arXiv:2302.06197v1 [math.DG] 13 Feb 2023

三维齐性空间中的多调和曲面

S. Montaldo、C. Oniciuc 和 A. Ratto

Abstract. 本文第一部分将对三维齐性空间（Bianchi-Cartan-Vranceanu 空间，简称 BCV 空间）中的真三调和等距参数曲面进行分类。我们还将证明，三调和 Hopf 圆柱必为常平均曲率曲面。最后一节将对 BCV 空间中的常平均曲率 r-调和 Hopf 圆柱给出完整分类，$r \geq 3$。这一结果表明，对于适当的 r 值，BCV 空间中存在大量新的 r-调和曲面。

1. 引言

为了介绍本文的几何背景，我们回顾一下：调和映射是能量泛函的临界点

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 \, dV \,, \tag{1.1}$$

其中 $\varphi\colon\ M \to N$ 是两个黎曼流形（M，g）和（N，h）之间的光滑映射。若映射 φ 满足与（1.1）相关联的欧拉–拉格朗日方程组，则称其为调和映射，即

$$-d^*d\varphi = \operatorname{trace}\nabla d\varphi = 0 \,. \tag{1.2}$$

(1.2)式左边是沿映射 φ 的向量场，或者等价地说，是拉回丛 $\varphi^{-1}TN$的一个截面：它称为张力场，记作 $\tau(\varphi)$。此外，我们回顾一下，若 φ 是等距浸入，则 φ 是调和映射，当且仅当浸入 φ确定了 N 中的一个极小子流形（背景介绍见 [8, 9] ）。记 ∇^M、 ∇^N 和∇^φ分别为丛 TM、 TN和 $\varphi^{-1}TN$上的诱导联络。丛 $\varphi^{-1}TN$的截面上的粗拉普拉斯算子记作$\overline{\Delta}$，定义如下：

$$\overline{\Delta} = d^*d = -\sum_{i=1}^{m}\left(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i} - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\right) , \tag{1.3}$$

其中， $\{e_i\}_{i=1}^m$ 是切于 M的局部标准正交标架场。
现在，为了定义 r-调和映射的概念，我们考虑以下泛函族，它们表示经典能量 (1.1) 的 r 阶版本。

2010年数学主题分类。主要分类：58E20；次要分类：53C42、53C43。关键词与短语：三调和映射、多调和映射、Bianchi-Cartan-Vranceanu 空间、三维齐性空间。作者S.M.和A.R.是INdAM意大利国家G.N.S.A.G.A.小组的成员。作者C.O.获得了研究与创新部资助项目的支持，该项目属于计划1——国家研发体系发展，子计划1.2——机构绩效——研发与创新卓越资助项目，合同编号34PFE/19.10.2018。

如果 $r=2s$、 $s\geq 1$:

$$\begin{aligned} E_{2s}(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_M \langle \underbrace{(d^*d)\dots(d^*d)}_{s\,\text{times}}\varphi,\, \underbrace{(d^*d)\dots(d^*d)}_{s\,\text{times}}\varphi\,\rangle_N\, dV \\ &= \frac{1}{2}\int_M \langle\, \overline{\Delta}^{s-1}\tau(\varphi),\, \overline{\Delta}^{s-1}\tau(\varphi)\,\rangle_N\, dV\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

在 $r=2s+1$、 $s\geq 0$ 的情况下:

$$\begin{aligned} E_{2s+1}(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_M \langle\, d\underbrace{(d^*d)\dots(d^*d)}_{s\,\text{times}}\varphi,\, d\underbrace{(d^*d)\dots(d^*d)}_{s\,\text{times}}\varphi\,\rangle_N\, dV \\ &= \frac{1}{2}\int_M \sum_{j=1}^{m}\langle\, \nabla^{\varphi}_{e_j}\overline{\Delta}^{s-1}\tau(\varphi),\, \nabla^{\varphi}_{e_j}\overline{\Delta}^{s-1}\tau(\varphi)\,\rangle_N\, dV\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

如果对于所有变分 φ_t，映射 φ 都满足 r-调和，则称其为 r-调和映射，

$$\frac{d}{dt}\,E_r(\varphi_t)\Big|_{t=0} = 0\,.$$

该条件等价于 r-张力场 $\tau_r(\varphi)$ 消失。我们回顾一下，描述两个黎曼流形之间一般映射 $\varphi: M\to N$ 的 r-张力场的表达式由 Maeta（见 [10]）计算得到，具体如下:

$$\begin{aligned} \tau_{2s}(\varphi) &= \overline{\Delta}^{2s-1}\tau(\varphi) - R^N\left(\overline{\Delta}^{2s-2}\tau(\varphi), d\varphi(e_i)\right)d\varphi(e_i) \\ &\quad -\sum_{\ell=1}^{s-1}\Big\{R^N\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s+\ell-2}\tau(\varphi), \overline{\Delta}^{s-\ell-1}\tau(\varphi)\right)d\varphi(e_i) \\ &\qquad\qquad - R^N\left(\overline{\Delta}^{s+\ell-2}\tau(\varphi), \nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s-\ell-1}\tau(\varphi)\right)d\varphi(e_i)\Big\}\,, \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中， $\overline{\Delta}^{-1}=0$， $\{e_i\}_{i=1}^m$ 是切于 M 的局部标准正交标架场（对 i 的求和未写出，但应视为已包含）。类似地,

$$\begin{aligned} \tau_{2s+1}(\varphi) &= \overline{\Delta}^{2s}\tau(\varphi) - R^N\left(\overline{\Delta}^{2s-1}\tau(\varphi), d\varphi(e_i)\right)d\varphi(e_i) \\ &\quad -\sum_{\ell=1}^{s-1}\Big\{R^N\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s+\ell-1}\tau(\varphi), \overline{\Delta}^{s-\ell-1}\tau(\varphi)\right)d\varphi(e_i) \\ &\qquad\qquad - R^N\left(\overline{\Delta}^{s+\ell-1}\tau(\varphi), \nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s-\ell-1}\tau(\varphi)\right)d\varphi(e_i)\Big\} \\ &\quad - R^N\Big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s-1}\tau(\varphi), \overline{\Delta}^{s-1}\tau(\varphi)\Big)d\varphi(e_i)\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

如果 $r=1$，泛函 (1.5) 就是能量。在 $r=2$ 的情况下，泛函 (1.4) 称为双能量，其临界点称为双调和映射。目前，关于双调和映射的文献十分丰富；同样，我们请读者参阅 [17] 及其中的参考文献，以了解该主题的介绍。

更一般地，(1.4)、(1.5) 中定义的 r-能量泛函 $E_r(\varphi)$ 已得到深入研究（例如参见 [2, 10, 11, 12, 13, 14, 15], ）。考察 $E_r(\varphi)$ 的欧拉-拉格朗日方程可知，对于任意 $r\geq 2$，调和映射总是 r-调和的。当

当目标流形非平坦时，我们称一个 r-调和映射为真（proper），若它不是调和映射（类似地，一个 r-调和子流形，即一个 r-调和等距浸入，若不是极小的，则称为真）。一般而言，当环境空间具有非正截面曲率时，有若干结果表明，在适当条件下，一个 r-调和子流形是极小的（例如参见 [11] 和 [12], ）。

当环境空间具有正曲率时，情况会发生巨大变化。记$\mathbb{S}^{m+1}$ 为半径为 1 的球面 $\mathbb{S}^{m+1}(1)$。此外，设 A 为 M^m 到$\mathbb{S}^{m+1}$ 的形算子，$\mathbf{H} = f\eta$ 为平均曲率向量场，其中 η 为单位法向量场， f 为平均曲率函数。在全文中，当我们称M^m 为常平均曲率超曲面时，意指 f 为常数，记作 α。

在 [16] 中，Ou 推导了任意黎曼流形中双调和超曲面的方程。更准确地说，他证明了：

定理 1.1. [16]设 $\varphi\colon M^m \to N^{m+1}$为一个余维一等距浸入，其平均曲率向量为 $\mathbf{H} = f\eta$。那么，φ 是双调和的，当且仅当：

$$\begin{cases} \Delta f + f|A|^2 - f\mathrm{Ric}^N(\eta,\eta) = 0, \\ 2A(\operatorname{grad} f) + mf\operatorname{grad} f - 2f\left(\mathrm{Ric}^N(\eta)\right)^\top = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中，$\mathrm{Ric}^N: T_qN \longrightarrow T_qN$ 表示环境空间的里奇算子，定义为$\langle \mathrm{Ric}^N(Z)\ W\rangle = \mathrm{Ric}^N(Z, W)$，而 A是超曲面相对于单位法向量 η的形算子。

我们指出，与 [16], 相反，本文采用的 Δ 符号约定为：$\Delta f = -f''$ 在 $\mathbb{R}$上成立。若平均曲率 f 为常数，记为 $f \equiv \alpha$，则双调和方程化为

$$\begin{cases} -\alpha|A|^2 + \alpha\mathrm{Ric}^N(\eta,\eta) = 0 \\ \alpha\left(\mathrm{Ric}^N(\eta)\right)^\top = 0\,, \end{cases} \tag{1.9}$$

由此我们 deduce：非极小的常平均曲率超曲面 M^m 是真双调和的，当且仅当

$$\mathrm{Ric}^N(\eta) = |A|^2\eta\,. \tag{1.10}$$

当 M^m 是 $\mathbb{S}^{m+1}$ 的超曲面时，双调和条件（1.10）化为

$$|A|^2 - m = 0\,. \tag{1.11}$$

至于 r-调和情形，条件（1.11）在 [13]中得到了推广：

定理 1.2. 设 M^m 是 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中的非极小常平均曲率超曲面，并假设 $|A|^2$为常数。则 M^m 是恰当的 r-调和（$r \geq 3$）当且仅当

$$|A|^4 - m|A|^2 - (r-2)m^2\alpha^2 = 0\,. \tag{1.12}$$

作为定理 1.2 的一个应用，文献 [13], 中展示了若干新的等参数 r-调和超曲面实例，并强调了 r, $r \geq 2$ 的取值在环境空间具有正曲率时起着至关重要的作用。相比之下，当目标空间形式具有非正曲率时，对于 r,$r \geq 2$ 的所有取值，通常都可得到不存在性结果。

作为自然的进一步研究步骤，本文将着重研究浸入具有四维等距变换群的三维齐性空间中的 r-调和曲面。

众所周知（例如参见 [1], [3], [6]），等距变换群维数为 4 的三维齐性空间，其典范模型为所谓的 Bianchi-Cartan-Vranceanu 空间（简称 BCV 空间）

$$M^3_{m,\ell} = \left(\bar{M} \times \mathbb{R}, g = \frac{dx^2+dy^2}{[1+m(x^2+y^2)]^2} + \left[dz + \frac{\ell}{2} \frac{ydx - xdy}{1+m(x^2+y^2)} \right]^2 \right), \tag{1.13}$$

其中 $\bar{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + m(x^2 + y^2) > 0\}$。

空间 $M^3_{m,\ell}$ 是以下黎曼浸没的全空间，其底空间为截面曲率为 $4m$ 的单连通完备曲面 $M^2(4m)$，参见 [6]:

$$\pi : M^3_{m,\ell} \longrightarrow M^2(4m) = \left(\bar{M}, h = \frac{dx^2+dy^2}{[1+m(x^2+y^2)]^2} \right), \quad \pi(x, y, z) = (x, y). \tag{1.14}$$

需要指出的是，在 $\mathbb{S}^n(\rho)$ 中，字母 ρ 表示半径；而在 $M^2(4m)$ $\mathbb{H}^2(4m)$ 中，括号内的实数表示截面曲率。

这些 BCV 空间也可作为 Thurston的八种三维几何的模型，但双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 和 Sol 除外。更确切地说，它们包括三维空间形式 $\mathbb{R}^3$ $(\ell = m = 0)$、 $\mathbb{S}^3(1/\sqrt{m})$（$\ell^2 = 4m$），乘积空间 $M^2(4m) \times \mathbb{R}$ $(\ell = 0)$、 $\widetilde{\text{Nil}}_3$ $(m = 0)$、 $SL(2, \mathbb{R})$（$\ell \neq 0$, $m < 0$）以及 $SU(2)$（$\ell \neq 0$, $m > 0$, $\ell^2 \neq 4m$）。参数 ℓ 和 m 取不同值时对应的 BCV 空间如图 1 所示。

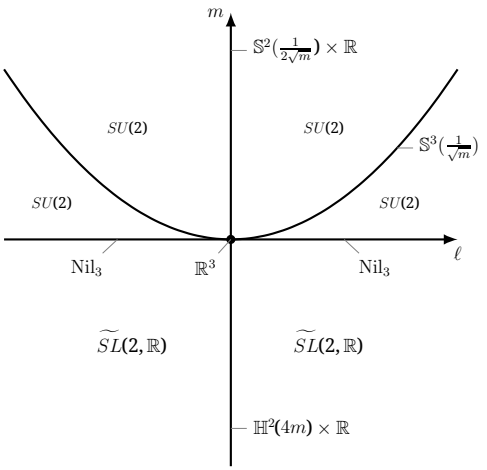


FIGURE 1. BCV 空间关于 ℓ和 m取值的分布。

在其论文 [18], 中，Ou 使用方程 (1.8) 研究了 BCV空间中的双调和曲面。他首先证明，在任意三维黎曼流形中，全脐双调和曲面都具有常平均曲率。随后，他利用这一结论证明，在三维几何中，唯一的全脐真双调和曲面是$\mathbb{S}^3(1/\sqrt{m})$中的 $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{2m})$ 的一部分。

此外，他还证明了常平均曲率双调和曲面的以下刻画:

定理 1.3（见 [18]）。三维 Bianchi-Cartan-Vranceanu空间中的常平均曲率曲面是真双调和的，当且仅当它是以下曲面之一的一部分:

(i) $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2m}})$ 中的 $\mathbb{S}^3(\frac{1}{\sqrt{m}})$, (ii) $\mathbb{S}^1(\frac{1}{2\sqrt{2m}}) \times \mathbb{R}$属于 $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2\sqrt{2m}}) \times \mathbb{R}$,

(iii) $SU(2)$ 中的一个 Hopf 圆柱，其 $4m-\ell^2>0$ 位于底球面 $M^2(4m)$ 上半径为 $R=1/\sqrt{8m-\ell^2}$的圆上 $=\mathbb{S}^2(\frac{1}{2\sqrt{m}})$。

本文的主要目标是研究在这一几何背景（$r\geq 3$）中三调和曲面，以及更一般地，r-调和曲面的存在性。

本文结构安排如下。第 2 节陈述我们关于 BCV空间中三调和曲面的主要结果。这些结果将在第 4 节和第 5 节中证明。最后，在第 6 节中，我们将对 Bianchi-Cartan-Vranceanu 空间中的适定常平均曲率 r-调和霍普夫圆柱进行完整分类，$r\geq 3$。作为应用，对于适当的 r 取值，我们将能够描述 BCV空间中一大类新的 r-调和曲面。

2. Statement of the results on triharmonic surfaces in BCV-spaces

为了陈述我们的结果，先回顾一些基本事实和术语会很有帮助。对于式（1.13）给出的 Bianchi-Cartan-Vranceanu 三维空间，可以很容易地验证向量场

$$E_1=F\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\ell y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\quad E_2=F\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\ell x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\quad E_3=\frac{\partial}{\partial z},$$

where $F=1+m(x^2+y^2)$ 构成一个全局正交标架场（见 [3, 18]）。

现在，设 $\gamma(s)=(x(s)\ y(s))\ s\in I$ 是黎曼浸没 (1.14) 的底空间 $M^2(4m)$ 中的一条光滑曲线。那么，曲线 γ 上方的 Hopf 圆柱 $\Sigma_\gamma=\Sigma$ 定义为

$$\Sigma=\cup_{s\in I}\pi^{-1}(\gamma(s))\,. \tag{2.1}$$

由于点 (x_0,y_0) 上方的 π 的纤维为 $\pi^{-1}(x_0,y_0)=\{(x_0,y_0,t):\ t\in\mathbb{R}\}$，因此曲面 Σ 可参数化为 $r(s,t)=(x(s)\ y(s)\ t)$。

不妨设基曲线 γ 以弧长为参数，即

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{F^2}=1\,.$$

接下来，我们定义：

$$X=\frac{\dot{x}}{F}E_1+\frac{\dot{y}}{F}E_2\,,\quad \eta=\frac{\dot{y}}{F}E_1-\frac{\dot{x}}{F}E_2\,. \tag{2.2}$$

那么，单位向量场 η 垂直于 Hopf 圆柱 Σ，且 $\{X,E_3,\eta\}$ 是适配于 Σ的全局正交标架场。

我们的第一个结果是：

定理 2.1. 设 Σ 是 BCV 空间 $M^3_{m,\ell}$ 中的三调和 Hopf 圆柱。则 Σ 是常平均曲率的。

定理 2.1 的证明分析表明，若 Σ 是 Hopf 圆柱，则其张力场为 $\tau=-\kappa_g\eta$，其中 κ_g 表示其基曲线的测地曲率。

我们的第二个结果是：

定理 2.2. 设 Σ 是 BCV 空间 $M^3_{m,\ell}$ 中的常平均曲率 Hopf 圆柱。

(i) 如果 $4m\leq\ell^2$ 和 Σ 是三调和的，那么 Σ 是极小的。

(ii) 如果 $4m > \ell^2$ 且其基曲线的测地曲率 κ_g 满足

$$\kappa_g^2 = 2(4m - \ell^2)\,, \tag{2.3}$$

那么 Σ 是真三调和的。

注 2.3. 如定理 2.2 (ii) 所述， $SU(2)$ 中真三调和 Hopf 圆柱的基曲线是 $\mathbb{S}^2(1/(2\sqrt{m}))$ 中半径为 $R = 1/\sqrt{12m - 2\ell^2}$ 的圆。

对 Hopf 圆柱的分析自然融入了等距曲面的研究背景。我们回顾一下，在一般的黎曼流形中，如果一个超曲面本身及其局部定义的邻近等距超曲面都具有常平均曲率，则称该超曲面为等距曲面。20 世纪 30 年代，Cartan 将空间形式中的等距超曲面刻画为主曲率为常数的超曲面，并完成了双曲空间 $\mathbb{H}^n$中这类超曲面的分类。Segre 对欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$得到了类似结果。在这两种情形下，等距超曲面也都是外在齐性超曲面的开部分，也就是说，它们是环境空间上等距作用的余维一轨道。相比之下，球面 $\mathbb{S}^n$ 中的分类问题要复杂和丰富得多，其中还存在非齐性例子（例如参见 [5] 及其中的参考文献）。

在非恒定曲率空间中，已知的分类结果寥寥无几。对于我们感兴趣的情形，有以下重要结果：

定理 2.4. [7] 设 Σ 是 $M^3_{m,\ell}$, $4m - \ell^2 \neq 0$ 中的一个浸入曲面。那么以下命题等价：

(i) Σ 是某个齐性曲面的开子集。(ii) Σ 是等参的。(iii) Σ 具有常主曲率。(iv) Σ 是以下某个完备曲面的开子集：(a) $M^2(4m)$ 中一条常曲率完备曲线上的 Hopf 圆柱；(b) 水平截面 $M^2(4m) \times t_0$，其中 $\ell = 0$；(c) 抛物螺旋面 $P_{\alpha,m,\ell}$，其中 $\alpha^2 + m < 0$。

注 2.5. 我们指出，在文献 $[4,\ 6,\ 7]$ 中，作者使用参数 κ, τ，而非 m, ℓ。这些参数之间的关系为 $\kappa = 4m$, $\tau = \ell/2$。此外，在这些论文中，我们的常数 α 记作 H。

抛物螺旋面 $P_{\alpha,m,\ell}$ 将在第 4 节中明确描述。关于等距参数曲面，我们的主要结果如下：

定理 2.6. 设 Σ 是 $M^3_{m,\ell}$中的等距参数浸入曲面， $4m - \ell^2 \neq 0$。若 Σ 是真三调和的，则它是定理 2.2 的 (ii) 中所述 Hopf 圆柱的一部分。

注记 2.7. 若 $4m - \ell^2 = 0$，则 $M^3_{m,\ell}$ 是具有非负截面曲率的空间形式；在此情况下，唯一的真三调和等距面是 $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{3m}})$ in $\mathbb{S}^3(\frac{1}{\sqrt{m}})$（见[11]）。

3. Preliminaries

为了给我们的证明做好准备，我们需要进行一些预备工作。通常，符号上方加横线表示我们指的是环境

空间中的对象。对于黎曼曲率张量场，我们采用以下记号和符号约定:

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\,.$$

此外,

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) = \langle\overline{R}(X,Y)W,Z\rangle,$$

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \textstyle\sum_{i=1}^3 \overline{R}(X,e_i,Y,e_i) = \sum_{i=1}^3\langle\overline{R}(X,e_i)e_i,Y\rangle.$$

直接计算可得

$$[E_1,E_2] = -[E_2,E_1] = 2mxE_2 - 2myE_1 + \ell E_3\,,\ \text{all others}\ [E_i,E_j]=0,\ \ i,j=1,2,3. \tag{3.1}$$

然后，利用Koszul公式

$$\begin{aligned} 2\langle Z,\overline{\nabla}_Y X\rangle \ &= \ X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ &\quad -\langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle - \langle[X,Y],Z\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

容易计算得到:

$$\begin{aligned} &\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = 2myE_2\,, && \overline{\nabla}_{E_2}E_2 = 2mxE_1\,,\\ &\overline{\nabla}_{E_1}E_2 = -2myE_1 + \frac{\ell}{2}E_3\,, && \overline{\nabla}_{E_2}E_1 = -2mxE_2 - \frac{\ell}{2}E_3\,,\\ &\overline{\nabla}_{E_3}E_1 = \overline{\nabla}_{E_1}E_3 = -\frac{\ell}{2}E_2\,, && \overline{\nabla}_{E_3}E_2 = \overline{\nabla}_{E_2}E_3 = \frac{\ell}{2}E_1\,,\\ &\text{all others}\ \overline{\nabla}_{E_i}E_j = 0,\ i,j=1,2,3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

类似地，进一步计算可得截面曲率的可能非零值:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{1212} &= \langle\overline{R}(E_1,E_2)E_2,E_1\rangle = 4m - \frac{3\ell^2}{4},\\ \overline{R}_{1313} &= \langle\overline{R}(E_1,E_3)E_3,E_1\rangle = \frac{\ell^2}{4},\\ \overline{R}_{2323} &= \langle\overline{R}(E_2,E_3)E_3,E_2\rangle = \frac{\ell^2}{4}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\overline{R}$ 黎曼曲率张量场$M^3_{m,\,\ell}$ 可描述如下（见 [6], ，其中对曲率张量采用了相反的符号约定）。

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z \ &= \ \left(4m - \frac{3\ell^2}{4}\right)\big(-\langle X,Z\rangle Y + \langle Y,Z\rangle X\big) - (4m-\ell^2)\\ &\quad \big(\langle Y,E_3\rangle\langle Z,E_3\rangle X + \langle Y,Z\rangle\langle X,E_3\rangle E_3 - \langle X,E_3\rangle\langle Z,E_3\rangle Y - \langle X,Z\rangle\langle Y,E_3\rangle E_3\big)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

另一个有用的公式如下（见 [6]）：

$$\overline{\nabla}_X\, E_3 = \frac{\ell}{2}\,X\times E_3\,, \tag{3.6}$$

其中 $\times$ 的含义如下:

$$\langle X\times Y,Z\rangle = \det{}_{(E_1,E_2,E_3)}(X,Y,Z)\,.$$

我们将研究定向浸入曲面 $\varphi : M^2 \to M^3_{m,\ell}$ ，并将 η 记为单位法向量场。

向量场 $E_3^\top = E_3 - \nu\,\eta$，其中我们令

$$\nu = \langle E_3, \eta\rangle\,, \tag{3.7}$$

将在我们的分析中发挥基础作用。该向量场在已有文献中也发挥着重要作用。就我们的目的而言，回顾以下内容很有用（见 [6]中的命题 3.3）：

$$\overline{\nabla}_X\, E_3^\top = \nabla_X\, E_3^\top + B(X, E_3^\top) = \nu\,\left(A(X) - \frac{\ell}{2}\,J(X)\right) + \langle A(X), E_3^\top\rangle\,\eta\,, \tag{3.8}$$

其中 J表示 TM^2上的 $\pi/2$旋转。

若 p 是 M^2中的任意固定点，则如 $\nabla J = 0$所示，我们可以考虑一个测地标架场 $\{X_1, X_2\}$，使得在 p 的一个小邻域内，$J(X_1) = X_2$，$J(X_2) = -X_1$。此外，考虑到定义（3.7），我们计算得:

$$X(\nu) = -\langle A(X) - \frac{\ell}{2}\,J(X), E_3\rangle = -\langle A(X) - \frac{\ell}{2}\,J(X), E_3^\top\rangle\,. \tag{3.9}$$

4. Proof of Theorems 2.1 and 2.2

令 $\{T, N\}$ 表示 γ在底空间 $M^2(4m) = (\bar{M}, h)$中的正向定向单位切向量场和法向量场，即:

$$T = (\dot{x}, \dot{y})\,, \quad N = (-\dot{y}, \dot{x})\,,$$

因此底空间中的 γ 的测地曲率 κ_g 由下式定义

$$\nabla_T T = \kappa_g N\,, \quad \nabla_T N = -\kappa_g T\,.$$

注意，我们将 $\overline{\nabla} = \nabla^g$、$\nabla = \nabla^\Sigma$ 记为。计算可得

$$\kappa_g = \frac{2m}{F}(\dot{x}y - \dot{y}x) + \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{F^2}\,.$$

我们的第一个引理如下:

引理 4.1. 设 X、η 为式 (2.2) 中定义的向量场。则

$$\begin{array}{lll} \text{(i)}\quad \overline{\nabla}_X X = -\kappa_g \eta & \text{(ii)}\quad \overline{\nabla}_X \eta = \kappa_g X - \dfrac{\ell}{2} E_3 & \text{(iii)}\quad \overline{\nabla}_{E_3} X = \dfrac{\ell}{2}\eta \\ \text{(iv)}\quad \overline{\nabla}_{E_3} \eta = -\dfrac{\ell}{2} X & \text{(v)}\quad \overline{\nabla}_{E_3} E_3 = 0 & \text{(vi)}\quad \overline{\nabla}_X E_3 = \dfrac{\ell}{2}\eta \end{array} \tag{4.1}$$

证明。注意，$X = T^{\mathcal{H}}$，即 X 是 T 的水平提升；同理，$\eta = -N^{\mathcal{H}}$ 也是如此。由于 π 是黎曼浸没，我们知道

$$d\pi\left(\overline{\nabla}_{V^{\mathcal{H}}} W^{\mathcal{H}}\right) = \nabla_{d\pi(V^{\mathcal{H}})} d\pi(W^{\mathcal{H}})\,. \tag{4.2}$$

例如，我们证明 (ii):

$$d\pi\left(\overline{\nabla}_X \eta\right) = -\nabla_T N = \kappa_g T = d\pi(\kappa_g X)\,.$$

由此可得

$$\overline{\nabla}_X \eta = \kappa_g X + c E_3\,,$$

其中

$$c = \langle \overline{\nabla}_X \eta, E_3\rangle = -\langle \eta, \overline{\nabla}_X E_3\rangle\,.$$

接下来，利用 (3.6)，我们推导出

$$c = -\frac{\ell}{2}\langle \eta, X \times E_3 \rangle = -\frac{\ell}{2}\,.$$

该引理的其他计算类似，因此略去。 . □

容易 由引理 4.1 推得，Hopf 圆柱的张力场为 s

$$\tau = -\kappa_g \eta\,.$$

特别地，Hopf 圆柱 Σ 是常平均曲率（$\alpha = -\kappa_g/2$）的，当且仅当其基曲线 γ 具有常测地曲率。接下来，我们需要:

引理 4.2。

$$\overline{\Delta}\tau = AX + BE_3 + C\eta\,, \tag{4.3}$$

其中

$$A = 3\kappa_g\dot{\kappa}_g\,, \quad B = -\ell\dot{\kappa}_g\,, \quad C = \ddot{\kappa}_g - \frac{\ell^2}{2}\kappa_g - \kappa_g^3\,.$$

证明。我们计算:

$$\overline{\Delta}\tau = -\Big\{\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_X\tau - \overline{\nabla}_{\nabla_X X}\tau + \overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_3}\tau - \overline{\nabla}_{\nabla_{E_3}E_3}\tau\Big\}\,.$$

由于 τ 与 Σ 正交，由引理 4.1(i) 可得 $\nabla_X X = 0$。此外， $\nabla_{E_3}E_3 = 0$，因此再次利用引理 4.1，我们计算:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}\tau &= -\Big\{\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_X\tau + \overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_3}\tau\Big\} \\
&= \overline{\nabla}_X\big[\dot{\kappa}_g\eta + \kappa_g(\kappa_g X - \frac{\ell}{2}E_3)\big] - \overline{\nabla}_{E_3}\big[\kappa_g\frac{\ell}{2}X\big] \\
&= \ddot{\kappa}_g\eta + \dot{\kappa}_g(\kappa_g X - \frac{\ell}{2}E_3) + 2\kappa_g\dot{\kappa}_g X - \kappa_g^3\eta \\
&\quad -\frac{\ell}{2}\dot{\kappa}_g E_3 - \frac{\ell^2}{4}\kappa_g\eta - \frac{\ell^2}{4}\kappa_g\eta
\end{aligned}$$

结论显然成立。 □

现在，我们计算:

引理 4.3。设 A、B、C 为引理 4.1 中定义的函数。则

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}^2\tau &= \Big[\frac{\ell^2}{4}A + A\kappa_g^2 - \ddot{A} - \frac{\ell}{2}B\kappa_g - 2\dot{C}\kappa_g - C\dot{\kappa}_g\Big]X \\
&\quad + \Big[-\frac{\ell}{2}A\kappa_g + \frac{\ell^2}{4}B - \ddot{B} + \ell\dot{C}\Big]E_3 \\
&\quad + \Big[2\dot{A}\kappa_g + A\dot{\kappa}_g - \ell\dot{B} - \ddot{C} + C\kappa_g^2 + \frac{\ell^2}{2}C\Big]\eta\,.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

证明。显然,

$$\overline{\Delta}^2\tau = \overline{\Delta}(AX) + \overline{\Delta}(BE_3) + \overline{\Delta}(C\eta)\,.$$

按照引理 4.1 进行计算，我们得到:

$$\overline{\Delta}(AX) = \Big[\frac{\ell^2}{4}A + A\kappa_g^2 - \ddot{A}\Big]X - \Big[\frac{\ell}{2}A\kappa_g\Big]E_3 + \Big[2\dot{A}\kappa_g + A\dot{k}_g\Big]\eta$$

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}(BE_3) &= -\Big[\frac{\ell}{2}B\kappa_g\Big]X+\Big[\frac{\ell^2}{4}B-\ddot{B}\Big]E_3-\Big[\ell\dot{B}\Big]\eta\\ \overline{\Delta}(C\eta) &= -\Big[2\dot{C}\kappa_g+C\dot{\kappa}_g\Big]X+\Big[\ell\dot{C}\Big]E_3+\Big[\frac{\ell^2}{2}C+C\kappa_g^2-\ddot{C}\Big]\eta\,.\end{aligned}$$

将这三项相加，我们得到 (4.4)。 □

现在，再次利用引理 4.1 以及黎曼曲率张量场的显式表达式 (3.5)，我们可以计算三张力场 (1.7) 的两个曲率项，并得到：

引理 4.4。

$$\begin{aligned}-\overline{R}\left(\overline{\Delta}\tau(\varphi),d\varphi(e_i)\right)d\varphi(e_i) &= -\frac{\ell^2}{4}AX-\frac{\ell^2}{4}BE_3+\left(-4m+\frac{\ell^2}{2}\right)C\eta\,;\\ -\overline{R}\Big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi),\tau(\varphi)\Big)d\varphi(e_i) &= \left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\kappa_g^3\eta\,.\end{aligned}$$

最后，将引理 4.3–4.4 中计算出的各项相加，并利用引理 4.1 中定义的函数 A、B、C 的显式表达式进行化简，我们得到 Hopf 圆柱的三张力场的显式表达式。总结如下

命题 4.5。如 (2.1) 中所述，设 Σ 是 BCV 空间 $M^3_{m,\,\ell}$ 中的一个 Hopf 圆柱。则其三张力场为

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \Big[2\dot{\kappa}_g(\ell^2\kappa_g+5\kappa_g^3-5\ddot{\kappa}_g)-5\kappa_g\kappa_g^{(3)}\Big]X\\ &+\frac{\ell}{2}\Big[-(\ell^2+9\kappa_g^2)\dot{\kappa}_g+4\kappa_g^{(3)}\Big]E_3\\ &+\frac{1}{4}\Big[\kappa_g\left(60\dot{\kappa}_g^2-(\ell^2+4\kappa_g^2)(2\ell^2-8m+\kappa_g^2)\right)+2(5\ell^2-8m+20\kappa_g^2)\ddot{\kappa}_g-4\kappa_g^{(4)}\Big]\eta\,.\end{aligned}\tag{4.5}$$

由 (4.5) 可知，Hopf 圆柱 Σ 是三调和的，当且仅当其基曲线 γ 的测地曲率 κ_g 满足：

$$\begin{cases}2\dot{\kappa}_g(\ell^2\kappa_g+5\kappa_g^3-5\ddot{\kappa}_g)-5\kappa_g\kappa_g^{(3)}=0\\ -\ell(\ell^2+9\kappa_g^2)\dot{\kappa}_g+4\ell\kappa_g^{(3)}=0\\ \kappa_g\left(60\dot{\kappa}_g^2-(\ell^2+4\kappa_g^2)(2\ell^2-8m+\kappa_g^2)\right)+2(5\ell^2-8m+20\kappa_g^2)\ddot{\kappa}_g-4\kappa_g^{(4)}=0\,.\end{cases}\tag{4.6}$$

定理 2.1 的证明。由于 $\tau=-\kappa_g\eta$，证明归结为说明 Σ 的基曲线 γ 具有常数测地曲率 κ_g。我们分别用 $K1$、$K2$、$K3$ 表示 (4.6) 中三个方程的左端。

情形 $\ell\neq 0$

我们采用反证法。假设 (4.6) 存在一个非常数解。因此，存在一个开区间 I，使得 $\kappa_g(s)$ $\dot{\kappa}_g(s)$ 在 I上均不为零。我们在 I上进行讨论。首先，由

$$4\ell K1+5\kappa_g K2=0$$

我们推导得出

$$\ddot{\kappa}_g=\frac{\kappa_g}{40}(3\ell^2-5\kappa_g^2)\,.\tag{4.7}$$

接下来，将（4.7）的导数代入 $K2$ ，得到

$$-\frac{7}{10}\ell(\ell^2+15\kappa_g^2)\dot{\kappa}_g=0\,,$$

因此，由于 $\ell\neq 0$，我们必有 $\dot{\kappa}_g=0$ ，从而得到矛盾。C
ase $\ell=0$
在这种情况下，(4.6) 等价于

$$\text{(4.8)}\qquad \begin{cases} \text{(i)} & 2\dot{\kappa}_g(\kappa_g^3-\ddot{\kappa}_g)-\kappa_g\kappa_g^{(3)}=0 \\ \text{(ii)} & 15\kappa_g\dot{\kappa}_g^2-\kappa_g^3(\kappa_g^2-8m)+2(5\kappa_g^2-2m)\ddot{\kappa}_g-\kappa_g^{(4)}=0\,. \end{cases}$$

对 (4.8) (i) 进行显式积分，得到

$$\text{(4.9)}\qquad 2\kappa_g\ddot{\kappa}_g=\kappa_g^4-\dot{\kappa}_g^2+c,$$

其中 c 是一个实常数。对 (4.9) 分别求一阶导数和二阶导数，我们得到 $\ddot{\kappa}_g$、 $\kappa_g^{(3)}$ 和 $\kappa_g^{(4)}$ 关于 κ_g、 $\dot{\kappa}_g$ 和 c 的表达式。将这些表达式代入 (4.8) (ii)，得到

$$\text{(4.10)}\qquad c^2+12m\kappa_g^6+7\kappa_g^8-8c\dot{\kappa}_g^2+7\dot{\kappa}_g^4+4m\kappa_g^2(\dot{\kappa}_g^2-c)+2\kappa_g^4(5c+7\dot{\kappa}_g^2)=0\,.$$

若 $m=c=0$，则 (4.10) 变为

$$7(\kappa_g^2+\dot{\kappa}_g^2)^2=0$$

由此得到矛盾。现在，设 $(m,c)\neq(0,0)$。由 (4.10) 得到

$$\text{(4.11)}\qquad \dot{\kappa}_g^2=\frac{1}{7}\left(4c-2m\kappa_g^2-7\kappa_g^4\pm\sqrt{9c^2+12cm\kappa_g^2+(4m^2-126c)\kappa_g^4-56m\kappa_g^6}\right)\,.$$

我们可以将注意力限制在 I 为正的一个开子区间上

$$9c^2+12cm\kappa_g^2+(4m^2-126c)\kappa_g^4-56m\kappa_g^6$$

。对 (4.11) 求导（我们选择平方根前带有符号 $+$ 的解；另一种情况类似），得到 $\ddot{\kappa}_g$ 关于 κ_g和 c的表达式。将此表达式和 (4.11) 代入 (4.9)，容易得到 κ_g 是下列常系数多项式的一个根

$$7056m\kappa_g^{10}+196(81c+26m^2)\kappa_g^8+384(42cm-m^3)\kappa_g^6+12c(945c-121m^2)\kappa_g^4-1764c^2m\kappa_g^2-567c^3\,.$$

由于 $(m,c)\neq(0,0)$，再次可得 κ_g为常数，矛盾。因此证明结束。□

定理 2.2 的证明。利用 κ_g 为常数这一假设，结合命题 4.5 即可轻易得出结论。□

5. Proof of Theorem 2.6

我们的首要目标是计算三张力场表达式中出现的所有项

$$\text{(5.1)}\qquad \tau_3(\varphi)=\overline{\Delta}^2\tau(\varphi)-R\left(\overline{\Delta}\tau(\varphi),d\varphi(e_i)\right)d\varphi(e_i)\;-\;R\Big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi),\tau(\varphi)\Big)d\varphi(e_i)\,.$$

为此，我们现在建立一系列有用的预备引理。

引理 5.1. 设 $\varphi: M^2 \to M^3_{m,\ell}$ 是一个定向曲面。令 A 表示形算子，$f = (1/2)$ 表示迹，A 表示平均曲率函数，η 表示单位法向量。则
(a) $(\nabla A)(X,Y) = (\nabla A)(Y,X) - (R(X,Y)\eta)^\top$; (b) $\langle (\nabla A)(X,Y)\ Z\rangle = \langle (\nabla A)(X,Z)\ Y\rangle$; (c) $\mathrm{trace}(\nabla A)(\cdot,\cdot) = 2\,\mathrm{grad}\, f + (4m-\ell^2)\ \nu E_3^\top$.

证明。(a) 这就是 Codazzi 方程。
(b)

$$\begin{aligned}\langle (\nabla A)(X,Y), Z\rangle &= \langle \nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X A(Y), Z\rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= X\langle A(Y), Z\rangle - \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle \nabla_X Y, A(Z)\rangle\,.\end{aligned}$$

由于上述表达式关于 Y, Z 对称，因此结论成立。(c) 任取一点 $p \in M^2$，并考虑 p 附近的测地标架场 $\{X_i\}_{i=1}^2$。在 p 处，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}(\nabla A)(\cdot,\cdot) &= \sum_{i=1}^2 (\nabla A)(X_i,X_i) = \sum_{i=1}^2 (\nabla_{X_i} A)(X_i) = \sum_{i=1}^2 \nabla_{X_i} A(X_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \nabla_{X_i}(\langle A(X_i), X_j\rangle X_j) = \sum_{i,j=1}^2 \nabla_{X_i}(\langle X_i, A(X_j)\rangle X_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \langle X_i, \nabla_{X_i} A(X_j)\rangle X_j = \sum_{i,j=1}^2 \langle X_i, (\nabla A)(X_i,X_j)\rangle X_j\,.\end{aligned}$$

现在，先利用 (a)，再利用曲率张量场 (3.5) 的显式表达式，我们将前面的一系列等式继续写为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}(\nabla A)(\cdot,\cdot) &= \ldots = \sum_{i,j=1}^2 \langle X_i, \nabla_{X_j} A(X_i) - \overline{R}(X_i,X_j)\eta\rangle X_j \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \langle X_i, \nabla_{X_j} A(X_i)\rangle X_j - \langle X_i, \overline{R}(X_i,X_j)\eta\rangle X_j \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \Big(X_j\langle X_i, A(X_i)\rangle\Big) X_j \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^2 (4m-\ell^2)\Big[\langle X_j, E_3\rangle\nu - \langle X_i, E_3\rangle \nu\delta_{ij}\Big] X_j \\ &= 2\sum_{j=1}^2 X_j(f) X_j + (4m-\ell^2)\Big[2\nu E_3^\top - \nu E_3^\top\Big] \\ &= 2\,\mathrm{grad}\, f + (4m-\ell^2)\nu E_3^\top\end{aligned}$$

由此引理得证。 □

接下来，我们计算：

引理 5.2. 设 $\varphi\colon M^2 \to M^3_{m,\,\ell}$为一个定向曲面，并以 $\mathbf{H} = f\eta$表示其平均曲率向量场。则

$$\overline{\Delta}\mathbf{H} = (\Delta f + f|A|^2)\eta + 2A(\operatorname{grad} f) + 2f \operatorname{grad} f + (4m - \ell^2)\, f\, \nu\, E_3^\top . \tag{5.2}$$

证明。我们在任意固定点 $p \in M^2$附近取测地标架场 $\{X_i\}_{i=1}^2$。同样地，为简化记号，将 ∇记作 ∇^{M^2}。由于 $\mathbf{H} = f\eta$，在 p附近有：

$$\nabla^{\varphi}_{X_i}\mathbf{H} = \nabla^{\perp}_{X_i}\mathbf{H} - A_{\mathbf{H}}(X_i) = (X_i f)\,\eta - f A\,(X_i)\ .$$

于是，将第二基本形式记为 B，在 p 处有：

$$\begin{aligned}\nabla^{\varphi}_{X_i}\nabla^{\varphi}_{X_i}\mathbf{H} &= (X_iX_if)\,\eta - (X_if)\,A\,(X_i) - (X_if)\,A\,(X_i) - f\big(\nabla_{X_i}A\,(X_i) + B\,(X_i, A\,(X_i))\big)\\ &= (X_iX_if)\,\eta - 2\,(X_if)\,A\,(X_i) - f(\nabla A)(X_i,X_i) - f|A\,(X_i)\,|^2\eta\,.\end{aligned}$$

现在，对 i 求和并利用引理 5.1，可得 (5.2)（注意， Δ 和$\overline{\Delta}$ 的符号约定与 (1.3) 中相同）。 □

在曲面为常平均曲率（CMC）的特殊情形下，设 $f = \alpha$，则 (5.2) 化为：

$$\overline{\Delta}\mathbf{H} = \alpha\,|A|^2\eta + \alpha\,(4m - \ell^2)\,\nu\,E_3^\top\ . \tag{5.3}$$

由于平均曲率向量场与张力场之间满足关系 $\tau(\varphi) = 2\mathbf{H}$，为方便记号，令 $\tau(\varphi) = \tau$，并且

$$V = \nu\,E_3^\top\ , \tag{5.4}$$

我们将 (5.3) 改写为

$$\overline{\Delta}\tau = 2\alpha\,|A|^2\eta + 2\alpha\,(4m - \ell^2)\,V\,. \tag{5.5}$$

接下来，由 (5.5) 并进行与引理 5.2 中类似的计算，我们得到：

引理 5.3. 设 $\varphi\colon M^2 \to M^3_{m,\,\ell}$ 是一个定向曲面，并假设 $f \equiv \alpha$。则

$$\overline{\Delta}^2\tau = 2\alpha(|A|^4 + \Delta|A|^2)\ \eta + 4\alpha A(\text{梯度 }|A|^2)\ + 2\alpha|A|^2(4m - \ell^2)\ V + 2\alpha(4m - \ell^2)\ \overline{\Delta}\,V\,. \tag{5.6}$$

首先的难点是如何以一种方便的方式计算 $\overline{\Delta}\,V$。我们有

引理 5.4.

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}\,V &= 2\nu\Big(2A^2(E_3^\top) + \frac{3\ell}{4}\big(A(J(E_3^\top)) - J(A(E_3^\top))\big)\Big)\\ &\quad + \Big\{(4m - \ell^2)(|E_3^\top|^2 - \nu^2) + |A|^2 + \frac{5\ell^2}{4}\Big\}\nu E_3^\top\\ &\quad + \Big\{2|A(E_3^\top)|^2 + \ell\langle JE_3^\top, A(E_3^\top)\rangle - 2\nu^2|A|^2 - (4m - \ell^2)\nu^2|E_3^\top|^2\Big\}\eta\,.\end{aligned} \tag{5.7}$$

证明. 我们可以取一个测地标架场 $\{X_i\}_{i=1}^2$，使得在任意固定点 $p \in M^2$ 的邻域内， $J(X_1) = X_2$, $J(X_2) = -X_1$。考虑到 (3.8) 和 (3.9)，我们在 p 的邻域内得到：

$$\nabla^{\varphi}_{X_i}V = \nu^2\left(A(X_i) - \frac{\ell}{2}J(X_i)\right) - \langle A(X_i) - \frac{\ell}{2}J(X_i), E_3^\top\rangle E_3^\top + \nu\langle A(X_i), E_3^\top\rangle\eta\,.$$

接下来，我们以类似的方式在 p 处计算：

$$\nabla^{\varphi}_{X_i}\big(\nabla^{\varphi}_{X_i}V\big) = 2\nu\,X_i(\nu)\big(A(X_i) - \frac{\ell}{2}J(X_i)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&+\nu^2\Big[(\nabla A)(X_i,X_i)+|A(X_i)|^2\eta-\frac{\ell}{2}\langle A(X_i),J(X_i)\rangle\eta\Big]\\
&+\Big[\langle-(\nabla A)(X_i,X_i),E_3^\top\rangle-\nu\Big|A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\Big|^2\Big]E_3^\top\\
&-\langle A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i),E_3^\top\rangle\Big[\nu\big(A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\big)+\langle A(X_i),E_3^\top\rangle\eta\Big]\\
&+X_i(\nu)\langle A(X_i),E_3^\top\rangle\eta+\nu\langle(\nabla A)(X_i,X_i),E_3^\top\rangle\eta\\
&+\nu^2\langle A(X_i),A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\rangle\eta-\nu\langle A(X_i),E_3^\top\rangle A(X_i)\,.
\end{aligned}
$$

现在，由于 $\{X_i\}_{i=1}^2$ 是一个测地标架场，我们在 p处有：

$$
\overline{\Delta}V=-\sum_{i=1}^2\nabla^\varphi_{X_i}\big(\nabla^\varphi_{X_i}V\big)\,.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta}V &= -2\nu\big(A(\operatorname{grad}\nu)-\frac{\ell}{2}J(\operatorname{grad}\nu)\big)\\
&\quad-\nu^2\Big[(4m-\ell^2)\nu E_3^\top+|A|^2\eta-\frac{\ell}{2}\sum_{i=1}^2\langle A(X_i),J(X_i)\rangle\eta\Big]\\
&\quad+\Big[(4m-\ell^2)\nu|E_3^\top|^2+\sum_{i=1}^2\nu\Big|A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\Big|^2\Big]E_3^\top\\
&\quad+\sum_{i=1}^2\langle A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i),E_3^\top\rangle\Big[\nu\big(A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\big)+\langle A(X_i),E_3^\top\rangle\eta\Big]\\
&\quad-\langle A(\operatorname{grad}\nu),E_3^\top\rangle\eta-(4m-\ell^2)\nu^2|E_3^\top|^2\eta\\
&\quad-\nu^2\sum_{i=1}^2\langle A(X_i),A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\rangle\eta+\nu\sum_{i=1}^2\langle A(X_i),E_3^\top\rangle A(X_i)\,.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

现在，利用 (3.9) 并进行一些简化，例如：即可计算出 (5.7)：

$$
\langle A(X_1),J(X_1)\rangle+\langle A(X_2),J(X_2)\rangle=0
$$

$$
\sum_{i=1}^2\Big|A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i)\Big|^2=|A|^2+\frac{\ell^2}{2}
$$

$$
\sum_{i=1}^2\langle X_i,J(E_3^\top)\rangle\langle X_i,A(E_3^\top)\rangle\eta=\langle J(E_3^\top),A(E_3^\top)\rangle\eta
$$

$$
\operatorname{grad}\nu=-\sum_{i=1}^2\langle A(X_i)-\frac{\ell}{2}J(X_i),E_3^\top\rangle X_i=-A(E_3^\top)-\frac{\ell}{2}J(E_3^\top)\,.
$$

确实，

$$
\overline{\Delta}V = 2\nu A^2(E_3^\top)+\ell\nu A(J(E_3^\top))-\ell\nu J(A(E_3^\top))+\nu\frac{\ell^2}{2}E_3^\top
$$

$$
\begin{aligned}
&-\nu^2\Big[(4m-\ell^2)\nu E_3^\top+|A|^2\eta\Big]\\
&+\Big[(4m-\ell^2)\nu|E_3^\top|^2+\nu\left(|A|^2+\frac{\ell^2}{2}\right)\Big]E_3^\top\\
&+\nu A^2(E_3^\top)+\nu\frac{\ell}{2}A(J(E_3^\top))-\nu\frac{\ell}{2}J(A(E_3^\top))+\nu\frac{\ell^2}{4}E_3^\top\\
&+\Big[|A(E_3^\top)|^2+\frac{\ell}{2}\langle J(E_3^\top),A(E_3^\top)\rangle\Big]\eta\\
&+|A(E_3^\top)|^2\eta+\frac{\ell}{2}\langle J(E_3^\top),A(E_3^\top)\rangle\eta-(4m-\ell^2)\nu^2|E_3^\top|^2\eta\\
&-\nu^2|A|^2\eta+\nu A^2(E_3^\top)
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

由此可立即推出（5.7）（注意，（5.8）的每一行都与（5.9）的相应行相等）。□

现在，我们可以陈述一个具有独立研究价值的主要结果，它总结了本节所做的准备工作。

命题 5.5. 设 M^2 是 $M^3_{m,\ell}$ 中的一个定向曲面。假设 M^2 的常平均曲率为 α。则其三张力场为

$$
\begin{aligned}
\tau_3 \;=\;& \alpha\Big\{2\Delta|A|^2+2|A|^4+|A|^2\big[\ell^2(1+2\nu^2)-8m(1+\nu^2)\big]\\
&+4(4m-\ell^2)|A(E_3^\top)|^2+2\ell(4m-\ell^2)\langle J(E_3^\top),A(E_3^\top)\rangle-4\alpha(4m-\ell^2)\langle A(E_3^\top),E_3^\top\rangle\\
&+2\alpha^2\ell^2(3+4\nu^2)-32m\alpha^2(1+\nu^2)\Big\}\eta\\
&+2\alpha(4m-\ell^2)\nu\Big\{3|A|^2+4\alpha^2+3\ell^2\nu^2+m(4-12\nu^2)\Big\}E_3^\top\\
&+4\alpha(4m-\ell^2)\nu\Big\{2A^2(E_3^\top)-\frac{3\ell}{4}J(A(E_3^\top))+\frac{3\ell}{4}(A(J(E_3^\top))\Big\}-4\alpha^2(4m-\ell^2)\nu A(E_3^\top)\\
&+4\alpha A(\operatorname{grad}|A|^2)\,,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

其中，ν 定义于 (3.7) 中。

证明。曲率张量场的显式表达式见 (3.5)，因此我们已具备计算三张力场 (5.1) 的所有要素。具体而言：
(I) $\overline{\Delta}^2\tau$ 见引理 5.3 和 5.4。(II) 下面计算第一
个曲率项

$$
\overline{R}\left(\overline{\Delta}\tau(\varphi),d\varphi(e_i)\right)d\varphi(e_i)\,,
$$

我们将其改写为

$$
\sum_{i=1}^{2}\overline{R}\left((\overline{\Delta}\tau)^\perp,X_i\right)X_i+\sum_{i=1}^{2}\overline{R}\left((\overline{\Delta}\tau)^\top,X_i\right)X_i\,,
\tag{5.11}
$$

其中，根据 (5.5)，我们有

$$
(\overline{\Delta}\tau)^\perp=2\alpha\,|A|^2\eta\,,\quad(\overline{\Delta}\tau)^\top=2\alpha\,(4m-\ell^2)\,V\,.
\tag{5.12}
$$

于是，利用曲率张量场的一般表达式 (3.5)，我们得到 :

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{R}\left((\overline{\Delta}\tau)^{\perp},X_i\right)X_i \;=\; 2\alpha|A|^2\Big\{2\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\eta \\ -(4m-\ell^2)\big[(|E_3^{\top}|^2+2\nu^2)\eta+\nu E_3^{\top}\big]\Big\}. \tag{5.13}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{R}\left((\overline{\Delta}\tau)^{\top},X_i\right)X_i \;=\; 2\alpha(4m-\ell^2)\nu\Big\{\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)E_3^{\top} \\ -(4m-\ell^2)\big[|E_3^{\top}|^2E_3^{\top}+|E_3^{\top}|^2\nu\,\eta\big]\Big\}. \tag{5.14}$$

将 (5.13) 和 (5.14) 中的结果相加，我们即可轻松处理 (II) 中的项。(III)这里我们处理另一个曲率项，即

$$\overline{R}\Big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi),\tau(\varphi)\Big)d\varphi(e_i)\,.$$

再次利用曲率张量场的一般表达式 (3.5)，并注意到

$$\nabla^{\varphi}_{X_i}\tau=-2\alpha A(X_i)$$

我们得到（稍微滥用记号：我们将 X_i 与 $d\varphi(X_i)$ 视为相同）：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\overline{R}\left(\nabla^{\varphi}_{X_i}\tau,\tau\right)X_i &= -4\alpha^2\sum_{i=1}^{2}\overline{R}\left(A(X_i),\eta\right)X_i\\ &= -4\alpha^2\Big\{-2\alpha\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\eta \\ &\quad +(4m-\ell^2)\Big[\nu A(E_3^{\top})-\langle A(E_3^{\top}),E_3^{\top}\rangle\eta-2\alpha\nu E_3^{\top}-2\alpha\nu^2\eta\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{5.15}$$

利用在三种情形 (I)、(II)、(III) 中得到的结果，我们可以轻松计算出在 (5.1) 中明确描述的 3-张力场。更准确地说，经过一些常规化简，我们得到 (5.10)（其中我们使用了 $|E_3^{\top}|^2=1-\nu^2$），从而命题 5.5 的证明完成。□

定理 2.6 的证明。根据定理 2.4，我们只需研究三种可能的情形 (iv)(a)、(b)、(c)。(iv)(a) 情形已在定理 2.2 中得到详细分析，并给出了真三调和曲面的例子。相比之下，(iv)(b) 类型的水平切片是全测地的，因此不存在此类真三调和曲面。总而言之，只要证明定理 2.4 (iv)(c) 中的任意抛物螺旋面 $P_{\alpha,\ m,\ \ell}$ 都不可能是真三调和的，证明便告完成。尽管证明思路简单，相关计算却相当冗长，因此将借助 $M^3_{m,\ \ell}$ 的半空间模型来进行。更确切地说，回想一下，根据假设，抛物螺旋面的情形下 $m<0$，我们将在

$$\tilde{M}^3_{m,\ell}=\left(\{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\in\mathbb{R}^3\,:\,\tilde{y}>0\},\ \frac{d\tilde{x}^2+d\tilde{y}^2}{-4m\tilde{y}^2}+\left(d\tilde{z}+\frac{\ell}{4m\tilde{y}}d\tilde{x}\right)^2\right).$$

现在，我们回顾半空间模型的一些基本事实（见 [4]）。存在一个显式的等距变换 Θ: $M^3_{m,\,\ell} \to \tilde{M}^3_{m,\,\ell}$，其定义为

$$\Theta(x,y,z) = \left(\frac{2y}{\sqrt{-m}G^2}, \frac{1+m(x^2+y^2)}{-mG^2}, z + \frac{\ell}{2m} \arccos\left(\frac{y}{G}\right) \right) ,$$

其中我们设

$$G = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{-m}} + x\right)^2 + y^2} .$$

此外，半空间模型上的一个显式正向全局正交标架场为:

$$\tilde{E}_1 = 2\sqrt{-m}\,\tilde{y}\,\partial_{\tilde{x}} + \frac{\ell}{2\sqrt{-m}}\,\partial_{\tilde{z}} , \quad \tilde{E}_2 = 2\sqrt{-m}\,\tilde{y}\,\partial_{\tilde{y}} , \quad \tilde{E}_3 = \partial_{\tilde{z}} .$$

~为便于后续使用，我们注意到 $d\Theta(E_3) = E_3$。接下来，我们计算

$$[\tilde{E}_1, \tilde{E}_2] = -2\sqrt{-m}\tilde{E}_1 + \ell\tilde{E}_3 ; \quad [\tilde{E}_1, \tilde{E}_3] = [\tilde{E}_2, \tilde{E}_3] = 0 .$$

然后，利用 Koszul 恒等式 (3.2)，容易验证在此情形下 (3.3) 的形式为:

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{\tilde{E}_1}\tilde{E}_1 = 2\sqrt{-m}\tilde{E}_2 , \quad \overline{\nabla}_{\tilde{E}_1}\tilde{E}_2 = -2\sqrt{-m}\tilde{E}_1 + \frac{\ell}{2}\tilde{E}_3 , \quad \overline{\nabla}_{\tilde{E}_1}\tilde{E}_3 = -\frac{\ell}{2}\tilde{E}_2 , \\
&\overline{\nabla}_{\tilde{E}_2}\tilde{E}_1 = -\frac{\ell}{2}\tilde{E}_3 , \qquad \overline{\nabla}_{\tilde{E}_2}\tilde{E}_2 = 0 \qquad\qquad \overline{\nabla}_{\tilde{E}_2}\tilde{E}_3 = \frac{\ell}{2}\tilde{E}_1 , \\
&\overline{\nabla}_{\tilde{E}_3}\tilde{E}_1 = -\frac{\ell}{2}\tilde{E}_2 , \qquad \overline{\nabla}_{\tilde{E}_3}\tilde{E}_2 = \frac{\ell}{2}\tilde{E}_1 , \qquad\qquad \overline{\nabla}_{\tilde{E}_3}\tilde{E}_3 = 0 .
\end{aligned} \tag{5.16}$$

抛物螺旋面 $P_{\alpha,m,\ell}$ （见 [7]）是 $\tilde{M}^3_{m,\ell}$ 中由下式参数化的常平均曲率曲面

$$X(u,v) = (u, v, a\log v) , \quad v > 0 ,$$

其中 a 是非零实常数，其与几何参数 α, m, ℓ之间的关系将在下文 (5.21) 中明确给出。

我们需要验证抛物螺旋面 $P_{\alpha,\,m,\,\ell}$, $\alpha \neq 0$ 不可能是三调和的。为此，我们应用命题 5.5。为了计算三张力场 τ_3 表达式中出现的所有项（见 (5.10)），方便起见，我们用全局正交标架场 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 表示并计算所有~ ~ ~相关量。记~ ~ ~$[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]$ 为 $\tilde{x}_1E_1 + \tilde{x}_2E_2 + \tilde{x}_3E_3$，我们计算得:

$$\begin{aligned}
X_u &= \left[\frac{1}{2\sqrt{-m}\,v}, 0, \frac{\ell}{4mv}\right] \\
X_v &= \left[0, \frac{1}{2\sqrt{-m}\,v}, \frac{a}{v}\right] \\
\eta &= \frac{1}{L}\left[\ell, 4am, 2\sqrt{-m}\right] ,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

其中我们设

$$L = \sqrt{\ell^2 + 4m(4a^2m - 1)} \tag{5.18}$$

注意

$$\nu = \eta \cdot \tilde{E}_3 = \frac{2\sqrt{-m}}{L}$$

因此我们可以计算 $E_3^\top = \tilde{E}_3 - \nu\eta$。我们得到

$$E_3^\top = \left[-\frac{2\ell\sqrt{-m}}{L^2}, \frac{8a(-m)^{3/2}}{L^2}, \frac{4m}{L^2} + 1 \right].$$

此外,

$$J(E_3^\top) = \eta \times E_3^\top = \left[\frac{4am}{L}, -\frac{\ell}{L}, 0 \right].$$

现在，我们回顾一下，对于所有与 $P_{\alpha,m,\ell}$ 相切的 X，都有 $A(X) = -\overline{\nabla}_X \eta$ 和 $J(X) = \eta \times X$。接下来，我们注意到 η、$E_3^\top$、$J(E_3^\top)$ 的所有系数都是常数。因此，利用 (5.16)，不难计算得:

$$\begin{aligned}
A(E_3^\top) &= \left[-\frac{2a\ell m}{L}, \frac{\ell^2}{2L}, 0 \right] \\
A(J(E_3^\top)) &= \left[\frac{\sqrt{-m}\,(32a^2m^2 + \ell^2)}{L^2}, \frac{4a\ell(-m)^{3/2}}{L^2}, -\frac{16a^2\ell m^2 + \ell^3}{2L^2} \right] \\
A^2(E_3^\top) &= \left[-\frac{\ell^2\sqrt{-m}}{L^2}, \frac{4a\ell(-m)^{3/2}}{L^2}, \frac{16a^2\ell m^2 + \ell^3}{2L^2} \right] \\
J(A(E_3^\top)) &= \left[-\frac{\ell\sqrt{-m}\,(32a^2m^2 + \ell^2)}{2L^2}, -\frac{2a\ell^2(-m)^{3/2}}{L^2}, \frac{16a^2\ell^2m^2 + \ell^4}{4L^2} \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

利用 (5.19)，我们可以计算平均曲率 α 和 $|A|^2$。我们有

$$2\alpha = \frac{1}{|E_3^\top|^2}\big(\langle A(E_3^\top), E_3^\top\rangle + \langle A(J(E_3^\top)), J(E_3^\top)\rangle\big) = \frac{8a(-m)^{3/2}}{L}. \tag{5.20}$$

对 (5.20) 求逆，并结合 (5.18)，可推得 a 与几何参数 α、ℓ、m 之间的关系为:

$$a = \frac{\alpha}{4m}\sqrt{\frac{4m - \ell^2}{m + \alpha^2}}. \tag{5.21}$$

至于 $|A|^2$，利用 (5.21) 和 (5.18) 直接计算可得

$$|A|^2 = \frac{1}{|E_3^\top|^2}\big(\langle A(E_3^\top), A(E_3^\top)\rangle + \langle A(J(E_3^\top)), A(J(E_3^\top))\rangle\big) = \frac{1}{2}(8\alpha^2 + \ell^2). \tag{5.22}$$

接下来，利用 (5.19)、(5.21) 和 (5.22) 可以轻易算出 (5.10) 中的所有项；将它们相加并化简后，我们得到

$$\tau_3 = \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{-m}}\sqrt{\frac{\alpha^2 + m}{4m - \ell^2}}\,T1, \frac{\alpha}{\sqrt{-m}}\,T2, -2\sqrt{\frac{\alpha^2 + m}{4m - \ell^2}}\,T3 \right],$$

其中

$$T1 \;=\; \ell\Big[\ell^4 + \ell^2(-16m + 6\alpha^2) + 32(2m^2 - 3m\alpha^2 - 2\alpha^4)\Big];$$

$$
\begin{aligned}
T2 &= \ell^4 + \ell^2(-16m + 6\alpha^2) + 32(2m^2 - 3m\alpha^2 - 2\alpha^4)\,; \\
T3 &= \ell^4 + \ell^2(-8m + 2\alpha^2) + 64\,\alpha^2(m + \alpha^2)\,.
\end{aligned}
$$

总而言之，当且仅当满足以下条件时，抛物螺旋面 $P_{\alpha,\ m,\ \ell}$ 是真三调和的

$$
\begin{cases} T1 = 0 \\ T2 = 0 \\ T3 = 0\,. \end{cases} \tag{5.23}
$$

现在，如果 $\ell = 0$，则系统（5.23）的第三个方程变为

$$
64\,\alpha^2(m + \alpha^2) = 0\,,
$$

由于根据我们的构造，$m + \alpha^2 < 0$，该方程没有相关解。接下来，我们处理 $\ell \neq 0$ 的情形。首先，我们注意到条件 $T2 - T3 = 0$ 蕴含

$$
\ell^2 = \frac{-8(-2m^2 + 5m\alpha^2 + 4\alpha^4)}{2m - \alpha^2}\,. \tag{5.24}
$$

现在，将 ℓ^2 的这个值代入 $T2$ 并化简，我们必然得到

$$
(2m + 3\alpha^2)(-2m^2 + 9m\alpha^2 + 8\alpha^4) = 0\,.
$$

由于 $m < 0$，唯一的可能性是：

$$
m = -\frac{3\alpha^2}{2} \quad \text{or} \quad m = \frac{\alpha^2}{4}(9 - \sqrt{145})\,. \tag{5.25}
$$

m 的第一个值不可接受，因为将其代入（5.24）后，我们得到

$$
\ell^2 = -16\alpha^2\,,
$$

矛盾。至于将 m 的第二个值代入（5.25），只需注意到这将推出 $m + \alpha^2 > 0$，这一事实与我们的假设相矛盾。
因此，不存在真三调和抛物螺旋面 $P_{\alpha,\ m,\ \ell}$ 定理 2.6 的证明由此完成。□

6. Proper CMC r-harmonic Hopf cylinders

本节重点研究真常平均曲率 r-调和 Hopf 圆柱。我们将证明，此类子流形的存在不仅取决于环境空间的曲率，还取决于 r的取值。推论 6.3 将对此加以说明，该推论是以下定理的直接结果。

定理 6.1. 假设 $r \geq 2$。设 Σ 是 BCV 空间 $M^3_{m,\ \ell}$中的非极小常平均曲率 Hopf 圆柱。那么，Σ 是真 r-调和的，当且仅当其基曲线 γ 的测地曲率 κ_g 是一个满足下式的非零常数

$$
\kappa_g^4 + \left[-4m(r-1) + \frac{3\ell^2 r}{4}\right]\kappa_g^2 - \frac{\ell^2}{2}(4m - \ell^2) = 0\,. \tag{6.1}
$$

注 6.2。由 (4.1) (ii) 和 (iv) 可知，Σ 的形算子的范数 $|A|^2$ 为（另见[18]）：

$$
|A|^2 = \kappa_g^2 + \frac{\ell^2}{2}\,. \tag{6.2}
$$

利用 (6.2)，条件 (6.1) 等价于

$$|A|^4-\left(4m-\frac{\ell^2}{2}\right)|A|^2-(r-2)\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\kappa_g^2=0\,. \tag{6.3}$$

因此，将 $r=2$ 代入 (6.3)，即可立即得出 Ou [18] 关于常平均曲率双调和 Hopf 圆柱的结果。此外，在 (6.1) 中取特殊情形 $r=3$，也很容易得出定理 2.2 的结论。

在下面的推论中，我们将指出对于参数 ℓ、m 和r 的哪些取值，(6.1) 存在可接受的解。我们建议读者结合图 1 中的示意图，牢记推论 6.3 中情形 (i)、(ii)、(iii) 在几何上的对应意义。

推论 6.3. 设 $M^3_{m,\ell}$ 为一个 BCV 空间。则存在一个真常平均曲率 r-调和 Hopf 圆柱，当且仅当以下条件之一成立：

(i) $4m-\ell^2>0$ 和 $r\geq 2$；(ii) $4m-\ell^2=0$、$\ell\neq 0$ 和 $r\geq 5$；(iii) $4m-\ell^2<0$、$\overline{R}_{1212}=4m-3\ell^2/4>0$ 和

$$r\geq\frac{4\left(\sqrt{2}\sqrt{\ell^4-4\ell^2m}+4m\right)}{16m-3\ell^2}\,. \tag{6.4}$$

注 6.4. 情形 (iii) 的推论 6.3 中的假设 $4m-\ell^2<0$ 和 $\overline{R}_{1212}=4m-3\ell^2/4>0$ 具有几何意义，因为它们表明环境空间是配备了正截面曲率度量的 $SU(2)$。这里指出，从分析的角度看，这些假设等价于条件 $(3/4)\ell^2<4m<\ell^2$，该条件对应于两条抛物线 $4m=(3/4)\ell^2$ 和 $4m=\ell^2$ 之间的区域（见图 2）。将该区域描述为并集 $\cup_a\gamma_a$, $3/4<a<1$很方便，其中 γ_a是抛物线 $4m=a\ell^2$。现在，在 γ_a 上，式 (6.4) 中 r 的下界变为

$$r_a=\frac{4\left(a+\sqrt{2-2a}\right)}{4a-3}\,.$$

我们注意到，在 $(3/4,1)$ 上，r_a 是关于 a 的严格递减函数，且 $\lim_{a\to 3/4^+}r_a=+\infty$和 $\lim_{a\to 1^-}r_a=4$。因此，我们越接近 $\gamma_{3/4}$，为了得到一个真 常平均曲率 r-调和 Hopf 圆柱，r 就必须越大。

现在，我们证明本节的结果。

定理 6.1 的证明。我们知道，$\tau=-\kappa_g\eta$ 和 κ_g 是常数。为简化记号，我们令

$$c=\kappa_g^2+\frac{\ell^2}{2}\quad(=|A|^2)\,.$$

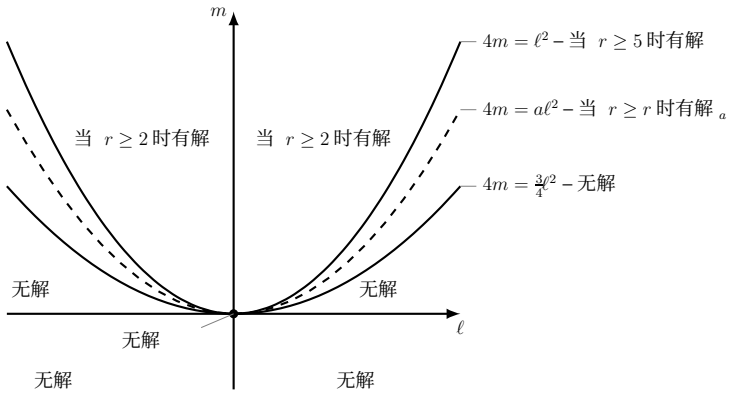
由引理 4.2 可知，$\overline{\Delta}\tau=-\kappa_g c\eta$，进而我们推得

$$\overline{\Delta}^r\tau=-\kappa_g c^r\eta\,. \tag{6.5}$$

接下来，利用引理 4.1，我们得到：

$$\overline{\nabla}_X(\overline{\Delta}^r\tau)=-\kappa_g^2c^rX+\frac{\ell}{2}\kappa_gc^rE_3\,;\qquad\overline{\nabla}_{E_3}(\overline{\Delta}^r\tau)=\frac{\ell}{2}\kappa_gc^rX\,. \tag{6.6}$$

FIGURE 2. BCV-空间中常平均曲率 r-调和 Hopf 圆柱关于 ℓ、 m 和 r取值的分布。



我们还需要以下等式，它们可由 (3.5) 直接推得：

$$\overline{R}(\eta,X)X=\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\eta\,;\quad \overline{R}(\eta,E_3)E_3=\frac{\ell^2}{4}\eta\,;\quad \overline{R}(X,\eta)E_3=0\,. \tag{6.7}$$

现在，利用 (6.5)、(6.6) 和 (6.7)，我们可以计算 r-张力场，其表达式见 (1.6)、(1.7)。我们有：

$$\begin{aligned}
\tau_{2s}(\varphi) &= \overline{\Delta}^{2s-1}\tau(\varphi)-R^N\left(\overline{\Delta}^{2s-2}\tau(\varphi),d\varphi(e_i)\right)d\varphi(e_i)\\
&\quad-\sum_{p=1}^{s-1}\Big\{R^N\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s+p-2}\tau(\varphi),\overline{\Delta}^{s-p-1}\tau(\varphi)\right)d\varphi(e_i)\\
&\qquad\qquad-\ R^N\left(\overline{\Delta}^{s+p-2}\tau(\varphi),\nabla^{\varphi}_{e_i}\overline{\Delta}^{s-p-1}\tau(\varphi)\right)d\varphi(e_i)\Big\}\\
&= -\kappa_g c^{2s-1}\eta+\kappa_g c^{2s-2}\Big[\overline{R}(\eta,X)X+\overline{R}(\eta,E_3)E_3\Big]\\
&\quad-\sum_{p=1}^{s-1}\Big\{\kappa_g^3c^{2s-3}\overline{R}(X,\eta)X-\frac{\ell}{2}\kappa_g^2c^{2s-3}\overline{R}(E_3,\eta)X\\
&\qquad\qquad-\frac{\ell}{2}\kappa_g^2c^{2s-3}\overline{R}(X,\eta)E_3-\kappa_g^3c^{2s-3}\overline{R}(\eta,X)X\\
&\qquad\qquad+\frac{\ell}{2}\kappa_g^2c^{2s-3}\overline{R}(\eta,E_3)X-\frac{\ell}{2}\kappa_g^2c^{2s-3}\overline{R}(\eta,X)E_3\Big\}\\
&= -\kappa_g c^{2s-1}\eta+\kappa_g c^{2s-2}\Big[\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\eta+\frac{\ell^2}{4}\eta\Big]\\
&\quad-c^{2s-3}\sum_{p=1}^{s-1}\Big\{-\kappa_g^3\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\eta-\kappa_g^3\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\eta\Big\}\\
&= -\kappa_g c^{2s-3}\Big[c^2-\left(4m-\frac{\ell^2}{2}\right)c-(2s-2)\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\kappa_g^2\Big]\eta\,.
\end{aligned}$$

由最后一个等式可知，Hopf 圆柱 Σ 是真 r-调和的（$r=2s$）当且仅当

$$c^2-\left(4m-\frac{\ell^2}{2}\right)c-(r-2)\left(4m-\frac{3\ell^2}{4}\right)\kappa_g^2=0\,. \tag{6.8}$$

最后，将 $c=\kappa_g^2+(\ell^2/2)$ 代入 (6.8)，即可得到 (6.1)。
τ_{2s+1} 的计算过程类似，因此省略更多细节。 □

推论 6.3 的证明。我们将精确分析方程 (6.1) 的根如何依赖于参数 ℓ、 m 和 r。将 $x=k_g^2$ 代入 (6.1) 后，存在一个适当的 r-调和常平均曲率 Hopf 圆柱，等价于方程存在一个正解

$$x^2+\left[-4m(r-1)+\frac{3\ell^2 r}{4}\right]x-\frac{\ell^2}{2}(4m-\ell^2)=0\,. \tag{6.9}$$

我们将分析分为若干种情况。
若 $m\le 0$，则 (6.9) 的系数均非负，因此不存在正解。

因此，从现在起，我们假设 $m>0$。于是有以下几种子情况:

(i) 如果 $4m-\ell^2>0$，那么对于所有 $r\ge 2$，(6.9) 都存在唯一的正解 κ_g^2。(ii) 如果 $4m-\ell^2=0$，那么方程 (6.9) 有正解

$$\kappa_g^2=\frac{r-4}{4}$$

当且仅当 $r\ge 5$。我们指出，这一结果与 [14] 中注 1.3 的讨论一致。

(iii) 如果 $4m-\ell^2<0$，那么将 $\overline{R}_{1212}=4m-3\ell^2/4$ 代入 (6.9) 后，我们得到 n

$$x^2+\left[4m-r\overline{R}_{1212}\right]x-\frac{\ell^2}{2}\overline{R}_{1212}+\frac{\ell^4}{8}=0\,. \tag{6.10}$$

因此，如果 $\overline{R}_{1212}\le 0$，则不存在可接受的解。最后，如果 $\overline{R}_{1212}=4m-3\ell^2/4>0$，那么直接检验可知，(6.9) 有两个不同的正解，当且仅当

$$r>\frac{4\left(\sqrt{2}\sqrt{\ell^4-4\ell^2 m}+4m\right)}{16m-3\ell^2}\,, \tag{6.11}$$

并且在以下情形下只有一个正解

$$r=\frac{4\left(\sqrt{2}\sqrt{\ell^4-4\ell^2 m}+4m\right)}{16m-3\ell^2}\,. \tag{6.12}$$

□

注 6.5. (i) 我们注意到，对于所有 $r\ge 5$，总是存在合适的 m、ℓ，使得满足 (6.11) 或 (6.12)。在 (6.11) 成立的情况下，相应的两个解产生两个不全等的 r-调和 Hopf 圆柱。

(ii) 关于 $4m-\ell^2>0$ 的情形，如果 $r=2$ 我们得到 $\kappa_g^2=4m-\ell^2$。另一方面，Ou 和 Wang（见定理 1.3 (iii)）发现，γ 必须是半径为

$$R=\frac{1}{\sqrt{8m-\ell^2}} \tag{6.13}$$

在底空间 $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2\sqrt{m}}\right)=M^2(4m)$ 中。为验证我们的结果与 Ou 和 Wang 的结果一致，我们注意到，在 $\mathbb{S}^2(\rho)$ 中，曲率为 κ_g 的曲线是 $\mathbb{R}^3$ 中曲率为 κ、半径为

$$R=\frac{1}{\kappa}=\frac{\rho}{\sqrt{\kappa_g^2\rho^2+1}}\,. \tag{6.14}$$

将 $\rho=1/(2\sqrt{m})$ 和 $\kappa_g^2=4m-\ell^2$ 代入 (6.14)，即可得到 (6.13)。

References

[1] M. Belkhelfa, F. Dillen, and J.-I. Inoguchi, Bianchi-Cartan-Vranceanu 空间中具有平行第二基本形式的曲面，载于《偏微分方程、子流形与仿射微分几何》（华沙，2000），Banach 中心出版物第 57 卷，波兰科学院数学研究所，华沙，2002 年，第 67–87 页。[2] V. Branding, S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto, 高阶能量泛函，《数学进展》，370 (2020)，第 107236 页，60。[3] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, and P. Piu, 双调和曲线的欧拉-拉格朗日方法，地中海数学杂志，3 (2006)，第 449–465 页。[4] J. Castro-Infantes, J. Manzano, and F. Torralbo, 乘积空间中的共轭极小曲面构造，arXiv 预印本 arXiv:2203.13162v1，(2022)。[5] Q.-S. Chi, 等距参数理论：Cartan 的遗产，载于《2018年国际华人数学家联盟会议论文集》，国际出版社，波士顿，马萨诸塞州，[2020] ©2020，第 197–260 页。[6] B. Daniel, 等距浸入三维齐性流形，《赫尔维数学评论》，82 (2007)，第 87–131 页。[7] M. Domínguez-Vázquez and J. M. Manzano, $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$-空间中的等距参数曲面，《比萨高等师范学校科学年鉴》(5)，22 (2021)，第 269–285 页。[8] J. Eells and L. Lemaire, 调和映射专题选讲，数学科学会议委员会区域会议丛书第 50 卷，由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛州，1983。[9] ——, 调和映射的两篇报告，世界科学出版社有限公司，埃奇沃特，新泽西州，1995。[10] S. Maeta, k-调和映射到具有常截面曲率的黎曼流形，《美国数学会会刊》，140 (2012)，第 1835–1847 页。[11] ——, 三调和映射的构造，《休斯敦数学杂志》，41 (2015)，第 433–444 页。[12] S. Maeta, N. Nakauchi, and H. Urakawa, 到非正常曲率流形的三调和等距浸入，《数学月刊》，177 (2015)，第 551–567 页。[13] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto, 到空间形式中的多调和超曲面，《以色列数学杂志》，249 (2022)，第 343–374 页。[14] S. Montaldo and A. Ratto, 到球面中的 r-调和浸入的新例子，《数学分析及其应用杂志》，458 (2018)，第 849–859 页。[15] ——, 到椭球中的真 r-调和子流形与旋转超曲面，《非线性分析》，172 (2018)，第 59–72 页。[16] Y.-L. Ou, 黎曼流形中的双调和超曲面，《太平洋数学杂志》，248 (2010)，第 217–232 页。[17] Y.-L. Ou and B.-Y. Chen, 黎曼几何中的双调和子流形与双调和映射，世界科学出版社私人有限公司，哈肯萨克，新泽西州，[2020] ©2020。[18] Y.-L. Ou and Z.-P. Wang, 三维几何中的常平均曲率与全脐双调和曲面，《几何与物理杂志》，61 (2011)，第 1845–1853 页。

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italia电子邮件地址：montaldo@unica.itFaculty of Mathematics,
"Al.I. Cuza" University of Iasi, Bd. Carol I no. 11, 700506 Iasi,ROMANIA电子邮件地址：oniciucc@uaic.roUniversità degli Studi di Cagliari,
Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Ospedale72, 09124 Cagliari, Italia电子邮件地址：rattoa@unica.it