}(A)$ 表示 $\Bbbk$ 上有限维左 A-模所成的范畴。有限阿贝尔范畴 是一个 $\Bbbk$-线性范畴，并且与某个有限维$\Bbbk$-代数 A 的 $\mathsf{Rep}(A)$ 等价。

有限多张量范畴 是一个刚性幺半范畴，它是有限阿贝尔范畴，且张量积函子 $\otimes$ 对每个变量都是 $\Bbbk$-线性的。若进一步单位对象 $\mathbf{1}$ 是简单对象，则称之为有限张量范畴。张量函子 是有限多张量范畴之间一个正合、忠实、 $\Bbbk$-线性且强幺半的函子。

设 $\mathcal{C}$ 是一个有限多张量范畴。有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴$\mathcal{M}$ ，满足 $\mathcal{M}$ 是有限阿贝尔范畴，且 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用是 $\Bbbk$-双线性的，并且对每个变量都是右正合的。若对所有对象 $M \in \mathcal{M}$ 以及所有投射对象

$P \in \mathcal{C}$, $P \triangleright M$ 在 $\mathcal{M}$中是射影的。若一个模范畴不等价于两个非平凡模范畴的直和，则称其为不可分解的。

记号 2.8。 以下将使用这些记号。

(a) 对于两个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$，$\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 表示从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的右正合 $\mathcal{C}$-模函子范畴。若 $\mathcal{M}=\mathcal{N}$，则将其记为 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$。(b) 给定两个左 $\mathcal{C}$-模函子 (F, s^F)、(G, s^G)，我们用记号 $F \cong_{\mathcal{C}} G$ 表示 F 和 G 作为左 $\mathcal{C}$-模函子是同构的。(c) 对于 $X \in \mathcal{C}$ 和 $F \in \mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，我们用记号 $X \triangleright F$ 表示从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的函子，其定义如下：$(X \triangleright F)(M) = X \triangleright F(M)$。

2.3.1. 内部 Hom

更详细的论述请参见 [EGNO16，第 7.4] 节。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，且 $(\mathcal{M}, \triangleright)$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。考虑函子

$$Y_M : \mathcal{C} \to \mathcal{M}, \qquad X \mapsto X \triangleright M.$$

若 Y_M 存在右伴随，我们将其记为 $\mathrm{Hom}(M, -) := \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{M}}(M, -) : \underline{\mathcal{M} \to \mathcal{C}}$，并称 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 为 M 和 N 的内部 ***Hom***。在这种情况下，根据伴随函子的定义，我们得到以下 Hom 空间的同构：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X \triangleright M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \tag{2.9}$$

对于 $\mathcal{C}$ 一个有限多张量范畴以及 $\mathcal{M}$ 一个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴，函子 Y_M 是有限阿贝尔范畴之间的右正合函子。因此，它存在右伴随，也就是说，内部 Hom 存在。事实上，内部 Hom 扩展为函子 $\mathrm{Hom} : \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C}$，使得同构 (2.9) 对 M 和 N [Shi20, §2.4]均自然。

2.3.2. 典范Vec 作用

令 Vec 表示有限维 $\Bbbk$-向量空间构成的范畴。每个有限阿贝尔范畴$\mathcal{M}$ 都带有 Vec 的典范作用，该作用由 $\blacktriangleright : \mathrm{Vec} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 给出，并通过以下同构定义。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(V \blacktriangleright M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N))$$

借助这一作用，每个有限阿贝尔范畴都成为一个左 Vec-模范畴。从现在起，我们用记号 $\blacktriangleright$ 表示 Vec 在任意有限阿贝尔范畴上的这一作用。

2.3.3. 相对 Serre 函子

设 $\mathcal{C}$ 是一个有限多张量范畴，$\mathcal{M}$ 是一个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴。$\mathcal{M}$ 的相对（右）*Serre* 函子 [FSS20，定义 4.22] 是一个对 $(\mathbb{S}, \phi)$，其中 $\mathbb{S} := \mathbb{S}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个函子，并且

$$\phi := \phi^r = \{\phi^r_{M,M'} : {}^{\vee}\underline{\mathrm{Hom}}(M, M') \to \underline{\mathrm{Hom}}(M', \mathbb{S}(M))\}_{M,M' \in \mathcal{M}}$$

是一个自然同构。若要强调范畴 $\mathcal{C}$、$\mathcal{M}$，我们将用 $\mathbb{S}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{M}}$ 代替 $\mathbb{S}$。类似地，一个相对（左）*Serre* 函子 是 $\mathcal{M}$ 的一个自函子 $\overline{\mathbb{S}}$，并配有一个自然同构

$$\phi^l = \{\phi^l_{M,M'} : \underline{\mathrm{Hom}}(M, M')^{\vee} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathbb{S}}(M'), M)\}_{M,M' \in \mathcal{M}}.$$

关于更多细节，读者可参阅相关文献 [Sch15、FSS20、Shi19] 。下面我们回顾一些关于塞尔函子的重要结果。

定理 2.10。 [FSS20，引理 4.23，命题 4。24] 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$是一个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴。

(a) $\mathcal{M}$ 是正合的，当且仅当存在相对 *Serre* 函子 $\mathbb{S}$ 。(b) 如果 $\mathcal{M}$ 是正合的，那么 $\mathbb{S}$ 是一个范畴等价，其拟逆为 $\overline{\mathbb{S}}$。(c) 如果 $\mathcal{M}$ 是正合的，那么 $\mathbb{S}$ 是一个从 $\mathcal{M} \to {}^{\vee\vee}(-)\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{C}$-模范畴的模函子，也就是说，我们有自然同构 $\mathfrak{s}_{X,M}\colon \mathbb{S}(X \triangleright M) \xrightarrow{\sim} {}^{\vee\vee}X \triangleright \mathbb{S}(M)$，满足模兼容条件。□

2.3.4. 中山函子

我们假设读者熟悉端与余端，详见 [ML13, IX] 。对于 $\mathcal{M}$ 有限阿贝尔范畴，定义左、右中山函子 [（FSS20, 定义 3）为自函子 N、N：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$，分别由下式给出

$$\overline{\mathbb{N}}_{\mathcal{M}}(M) = \int_{M' \in \mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M', M) \blacktriangleright M', \qquad \mathbb{N}_{\mathcal{M}}(M) = \int^{M' \in \mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, M')^* \blacktriangleright M'$$

如果范畴 $\mathcal{M}$ 的含义可由上下文明确判断，我们通常会在下标中省略它。下面汇总中山函子的一些性质，这些性质将在后文中用到。

定理 2.11。 [FSS20，定理 4.5，推论 4。7] 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限多张量范畴，$\mathcal{M}$ 是一个有限左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，

(a) $\mathbb{N}$ 是从 $\mathcal{M} \to (-)^{\vee\vee}\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{C}$ 的左模函子，也就是说，我们有自然同构$\mathfrak{n}_{X,M}\colon \mathbb{N}(X \triangleright M) \xrightarrow{\sim} X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{N}(M)$，它们满足模兼容条件。(b) 若 $\mathcal{M}$ 正合，则 $\mathbb{N}$ 是范畴等价，其拟逆为 $\mathbb{N}$。□

注 2.12。 定理 2.10 和 2.11 是在 [FSS20] 中证明的，前提是其为有限张量范畴。不过，同样的论证也适用于多张量范畴。

2.3.5. 幺模多张量范畴

设 $\mathcal{C}$ 是 $\Bbbk$上的有限多张量范畴。

定义 2.13。 $\mathcal{C}$的特征可逆对象 记为 $D_{\mathcal{C}}$，定义为 $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$。若 $D_{\mathcal{C}} \cong \mathbb{1}$，则称 $\mathcal{C}$ 是幺模的。

注 2.14。 根据假设， $\Bbbk$ 是代数闭的，因而是完美的。因此，我们可以采用 Shi [关于特征可逆对象的结果。特别地，根据 [Shi16，引理 5.1]，上述对象 $D_{\mathcal{C}}$ 的定义与 [ENO04，EGNO16]中的定义一致。

由于 $\mathcal{C}$ 是多张量范畴，根据 [ENO04，第 4.3], 节，我们可以将 $\mathbb{1} = \oplus_{i \in I} \mathbb{1}_i$ 写成某个有限集合 I，其中对象 $\mathbb{1}_i$ 是单对象且两两不等构。范畴 $\mathcal{C}_{ij} := \mathbb{1}_i \otimes \mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_j$称为 $\mathcal{C}$ 的分支子范畴 ，并且有 $\mathcal{C} = \oplus_{i, j \in I} \mathcal{C}_{ij}$。这里，对于所有 $i \in I$，$\mathcal{C}_{ii}$ 是一个单位对象为 $\mathbb{1}_i$的有限张量范畴。现在考虑以下结果。

引理 2.15。 $\mathcal{C}$ 是幺模的，当且仅当其所有分支子范畴 $\mathcal{C}_{ii}$ 都是幺模的。

证明。 根据 [Shi16，定理 5.3]， $D_{\mathcal{C}} = \oplus_{i \in I} D_{\mathcal{C}_{ii}}$。如果每个 $\mathcal{C}_{ii}$都是幺模的，那么 $\mathcal{D}_{\mathcal{C}_{ii}} \cong \mathbb{1}_i$。因此，

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}} = \oplus_{i \in I} \mathbb{1}_i = \oplus_{i \in I} D_{\mathcal{C}_{ii}} \cong D_{\mathcal{C}}.$$

因此， $\mathcal{C}$是幺模的。反过来，如果 $\mathcal{C}$是幺模的，那么我们得到 $\oplus_{i \in I} \mathbb{1}_i = \oplus_{i \in I} D_{\mathcal{C}_{ii}}$。将两边与 $\mathbb{1}_j$ 作张量积，得到 $D_{\mathcal{C}_{jj}} \cong \mathbb{1}_j$。因此，范畴 $\mathcal{C}_{ii}$ 中的每一个都是幺模的。□

每个有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 都配备有一个自然同构

$$\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_X : {}^{\vee\vee}X \otimes D \to D \otimes X^{\vee\vee}\}_{X\in\mathcal{C}} \tag{2.16}$$

称为 $\mathcal{C}$ [ENO04] 的 ***Radford*** 同构 。以下结果给出了相对 Serre 函子与正合 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 的中山函子之间的关系。

定理 2.17. [FSS20，定理 4。26] 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个正合左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，$\mathbb{S}_{\mathcal{M}} \cong_{\mathcal{C}} D \triangleright \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ 作为一个扭曲的 $\mathcal{C}$-模函子，其 $\mathcal{C}$-模约束由下式给出

$$\mathfrak{s}_{X,M} := \left(D \triangleright \mathbb{N}(X \triangleright M) \xrightarrow{\mathsf{Id}\triangleright \mathfrak{n}_{X,M}} D \triangleright (X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{N}(M)) \xrightarrow{\mathfrak{R}_X^{-1}\triangleright \mathsf{Id}} {}^{\vee\vee}X \triangleright (D \triangleright \mathbb{N}(M)) \right)_{X\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}}. \quad \square$$

2.4. 幺半范畴中的代数

在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中，我们可以定义代数和余代数 [TV17，第 6 章。1]。此外， $\mathcal{C}$ 中的代数（余代数）及其态射构成一个范畴，记作 Alg($\mathcal{C}$)（Coalg($\mathcal{C}$)）。 $\mathcal{C}$ 中的一个 ***Frobenius*** 代数 是一个五元组 (A, m, u, Δ, ν)，使得 $(A, m, u) \in$ Alg($\mathcal{C}$) 且 $(A, \Delta, \nu) \in$ Coalg($\mathcal{C}$)，并满足

$$(m \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A \otimes \Delta) = \Delta m = (\mathrm{id}_A \otimes m)(\Delta \otimes \mathrm{id}_A).$$

弗罗贝尼乌斯代数的一个态射 $f : A \to B$ 是 Alg($\mathcal{C}$) 中以及 Coalg($\mathcal{C}$) 中的映射。 $\mathcal{C}$ 中的弗罗贝尼乌斯代数及其态射构成一个范畴，我们将其记作 Frob($\mathcal{C}$)。

现在，设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\Bbbk$-线性幺半范畴， A 是其中的一个弗罗贝尼乌斯代数。如果对于某个 $\beta_A \in \Bbbk^\times$ 满足 $m \circ \Delta = \beta_A \mathsf{Id}_A$，我们称该弗罗贝尼乌斯代数为可分的。如果进一步对于某个 $\beta_{\mathbb{1}} \in \Bbbk^\times$ 满足 $\nu \circ u = \beta_{\mathbb{1}} \mathsf{Id}_{\mathbb{1}}$，我们称其为特殊的。在刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中，弗罗贝尼乌斯代数 (A, m, u, Δ, ν) 被称为对称的 [FRS02，定义 3.4] ，如果它满足

$$(\nu\, m \otimes \mathsf{Id}_{{}^\vee A})(\mathsf{Id}_A \otimes \mathrm{coev}_A) = (\mathfrak{p}_{A^\vee} \otimes \nu\, m)(\widetilde{\mathrm{coev}}_A \otimes \mathsf{Id}_A) : A \to {}^\vee A.$$

如果代数 A 满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, A) \cong \Bbbk$，我们称其在连通 意义下。编织范畴 $(\mathcal{C}, c)$ 中的代数 A 如果满足 $m\, c_{A,\ A} = m$ ，则称为交换 代数。

引理 2.18. 设 (A, m, u, Δ, ν) 是 $\Bbbk$-线性幺半对偶范畴$\mathcal{C}$中的一个连通 ***Frobenius*** 代数。若 $\dim(A) \neq 0$，则 A 是 $\mathcal{C}$中的特殊 ***Frobenius*** 代数。

证明. 由于 Frobenius 代数是自对偶的，我们有 $\dim(A) = \varepsilon m \Delta u$。此外， m, Δ 是 $\mathcal{C}$中左 A-模的映射。因此， $m\Delta \in \mathrm{Hom}_A(A, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, A) \cong \Bbbk$。若 $m\Delta = 0$，则有 $\dim(A) = 0$。因此，我们得到 $m\Delta = \beta_2 \mathsf{Id}_A$ ，其中某个 $\beta_2 \in \Bbbk^\times$。于是，$\dim(A) = \beta_2 \varepsilon u$。由于 $\dim(A) \neq 0$，我们有 $\varepsilon u = \beta_0 \mathsf{Id}_{\mathbb{1}}$ ，其中某个 $\beta_0 \in \Bbbk^\times$。因此， A 是一个特殊 Frobenius 代数。$\square$

接下来，我们回顾 [WY22] 中关于多张量范畴中弗罗贝尼乌斯代数的另一种刻画，因为我们很快就会用到它。设 $\mathcal{C}$ 是一个多张量范畴， A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。那么， A 的一个 左理想 I 是一个元组 (I, λ, ϕ)，其中 $\lambda : A \otimes I \to I$ 是满足以下关系的态射：$\lambda(m \otimes \mathrm{Id}_I) = \lambda(\mathrm{Id}_A \otimes \lambda)$ $\lambda(u \otimes \mathrm{Id}_I) = \mathrm{Id}_I$；并且 $\phi : I \to A$ 是满足 $\phi\lambda_I = m(\mathrm{Id}_A \otimes \lambda)$ 的单态射。

定理 2.19。 [WY22，定理 5。3] 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔刚性幺半范畴。代数$(A,\ m,\ u)$ 在 $\mathcal{C}$ 中是 ***Frobenius*** 代数，当且仅当存在一个态射 $\nu : A \to \mathbb{1}$，使得若 A 的左理想或右理想$(I,\ \lambda,\ \phi)$ 经由 $\ker(\nu)$ 分解，则 ϕ 是 $\mathcal{C}$ 中的零态射。$\square$

现在，设 $\mathcal{C}$ 是一个多张量范畴。回顾一下，多张量范畴是加性的，因此允许对象的直和。这意味着，对于任意两个对象 X_1、$X_2 \in \mathcal{C}$，存在一个对象$X_1 \oplus X_2 \in \mathcal{C}$，以及映射 ι_k：$X_k \to X_1 \oplus X_2$ 和 p_k：$X_1 \oplus X_2 \to X_k$，其中 $k \in \{1,2\}$，使得下列关系成立，

$$\iota_1 p_1 + \iota_2 p_2 = \mathsf{Id}_{X_1 \oplus X_2} \text{ and } p_j \iota_k = \delta_{j,k} \mathsf{Id}_{X_k} \text{ for } j,k \in \{1,2\}.$$

众所周知，若 (A_i, m_i, u_i) ($i \in$ 1,2) 是 $\mathcal{C}$ 中的代数，则 $(A_1 \oplus A_2, m_{12}, u_{12})$ 也是，其中

$$m_{12} = \sum_{k\in\{1,2\}} \iota_k m_k (p_k \otimes p_k) \text{ and } u_{12} = \sum_{k\in\{1,2\}} \iota_k u_k$$

现在考虑以下结果，它加强了 [FRS02，命题 3.21] .

命题 2.20。设 $\{(A_i,\ m_i,\ u_i)\}_{i\in I}$ 是多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的有限个代数。那么，$A = \oplus_{i\in I} A_i$ 是 $\mathcal{C}$ 中的 *Frobenius* 代数，当且仅当每个 A_i 都是 $\mathcal{C}$ 中的 *Frobenius* 代数。

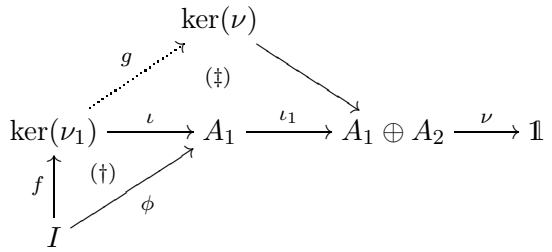
证明。只需在 $|I| = 2$ 的情形下证明该结果，也就是说，在 $A = A_1 \oplus A_2$ 的情形下证明即可。

($\Leftarrow$) 若 $(A_k, m_k, u_k, \Delta_k, \nu_k) \in \mathsf{Frob}(\mathcal{C})$ 对于 $k \in \{1,2\}$ 成立，则根据 [FRS02，命题 3.21], ，可知代数 $(A_1 \oplus A_2, m_{12}, u_{12}, \Delta_{12}, \nu_{12}) \in \mathsf{Frob}(\mathcal{C})$，其中

$$\Delta_{12} = \sum_{k\in\{1,2\}} (\iota_k \otimes \iota_k)\Delta_k p_k \text{ and } \nu_{12} = \sum_{k\in\{1,2\}} \nu_k p_k.$$

($\Rightarrow$) 根据假设，$(A = A_1 \oplus A_2, m_{12}, u_{12})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 Frobenius 代数。于是，由定理 2.19，存在一个态射 ν：$A \to \mathbb{1}$，使得 $\ker(\nu)$ 不包含 A 的任何左理想或右理想。令$\nu_k = \nu \circ \iota_k$ 对于 $k \in \{1,2\}$。为了证明 A_1 和 A_2 是 Frobenius 的，我们将证明对于 $k \in \{1,2\}$，$\ker(\nu_k)$ 不包含 A_k 的任何左理想或右理想。

假设代数 A_1 存在一个左理想 (I, λ_1, ϕ_1)，其通过 $\ker(\nu_1)$ 分解。令$\iota : \ker(\nu_1) \to A_1$ 表示包含映射。则存在一个映射 f：$I \to \ker(\nu_1)$，使得下图中的下三角形 (†) 可交换。



由于复合 $\nu\,\iota_1\,\iota$ 等于零映射，根据核 $\ker(\nu)$的泛性质，存在唯一映射 g 使图表 (‡) 可交换。现在考虑元组 $(I, (\iota_1 \otimes \mathsf{Id}_I)\lambda, \iota_1\phi)$。由于 ι_1 和 ϕ 都是单态射，它们的复合 $\iota_1\,\phi$ 也是单态射。直接验证可知，$(I, (\iota_1 \otimes \mathsf{Id}_I)\lambda, \iota_1\phi)$ 是 $A_1 \oplus A_2$ 的一个左理想，且其映射可经由 $\ker(\nu)$ 分解。这与定理 2.19 所述 $A_1 \oplus A_2$ 是弗罗贝尼乌斯的假设矛盾。

类似地，我们可以证明 A_1 不含有可经由 $\ker(\nu_1)$ 分解的右理想。对 A_2 重复同样的论证后，我们得出 A_1 和 A_2 都是弗罗贝尼乌斯。□

2.5. Drinfeld 中心

设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。那么，$\mathcal{C}$ 的 *Drinfeld* 中心（记作 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$）定义为一个范畴，其对象是形如 (X, σ) 的对象对，其中 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且 $\sigma = \{\sigma_Y\colon Y \otimes X \to X \otimes Y\}_{Y\in\mathcal{C}}$

是一个自然同构（称为半编织），满足

$$\sigma_{Y\otimes Z} = (\sigma_Y \otimes \mathsf{Id}_Z)(\mathsf{Id}_Y \otimes \sigma_Z), \qquad (Y, Z \in \mathcal{C}).$$

态射 $(X,\sigma) \to (Y,\sigma')$ 由 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 给出，满足 $(f\otimes \mathrm{Id}_Z)\sigma_Z = \sigma'_Z(\mathrm{Id}_Z \otimes f)$。幺半积为 $(X,\sigma)\otimes(Y,\sigma') = (X\otimes Y,\gamma)$，其中 $\gamma_Z := (\mathrm{Id}_X \otimes \sigma'_Z)(\sigma_Z \otimes \mathrm{Id}_Y)$。我们有遗忘函子

$$U_{\mathcal{C}} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}, \qquad (X,\sigma) \mapsto X,$$

它是强幺半的。当 $\mathcal{C}$ 是枢纽的时，我们可以为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 赋予枢纽结构，使得 $U_{\mathcal{C}}$ 成为枢轴函子 [EGNO16，练习 7.13.6]。除非另有说明，我们只考虑 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 上的这一枢纽结构。

Drinfeld 中心很重要，因为它们是带有编织 $c_{(X,\sigma),\,(Y,\sigma')} := \sigma'_X$ 的编织幺半范畴。此外，若 $\mathcal{C}$ 是一个（有限）张量范畴，则 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是一个编织（有限）张量范畴，且 $U_{\mathcal{C}}$ 是一个 $\Bbbk$-线性正合函子。映射 $(X,\sigma) \mapsto (X,\sigma^{-1}) : \mathcal{Z}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是幺半范畴之间的典范等价 [EGNO16，练习 7.13.5]。若我们也考虑编织，则这是一个编织等价 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})^{\mathrm{mir}}$ [EGNO16，练习 8.5.2]。

设 $\mathcal{C}$ 为有限张量范畴。则遗忘函子 $U_{\mathcal{C}}$ 具有右伴随 $R_{\mathcal{C}}$，且该右伴随为幺半函子。下面的定理汇总了一些重要的已知结果，我们稍后将用到它们。

定理 2.21。 设 $\mathcal{C}$ 为有限张量范畴。则有以下结果。

(a) $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的代数 $R_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 是交换的。(b) 当且仅当 $\mathcal{C}$ 是幺模的，代数 $R_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 才是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的 *Frobenius* 代数。(c) 若 $\mathcal{C}$ 是枢纽的且幺模的，则 $R_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的对称 *Frobenius* 代数。

证明。 部分 (a) 由 [BN11，命题 6.1] 推出，部分 (b) 由 [Shi16，定理5.6(3)]推出。部分 (c) 是 [SW22，引理 7.1]。□

3. 幺模模范畴

本节旨在研究幺模模范畴。我们将在第 3.1 节介绍一些基本性质，并汇总幺模模范畴的各种刻画。在第 3.2 节，我们利用幺模模范畴在 Drinfeld 中心中构造 Frobenius 代数。在第 3.3 节，我们利用枢轴范畴构造对称 Frobenius 代数。

3.1. 定义与基本性质

设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴，且 $\mathcal{M}$ 是一个正合左 $\mathcal{C}$-模范畴。回顾一下，$\mathbb{S}$ 和$\mathbb{N}$是左 $\mathcal{C}$-模函子，其模约束分别为 $\mathfrak{s}$和 $\mathfrak{n}$，如定理2.10 (c) 和定理2.11 (a) 所述。因此，$\mathbb{S}\mathbb{N}$ 是 $\mathcal{C}$上的左 $\mathcal{M}$ -模自函子，其模约束为

$$\mathfrak{d}_{X,M} : \mathbb{S}\,\mathbb{N}(X \triangleright M) \xrightarrow{\mathbb{S}(\mathfrak{n}_{X,M})} \mathbb{S}(X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{N}(M)) \xrightarrow{\mathfrak{s}_{X^{\vee\vee},\mathbb{N}(M)}} X \triangleright \mathbb{S}\,\mathbb{N}(M)$$

同理，$\mathsf{N}\overline{\mathbb{S}} \in \mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$。利用定理 2.11(b) 和 2.10(b)，可得 $\mathbb{S}\,\mathsf{N} = (\mathsf{N}\,\overline{\mathbb{S}})^{-1}$属于 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}}$ [FGJS22 的命题 4.13]（另见 [Shi22 的推论 6.13]）证明了 $D_{\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})} \cong_{\mathcal{C}} \mathsf{N}\overline{\mathbb{S}}$。因此，

$$\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \text{ is unimodular} \iff \overline{\mathbb{N}}\,\overline{\mathbb{S}} \cong_{\mathcal{C}} \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \iff \mathbb{S}\,\mathbb{N} \cong_{\mathcal{C}} \mathsf{Id}_{\mathcal{M}}. \tag{3.1}$$

以上讨论促使我们给出如下定义。

定义 3.2. 一个幺模结构 在正合左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 上是一个 $\mathcal{C}$-模自然同构 $\mathfrak{u}:\ \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}\,\mathbb{N}$，即一个函子同构 $\mathfrak{u}:\ \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}\,\mathbb{N}$，使得对所有 3.3 式均成立，其中 $X \in \mathcal{C}$ 且 $M \in \mathcal{M}$。

$$\begin{array}{ccc} X \triangleright M & \xrightarrow{\mathsf{Id}_X \triangleright \mathfrak{u}_M} & X \triangleright \mathbb{S}\,\mathbb{N}(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{u}_{X\triangleright M}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathfrak{s}_{X^{\vee\vee},\,\mathbb{N}(M)}} \\ \mathbb{S}\,\mathbb{N}(X \triangleright M) & \xrightarrow[\mathbb{S}(\mathfrak{n}_{X,M})]{} & \mathbb{S}(X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{N}(M)) \end{array} \tag{3.3}$$

正合左 $\mathcal{C}$-模范畴若存在幺模结构 $\mathfrak{u}$，则称为幺模的。

Lem定理 3.4. 幺模模范畴的定义*1.1* 与 *3.2* 等价 $t.$

证明。 根据定义 1.1， $\mathcal{M}$ 是幺模的，当且仅当 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是幺模的。由等式 (3.1)， $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是幺模的，当且仅当存在一个 $\mathcal{C}$-模自然同构$\mathfrak{u}:\ \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}\mathbb{N}$，即 $\mathcal{M}$上的幺模结构。因此，结论成立。 □

注 3.5。 由于 $\mathbb{N}$ 是一个等价函子，其拟逆为 $\mathbb{N}$ 根据定理 2.11(b)，$\mathcal{M}$ 是幺模的，当且仅当存在一个自然同构 $\mathbb{N} \cong \mathbb{S}$，其为 $\mathcal{C}$-模函子。因此，定义 3.2 与 [FSS20，注 427]中提出的定义相同。

接下来，我们介绍一些幺模模范畴的例子。

例 3.6。 (i) 设 $\mathcal{C}$ 为一个有限张量范畴。那么，将 $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ 视为左 $\mathcal{C}$-模范畴时，它是幺模的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是一个幺模张量范畴。例如，若 $\mathcal{C}$ 是一个半单有限张量范畴，则根据 [ENO04，推论 6.4]，它是幺模的。
(ii) 设 $\mathcal{C}$ 是一个非退化（即 的整体维数 $\mathcal{C}$ 非零）的融合范畴。例如，对于半单且余半单 Hopf 代数 $\mathcal{M}$，范畴 $\mathsf{Rep}(H)$ 是一个非退化融合范畴。若 $\mathcal{M}$ 是一个半单左 $\mathcal{C}$-模范畴，则根据 [ENO05，定理 2.18], $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$是多融合的。因此，根据定义 1.1， $\mathcal{M}$ 是一个幺模左 $\mathcal{C}$-模范畴。

(iii) 设 H 是有限维 Hopf 代数。那么范畴 $\mathcal{C}$ =Rep(H) 是有限张量范畴。遗忘函子 F: Rep(H) $\to$ Vec 将 Vec 变为左 Rep(H)- 模范畴。根据 [EGNO16, Example 7.12.26], ，我们有 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}$ (Vec) $\cong$ Rep(H^*)，其中 H^* 是 H 的对偶 Hopf 代数。因此，Vec 是幺模 Rep(H)-模范畴，当且仅当 H^* 是幺模 Hopf 代数。这又当且仅当 H 的特征类群元 g_H 等于其单位元 1_H。

在第 3 节中，我们将例 3.6(iii) 推广，并对任意有限维 Hopf 代数 $\mathsf{Rep}(H)$ 上的幺模模范畴进行分类 H。

下面的备注表明，非幺模张量范畴也可能存在幺模模范畴。

注 3.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个非幺模的有限张量范畴（$D_{\mathcal{C}} \ncong \mathbb{1}$）。例如，可以令 $\mathcal{C}$ 为 Taft 代数的表示范畴。现在，考虑范畴$\mathcal{D} = \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$。于是，我们得到

$$D_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} = \overline{\mathbb{N}}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}) \overset{(\dagger)}{\cong} (\overline{\mathbb{N}}_{\mathcal{C}} \boxtimes \overline{\mathbb{N}}_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}})(\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1}) \overset{(\ddagger)}{\cong} \overline{\mathbb{N}}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}) \boxtimes \overline{\mathbb{N}}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}) = D_{\mathcal{C}} \boxtimes D_{\mathcal{C}} \ncong \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1}.$$

这里，同构（†）由 FSS20，命题 3.20] 得出。由于 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 作为范畴，我们有 $\mathsf{N}_{\mathcal{C}} = \mathsf{N}_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}$。因此，同构（‡）成立。由此可得， $\mathcal{D}$ 不是幺模的。现在，考虑左 $\mathcal{D}$-模范畴 $\mathcal{M} := \mathcal{C}$，其作用定义如下：

$$(X \boxtimes Y) \triangleright M := X \otimes M \otimes Y.$$

接下来，我们断言 $\mathcal{D}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是幺模的。事实上，根据 [EGNO16, 7.13.8]，我们有 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) \cong \mathcal{Z}(\mathcal{C})$。此外，根据 [EGNO16, Proposition 8.6.3]， $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是可分解的；而根据 [EGNO16, 8.10.10]，，可分解的有限张量范畴是幺模的。因此， $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是幺模的。等价地， $\mathcal{M}$是一个幺模的 $\mathcal{D}$-模范畴。

接下来，我们汇集一些关于幺模模范畴的基本结果。下面的结果表明，幺模模范畴在直和运算下封闭。

引理 3.8. 设 $\mathcal{M} = \oplus_{i \in I} \mathcal{M}_i$，其中集合 I 是有限的，且每个 $\mathcal{M}_i$ 都是不可分解的正合左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么， $\mathcal{M}$ 是幺模的，当且仅当每个 $\mathcal{M}_i$ 都是幺模的。

证明。 由于 $\mathcal{M}$ 是可分解的， $\mathcal{D} := \mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是一个多张量范畴。因此，我们可以将 $\mathcal{D}$写成其分支子范畴的直和 $\mathcal{D}_{ij} := \mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})^{ij}$。但根据引理 [EGNO16，引理 7.12， $\mathcal{D}_{ij} = \mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j)$。现在，由以下等价关系即可得出结论。

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \text{ unimodular} \iff D_{\mathcal{D}} \cong_{\mathcal{C}} \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} &\overset{(2.15)}{\iff} D_{\mathcal{D}_{ii}} \cong_{\mathcal{C}} \mathsf{Id}_{\mathcal{M}_i} \ \forall i \in I \\ &\iff \mathcal{M}_i \text{ unimodular } \forall i \in I. \end{aligned}$$

□

引理 3.9。 设 $\mathcal{M}$ 是一个不可分解的正合左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，若 $\mathcal{M}$上的幺模结构存在，则其在标量倍意义下唯一。

证明。 由于 $\mathcal{M}$ 不可分解， $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 中的简单对象。现在，给定 $\mathcal{M}$上的两个幺模结构 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{u}'$， $\mathfrak{u}' \circ \mathfrak{u}^{-1}$ 是 $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$的一个自同态。因此，由舒尔引理，

$$\mathfrak{u}' \circ \mathfrak{u}^{-1} = k \, \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \text{ for some } k \in \Bbbk \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{u}' = k \, \mathfrak{u}.$$

□

命题 3.10。 设 $\mathcal{M}$ 是一个满足 $\mathbb{N} \cong \mathsf{Id}_{\mathcal{M}}$ 的幺模左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，对于任意 $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$，内 ***End*** 对象 $\mathrm{Hom}(M, M)$ 是 $\mathcal{C}$中的一个 ***Frobenius*** 代数。

证明。 由于 $\mathcal{M}$ 是幺模的，我们有一个自然同构 $\mathfrak{u} : \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}\,\mathsf{N}$。我们还有一个自然同构 $\tau : \mathsf{N} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$。将这两个同构结合起来，我们得到一个自然同构 $p : \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\mathfrak{u}} \mathbb{S}\,\mathsf{N} \xrightarrow{\mathbb{S}\,\tau} \mathbb{S}$，从而为所有 $M \in \mathcal{M}$提供一个同构 $p_M : M \to \mathbb{S}(M)$。现在，根据 [Shi19，定理 3.14]，，可知 $\mathrm{Hom}(M, M)$ 是 $\mathcal{C}$中的 Frobenius 代数。□

注 3.11。 若有限线性范畴 $\mathcal{M}$ 等价于某个对称 Frobenius 代数 A [上的模范畴，则称其为对称 ***Frobenius***， $\mathcal{M}$ FSS20，定义 3.23]。这样定义是合理的，因为对称 Frobenius 代数这一性质是 Morita 不变的。根据 [FSS20，命题 3.24]， $\mathcal{M}$ 是对称 Frobenius 的充要条件是 $\mathsf{N}_{\mathcal{M}} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$。因此，对称 Frobenius 模范畴是可以应用上述命题的自然对象。

3.2. 来自幺模模范畴的弗罗贝尼乌斯代数

在本节中，我们利用幺模模范畴来构造 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的（可分、特殊）Frobenius 代数。为此，我们构造

目标为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的适当 Frobenius 单张量函子。为构造此类函子，我们采用 [Yad22]中概述的策略。具体而言，我们考虑下文定义的函子 Ψ 的右伴随。

定义 3.12。 [Shi20] 设 $\mathcal{C}$ 为一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 为一个左 $\mathcal{C}$-模范畴。则定义函子 Ψ 如下：

$$\Psi := \Psi_{\mathcal{M}} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}), \qquad (X, \sigma) \mapsto (X \triangleright -, s^{\sigma}),$$

函子 $X \triangleright -$ 的左 $\mathcal{C}$-模结构由下式给出：

$$s^{\sigma}_{Y,M} : Y \triangleright (X \triangleright M) = (Y \otimes X) \triangleright M \xrightarrow{\sigma_Y \triangleright \mathsf{Id}_M} (X \otimes Y) \triangleright M = X \triangleright (Y \triangleright M).$$

Ne接下来，我们回顾 [Yad22，引理 4.7] 指出，我们可以写成 $\Psi = U' \circ \Omega \circ \Theta$，其中 ，

- Θ： $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{Z}(\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})_{\text{反向}})$ 是编织范畴之间的 Schauenburg 等价 [Sch01，定理 3.3]，
- Ω： $\mathcal{Z}(\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})_{\text{反向}}) \to \mathcal{Z}(\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}))_{\text{对偶}}$ 是由 [EGNO16，练习 8.5.2], 给出的编织范畴之间的等价，并且
- U'： $\mathcal{Z}(\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}))_{\text{mir}} \to \mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$是遗忘半编织的函子。令 R 表示 U'的右伴随。

在下面的讨论中，代数对象 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 将非常重要。根据定理2.21（a）， $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的交换代数。首先考虑以下结果，它可由 [Shi20]中的工作推出。

定理 3.13。设 $\mathcal{C}$ 是有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是有限的左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，$\mathcal{M}$ 是幺模的，当且仅当 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的 *Frobenius* 代数。

证明。令 Θ^{-1}和Ω^{-1}分别表示等价 Θ和Ω的拟逆。 n,

$$\Psi^{\mathsf{ra}} \cong \Theta^{\mathsf{ra}} \circ \Omega^{\mathsf{ra}} \circ U'^{\mathsf{ra}} \cong \Theta^{-1} \circ \Omega^{-1} \circ R \tag{3.14}$$

假设 $\mathcal{M}$ 是不可分解的。那么，我们得到以下等价。

$$\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) \in \mathsf{Frob}(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) \overset{(\diamondsuit)}{\iff} R(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) \in \mathsf{Frob}(\mathcal{Z}(\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}))) \overset{(\spadesuit)}{\iff} \mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \text{ unimodular}$$
$$\overset{(3.4)}{\iff} \mathcal{M} \text{ unimodular}.$$

等价 $(\diamondsuit)$成立，因为 Θ^{-1} 和 Ω^{-1} 都是幺半等价，因此它们保留 Frobenius 代数。等价 $(\spadesuit)$ 由定理 2.21(b) 得出，因为 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$是一个有限张量范畴。

现在假设 $\mathcal{M}$ 是可分解的，并且 $\mathcal{M} = \oplus_{i \in I} \mathcal{M}_i$ ，其中 $\mathcal{M}_i$ 是不可分解的 $\mathcal{C}$-模范畴，且集合 I 是有限的。首先注意到

$$\Psi^{\mathsf{ra}}_{\mathcal{M}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) = \Psi^{\mathsf{ra}}_{\mathcal{M}}(\oplus_{i \in I} \mathsf{Id}_{\mathcal{M}_i}) = \oplus_{i \in I} \Psi^{\mathsf{ra}}_{\mathcal{M}_i}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}_i})$$

现在根据以下 等价，结论便得出。下文用 Frob 表示 Frob($\mathcal{Z}(\mathcal{C})$)。

$$\Psi^{\mathsf{ra}}_{\mathcal{M}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) \in \mathsf{Frob} \overset{(2.20)}{\iff} \Psi^{\mathsf{ra}}_{\mathcal{M}_i}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}_i}) \in \mathsf{Frob}\ \forall i \in I \iff \mathcal{M}_i \text{ unimodular } \forall i \in I$$
$$\overset{(3.8)}{\iff} \mathcal{M} \text{ unimodular}. \qquad \square$$

在下述定理中，我们汇总了幺模模范畴的多种刻画。该结果还凸显了函子 Ψ^{ra} 对于在 Drinfeld 中心中构造交换 Frobenius 代数这一问题的重要性。

定理 3.15。 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个正合的左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么，下列条件等价。

(a) $\mathcal{M}$ 是一个幺模模范畴。(b) $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是一个幺模多张量范畴。(c) $\mathbb{S}\,\mathbb{N} \cong \mathsf{Id}_{\mathcal{M}}$ 作为左 $\mathcal{C}$-模函子。
(d) $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的一个 *Frobenius* 代数。

此外，若 $\mathcal{M}$ 是不可分解的，则上述条件等价于以下条件。
(e) Ψ^{ra} 是一个 *Frobenius* 单张量函子。

证明。 (a)⇔(c) 和 (a) ⇔(b) 根据定义 3.2 和引理 3.4，分别显然成立。此外，(a)⇔(d) 由定理 3.13可知。当 $\mathcal{M}$ 不可分解时，(d)⇔(e) 可由 [Yad22，定理 1.2(i)]推出。 □

因此，将 [Yad22，定理 1.2(i)] 应用于函子 Ψ，可得以下结果。

推论 3.16. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个不可分解的幺模左$\mathcal{C}$-模范畴。那么， Ψ^{ra} 是可分（分别地，特殊）*Frobenius* 单张量函子，当且仅当 *Frobenius* 代数 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$ 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中是可分（分别地，特殊）的。□

为了后续使用，我们也记录以下结果。

引理 3.17. 设 $\mathcal{M}$ 是一个不可分解的左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么， $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$是连通的。

证明. 证明可由以下计算得出。

$$\mathrm{Hom}^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbb{1}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}, \Psi^{\mathsf{ra}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}(\Psi(\mathbb{1}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}), \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}) \cong \Bbbk. \quad \square$$

3.3. 球结构情形

接下来，我们考虑 $\mathcal{C}$ 是主有限张量范畴的球结构情形。此假设是为了在 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中构造对称 Frobenius 代数所必需的。

设 $\mathcal{C}$ 为一个带有枢纽结构 $\mathfrak{p} : \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} {}^{\vee\vee}(-)$的球张量范畴。回忆一下，根据定理 2.10(a)，若 $\mathcal{M}$ 是一个正合左 $\mathcal{C}$-模范畴，则其（右）相对 Serre 函子$\mathbb{S}$ 存在。于是， $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathbb{S}$ -模函子，其模约束由下式给出

$$\mathbb{S}(X \triangleright M) \xrightarrow{\mathfrak{s}_{X,M}} {}^{\vee\vee}X \triangleright \mathbb{S}(M) \xrightarrow{\mathfrak{p}_X^{-1} \triangleright \mathsf{Id}_M} X \triangleright \mathbb{S}(M).$$

这使得我们能够在正合的 $\mathcal{C}$-模范畴上定义球结构。

定义 3.18。 [Shi19，定义 3.11] 设 $\mathcal{C}$ 为一个球张量范畴。正合左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 上的一个枢纽结构是一个左 $\mathcal{C}$-模自然同构 $\widetilde{\mathfrak{p}}\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}$。一个枢纽左 $\mathcal{C}$-模范畴 是配备了枢纽结构的正合左 $\mathcal{C}$-模范畴。

Shimizu 证明了枢纽模范畴的以下有趣性质。

定理 3.19。 [Shi19，定理 3。13] 若 $\mathcal{C}$ 是一个主有限张量范畴，且 $\mathcal{M}$ 是一个枢纽左 $\mathcal{C}$-模范畴，则 $(\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}))^{\mathrm{rev}}$ 是一个有限多张量范畴。 □

我们采用记号 $F^{\mathsf{lla}} := (F^{\mathsf{la}})^{\mathsf{la}}$ 和 $F^{\mathsf{rra}} = (F^{\mathsf{ra}})^{\mathsf{ra}}$。在定理3.19的假设下， $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 也是一个刚性幺半范畴。特别地，其枢纽结构由下式给出：

$$\mathfrak{p}_F^{\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})} := (F \xrightarrow{F\circ\widetilde{\mathfrak{p}}} F \circ \mathbb{S} \xrightarrow{\omega_{F^{\mathsf{lla}}}^{-1}} \mathbb{S} \circ F^{\mathsf{lla}} \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{p}}^{-1}\circ F^{\mathsf{lla}}} F^{\mathsf{lla}}),$$

其中，对于 $F \in \mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$， $\omega_F \colon \mathbb{S}_{\mathcal{N}} \circ F \to F^{\mathsf{rra}} \circ \mathbb{S}_{\mathcal{M}}$ 是函子的自然同构，见[Shi19，定理3.10]。接下来，我们证明本节的两个主要结果。

定理 3.20. 设 $\mathcal{C}$ 是一个主有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个不可分解、主、幺模的左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么 Ψ^{ra} 是一个主 *Frobenius* 单函子。

证明. 根据 [Yad22, Theorem 1.2(ii)]， Ψ^{ra} 是一个枢轴函子，当且仅当 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的对称 Frobenius 代数。首先，回顾 $\Psi = U' \circ \Omega \circ \Theta$。因此，由（3.14），

$$\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) \cong \Theta^{-1} \circ \Omega^{-1} \circ (U')^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}).$$

由于 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是主有限张量范畴，根据定理 2.21(c)，$(U')^{\mathsf{ra}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}})$ 是一个对称 Frobenius 代数。显然，Ω 是一个主等价；根据 [FGJS22, 定理 5.16]， Θ 也是一个主等价。因此，Ω^{-1}、 Θ^{-1} 也是枢轴函子；根据引理 2.4，$\Omega^{-1} \circ \Theta^{-1}$也是枢轴函子。由于枢轴函子保留对称 Frobenius 代数，我们得出 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的对称 Frobenius 代数。因此，根据 [Yad22, Theorem 1.2(ii)]，结论成立。□

定理 3.21。 设 $\mathcal{C}$ 是一个主有限张量范畴， $\mathcal{M}$ 是一个不可分解、枢纽的、幺模左 $\mathcal{C}$-模范畴。那么， Ψ^{ra} 是一个特殊的枢纽 *Frobenius* 单张量函子，当且仅当 $\dim(\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})) \neq 0$。

证明。 由定理 3.20，我们知道 Ψ^{ra} 是一个枢轴 Frobenius 枢轴函子。此类函子保持对称 Frobenius 代数，而 $\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathrm{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$中的对称 Frobenius 代数，因此 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的对称 Frobenius 代数。

($\Rightarrow$) 假设 Ψ^{ra} 是特殊的，且常数 β_0, β_2非零。那么，由引理 2.7 ，

$$\dim(\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})) = \beta_0\beta_2 \dim(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}}) = \beta_0\beta_2 \neq 0.$$

($\Leftarrow$) 我们知道 $\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$是一个连通的（引理 3.17）非零维 Frobenius 代数。因此，由引理 2.18，$\Psi^{\mathsf{ra}}(\mathsf{Id}_{\mathcal{M}})$是特殊 Frobenius 代数。因此，由推论 3.16， Ψ^{ra} 是一个特殊的枢纽 Frobenius 单张量函子。□

4. 幺模正合余模代数

本节将对有限张量范畴 $\mathcal{C}$ =Rep(H) 上的幺模模范畴进行分类，其中 H 是一个有限维霍普夫代数。根据 [AM07], ，每个左 $\mathcal{C}$-模范畴都具有 $\mathcal{M} = \mathrm{Rep}(A)$ 的形式，其中 A 是一个左 H-余模代数。在此情形下，若 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是正合（分别为不可分解）的，则称 A 为正合（分别为不可分解）的。若一个不可分解的正合 H-余模代数 A 满足 Rep(A) 是幺模 Rep(H)-模范畴，则称其为幺模代数。本节的主要结果定理 4.36 给出了幺模 H-余模代数的显式分类。为此，我们将详细描述函子 $\mathbb{S}_{\mathcal{M}}\mathbb{N}_{\mathcal{M}}$。然而，根据定理 2.17， $\mathbb{S}_{\mathcal{M}} \cong_{\mathcal{C}} D_{\mathcal{C}} \triangleright \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$。因此，我们需要描述 $D_{\mathcal{C}}$ 和 $\mathbb{N}_{\mathcal{M}}$。

我们首先介绍正合余模代数的背景材料 A，并明确描述中山函子的扭曲 $\mathcal{C}$-模结构，$\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(A)}$，以及$\mathsf{Rep}(A)$ 在第4.1节中的结构。借此，我们在第4.2节中明确描述特征可逆对象 $\mathbb{S}_{\mathsf{Rep}(A)}$、Radford 同构和 Serre 函子。在第4.3节中，我们描述函子 $\mathbb{S}_{\mathsf{Rep}(A)}\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(A)}$ 及其左 $\mathcal{C}$-模结构。借此，我们根据某些可逆元，为 $\mathcal{M}$的单模性（等价地， A的单模性）提供判据。

在 A中，我们称之为幺模元，见定义4.33。最后，在第4.4节中，我们详细讨论 Taft 代数这一例子。

记号 4.1. 本节中，我们始终在域 $\Bbbk$ 上处理向量空间。我们用记号 X^* 表示向量空间 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X,\Bbbk)$。对于任意有限维向量空间 X，令 $\phi_X\colon X\to X^{**}$ 表示典范同构映射。分别用 Δ、ε、S 表示 H 的余乘法、余单位和反极。我们将经常使用 Sweedler 记号进行计算。对于 $X\in \mathrm{Rep}(H)$，作为向量空间有 ${}^{\vee}X = X^{\vee} = X^*$，其 H-作用如下所述，

$$(h\cdot f)(x) := f(S(h)\cdot x), \qquad (h\cdot f')(x) := f'(S^{-1}(h)\cdot x)$$

对所有 $h\in H$、$f\in {}^{\vee}X$、$f'\in X^{\vee}$ 和 $x\in X$ 均成立。类似地，对于 $\phi_X(x)\in {}^{\vee\vee}X$, $h\cdot\phi_X(x) := \phi_X(S^2(h)\cdot x)$，以及对于 $\phi_X(x)\in X^{\vee\vee}$, $h\cdot\phi_X(x) := \phi_X(S^{-2}(h)\cdot x)$。

4.1. 正合余模代数与中山函子

一个左 H-余模代数 是一个左 H-余模 $(A,\rho\colon A\to H\otimes A)$，并带有代数结构，使得乘法映射和单位映射都是 H-余模映射，也就是说，

$$\rho(aa') = a_{(-1)}a'_{(-1)}\otimes_{\Bbbk} a_{(0)}a'_{(0)}, \qquad \rho(1_A) = 1_H\otimes_{\Bbbk} 1_A \qquad (\forall\, a,a'\in A)$$

其中 $\rho(a)$记作 $a_{(-1)}\otimes a_{(0)}\in H\otimes A$。于是，$\mathrm{Rep}(A)$通过如下作用成为左 $\mathrm{Rep}(H)$-模范畴：$\triangleright\colon \mathrm{Rep}(H)\times\mathrm{Rep}(A)\to\mathrm{Rep}(A)$，其中 $X\triangleright M = X\otimes_{\Bbbk} M$ 作为向量空间，而 A 在 $X\triangleright M$ 上的作用定义为

$$a\cdot(x\otimes m) = a_{(-1)}\cdot x\otimes a_{(0)}\cdot m \qquad (a\in A,\ x\in X,\ m\in M).$$

上面的第一个 $\cdot$ 是 H 在 X 上的作用，第二个 $\cdot$ 是 A 在 M上的作用。

根据 [Shi19，引理 4.5]（另见 [Skr07]），每个正合左 H-余模代数 A 都是一个弗罗贝尼乌斯代数。因此，我们可以在 A 上赋予一个弗罗贝尼乌斯系统，即一个三元组 $(\lambda_A,\{a^i\},\{b_i\})$，满足$1\le i\le r = \dim(A)$。这里，$\lambda_A\colon A\to\Bbbk$ 是一个线性映射，$\{a^i\}$, $\{b_i\}$ 是 A 的两组基，使得$\langle\lambda_A, a^ib_j\rangle = \delta_{i,j}$对所有 i, $j=1,\dots,r$均成立。A的***Nakayama*** 自同构（相对于 λ_A）是唯一满足以下特征的代数自同构 $\nu := \nu_A\colon A\to A$

$$\langle\lambda_A, ab\rangle = \langle\lambda_A,\nu_A(b)a\rangle \qquad (a,b\in A). \tag{4.2}$$

根据 [Shi19，引理 4.2] , , 对所有 $c\in A$，以下等式成立：

$$\langle\lambda_A,a^i\rangle b_i = 1_A = \langle\lambda_A,b_i\rangle a^i, \quad a^ic\otimes b_i = a^i\otimes cb_i, \quad \nu_A(c)a^i\otimes b_i = a^i\otimes b_ic. \tag{4.3}$$

上述公式省略了对 i 的求和，后文也将继续如此 .

记号 4.4。后文将使用以下记号。

(a) 对于向量空间 M，我们将 M 的基记为 m_i，将 M^* 的对偶基记为m^i。对所有 $m\in M$，它们满足 $\langle m^i,m\rangle m_i = m$。(b) 若 $(X,\cdot)$ 是左 H-模，且 $f\colon H'\to H$ 是代数映射。我们用记号 $({}_fX,\cdot_f)$ 表示带有如下作用的 H'-模 X：$h'\cdot_f x := f(h')\cdot x$，其中 $h'\in H', x\in X$。(c) 映射 $\phi_M^N\colon M^*\otimes_A N\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是一个同构，由 $m^*\otimes_A n\mapsto\langle m^*,?\rangle n$ 给出，其逆映射为 $f\mapsto m^i\otimes_A\langle f,m_i\rangle$。

4.1.1. $\mathrm{Rep}(A)$的中山函子

设 A 为 Frobe nius 代数。我们首先给出 $\mathrm{Rep}(A)$ 的中山函子的描述。

定理 4.5。 设 A 是一个带有 *Nakayama* 自同构 ν 的 *Frobenius* 代数。那么，我们有

$$\mathbb{N}_{\mathsf{Rep}(A)}(M)=\int^{N\in\mathsf{Rep}(A)}\mathrm{Hom}_A(M,N)^*\blacktriangleright N={}_\nu M\qquad(M\in\mathsf{Rep}(A)).\tag{4.6}$$

余端的投影映射 $\dot{\mathbb{I}}_{M,\,N}$： $\mathrm{Hom}_A(M,\ N)^*\blacktriangleright N\to{}_\nu M$ 由下式给出

$$\dot{\mathbb{I}}_{M,N}(\xi\otimes_{\Bbbk}n)=\langle\xi,\phi_M^N(m^i\otimes_A a^j\cdot n)\rangle\nu(b_j)\cdot m_i\tag{4.7}$$

对所有 $\xi\in\mathrm{Hom}_A(M,\ N)^*$和 $n\in N$均成立。

尽管这一结果对于专家而言广为人知，但我们未能在文献中找到其直接证明。因此，为方便读者，我们在附录 A.1中给出一个证明。

现在假设 A <style id='4}是一个正合左 H-余模代数。那么，根据定理 2.11(a)， $\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(A)}$是一个扭曲的左 $\mathsf{Rep}(H)$-模函子。下面的结果对这一结构作出了明确描述。

定理 4.8。 设 A是一个正合左 H-余模代数。中山函子 $\mathbb{N}$ 的扭曲左 $\mathsf{Rep}(H)$-模结构 $\mathfrak{n}^l_{X,\ M}$： $\nu(X\triangleright M)\to X^{\vee\vee}\triangleright{}_\nu M$给出了 $\mathsf{Rep}(A)$ 的上述结构

$$\mathfrak{n}^l_{X,M}(x\otimes_{\Bbbk}m)=\langle\lambda_A,a^i_{(0)}\rangle\phi_X(S^{-1}(a^i_{-1})\cdot x)\otimes_{\Bbbk}\nu(b_i)\cdot m.\tag{4.9}$$

$\mathfrak{n}^l_{X,\ M}$ 的逆映射由下式给出

$$\overline{\mathfrak{n}}^l_{X,M}(\phi_X(x)\otimes_{\Bbbk}m)=\langle\lambda_A,a^i_{(0)}\rangle\nu(b_i)\cdot\big(S^{-2}(a^i_{(-1)})\cdot x\otimes_{\Bbbk}m\big).\tag{4.10}$$

现在，设 B 是一个右 H-余模代数。那么 $\mathsf{Rep}(B)$ 是一个右 $\mathsf{Rep}(H)$-模范畴。在这种情况下，中山函子 $\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(B)}$ 是一个扭曲的右 $\mathsf{Rep}(H)$-模函子，以下结果描述了这一结构。

定理 4.11。 设 B 是一个正合右 H-余模代数。*Nakayama* 函子 $\mathbb{N}$ 在 $\mathsf{Rep}(B)$ 上的扭曲右 $\mathcal{C}$-模结构$\mathfrak{n}^r_{X,\ M}$： $\nu(M\triangleleft X)\to{}_\nu M\triangleleft{}^{\vee\vee}X$ 由下式给出

$$\mathfrak{n}^r_{X,M}(m\otimes_{\Bbbk}x)=\langle\lambda_B,a^i_{(0)}\rangle\nu(b_i)\cdot m\otimes_{\Bbbk}\phi_X(S(a^i_{(1)})\cdot x).\tag{4.12}$$

$\mathfrak{n}^r_{X,\ M}$ 的逆映射由下式给出

$$\overline{\mathfrak{n}}^r_{X,M}(m\otimes_{\Bbbk}\phi_X(x))=\langle\lambda_B,a^i_{(0)}\rangle\nu(b_i)\cdot\big(m\otimes_{\Bbbk}S^2(a^i_{(1)})\cdot x\big).\tag{4.13}$$

基于 [SS21, 定理 7。3], 定理 4.11 的证明见附录 A.2。随后，定理 4.8 通过将定理 4.11 应用于正合右 H-余模代数 A^{op}。

4.2. Radford 同构

在本节中，我们将计算有限张量范畴 $\mathsf{Rep}(H)$的特征可逆对象（见第 4.2.2 节）和 Radford 同构（见第 4.2.3 节）。这样，我们就能明确描述模范畴 $\mathsf{Rep}(A)$ 的 Serre 函子（见第 4.2.4 节）。我们指出，关于 $\mathsf{Rep}(H)$ 的 Radford 同构以及 $\mathsf{Rep}(A)$ 的 Serre 函子，已有 Shimizu 的相关工作 [Shi19]。我们在下文重新计算它们，旨在确保我们的约定始终一致，以便在本文后续内容及之后的研究中使用。

4.2.1. （余）积分

首先，我们按照 [Rad11 第 10] 章的内容，为（余）积分设定记号。左积分是满足 $h\Lambda=\Lambda\varepsilon(h)$（对所有 $h\in H$ 均成立）的非零元素 $\Lambda\in H$。于是存在唯一的代数映射

α_H：$H \to \Bbbk^\times$，称为特征标，使得 $\Lambda h = \langle \alpha_H, h\rangle \Lambda$ 对所有 $h \in H$ 均成立。因此，我们有

$$\langle \alpha_H, hh'\rangle = \langle \alpha_H, h\rangle\langle \alpha_H, h'\rangle, \qquad \langle \alpha_H, 1_H\rangle = 1 \qquad \text{for all } h, h' \in H. \tag{4.14}$$

霍普夫代数 H 称为幺模，如果 $\alpha_H = \varepsilon$。H 的右余积分是满足以下条件的非零元素$\lambda_H \in H^*$

$$\langle \lambda_H, h_{(1)}\rangle h_{(2)} = \langle \lambda_H, h\rangle 1_H \text{ for all } h \in H. \tag{4.15}$$

那么存在唯一的类群元 $g_H \in H$ 满足

$$h_{(1)}\langle \lambda_H, h_{(2)}\rangle = \langle \lambda_H, h\rangle g_H \text{ for all } h \in H. \tag{4.16}$$

从此处起，固定一个左积分 Λ和一个满足 $\langle \lambda_H、\ \Lambda\rangle = 1$的右余积分 λ_H。此外，令$\overline{\alpha}_H :=\alpha_H \circ S$ 以及 $\overline{g_H} := g_H^{-1}$。

4.2.2. $\mathsf{Rep}(H)$ 的特征可逆对象

众所周知，有限维霍普夫代数是弗罗贝尼乌斯代数，其弗罗贝尼乌斯形式由任意右余积分 λ_H 给出。根据 [Rad94, Theorem 3(a,b)], , 我们得到 H 的 Nakayama 自同构为

$$\nu_H(h) = \langle \alpha_H, h_1\rangle S^2(h_2)$$

其逆映射 $\overline{\nu}$ 由下式给出

$$\overline{\nu}_H(h) = S^2(\overline{g_H} h_1 g_H)\langle \alpha_H, g_H S(h_2)\overline{g_H}\rangle \overset{(4.14)}{=} S^2(\overline{g_H} h_1 g_H)\langle \alpha_H, S(h_2)\rangle.$$

引理 4.17。对于 $\mathbb{1}_{\mathsf{Rep}(H)} = \Bbbk$，我们有以下结果。

(a) $\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(H)}(\Bbbk) = \Bbbk$ 作为带有 H-作用的向量空间，其中作用定义为 $h \star c := \langle \alpha_H,\ h\rangle c$。(b) $D_{\mathsf{Rep}(H)} = \mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(\overline{H})}(\Bbbk) = \Bbbk$ 作为带有 H-作用的向量空间，其中作用定义为 $h \overline{\star} c := \langle \alpha_H,\ S(h)\rangle c$。

证明。由定理 4.5，$\mathbb{N}(\Bbbk) = {}_\nu\Bbbk$。由于 H-作用在 $\Bbbk$上的定义为 $h \cdot c = \langle \varepsilon_H,\ h\rangle c$，我们得到 H-作用 $\star$ 在 ${}_{\nu_H}\Bbbk$ 上的定义为

$$h \star c = \langle \varepsilon_H, \nu_H(h)\rangle c = \langle \alpha_H, h_1\rangle\langle \varepsilon_H, S^2(h_2)\rangle c = \langle \alpha_H, h_1\rangle\langle \varepsilon_H, h_2\rangle = \langle \alpha_H, h\rangle c.$$

由于函子 N 是 $\overline{\mathsf{N}}$的拟逆，显然 $\mathsf{N}(M) = {}_{\overline{\nu}}M$。现在使用与上述相同的论证，即得出该结论。□

4.2.3. $\mathbf{Rep}\mathsf{Rep}(H)$ 的 Radford 同构

以下内容基于 [SS21, §6.3] 中的讨论。霍普夫代数 H 是一个左 H-余模代数，也是一个右 $\mathsf{Rep}(H)$ 是一个 $\mathsf{Rep}(H)$-双模范畴。利用定理 4.8 和 4.11 以及 $A = B = H$，可得到如下映射。

$$g_X : \mathbb{N}(\mathbb{1}) \triangleleft {}^{\vee\vee}X \xrightarrow{\overline{\mathfrak{n}}^r_{X,\mathbb{1}}} \mathbb{N}(\mathbb{1} \triangleleft X) \xrightarrow{\text{flip}} \mathbb{N}(X \triangleright \mathbb{1}) \xrightarrow{\mathfrak{n}^l_{X,\mathbb{1}}} X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{N}(\mathbb{1}) \tag{4.18}$$

如 [Shi17, 注 4.11], 所述，Radford 同构 $\mathfrak{R}_X$ 可以用映射 g_X 描述如下。首先回顾一下，根据 [FSS20, 引理 4.11], $D = \mathsf{N}(1)$ 是 $\mathsf{N}(1)$ 的右对偶。求值映射和余求值映射都是平凡的恒等映射。于是，$\mathfrak{R}_X$ 等于以下复合。

$${}^{\vee\vee}X \otimes D \xrightarrow{\text{coev}_D \otimes \text{Id}} D \otimes \mathbb{N}(\mathbb{1}) \otimes {}^{\vee\vee}X \otimes D \xrightarrow{\text{Id}\otimes g_X \otimes \text{Id}} D \otimes X^{\vee\vee} \otimes \mathbb{N}(\mathbb{1}) \otimes D \xrightarrow{\text{Id}\otimes \text{ev}} {}^{D}D \otimes X^{\vee\vee} \tag{4.19}$$

因此，我们首先计算下面的映射 g_X。

引理 4.20。 映射 g_X 在 (4.18) 由 $c\otimes_{\Bbbk}\phi_X(x)\mapsto\phi_X(\overline{g_H}\cdot x)\otimes_{\Bbbk}c$ 对所有 $x\in X$ 和 $X\in\mathsf{Rep}(A)$ 给出。

证明。 任取 H 的一个 Frobenius 系统 $(\lambda_H,\{a^i\},\{b_i\})$，其中 λ_H 是 H 的右积分。

$$\begin{aligned}
c\otimes_{\Bbbk}\phi_X(x) &\overset{(4.18)}{\mapsto} \mathfrak{n}^l_{X,\mathbb{1}}\circ\mathrm{flip}\circ\overline{\mathfrak{n}}^r_{X,\mathbb{1}}(c\otimes_{\Bbbk}\phi_X(x))\\
&\overset{(4.13)}{=} \mathfrak{n}^l_{X,\mathbb{1}}\circ\mathrm{flip}\big[\langle\lambda_H,a^i_{(1)}\rangle\nu(b_i)\cdot\big(c\otimes_{\Bbbk}S^2(a^i_1)\cdot x\big)\big]\\
&= \mathfrak{n}^l_{X,\mathbb{1}}\big[\langle\lambda_H,a^i_{(1)}\rangle\big(\nu(b_i)_{(2)}S^2(a^i_2)\cdot x\otimes_{\Bbbk}\nu(b_i)_{(1)}\cdot c\big)\big]\\
&\overset{(4.9)}{=} \langle\lambda_H,a^j_{(2)}\rangle\langle\lambda_H,a^i_{(1)}\rangle\phi_X(S^{-1}(a^j_1)\nu(b_i)_{(2)}S^2(a^i_2)\cdot x)\otimes_{\Bbbk}\nu(b_j)\nu(b_i)_{(1)}\cdot c\\
&\overset{(4.15,4.16)}{=} \langle\lambda_H,a^j\rangle\langle\lambda_H,a^i\rangle\phi_X(S^{-1}(g_H)\nu(b_i)_{(2)}S^2(1_H)\cdot x)\otimes_{\Bbbk}\nu(b_j)\nu(b_i)_{(1)}\cdot c\\
&\overset{(4.3)}{=} \phi_X(\overline{g_H}\cdot x)\otimes_{\Bbbk}c.
\end{aligned}$$

□

注 4.21。 对于每个有限维 Hopf 代数 H，Radford [Rad76] 证明了反极四次幂的以下公式。

$$S^4(h)=g_H\,[\alpha_H(h_1)\,h_2\,\overline{\alpha}_H(h_3)]\,\overline{g_H}. \tag{4.22}$$

事实 g_X 是左 H-模的态射，等价于将 $h=\alpha_H\rightharpoonup S^{-2}(h)$ 代入（4.22）后得到的上述反极四次幂公式。

现在我们可以给出 Radford 同构的公式了。

命题 4.23. 范畴 *2.16* 的 *Radford* 同构（$\mathcal{C}=\mathsf{Rep}(H)$）由下式给出

$$\mathfrak{R}_X:{}^{\vee\vee}X\otimes D\to D\otimes X^{\vee\vee},\quad \phi_X(x)\otimes c\mapsto c\otimes\phi_X(\overline{g_H}\cdot x)\quad \textit{for } c\in D,\,x\in X. \tag{4.24}$$

证明。 将 g_X 的公式代入 (4.19)，得到

$$\phi_X(x)\otimes_{\Bbbk}c\xmapsto{\mathrm{coev}_D\otimes\mathsf{Id}}1\otimes_{\Bbbk}1\otimes_{\Bbbk}\phi_X(c)\otimes_{\Bbbk}c\xmapsto{\mathsf{Id}\otimes g_X\otimes\mathsf{Id}}1\otimes_{\Bbbk}\phi_X(\overline{g_H}\cdot x)\otimes_{\Bbbk}1\otimes_{\Bbbk}c\xmapsto{\mathsf{Id}\otimes\mathrm{ev}_D}c\otimes_{\Bbbk}\phi_X(\overline{g_H}\cdot x).$$

因此，结论得证。 □

下文中，我们将经常使用同一化 ${}^{\vee\vee}X\otimes D\cong{}^{\vee\vee}X$ 和 $D\otimes X^{\vee\vee}\cong X^{\vee\vee}$，因为 $D\cong\Bbbk$ 作为向量空间。经过这些同一化后，Radford 同构（4.24）变为 $\mathfrak{R}_X(\phi_X(x))=\phi_X(\overline{g_H}\cdot x)$。其逆映射为 $\mathfrak{R}_X^{-1}(\phi_X(x))=\phi_X(g_H\cdot x)$。

4.2.4. Serre 函子

根据定理 2.17，相对 Serre 函子满足 $\mathbb{S}\cong D\triangleright\mathbb{N}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模函子。由于 Serre 函子在同构意义下唯一，我们就将上述内容作为它的定义。于是得到以下结果。

定理 4.25. $\mathsf{Rep}(A)$ 的相对 *Serre* 函子由 $\mathbb{S}(M)={}_{\nu'}(M)$ 给出，其中

$$\nu'(a)=\langle\alpha_H,S(a_{(-1)})\rangle\nu(a_{(0)}). \tag{4.26}$$

扭曲的左 $\mathsf{Rep}(H)$-模结构 $\mathfrak{s}^l_{X,M}\colon{}_{\nu'}(X\triangleright M)\xrightarrow{\sim}{}^{\vee\vee}X\triangleright{}_{\nu'}M$ 在 $\mathbb{S}$ 上由下式给出

$$\mathfrak{s}(x\otimes_{\Bbbk}m)=\langle\lambda,a^i_{(0)}\rangle\phi_X(g_HS^{-1}(a^i_{(-1)})\cdot x)\otimes_{\Bbbk}\nu(b_i)\cdot m \tag{4.27}$$

证明。(4.26) 式由中山函子 (4.6) 的公式以及引理 4.17(b) 中对 D 的描述得出。(4.27) 式由复合 (4.9) 中给出的 $\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(A)}$ 的扭曲左 $\mathsf{Rep}(H)$-模结构 $\mathfrak{n}^l_{X,M}$ 与 Radford 同构 (4.24) 的逆映射 $\mathfrak{R}_X^{-1}$ 得出。□

注 4.28。 Shi19] 中也给出了相对 Serre 函子的另一种公式 [。

4.3. Rep(A)上的幺模结构

本节使用第 4.1.1 节和第 4.2.4 节分别给出的 Rep(A) 的中山函子和相对 Serre 函子的描述，来描述第 $\mathcal{C}$-模函子$\mathbb{S}_{\mathsf{Rep}(A)}\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(A)}$ 。利用这一点，我们将在第 4.3.1 节中，根据 A 的幺模元刻画 $\mathsf{Rep}(A)$ 上的幺模结构。在幺模元的定义较为复杂的情况下，我们将在第 4.3.2 节讨论 4.3.3 中 A 具有类群状余积分的较简单情形。在这种情况下，幺模元的定义要简单得多。

4.3.1. 函子 $\mathbb{S}_{\mathsf{Rep}(A)}\mathbb{N}^{\mathsf{Rep}(A)}$的描述

定理 4.29。 对于 $M \in \mathsf{Rep}(A)$，有 $\mathbb{S}\,\mathbb{N}(M) = {}_{\widetilde{\nu}}M \in \mathsf{Rep}(A)$ 其中 e

$$\widetilde{\nu}(a) = \langle \alpha_H, S(a_{-1})\rangle \nu^2(a_0). \tag{4.30}$$

$\mathcal{C}$-模 $\mathbb{SN}$ 的左模结构由下式给出

$$\mathfrak{d}_{X,M}(x \triangleright m) = (\Im_H \cdot x) \triangleright (\Im_L \cdot m), \ \textit{where} \tag{4.31}$$

$$\Im = \Im_H \otimes \Im_A := \langle \lambda_A, a_0^i\rangle\langle \lambda_A, a_0^j\rangle \; g_H S^{-3}(a_{-1}^j) S^{-1}(a_{-1}^i) \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j b_i) \in H \otimes_{\Bbbk} A. \tag{4.32}$$

证明。 根据中山函子（4.6）和相对 Serre 函子（4.26）的描述，显然作为函子， $\mathbb{SN}$ 由（4.30）给出。此外，利用相对 Serre 函子（4.27）和中山函子（4.9）的扭曲左 $\mathcal{C}$-模结构，我们得到，$\mathbb{S}$ N： $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{C}$-模函子，其左 $\mathcal{C}$-模结构 $\mathfrak{d}_{X,M}$ 由以下复合给出。

$$\mathfrak{d}_{X,M} : \mathbb{SN}(X \triangleright M) \xrightarrow{\mathbb{S}(\mathfrak{n}_{X,M})} \mathbb{S}(X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{N}(M)) \xrightarrow{\mathfrak{s}_{X^{\vee\vee},\mathbb{N}(M)}} {}^{\vee\vee}X^{\vee\vee} \triangleright \mathbb{SN}(M) = X \triangleright \mathbb{SN}(M).$$

下列计 算给出了 $\mathbb{SN}$ 的左 $\mathcal{C}$-模结构的显式描述 .

$$\begin{aligned}
x \otimes_{\Bbbk} m \quad &\xrightarrow{\mathbb{S}(\mathfrak{n}_{X,M})} \langle \lambda, a_0^i\rangle \phi_X(S^{-1}(a_{-1}^i) \cdot x) \otimes_{\Bbbk} \nu(b_i) \cdot m \\
&\xrightarrow{\mathfrak{s}_{X^{\vee\vee},\mathbb{N}(M)}} \langle \lambda_A, a_0^j\rangle\langle \lambda_A, a_0^i\rangle \phi_{X^{\vee\vee}}(g_H S^{-1}(a_{-1}^j) \cdot \phi_X(S^{-1}(a_{-1}^i) \cdot x)) \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j)\nu(b_i) \cdot m \\
&\overset{(\spadesuit)}{=} \langle \lambda_A, a_0^j\rangle\langle \lambda_A, a_0^i\rangle \phi_{X^{\vee\vee}} \circ \phi_X(S^{-2}(g_H S^{-1}(a_{-1}^j)) S^{-1}(a_{-1}^i) \cdot x) \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j)\nu(b_i) \cdot m \\
&\overset{(\diamondsuit)}{=} \langle \lambda_A, a_0^j\rangle\langle \lambda_A, a_0^i\rangle S^{-2}(g_H S^{-1}(a_{-1}^j)) S^{-1}(a_{-1}^i) \cdot x \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j b_i) \cdot m \\
&\overset{(\heartsuit)}{=} \langle \lambda_A, a_0^j\rangle\langle \lambda_A, a_0^i\rangle g_H S^{-3}(a_{-1}^j) S^{-1}(a_{-1}^i) \cdot x \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j b_i) \cdot m
\end{aligned}$$

这里，$(\lambda_A, \{a^i\}, \{b_i\})$ 和 $(\lambda_A, \{a^j\}, \{b_j\})$ 是 A 的 Frobenius 系统。等式 $(\spadesuit)$ 成立，是因为 H在 $X^{\vee\vee}$上的左作用由 $h \cdot \phi_X(x) = \phi_X(S^{-2}(h) \cdot x)$ 给出。等式 $(\diamondsuit)$ 成立，是因为我们通过映射 $\phi_{X^{\vee\vee}} \circ \phi_X$将 X与 ${}^{\vee\vee}X^{\vee\vee}$等同，且 ν是一个代数映射。最后，$(\heartsuit)$ 成立，是因为 g_H 是类群元。由上述计算可知， $\mathbb{SN}$ 的左 $\mathcal{C}$-模结构如方程（4.31）和（4.32）所述。□

4.3.2. 正合 H-余模代数中的幺模元

根据定义 3.2，回忆一下，$\mathsf{Rep}(A)$ 是一个幺模 $\mathsf{Rep}(H)$-模范畴，当且仅当存在一个 $\mathcal{C}$-模自然同构 $\mathfrak{u}$： $\mathsf{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}\,\mathbb{N}$。接下来，我们将利用定理 4.29，通过代数 A中的某些可逆元来刻画这类自然同构。为此，考虑以下概念。

定义 4.33。 设 A 是一个正合的左 H-余代数。称 A 中的可逆元 $\widetilde{g} \in A$ 为幺模元，如果它满足以下两个关系：

$$\widetilde{g}a\widetilde{g}^{-1} = \widetilde{\nu}(a) \quad (\forall\, a \in A) \tag{4.34}$$

$$1_H \otimes \widetilde{g} = \Im \cdot \delta(\widetilde{g}) \tag{4.35}$$

这里 δ 是 A的余模结构。关于 $\widetilde{\nu}$ 和 $\Im$的定义，分别参见（4.30）和（4.31）。

由此，我们得到以下结果。

定理 4.36。设 A 是一个正合的左 H-余代数。则，$\mathsf{Rep}(H)$-模范畴 $\mathsf{Rep}(A)$ 上的幺模结构与 A 的幺模元一一对应。

证明。设有幺模结构 $\mathfrak{u}: \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{S}\,\mathbb{N} \overset{(4.30)}{=} {}_{\widetilde{\nu}}(-)$。于是得到元素 $\widetilde{g} = \mathfrak{u}_A(1_A) \in A$。由 $\mathfrak{u}$ 的自然性可知，对于所有 $x \in X$ 和 $X \in \mathsf{Rep}(A)$，都有 $\mathfrak{u}_X(x) = \widetilde{g} \cdot x$。由于 $\mathfrak{u}_A$ 是一个同构，$\widetilde{g}$ 是 A 中的可逆元。

- 由于 $\mathfrak{u}_A = \widetilde{g} \cdot (-)$: $A \to {}_{\widetilde{\nu}}A$ 是左 A-模的映射，条件（4.34）得以满足。
- 由于 $\mathfrak{u}$是一个 $\mathcal{C}$-模自然同构，图（3.3）交换。利用 $\mathfrak{u}_X(x) = \widetilde{g} \cdot x$以及 $\mathcal{C}$的 $\mathbb{S}\mathbb{N}$-模结构由 $\Im$（4.31）给出这一事实，我们得到（4.35）成立。

因此，$\widetilde{g}$ 是 A的幺模元。

C反之，给定 A的一个幺模元 $\widetilde{g}$，我们定义自然同构

$$\mathfrak{u} = \{\mathfrak{u}_M : M \to \mathbb{S}\,\mathbb{N}(M),\ \ m \mapsto \widetilde{g} \cdot m\}_{M \in \mathsf{Rep}(A)}.$$

然后，将上述论证反向重复，我们得到 $\mathfrak{u} = \{\mathfrak{u}_M\}$ 是 $\mathsf{Rep}(A)$上的幺模结构。□

4.3.3. 余模代数上的类群余积分

考虑以下概念。

定义 4.37。 [Kas18] 令 H 为一个霍普夫代数，A为一个左 H-余代数代数。A 上的一个类群状余积分 是一个有序对 (g, λ)，由一个类群元 $g \in H$ 和一个线性形式 $\lambda: A \to \Bbbk$组成，并满足方程

$$a_{(-1)}\langle \lambda, a_{(0)} \rangle = \langle \lambda, a \rangle g \tag{4.38}$$

对所有元素 $a \in A$都成立。在这种情况下，λ 称为 A上的一个 g-余积分。若 λ 是 A上的一个弗罗贝尼乌斯形式，则称 g-余积分 λ 为非退化的。

接下来我们将看到，当 A上存在类群状余积分时，函子 $\mathbb{S}\mathbb{N}$ 的 $\mathcal{C}$-模结构会简化。

定理 4.39。 回顾元素 $\Im$ *(4.32)* 以及 $\mathcal{C}$-模结构 $D_{\mathsf{Rex}\mathcal{C}(\mathcal{M})} = \mathbb{S}\mathbb{N}$*(4.31)*。若 λ_A 是 A 上的弗罗贝尼乌斯形式，且是某个类群元 $g_A \in H$对应的 g_A-类群状积分，则有

$$\Im = g_A^{-2} g_H \otimes 1_A. \tag{4.40}$$

因此，对于 $X \in \mathcal{C}$ 和 $M \in \mathcal{M}$，由下式给出的 $\mathbb{S}\mathbb{N}$ 的左 $\mathcal{C}$-模结构：

$$\mathbb{S}\,\mathbb{N}(X \triangleright M) \to X \triangleright \mathbb{S}\,\mathbb{N}(M), \qquad x \triangleright m \mapsto \phi_X(g_A^{-2} g_H \cdot x) \triangleright m.$$

证明。 注意到

$$\Im \overset{(4.32)}{=} \langle \lambda_A, a_0^i \rangle \langle \lambda_A, a_0^j \rangle\ g_H S^{-3}(a_{-1}^j) S^{-1}(a_{-1}^i) \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j b_i)$$

$$\overset{(4.38)}{=} \langle \lambda_A, a^i \rangle \langle \lambda_A, a^j \rangle \; g_H S^{-3}(g_A) S^{-1}(g_A) \otimes_{\Bbbk} \nu(b_j b_i)$$
$$\overset{(4.3)}{=} g_H S^{-3}(g_A) S^{-1}(g_A) \otimes_{\Bbbk} \nu(1_A)$$
$$\overset{(\spadesuit)}{=} g_H g_A^{-1} g_A^{-1} \otimes 1_A$$
$$\overset{(\diamondsuit)}{=} g_A^{-2} g_H \otimes 1_A.$$

这里，等式 (♠) 成立是因为 g_A 是 H 的类群元，而 ν 是代数映射。等式 (♢) 成立是因为 g_H 与 H的所有类群元都可交换。□

当所考察的 H-余模代数上的弗罗贝尼乌斯形式是类群状余积分时，定理4.36 便大为简化，我们得到了 [Shi22，推论 7。10]

推论 4.41。若 A 的弗罗贝尼乌斯形式 λ_A 是某个 $g_A \in H$ 的 g_A-类群状余积分，则 $\mathsf{Rep}(A)$ 上的幺模结构与满足以下条件的可逆元 $\widetilde{g} \in A$ 构成双射：

$$\widetilde{g} a \widetilde{g}^{-1} = \widetilde{\nu}(a) = \langle \alpha_H, S(a_{-1}) \rangle \nu^2(a_0), \qquad g_H^{-1} g_A^2 \otimes \widetilde{g} = \delta(\widetilde{g}) \qquad \forall\, a \in A. \tag{4.42}$$

□

范畴$\mathsf{Vec} = \mathsf{Rep}(\Bbbk)$是一个正合左 H-模范畴，因为 $\Bbbk$ 是一个正合左 H-余模代数，其 H-余作用由 $1 \mapsto 1_H \otimes 1$给出。于是，将推论4.41 应用于 H-余模代数 $\Bbbk$，我们得到 $\Bbbk$ 具有幺模结构，当且仅当 $g_H = 1_H$，也就是说，H^* 是幺模的。这与我们在例3.6(iii) 中的观察一致。

4.4. Taft 代数示例

本节研究 H 为 Taft 代数 $T(\omega)$ 时的 $\mathcal{C} = \mathsf{Rep}(H)$。设 $\Bbbk$ 为特征 0 的代数闭域。为定义 Taft 代数，固定一个整数 $N > 1$ 以及一个本原的 N次单位根 $\omega \in \Bbbk$。那么， $T(\omega)$ 定义为由 g和 x 生成、满足以下关系的 $\Bbbk$代数

$$x^N = 0, \quad g^N = 1 \quad \text{and} \quad gx = \omega x g. \tag{4.43}$$

配备以下余乘法和反极映射后， $T(\omega)$ 成为一个霍普夫代数。

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x \quad \text{and} \quad S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -g^{-1} x. \tag{4.44}$$

由此可得以下信息。

- 元素 $\Lambda^l = \sum_{i=0}^{N-1} g^i x^{N-1}$ 是 $T(\omega)$ 的一个非零左积分。 $T(\omega)$ 的特征标由 $\alpha_{T(\omega)}(g) = \omega$ 和 $\alpha_{T(\omega)}(x) = 0$给出。
- 泛函 $\lambda_{T(\omega)}\colon T(\omega) \to \Bbbk$由 $\lambda_{T(\omega)}(x^r g^s) = \delta_{r,N-1}\delta_{s,0}$for $r, s = 0, \ldots, N-1$给出，是 $T(\omega)$ 的一个右余积分。 $T(\omega)$ 的特征类群元由$g_{T(\omega)} = g^{-1}$给出。

由于 $g_{T(\omega)} \neq 1_H$，我们有 $T(\omega)^*$不是幺模的。因此，根据例 3.6，我们有 Vec不是一个幺模 $\mathsf{Rep}(T(\omega))$-模范畴。事实上，正如我们将在下文看到的，$\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 不允许任何幺模模范畴。

不可分解、左正合的 $T(\omega)$-余模代数（或等价地，不可分解的正合$\mathsf{Rep}(T(\omega))$-模范畴）由 Mombelli [Mom10]进行了分类。Shimizu [Shi19, §5.1] 证明了这些余模代数存在类群状余积分，并对其进行了明确描述。利用这些结果和推论 4.41，我们得到关于幺模模范畴不存在性的以下结果。

定理 4.45。 *Taft* 代数 $T(\omega)$ 不存在幺模余模代数。换言之，范畴 $\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 不存在幺模模范畴。

证明。取一个因子 $d|N$ 和一个元素 $\xi \in \Bbbk$。令 $m = N/d$，并考虑以下代数：

(a) $A_0(d) = \Bbbk\langle G|G^d = 1\rangle$.
(b) $A_1(d,\xi) = \Bbbk\langle G, X|G^d = 1, X^N = \xi, GX = \omega^m XG\rangle$.

它们是 $T(\omega)$-余模代数，其余作用由下式确定：

$$\delta(G) = g^m \otimes G \ , \delta(X) = x \otimes 1 + g \otimes X. \tag{4.46}$$

根据 [Mom10，命题 8.3], ，$\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 上每个不可分解的正合左模范畴都等价于 $\mathsf{Rep}(A)$，其中 A 是上文列出的余模代数之一。接下来，我们回顾这些余模代数的类群状余积分，并用它们证明模范畴 $\mathsf{Rep}(A)$不是幺模的。

余模代数 $A_0(d)$：定义线性映射 $\lambda_A : A_0(d) \to \Bbbk$，使得 $\lambda_A(G^r) = \delta_{0,r}$ （对于$r \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$）。于是，根据 [Shi19，第 5.1.1]节， λ_A 是一个 g_A-类群状余积分，且 $g_A = 1$ 作用于 $A_0(d)$。此外，λ_A 是 $A_0(d)$上的 Frobenius 形式。关于 λ_A 的 Nakayama 自同构为$\nu = \mathrm{Id}_{A_0(d)}$。接下来，我们计算式 (4.30) 中定义的自同构 $\widetilde{\nu}$。

$$\widetilde{\nu}(G) = \langle \alpha_{T(\omega)}, S(g^m)\rangle \nu^2(G) = \langle \alpha_{T(\omega)}, g^{-m}\rangle G = \omega^{-m} G$$

将这些代入 $g_{T(\omega)} = g^{-1}$ 和 $g_A = 1$ 推论 4.41，可得 A 具有幺模~结构，当且仅当存在元素 $G \in A_0(d)$ 使得

$$\widetilde{G}G^r = \widetilde{\nu}(G^r)\widetilde{G} = \omega^{-mr} G^r \widetilde{G} = \omega^{-mr} \widetilde{G} G^r \ \text{ and } \ g \otimes_{\Bbbk} \widetilde{G} = \delta(\widetilde{G}) \ \text{ hold } \forall\, r \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}. \tag{4.47}$$

(4.47) 的第一个条件成立，当且仅当 $\omega^{-mr} = 1$ 对所有 r成立。只有在$m = N$ 且 $d = 1$时，这一条件才成立。取 d后， $A_0(d) \cong \Bbbk$。于是，(4.47) 的第二个条件对于任何 ~都不成立 G。因此，对于任何 $\mathsf{Rep}(A_0(d))$ 模范畴都不是幺模的 d。

余模代数 $A_1(d,\xi)$：注意，集合 $\{X^r G^s | r = 0, \dots, N-1;\ s = 0, \dots, d-1\}$ 是 $A_1(d,\xi)$ 的一组基。根据 [Shi19，第 5.1 节，2], 线性映射 λ_A：$A_1(d,\xi) \to \Bbbk$ 定义为

$$\lambda_A(X^r G^s) = \delta_{r,N-1}\delta_{s,0} \qquad (\text{for } r \in \{0, \dots, N-1\} \text{ and } s \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$$

是一个 g^{-1}-余积分，也是 $A_1(d,\xi)$上的 Frobenius 形式。相对于 λ_A，Nakayama 自同构 ν 由下式给出： $\nu(X) = X$, $\nu(G) = \omega^m G$。利用公式 (4.30)，我们得到

$$\widetilde{\nu}(G) = \langle \alpha_{T(\omega)}, S(g^m)\rangle \nu^2(G) = \omega^m G, \quad \widetilde{\nu}(X) = \langle \alpha_{T(\omega)}, S(x)\rangle \nu^2(1) + \langle \alpha_{T(\omega)}, S(g)\rangle \nu^2(X) = \omega^{-1} X.$$

因此， $\widetilde{\nu}(X^r G^s) = \omega^{ms-r} X^r G^s$。对于 $A_1(d,\xi)$ 要成为幺模的，根据（4.42）的第一个条件，我们希望 $\widetilde{\nu}$ 是一个内自同构。与 [Shi19，第 5.1 节2], 类似，通过逐案分析，我们证明 $\widetilde{\nu}$ 不是内自同构。

- $\xi = 0$, $d > 1$: 考虑非零代数映射 $\epsilon : A_1(d,\xi) \to \Bbbk$ 定义为 $\epsilon(X) = 0$ 和$\epsilon(G) = 1$。那么，$\epsilon \circ \widetilde{\nu}(G) = \omega^m \neq 1$，因为 $m < N$。因此， $\epsilon \circ \widetilde{\nu}(G) \neq \epsilon(G)$，所以 $\widetilde{\nu}$不可能是内自同构。
- $\xi = 0$, $d = 1$: 在这种情况下， $A_1(d,\xi) = \Bbbk\langle X | X^N = 0\rangle$。由于 $A_1(d,\xi)$ 是交换的，任何内自同构都只是恒等映射。然而， $\widetilde{\nu}(X) = \omega^{-1} X \neq X$。因此， $\widetilde{\nu}$ 不是内自同构。

- $\underline{\xi \neq 0, d < N}$: 取 ξ 的一个 N 次方根 ζ。定义左 $A_1(d,\xi)$-模 V 如下。V 的一组基为 $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$，其作用定义为
$$X \cdot v_i = \zeta v_{i+1}, \quad G \cdot v_i = \omega^{mi} v_i \qquad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}).$$
此外，考虑 $\tilde{\nu}$-扭曲模 ${}_{\tilde{\nu}}V$。那么，X^d 分别以标量 ζ^d 和 $\omega^{-d}\zeta^d$ 作用于 V 和 ${}_{\tilde{\nu}}V$。由于 $d < N$，我们有 $\omega^{-d} \neq 1$。因此，V 和 ${}_{\tilde{\nu}}V$ 作为左 $A_1(d,\xi)$-模并不同构。因此，$\tilde{\nu}$ 不可能是内自同构。

- $\underline{\xi \neq 0, d = N}$: 考虑非零代数映射 $\epsilon\colon A_1(N,\xi) \to \Bbbk$，其定义为 $\epsilon(G) = 1$ 且 $\epsilon(X) = \zeta$，其中 ζ 是 N 次单位根。于是，$\epsilon \circ \tilde{\nu}(X) = \omega^{-1}\zeta \neq \zeta$。因此，$\epsilon \circ \tilde{\nu}(X) \neq \epsilon(X)$，所以 $\tilde{\nu}$ 不是内自同构。

因此，对于任意的 d 和 ξ，模范畴 $\mathsf{Rep}(A_1(d,\xi))$ 都不是幺模的。 . □

4.5. 进一步的评论与问题

We e本节以列出一些评论和进一步研究的方向作结。

首先，我们证明定理 4.36 回答了 Shimizu 在 [Shi22 的问题 7.15]。设 H 是域 $\Bbbk$ 上的有限维 Hopf 代数。令 $\mathcal{D} = \mathsf{Corep}(H)$ 表示左 H-余模范畴。考虑一个左 H-余模代数 A。那么，A 无非是范畴 $\mathcal{D}$ 中的一个代数对象。此外，$\mathcal{D}$ 中的 A- 双模范畴记作 ${}_A\mathcal{D}_A$，它与 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 单幺等价，其中 $\mathcal{C} = \mathsf{Rep}(H)$ 且 $\mathcal{M} = \mathsf{Rep}(A)$。而且，当 A 正合时，这两个范畴都是多张量范畴。因此，可以探讨它们何时是幺模的。在 [Shi22], 中，研究了在代数 A 有类群状余积分这一假设下 ${}_A\mathcal{D}_A$ 的幺模性，参见定义 4.37。此外，在 [Shi22, §7.5], 中给出了一个不具有类群状余积分的正合左 H-余模代数的例子，并提出了一个问题：在一般情况下，是否存在一种简便的判据来确定 ${}_A\mathcal{D}_A$ 的幺模性。

根据引理 3.4，多张量范畴 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ （或 ${}_A\mathcal{D}_A$）是幺模的，当且仅当 $\mathcal{M}$是一个幺模 $\mathcal{C}$-模范畴。因此，定理 4.36 的以下推论回答了 Shimizu 提出的问题。

推论 4.48. 对于 $\mathcal{C} = \mathsf{Rep}(H)$ 和 $\mathcal{M} = \mathsf{Rep}(A)$，范畴 $\mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 是幺模的，当且仅当 A存在一个幺模元。□

虽然推论 4.48 回答了 Shimizu 提出的问题，但一般来说，这并不是一个容易应用的判据。例如，计算实例见第 4.4 节。这引出了以下讨论。

有限维 Hopf 代数是幺模的，当且仅当它存在一个双侧积分。定义积分时，至关重要地用到了余单位 ε，它是从 H 到 $\Bbbk$的代数映射。若能找到 exact H-余模代数单模性的类似刻画，将会很有意义。然而，我们不知道这类代数 A 是否存在到 $\Bbbk$的代数映射。这引出了以下问题。

问题 4.49。设 A 是一个正合左 H-余模代数。是否可以为 A 定义左积分和右积分？如果可以，能否利用这些积分刻画正合左 $\mathsf{Rep}(H)$-模范畴 $\mathsf{Rep}(A)$ 的幺模性？

接下来，如果存在一个不可分解的正合左 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{D}^{\mathrm{rev}} \cong \mathsf{Rex}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 作为有限张量范畴成立，则称两个有限张量范畴 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 范畴 *Morita* 等价。显然，一个张量范畴拥有幺模模范畴，当且仅

当它与一个幺模张量范畴范畴 Morita 等价时。因此，定理 4.45表明，范畴 $\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 不与任何幺模张量范畴范畴 Morita 等价。这自然引出了以下问题。

问题 4.50. 刻画那些不承认幺模模范畴的有限张量范畴。

注 4.51. 设 $(\mathcal{C},\mathfrak{p})$ 是一个枢纽有限张量范畴。若对所有对象 $X\in\mathcal{C}$ 都有 $\dim(X)=\dim({}^{\vee}X)$，则称其为 $\mathcal{C}$ 迹球面 。另一方面，若一个枢纽有限张量范畴 $(\mathcal{C},\mathfrak{p})$ 是幺模的，且满足以下条件，则称其为（*DSPS-*）球面 [DSPS18]： $\mathcal{C}$

$$\mathfrak{p}_X\circ\mathfrak{p}_{X^{\vee\vee}}=(\mathfrak{N}_X)^{-1}:X^{\vee\vee}\to{}^{\vee\vee}X \text{ for all } X\in\mathcal{C}.$$

众所周知，这两种球面性概念并不相同。例如，[DSPS18] 证明了 $\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 是迹球面的，但不是 DSPS-球面的。由定理 4.45，可得 $\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 不范畴 Morita 等价于任何幺模张量范畴。特别地，这意味着 $\mathsf{Rep}(T(\omega))$ 不可能范畴 Morita 等价于 DSPS-球面张量范畴。这说明，即使考虑较弱的范畴莫里塔等价概念，这两种球面性概念也并不等价。

附录 A. Rep$\mathsf{Rep}(A)$ 的中山函子及其扭曲的$\mathsf{Rep}(H)$-模结构

设 H 是一个有限维 Hopf 代数，且 A 是一个左 H-余代数代数。本附录给出定理 4.5、4.8 和 4.11 的证明，这些定理涉及 $\mathsf{Rep}(H)$-模范畴 $\mathsf{Rep}(A)$ 的（右）中山函子及其扭曲的模结构。

记号 A.1. 设有三个 $\Bbbk$-向量空间 M,N,N'以及一个 $\Bbbk$-线性映射 $f\colon N\to N'$。我们将映射 $f^{\natural}\colon \mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(M,N')$，记作 $g\mapsto f^{\natural}(g)=f\circ g$。此外，对于任意代数$A$，$A^*$ 在以下作用下构成一个 A-双模

$$\langle a'\rightharpoonup f\leftharpoonup a'',a\rangle:=\langle f,a''aa'\rangle\qquad(a,a',a''\in A,\ f\in A^*).\tag{A.2}$$

在本节中，我们固定 A 为一个正合左 H-余代数代数。分别用 λ_A 和 ν 表示 A的弗罗贝尼乌斯形式和 Nakayama 自同构。我们需要以下结果。

引理 A.3. 设 A 是一个正合左 H-余模代数。则以下结论成立。

(a) 对于 $V\in\mathsf{Vec}$ 和 $M\in\mathsf{Rep}(A)$，典范的 Vec 作用由 $V\blacktriangleright M=V\otimes_{\Bbbk}M$ 作为向量空间以及 $a\cdot(v\otimes_{\Bbbk}m)=v\otimes_{\Bbbk}a\cdot m$给出。(b) 若 A 是一个左 H-余模代数，则 A^* 也成为一个左 H-余模，其余作用由 $\rho_{A^*}(f):=f_{(-1)}\otimes f_{(0)}\in H\otimes A^*$ 给出，其中，

$$f_{(-1)}\langle f_{(0)},a\rangle=\langle f,a_{(0)}\rangle S^{-1}(a_{(-1)})\qquad(a\in A,\ f\in A^*).\tag{A.4}$$

(c)设 M, N是左 A-模。则映射 $\psi\colon N^*\otimes_A M\to\mathrm{Hom}_A(M,N)^*$由$n^*\otimes_A m\mapsto\langle n^*,?(m)\rangle$ 给出，是一个向量空间同构。

(d) 范畴 $\mathsf{Rep}(A)$ 的自函子$(\nu)(-)$ 与 $A^*\otimes_A-$ 通过以下自然同构同构

$$\alpha_M:A^*\otimes_A M\to{}_{\nu}M,\qquad f\otimes_A m\mapsto\langle f,a^i\rangle\nu_A(b_i)\cdot m.\tag{A.5}$$

$$\beta_M : {}_\nu M \to A^* \otimes_A M, \qquad m \mapsto \lambda_A \otimes_A m, \tag{A.6}$$

证明。 (a) 和 (b) 两部分很容易验证。 (c) 部分是 [SS21，引理 4.1]。因此，我们仅在下文证明 (d) 部分。

显然可以验证， α_M 和 β_M 关于 M 是自然的，且都是左 A-模的映射。下面验证它们是同构。

$$\begin{aligned}
\beta_M[\alpha_M(f \otimes_L m)] &\overset{(A.5)}{=} \beta_M[\langle f, a^i\rangle \nu(b_i)\cdot m] && \overset{(A.6)}{=} \lambda_A \otimes_A \langle f, a^i\rangle \nu(b_i)\cdot m \\
&\overset{(\diamondsuit)}{=} \langle f, a^i\rangle\, (\lambda_L \leftharpoonup \nu(b_i)) \otimes_A m && \overset{(A.2)}{=} \langle f, a^i\rangle\, \langle \lambda_A, \nu(b_i)\ ?\rangle \otimes_A m \\
&\overset{(4.2)}{=} \langle f, a^i\rangle\, \langle \lambda_A, ?\ b_i\rangle \otimes_A m && \overset{(4.3)}{=} \langle f, a^i\ ?\rangle\, \langle \lambda_A, b_i\rangle \otimes_A m \\
&= \langle f, a^i\langle \lambda_A, b_i\rangle\ ?\rangle \otimes_A m && \overset{(4.3)}{=} f \otimes_A m, \\
\alpha_M[\beta_M(m)] &\overset{(A.6)}{=} \alpha_M[\lambda_A \otimes_A m] && \overset{(A.5)}{=} \langle \lambda_M, a^i\rangle \nu(b_i)\cdot m \\
&= \nu(\langle \lambda_M, a^i\rangle b_i)\cdot m && \overset{(4.3)}{=} \nu(1_A)\cdot m \quad = \quad m.
\end{aligned}$$

这里等式 $(\diamondsuit)$ 成立是因为 $\nu(b_i) \in A$，因此我们可以将其移过关于 A的张量积。因此， α是一个自然同构，其逆映射为 β。□

A.1. 定理的证明 4.5

回顾（4.7），映射$\mathrm{Hom}_A(M,N)^* \blacktriangleright M \to {}_\nu M$定义如下：

$$\dot{\pitchfork}_{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n) = \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j \cdot n)\rangle \nu(b_j)\cdot m_i \qquad (\xi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)^*,\ n \in N)$$

我们首先证明，分量映射$\dot{\pitchfork}_{M,N}$ 存在右逆。

引理 A.7. 映射 $\omega\colon {}_\nu M \to \mathrm{Hom}_A(M,A)^* \blacktriangleright A$ 由 $m \mapsto \langle \lambda_A, ?(m)\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A$ 给出，满足 $\dot{\pitchfork}_{M,A} \circ \omega = \mathsf{Id}_{{}_\nu M}$。

证明。 注意到

$$\begin{aligned}
\dot{\pitchfork}_{M,A} \circ \omega(m) &= \dot{\pitchfork}_{M,A}\big(\langle \lambda_A, ?(m)\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A\big) \\
&= \langle \langle \lambda_A, ?(m)\rangle, \phi_M^A(m^i \otimes_A a^j 1_A)\rangle\ \nu(b_j)\cdot m_i \\
&= \langle \lambda_A, \langle m^i, m\rangle a^j\rangle\ \nu(b_j)\cdot m_i = \langle \lambda_A, a^j\rangle \nu(b_j)\cdot m = m.
\end{aligned}$$

因此，$\dot{\pitchfork}_{M,A}$ 存在一个右逆。 □

为了证明 ${}_\nu M$ 等于余端 $\mathbf{N}(M)$，我们证明映射 $\dot{\pitchfork}_{M,N}$ 是 dinatural 的。

引理 A.8. 映射 $\dot{\pitchfork}_{M,N}$ 是$\mathsf{Rep}(A)$中的态射，并且它们是 *dinatural*.

证明。 注意到

$$\begin{aligned}
\dot{\pitchfork}_{M,N}(a\cdot(\xi \otimes_{\Bbbk} n)) &= \dot{\pitchfork}_{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} a\cdot n) = \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j a\cdot n)\rangle \nu(b_j)\cdot m_i \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \leftharpoonup a^j a \otimes_A n)\rangle \nu(b_j)\cdot m_i \overset{(4.3)}{=} \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A n)\rangle (\nu(b_j)a^j a)\cdot m_i \\
&\overset{(4.3)}{=} \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A n)\rangle (\nu(ab_j)a^j)\cdot m_i = \nu(a)\cdot \dot{\pitchfork}_{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n) = a \cdot_\nu \dot{\pitchfork}_{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n)
\end{aligned}$$

因此，$\dot{\pitchfork}_{M,N}$是左 A-模的映射。此外，对于 $f\colon N \to N' \in \mathsf{Rep}(A)$ 和 $\xi \in \mathrm{Hom}_A(M,N')^*$，我们得到

$$\dot{\pitchfork}_{M,N'}(\xi \otimes_{\Bbbk} f(n)) = \langle \xi, \phi_M^{N'}(m^i \otimes_A a^j \cdot f(n))\rangle \nu(b_j)\cdot m_i = \langle \xi, f \circ \phi_M^N(m^i \otimes_A n)\rangle \nu(b_j)a^j \cdot m_i$$

$$= \mathbb{I}^{M,N}(\xi \circ f^{\natural} \otimes_{\Bbbk} n)$$

这证明了二自然性。 □

接下来，我们证明这一对 $(\nu M, \mathbb{I}^{M})$ 满足余端的泛性质 .

引理 A.9. 这一对 $(\nu M, \mathbb{I}^{M})$ 满足余端的泛性质。

证明。 假设存在一个对象 $X \in \mathsf{Rep}(A)$，以及二自然映射

$$\mathbb{J}^{M,N} : \mathrm{Hom}_A(M,N)^* \blacktriangleright N \to X.$$

我们将证明存在唯一映射 $\kappa_X \colon \nu M \to X$，使得 $\kappa_X \circ \mathbb{I}^{M,N} = \mathbb{J}^{M,N}$对所有 $M \in \mathcal{M}$ 均成立。由于 $\mathbb{J}$关于 N 是二自然的，因此对于所有 $\xi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(M,N)^*$、 $n \in N$ 和 $f \colon N \to N'$

$$\mathbb{J}^{M,N'}(\xi \otimes_{\Bbbk} f(n)) = \mathbb{J}^{M,N}(\xi \circ f^{\natural} \otimes_{\Bbbk} n) \tag{A.10}$$

将 $f_n \colon A \to N$（其中 $a \mapsto a \cdot n$）代入上面的等式，得到

$$\mathbb{J}^{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} f_n(a)) = \mathbb{J}^{M,A}(\xi \circ f_n^{\natural} \otimes_{\Bbbk} a) \tag{A.11}$$

由 $a = 1_A$，左边等于 $\mathbb{J}^{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n)$。另一方面，

$$\begin{aligned}
\omega \circ \mathbb{I}^{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n) &= \omega\big(\langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j \cdot n)\rangle \nu(b_j) \cdot m_i\big) \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j \cdot n)\rangle \langle \lambda_A, ?(\nu(b_j) \cdot m_i)\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j \cdot n)\rangle \langle \lambda_A, \nu(b_j)?(m_i)\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j \cdot n)\rangle \langle \lambda_A, ?(m_i) b_j\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A a^j ?(m_i) \cdot n)\rangle \langle \lambda_A, b_j\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A ?(m_i) \cdot n)\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A ?(m_i) \cdot f_n(1_A))\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, \phi_M^N(m^i \otimes_A f_n(?(m_i)))\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi, f_n(\phi_M^N(m^i \otimes_A ?(m_i)))\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi \circ f_n^{\natural}, \phi_M^N(m^i \otimes_A ?(m_i))\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \\
&= \langle \xi \circ f_n^{\natural}, ?\rangle \otimes_{\Bbbk} 1_A \;=\; \xi \circ f_n^{\natural} \otimes_{\Bbbk} 1_A
\end{aligned}$$

将上述公式代入（A.11）中的 $a = 1$，我们得到：对所有 $N \in \mathsf{Rep}(A)$

$$\mathbb{J}^{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n) = \mathbb{J}^{M,A}(\xi \circ f_n^{\natural} \otimes_{\Bbbk} 1_L) = \mathbb{J}^{M,A} \circ \omega \circ \mathbb{I}^{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n) = \kappa \circ \mathbb{I}^{M,N}(\xi \otimes_{\Bbbk} n), \tag{A.12}$$

其中 $\kappa_X = \mathbb{J}^{M,A} \circ \omega$。为了验证 κ_X 是使（A.12）成立的唯一映射，我们将 $N = A$ 代入（A.12），得到 $\mathbb{J}^{M,A} = \kappa_X \circ \mathbb{I}^{M,A}$。根据引理 A.7，$\mathbb{I}^{M,A}$ 有一个右逆 ω。因此， κ_X 是满足 $\mathbb{J}^{M,N} = \kappa_X \circ \mathbb{I}^{M,N}$ 的唯一映射。□

定理 *4.5* 的证明。 引理 A.8与引理 A.9共同推出该结论。 □

A.2. 定理 4.11 的证明

设 A 是一个正合右 H-余模代数。根据引理 A.3(d)，我们知道 $A^* \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \nu M$。因此，我们将采用 [SS21, 定理 7。3], 其中给出了函子 $\mathcal{C}$的扭曲右 $A^* \otimes_A -$ -模结构： $\mathsf{Rep}(A) \to \mathsf{Rep}(A)$, 从而得到 $\mathcal{C}$的扭曲右 $\mathbf{N}(M) = \nu M$。

利用 [SS21, 定理 7.3], 扭曲的右 $\mathcal{C}$-模结构

$$\Psi_{M,X} : (A^* \otimes_A M) \triangleleft {}^{\vee\vee}X \to A^* \otimes_A (M \triangleleft X) \tag{A.13}$$

函子 $A^* \otimes_A - : \mathsf{Rep}(A) \to \mathsf{Rep}(A)$ 的定义为

$$\Psi_{M,X}[(a^* \otimes_A m) \otimes_{\Bbbk} \phi_X(x)] = a^*_{(0)} \otimes_A (m \otimes_{\Bbbk} S(a^*_{(1)}) \cdot x) \tag{A.14}$$

因此，$\mathsf{N}(M) = {}_{\nu}M$ 的扭曲右 $\mathcal{C}$-模结构为

$$\overline{\pi}^r_{X,M} = (\alpha_{M\triangleleft X} \circ \Psi_{M,X} \circ (\beta_M \triangleleft \mathsf{Id}_{\vee\vee X})) : {}_{\nu}M \triangleleft {}^{\vee\vee}X \to {}_{\nu}(M \triangleleft X).$$

以下计算给出了 $\overline{\pi}^r_{X,\ M}$ 的显式公式。

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}^r_{X,M}(m \otimes_{\Bbbk} \phi_X(x)) &= \alpha_{M\triangleleft X} \circ \Psi_{M,X} \circ (\beta_M \triangleleft \mathsf{Id}_{\vee\vee X})\big(m \otimes_{\Bbbk} \phi_X(x)\big) \\
&= \alpha_{M\triangleleft X} \circ \Psi_{M,X}\big((\lambda \otimes_A m) \otimes_{\Bbbk} \phi_X(x)\big) \\
&= \alpha_{M\triangleleft X}\big(\lambda_{(0)} \otimes_A (m \otimes_{\Bbbk} S(\lambda_{(1)}) \cdot x)\big) \\
&= \langle \lambda_{(0)}, a^i \rangle \nu(b_i) \cdot [m \otimes_{\Bbbk} S(\lambda_{(1)}) \cdot x] \\
&= \langle \lambda, a^i_{(0)} \rangle \nu(b_i) \cdot [m \otimes_{\Bbbk} S(S(a^i_1)) \cdot x]
\end{aligned}$$

可以验证，映射 (A.13) 的逆映射为

$$\Psi^{-1}_{M,X}[a^* \otimes_A (m \otimes_{\Bbbk} x)] = (a^*_{(0)} \otimes_A m) \otimes_{\Bbbk} \phi_X(a^*_{(1)} \cdot x)$$

再次利用引理 A.3(d) 中的同构 $A^* \otimes_A M \xrightarrow{\sim} {}_{\nu}M$，可得映射 $\mathfrak{n}^r_{X,\ M} : \nu(M \triangleleft X) \to {}_{\nu}M \triangleleft {}^{\vee\vee}X$ 由下述映射给出。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}^r_{X,M}(m \otimes_{\Bbbk} x) &= (\alpha_M \triangleleft \mathsf{Id}_{\vee\vee X}) \circ \Psi^{-1}_{M,X} \circ \beta_{M\triangleleft X}\big(m \otimes_{\Bbbk} x\big) \\
&= (\alpha_M \triangleleft \mathsf{Id}_{\vee\vee X}) \circ \Psi^{-1}_{M,X}\big(\lambda \otimes_A (m \otimes_{\Bbbk} x)\big) \\
&= (\alpha_M \triangleleft \mathsf{Id}_{\vee\vee X})\big((\lambda_{(0)} \otimes_A m) \otimes_{\Bbbk} \phi_X(\lambda_{(1)} \cdot x)\big) \\
&= \langle \lambda_{(0)}, a^i \rangle \nu(b_i) \cdot m \otimes_{\Bbbk} \phi_X(\lambda_{(1)} \cdot x) \\
&= \langle \lambda, a^i_{(0)} \rangle \nu(b_i) \cdot m \otimes_{\Bbbk} \phi_X(S(a^i_{(1)}) \cdot x)
\end{aligned}$$

因此，证明完成。 □

参考文献

[AM07] Nicolás Andruskiewitsch 和 Juan Martín Mombelli. 有限维 Hopf 代数上的模范畴. 《代数学杂志》, 314(1):383–418, 2007.[BDR22] Anna Beliakova 和 Marco De Renzi. 四维 2-手柄体上的 Kerler–Lyubashenko 函子. 《国际数学研究通知》, 2022.[BDSPV15] Bruce Bartlett, Christopher L Douglas, Christopher J Schommer-Pries 和 Jamie Vicary. 模范畴作为三维配边 2-范畴的表示. *arXiv:1509.06811*, 2015.[BN11] Alain Bruguieres 和 Sonia Natale. 张量范畴的正合序列. 《国际数学研究通知》, 2011(24):5644–5705, 2011.[DP08] Brian Day 和 Craig Pastro. 关于弗罗贝尼乌斯单张量函子的注记. *arXiv:0801.4107*, 2008.[DRGG+22] Marco De Renzi, Azat M Gainutdinov, Nathan Geer, Bertrand Patureau-Mirand 和 Ingo Runkel. 非半单模范畴导出的三维拓扑量子场论. *Selecta Mathematica*, 28(2):1–60, 2022.[DSPS18] C Douglas, Christopher Schommer-Pries 和 Noah Snyder. 可对偶化张量范畴. 美国数学学会回忆录, 2018.

[EGNO16] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik. 张量范畴，第 205 卷. 美国数学学会, 2016.[ENO04] Pavel Etingof, Dmitri Nikshych 和 Viktor Ostrik. 有限张量范畴中 Radford 公式的一个类比. 《国际数学研究通知》, 2004(54):2915–2933, 2004.[ENO05] Pavel Etingof, Dmitri Nikshych 和 Viktor Ostrik. 关于融合范畴. 《数学年刊》, 页码 581–642, 2005.[EO04] Pavel Etingof 和 Viktor Valentinovich Ostrik. 有限张量范畴. 《莫斯科数学杂志》, 4(3):627–654, 2004.[FFRS06] Jürg Fröhlich, Jürgen Fuchs, Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert. 辫带范畴之间的对应. 《数学进展》, 199(1):192–329, 2006.[FGJS22] Jürgen Fuchs, Cesar Galindo, David Jaklitsch 和 Christoph Schweigert. 球形 Morita 上下文与相对 Serre 函子. arXiv:2207.07031, 2022.[FRS02] Jürgen Fuchs, Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert. 有理共形场论关联函数的拓扑场论构造 I：配分函数. 《核物理 B》, 646(3):353–497, 2002.[FS17] Jürgen Fuchs 和 Christoph Schweigert. 非半单共形场论中一致的关联函数系统. 《数学进展》, 307:598–639, 2017.[FS21a] Jürgen Fuchs 和 Christoph Schweigert. 通过枢纽模范畴在有限共形场论中由边界得到体. 《核物理 B》, 967:115392, 2021.[FS21b] Jürgen Fuchs 和 Christoph Schweigert. Drinfeld 中心中的内部自然变换与弗罗贝尼乌斯代数. 《变换群》, 页码 1–36, 2021.[FSS20] Jürgen Fuchs, Gregor Schaumann 和 Christoph Schweigert. 有限范畴的 Eilenberg-Watts 演算与双模 Radford 定理. 美国数学会会刊, 373(1):1–40, 2020.[HR12] Edwin Hewitt 和 Kenneth A Ross. 《抽象调和分析：第一卷，拓扑群结构、积分理论与群表示》, 第 115 卷. 施普林格科学与商业媒体, 2012.[Kas18] Paweł Kasprzak. 余理想子代数上的广义（余）积分. arXiv:1810.07114, 2018.[KJO02] Alexander Kirillov Jr 和 Viktor Ostrik. McKay 对应与共形场论 ADE 分类的 q 类比. 《数学进展》, 171(2):183–227, 2002.[KL01] Thomas Kerler 和 Volodymyr V Lyubashenko. 带角的三维流形上的非半单拓扑量子场论，第 1765 卷. 施普林格科学与商业媒体, 2001.[LS69] Richard Gustavus Larson 和 Moss Eisenberg Sweedler. Hopf 代数上的一个结合正交双线性形式. 《美国数学杂志》, 91(1):75–94, 1969.[LW22] Robert Laugwitz 和 Chelsea Walton. 利用局部模构造非半单模范畴. arXiv:2202.08644, 2022.[ML13] Saunders Mac Lane. 《工作数学家的范畴论》，第 5 卷. 施普林格科学与商业媒体, 2013.[Mom10] Martín Mombelli. 点 Hopf 代数上的模范畴. 《数学杂志》, 266(2):319–344, 2010.[NS07] Siu-Hung Ng 和 Peter Schauenburg. 枢轴范畴的高阶 Frobenius-Schur 指标. 《Hopf 代数及其推广》, 441:63–90, 2007.[Par95] Bodo Pareigis. 关于编织与阅读障碍. 《代数学杂志》, 171(2):413–425, 1995.[Rad76] David E Radford. 有限维 Hopf 代数的反极阶数有限. 《美国数学杂志》, 页码 333–355, 1976.[Rad94] David E Radford. 迹函数与 Hopf 代数. 《代数学杂志》, 163(3):583–622, 1994.[Rad11] David E Radford. 《Hopf 代数》，第 49 卷. 世界科学出版社, 2011.[RT91] Nicolai Reshetikhin 和 Vladimir G Turaev. 通过链环多项式与量子群构造三维流形的不变量. 《数学创见》, 103(1):547–597, 1991.[Sch01] Peter Schauenburg. 幺半中心构造与双模. 《纯粹与应用代数杂志》, 158(2-3):325–346, 2001.[Sch15] Gregor Schaumann. 枢纽三范畴与内积模的范畴化. 《代数与表示论》, 18(6):1407–1479, 2015.

[Shi15] Kenichi Shimizu. 主枢纽覆盖与 Frobenius–Schur 指标。《代数学杂志》，428:357–402，2015 年。[Shi16] Kenichi Shimizu. 关于单模有限张量范畴。《国际数学研究通知》，2017(1):277–322，2016 年。[Shi17] Kenichi Shimizu. 有限张量范畴的 Drinfeld 中心的辫带结构。arXiv:1707.09691，2017 年。[Shi19] Kenichi Shimizu. 余模代数的相对 Serre 函子。arXiv:1904.00376，2019 年。[Shi20] Kenichi Shimizu. 有限张量范畴中（余）端结构的进一步结果。应用范畴结构，28(2):237–286，2020 年。[Shi22] Kenichi Shimizu. 有限阿贝尔范畴上单子的中山函子。arXiv:2208.08203，2022 年。[Skr07] Serge Skryabin. 余模代数上的投射性与自由性。《美国数学会汇刊》，359(6):2597–2623，2007 年。[SS21] Taiki Shibata and Kenichi Shimizu. 修正迹与中山函子。《代数与表示论》，第 1–39 页，2021 年。[SW22] Christoph Schweigert and Lukas Woike. 辫交换代数的同伦不变量及有限张量范畴的 Deligne 猜想。arXiv:2204.09018，2022 年。[Swe69] Moss Eisenberg Sweedler. 霍普夫代数的积分。《数学年刊》，第 323–335 页，1969 年。[Tur92] Vladimir G Turaev. 模范畴与三维流形不变量。国际现代物理学杂志 B，6(11n12):1807–1824，1992 年。[TV92] Vladimir G Turaev and Oleg Ya Viro. 三维流形的态和不变量与量子 6j 符号。拓扑学，31(4):865–902，1992 年。[TV17] Vladimir Turaev and Alexis Virelizier. 幺半范畴与拓扑场论，第 322 卷。施普林格，2017 年。[WY22] Chelsea Walton and Harshit Yadav. 幺半范畴中的过滤 Frobenius 代数。《国际数学研究通知》，2022 年。[Yad22] Harshit Yadav. （余） Hopf 伴随导出的 Frobenius 单张量函子。arXiv:2209.15606，2022 年。

莱斯大学数学系，休斯敦，得克萨斯州 77030，美国电子邮箱：hy39@rice.edu