arXiv:2302.06207v2 [math.AT] 5 Sep 2024

全局模型范畴与′拓扑 André–Quillen 上同调

TOBIAS LENZ 和 MICHAEL STAHLHAUER

Abstract. 我们引入 *global model categories*，作为一个通用框架，用以捕捉全局等变同伦论中的若干现象。随后，我们构造这些范畴的 *genuine stabilizations*，从而推广了从不稳定全局同伦论到稳定全局同伦论的通常过渡。最后，我们定义超交换环谱的 *global topological André-Quillen cohomology*，并在我们的框架中将其表示为一种真实稳定化，这与 Basterra 和 Mandell 得到的经典非等变描述相类似。

Contents

引言 1
1. G-等变与 G-全局同伦论回顾 6 2. 全局模型范畴 16 3. 整体稳定性 22 4. 全局空间的稳定化 37 5. 全局勇敢新代数 41 6. 全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调 54 7. 全局 NUCA 的稳定化 70 参考文献 77

Introduction

像拓扑 K-理论和各种版本的协边理论这样的上同调理论，是代数拓扑中最基本的工具之一。实际中遇到的许多例子都带有额外结构，例如乘法和幂运算；这些结构往往能得到有效利用，例如经典证明便通过奇异上同调上的斯廷罗德运算，证明霍普夫映射在球面的稳定同伦群中定义了非平凡元素。就表示谱而言，这些额外的代数数据由高度结构化的乘法编码，使表示谱成为所谓的 E_∞-环谱。在对称谱或正交谱等良好的图谱谱模型范畴 [HSS00, MMSS01], 中，这类 E_∞-环谱由严格交换代数表示，也可以用 ∞-范畴的语言方便地描述。

G等变上同调理论按照等变稳定同伦论的意义，由真正的 G-谱建模，是将上同调理论推广到这样一种对象环境中的结果：对象带有由一个（有限）群 G的作用所赋予的额外对称性。许多经典上同调理论都有等变类比，例如 G等变拓扑 K理论和配边理论。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：55P91、55P43；次要分类18N40、55U35。
Key words and phrases. 全局同伦论、模型范畴、真正稳定性、拓扑 Andr´e-Quillen 上同调、超交换环谱。

当我们研究这些对象上具有高度结构的乘法时，会以范数映射的形式出现有趣的新结构；范数映射可以被看作扭曲的乘法。作为一个具有启发性的代数例子，考虑一个普通的交换环R，其上有有限群 G 的作用，并且对于子群$H \subset G$，存在一个 H-不动点 $r \in R^H$。那么， r 的范数就是乘积

$$N_H^G(r) = \prod_{gH \in G/H} g.r,$$

它现在是一个 G-不动点。这产生了一个乘法映射 $N_H^G\colon R^H \to R^G$，再结合将不动点包含视为限制，以及以类似方式定义的加性转移，就在 R 的不动点集合 $\{R^H\}_{H\subset G}$ 上赋予了 Tambara 函子 [Tam93] 的结构。更一般地，任何真正的 G-E_∞-环谱的零次同伦群都自然具有 Tambara 函子结构，尤其带有范数映射。Hill、Hopkins 和 Ravenel 利用这些范数，著名地解决了 Kervaire 不变量一问题 [HHR16], ，从而重新引起了人们对这一丰富结构的兴趣。

事实证明，许多重要的等变上同调理论，例如配边论和 K-理论，都以统一的方式存在于广泛的群类中，例如所有有限群或所有紧李群。这正是全局同伦论所采取的视角 [Sch18, Hau19]。这类全局对象具有膨胀这一额外结构（沿满群同态的限制），纳入这些附加信息有助于更轻松地分析等变现象。最突出的例子是 Hausmann 最近证明了一个等变 Quillen 定理，将等变配边与形式群律联系起来 [Hau22], ，而这一结果关键依赖于全局视角。

“乘法整体上同调理论”的正确概念是超交换环谱，即适当的全局谱模型范畴中的交换代数。这类超交换环谱的零次同伦群构成所谓的整体幂函子；对于固定的 G，它是 G-Tambara 函子的整体类比，特别是对于有限群的任意包含映射 $H \subset G$，都带有范数映射。目前，尚不知晓对超交换环谱的纯粹 ∞范畴论描述。

障碍理论与拓扑 Andr´e-Quillen 上同调。由于交换环谱在其同伦群和所表示的上同调中编码了如此丰富的额外结构，对它们的研究一直备受关注。然而，谱上结构化乘法的存在性是一个极其微妙的问题：尽管许多重要的谱确实带有 E_∞环谱的结构，例如球谱、Eilenberg-MacLane 谱、 K-理论和 Thom 谱，或拓扑模形式的谱，但另一些自然定义的谱并不允许这种结构化乘法。典型例子是 Moore 谱；众所周知， $\mathbb{S}/2$ 在同伦范畴中不允许单位乘法，且没有 $\mathbb{S}/p$ 能够具有结构化的结合（即 A_∞-）乘法，参见 [AT65，第 1.1] 定理，以及 [Ang08，例 3.3]。类似地，Brown-Peterson 谱 BP（对于任意素数 p）不支持E_∞-乘法 [Law18，Sen17]。

为了得到正面结果，在某些情况下可以采用障碍理论方法。著名的例子包括 Goerss 和 Hopkins 的结果 [GH04] ：Morava E-理论具有唯一的 E_∞-环结构；以及 Basterra 和 Mandell [BM13]利用交换环谱的 Postnikov 塔，在 BP 上构造E_4-乘法。以上两项结果都依赖于拓扑 Andr´e-Quillen 上同调。这是 Basterra [Bas99] 提出的一种交换环谱上同调理论，是对一种上同调理论的改编；后者最初定义为

该理论最初由 Andr´e 和 Quillen 为普通交换环定义[And67, Qui70]。后者定义为 K¨ahler 微分的导出函子。Basterra 在拓扑版本中采用了类似的方法，使用一个谱的模型范畴，其中交换环谱是 E_∞-环谱的模型。

经典代数 Andr´e-Quillen 上同调构造中的一个关键观察是，对于固定的交换环 R，可以将 R-模范畴与增广 R-代数中的阿贝尔群对象范畴等同起来，从而可以将 Andr´e-Quillen 同调与上同调解释为一种导出阿贝尔化过程。在拓扑情形中，Basterra 和 Mandell [BM05], 得到了类似结果：他们证明，对于交换环谱R，拓扑 Andr´e-Quillen 上同调将 R-模范畴呈现为增广 R-代数范畴的一种稳定化。

全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调。超交换环谱的乘法蕴含了丰富的结构（甚至比非等变 E_∞-环谱更为丰富），因此人们尤其希望建立一种全局障碍理论。作为迈向这一目标的第一步，本文将拓扑 Andr´e-Quillen 上同调理论推广到全局同伦论的背景中。具体而言，我们定义超交换环谱的全局拓扑 Andr´e-Quillen 同调与上同调，在这一背景下证明一个 Hurewicz 定理，并为超交换环谱构造 Postnikov 塔。随后，作为本文的主要结果（见下文定理 B），我们将全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调识别为一种恰当的全局稳定化，这与 Basterra–Mandell 的非等变结果相类比，并由此说明它确实是经典拓扑 Andr´e-Quillen 上同调的“正确”全局类比。

为了更好地理解这一点，回想一下，任何足够良好的模型范畴或 ∞-范畴都可以通过求逆悬挂—环圈伴随而得到稳定化 [Sch97, Lur18], 。然而，在不稳定与稳定的等变或全局同伦理论之间转换要微妙得多，这与上文提到的等变稳定同伦群之间存在转移映射有关。在等变情形下，我们可以用真实稳定化简洁地表述这一过程 [GM23, Appendix C]：从不稳定的 G- 等变同伦论到稳定等变同伦论的转换，是通过对正则实表示的一点紧化作普遍求逆来实现的 S^G，而非仅对通常的球面作此处理 S^1（即对平凡一维表示的一点紧化）。然而遗憾的是，这种方法无法直接推广到全局情形——例如，Schwede 的一项计算表明，从不稳定全局同伦论转向稳定全局同伦论时，只有通常的非等变球面会被求逆。

与 Gepner 和 Nikolaus [GN15], 所阐述的一个想法类似，我们在本文中通过更一般地考察 GLen20] 意义下针对所有有限群 G的全局同伦论来解决这一问题；当群为平凡群 $G = 1$ 时，这一理论便还原为通常的全局同伦论。在这一框架下，我们进而同时描述了针对所有有限群 G 从非稳定到稳定 G全局同伦论的过渡：它是通过在 G全局同伦论中对所有 G 以相容的方式取逆 S^G 来实现的（见下文定理 A）。

全局模型范畴。为了精确阐述这一概念，我们引入全局模型范畴的概念（定义 2.11）。粗略地说，这样的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{C}}$由一个范畴 $\mathscr{C}$ 以及范畴 G-$\mathscr{C}$ 上的两种（性质良好的）Quillen 等价模型结构组成；该范畴由 $\mathscr{C}$ 中的 G-对象构成。这两种模型结构称为射影模型结构和平坦模型结构，并且它们以规定的方式与沿群同态的限制相互作用，从而将 [Len20] 中针对不稳定和稳 G全局同伦论所确立的行为形式化。作为主要例子，我们引入并

研究全局空间的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{L}}$、全局谱的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{S}p}$、$\underline{\mathscr{M}}_R$ 的R-模的全局模型范畴，以及针对超交换环谱 R 的增广 R代数的全局模型范畴 $\mathscr{C}\mathrm{om}_R/R$。

若 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的全局模型范畴（即 $\mathscr{C}$ 有一个零对象），且 G 是有限的，则同伦范畴 Ho(G-$\mathscr{C}$) 带有一个等变悬挂-环路伴随

$$S^G \wedge^{\mathbf{L}} -\colon \mathrm{Ho}(G\text{-}\mathscr{C}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(G\text{-}\mathscr{C}) : \mathbf{R}\Omega^G$$

（这恢复了带基点的全局空间中通常的伴随），并且当这一伴随对每个 G 都是伴随等价时，我们称 $\underline{\mathscr{C}}$（真正）稳定。

按照此定义，全局谱的全局模型范畴以及 R-模的全局模型范畴都是稳定的。另一方面，对于一般的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{C}}$，我们可以通过考察 $\mathscr{C}$ 中适当的 G-全局谱对象，构造一个全局稳定化：它是一个映向稳定全局模型范畴的同伦泛映射，从而改进并推广了 [Sch97] 的非等变构造。随后，我们在两个关键情形下计算这一全局稳定化：

首先，我们证明，在这一设定下，全局空间的全局稳定化确实由全局谱给出：

定理 A（见定理 4.1）。悬挂谱-环路空间伴随

$$\underline{\Sigma^\bullet_+}\colon \underline{\mathscr{L}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{S}p} : \underline{\Omega^\bullet}$$

将全局谱的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{S}p}$ 展示为全局空间的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{L}}$ 的全局稳定化。

这尤其可以作为对我们框架的合理性检验，同时也使我们能够用一个泛性质来描述此前难以捉摸的不稳定与稳定全局同伦论之间的过渡。

然而，这一理论的主要应用在于计算增广 R 代数范畴相对于超交换环谱 R 的全局稳定化：

定理 B（精确表述见定理 6.38）。设 R 是一个平坦的超交换环谱。那么，R-模的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{M}}_R$ 是增广 R-代数的全局模型范畴 $\mathscr{C}\mathrm{om}_R/R$ 的全局稳定化，而该泛映射在同伦范畴上化为构造全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调时所得到的“全局阿贝尔化”函子。

全局幂函子的 Andr´e-Quillen（余）同调。正如拓扑 Andr´e-Quillen 上同调是普通环上同调理论的一个“高阶代数”版本，全局 Andr´e-Quillen 上同调也有相应的概念 [Sta22，第 1] 章，其对象是“交换全局环”，即前文提到的全局幂函子；此外，Hill [Hil17] 还研究了 Tambara 函子的等变 Andr´e-Quillen 上同调的类似理论。

这一理论具有若干人们对 Andr´e-Quillen 上同调的全局类比所期待的性质：例如，0 次情形可用全局幂函子的导子来描述，1 次情形则可通过 Grothendieck 的 Exalcomm 函子的全局版本来描述。然而，它也有一个严重缺陷：它不具备 Quillen 的传递性长正合列的全局类比。正如 [Sta22]，中所解释的，这一缺陷可追溯到全局函子的阿贝尔范畴的一个异常；Lewis 首先注意到了这一点 [Lew99]：其中的射影对象未必是平坦的。与此相反，本文所研究的全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调确实带有一个传递性正合列，见推论 6.17。

相关工作。关于非稳定与稳定等变同伦论之间关系的另一种视角，由 Barwick、Dotto、Glasman、Nardin 和 Shah 所提出的参数化高阶范畴论提供 [BDG+16、Nar16], ；该理论强调加性转移所编码的额外代数结构（更准确地说，是作为其基础的所谓 Wirthm¨uller 同构），并将其视为一种“真正半加性”。

借助这一语言，Cnossen、Linskens 与第一作者 [CLL23a] 几乎同时引入了全局 ∞-范畴的概念。这些范畴同样带有真正稳定性的概念（现在通过前述 Wirthm¨uller 同构来定义），而上述文献的主要结果描述了一个特定的显式全局 ∞-范畴——全局谱的范畴（同样由所有有限 G对应的 G-全局谱构造而成）——它是一个类似的全局空间全局 ∞-范畴在此意义下的真正稳定化。事实上，在这一框架中，全局空间和全局谱分别具有普遍性描述：它们分别是自由可表全局∞-范畴和自由可表真正稳定全局∞-范畴，这立即推出了上述描述。

不难证明，任意全局模型范畴都可通过 Dwyer-Kan 局部化导出一个（可表的）全局 ∞-范畴；对于$\underline{\mathscr{L}}$和 $\underline{\mathscr{S}p}$，所得范畴恰好重现前述全局空间与全局谱的全局 ∞-范畴。特别地，在这种情况下，两种全局稳定化概念是一致的。不过，尽管自然会预期它们在一般情形下也一致，这一点并非先验显然；第一作者计划在未来的工作中重新探讨这一问题。

概述。在第 1 节中，我们回顾 G-等变同伦论和 G-全局同伦论，特别描述后者中丰富的“群变换”演算。随后，我们在第 2 节中以全局模型范畴的概念将这一演算形式化。

第 3 节致力于全局模型范畴的稳定性概念以及全局稳定化的一般构造。在第 4 节中，我们计算全局空间情形下的这一稳定化，并证明定理 A。

在第 5 节中，我们发展稳定的 G-全局同伦论中的模与代数理论，尤其定义相应的全局模型范畴。随后，我们在第 6 节中引入（G-）全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调和 G-等变拓扑 Andr´e-Quillen 上同调，并通过增广交换代数的全局稳定化来表达前者，从而证明定理 B。该证明反过来依赖于一个关于模与非幺交换代数之间自由-遗忘伴随的稳定化的艰深技术性结果（即所谓的“NUCA”），第 7 节全部 посвящено этому результату。

致谢。第一作者谨此感谢 Bastiaan Cnossen 和 Sil Linskens 富有助益的讨论。第二作者谨此感谢 Stefan Schwede 的支持与指导。两位作者还要感谢匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见尤其促成了第6.3小节的加入。

本文部分基于瑞典研究理事会资助的研究成果，资助编号为 2016-06596；当时第一作者于 2022年初驻留在位于瑞典尤尔斯霍尔姆的 Institut Mittag-Leffler。

本文撰写期间，第二作者获得了波恩马克斯·普朗克数学研究所的资助，并且是波恩大学豪斯多夫数学中心的副成员。第6.1和6.2小节改编自第二作者学位论文中的相关成果。

1. A reminder on G-equivariant and G-global homotopy theory

下文始终设 G 为一个有限群。为作铺垫，我们回顾 G-等变同伦论和 G-全局同伦论的若干模型范畴方面。

1.1. G-等变同伦理论。我们从经典非稳定等变理论开始：

命题 1.1. 设 $\mathcal{F}$ 是 G的一个子群族，即一个非空且对共轭子群封闭的子群集合。那么在 G-SSet 上存在唯一的模型结构，使得映射 f 是弱等价或纤维化，当且仅当对所有 $H \in \mathcal{F}$， f^H 分别是单纯集合之间的弱同伦等价或 Kan 纤维化。我们称之为 $\mathcal{F}$-等变模型结构，并将其弱等价称为 $\mathcal{F}$-弱等价。该结构是单纯的、适当的且组合的，其生成余纤维化为

$$\{G/H \times (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n) : H \in \mathcal{F}, n \geq 0\}$$

其生成无圈余纤维化为

$$\{G/H \times (\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n) : H \in \mathcal{F}, 0 \leq k \leq n\}.$$

此外，其中的映射是余纤维化，当且仅当它是逐层单射，且每个不在其像中的单形都具有属于 $\mathcal{F}$的各向同性。最后，其中的滤过余极限是同伦的。

证明。由 [Ste16，例 2.14] 可得一个余纤维生成的（因而是组合的）模型结构，其弱等价、纤维化和生成（无圈）余纤维化如上所述；同上文献的命题 2.16 则给出了余纤维化的刻画。其余性质容易验证，完整证明另见 [Len20，命题 1.1。2] □

例 1.2。若取 $\mathcal{F} = \mathcal{A}\ell\ell$ 为 G的所有子群构成的集合，则可得到一个模型结构，其余纤维化是底层单纯集合的余纤维化；而弱等价和纤维化则分别是满足以下条件的映射 f：对每个子群 $H \subset G$， f^H 都是弱等价或纤维化。

我们将此模型结构简称为 G-等变模型结构，并将其弱等价称为 G-等变弱等价。

例 1.3. 设 G、 H 为有限群。我们用 $\mathcal{G}_{G,H}$ 表示 $G \times H$的图子群族，即形如 $\Gamma_{K,\varphi} := \{(k, \varphi(k)) : k \in K\}$ 的群，其中 $K \subset G$ 是子群，且 $\varphi\colon K \to H$是同态。注意，对于任意图子群， K 和 φ 实际上都是唯一确定的；子群 $L \subset G \times H$是图子群，当且仅当它与 H 的交平凡，即 $L \cap (1 \times H) = 1$。

现在我们将命题应用于 $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{G,H}$ ，从而在 $(G \times H)$-SSet 上得到一个图模型结构；在 $H = 1$ 的情形下，这恢复了先前的模型结构。对于一般的 H，在此模型结构中，一个映射是余纤维化，当且仅当它逐层为单射，且 H 在像之外自由作用。

我们还需要上述模型结构的一个变体，其中余纤维化更多：

命题 1.4. 设 G 是有限群， $\mathcal{F}$ 是一个子群族。那么在 G-SSet 上存在唯一的模型结构，其弱等价为 $\mathcal{F}$-等变弱等价，余纤维化为单射余纤维化，也就是单纯集合底层的余纤维化。我们称之为单射 $\mathcal{F}$-等变模型结构。它是单纯的、适当的、组合的，其生成余纤维化为

$$\{G/H \times (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n) : H \subset G, n \geq 0\},$$

并且其中的滤过余极限是同伦的。

注意，对于 $\mathcal{F} = \mathcal{A}\ell\ell$，这再次得到 G-等变模型结构。

证明。这是一个广为人知的结果；据我们所知，它在文献中最早出现于 [Shi04, 其中使用的是 SSet_* 而非 SSet；在 3] ，该模型结构已被称为“众所周知”。关于我们所用设定的完整证明，可见 [Len20，命题 1.1.15]。□

我们将频繁使用上述模型结构以下众所周知的“群变换”性质；这些性质也都可见于 [Len20, 1.1.4]:

引理 1.5. 设 G 是一个有限群，且 $\alpha\colon H \to H'$ 是有限群之间的一个同态。那么，伴随

$$\alpha_! := (G\times\alpha)_!\colon (\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{G,H}} \rightleftarrows (\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H'})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{G,H}} : (G\times\alpha)^* =: \alpha^*$$

是一个 Quillen 伴随。若 α 是单射，则还有

$$\alpha^* := (G\times\alpha)^*\colon (\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H'})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{G,H'}} \rightleftarrows (\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{G,H}} : (G\times\alpha)_* =: \alpha_*$$

是一个 Quillen 伴随。 □

引理 1.6. 设 $\alpha\colon G \to G'$ 是有限群之间的单同态，且 H 是有限群。那么

$$\alpha^* := (\alpha\times H)^*\colon (\boldsymbol{G'}\times\boldsymbol{H})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{G',H}} \to (\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{G,H}}$$

它既是左奎伦函子，也是右奎伦函子。 □

接下来讨论稳定情形，此时我们将使用 Hausmann 基于对称谱构造的模型 [Hau17] ，下面简要回顾：

构造 1.7. 记 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为 SSet_*-富集范畴，其对象为有限集，态射空间为

$$\mathrm{maps}_{\boldsymbol{\Sigma}}(A,B) := \bigvee_{i\colon A\to B \text{ injective}} S^{B\smallsetminus i(A)}.$$

复合由楔积给出，即若 C 是另一个对象，则复合映射 $\boldsymbol{\Sigma}(A,B)\wedge\boldsymbol{\Sigma}(B,C) \to \boldsymbol{\Sigma}(A,C)$ 在对应于 $i\colon A\to B$ 和 $j\colon B\to C$ 的楔和项上定义为

$$S^{B\smallsetminus i(A)}\wedge S^{C\smallsetminus j(B)} \cong S^{j(B)\smallsetminus ji(A)}\wedge S^{C\smallsetminus j(B)} \cong S^{C\smallsetminus ji(A)} \hookrightarrow \bigvee_{k\colon A\to C \text{ injective}} S^{C\smallsetminus k(A)}$$

其中，第一个同构由 j 诱导，第二个是典范同构，最后一个映射是包含映射，将以 ji 为指标的直和项包含进去。

定义 1.8. （单纯集合中的）对称谱是一个 SSet_*-富集函子 $\boldsymbol{\Sigma}\to\mathrm{SSet}_*$。我们用 Spectra 表示相应的富集函子与富集自然变换所构成的范畴；该范畴自身也在 SSet_* 上富集、张量化并余张量化，其中（余）张量化按层定义。

如果 G 是任意群，则我们将 $\boldsymbol{G}$-Spectra 记作 Spectra 中 G-对象所构成的范畴，并将其对象称为 G-对称谱，或简称为（略微滥用术语） G-谱。

备注 1.9. 对称谱通常也以一种“坐标化”的方式定义为序列 $(X_n)_{n\geq 0}$，其中各项是带基点的 Σ_n-单纯集合，并配有映射 $S^1\wedge X_n \to X_{n+1}$，这些映射与作用适当地相容。关于该定义与上述定义之间的等价性，参见 [Hau17, 2.4]。

现在我们将在 G-谱范畴上构造等变模型结构。与非等变情形一样，这些结构分为射影对象版本和平坦版本，并将通过对适当的层级模型结构进行 Bousfield 局部化而得到：

命题 1.10。在 $\boldsymbol{G}$-谱范畴上存在唯一的模型结构，其中映射 f 是弱等价或纤维化，当且仅当对于每个有限集 A，$f(A)$ 是一个 $\mathcal{G}_{G,\ \Sigma_A}$-弱等价或纤维化。我们称其为 G-等变投射层级模型结构，其弱等价称为 G-等变层级弱等价。它是组合的，生成余纤维化为

$$\big\{\big(G_+ \wedge \mathbf{\Sigma}(A,-)\big)/H \wedge (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)_+ : A \textit{ finite set}, H \in \mathcal{G}_{G,\Sigma_A}, n \geq 0\big\}.$$

更准确地说，为了使上述对象构成一个集合（而不是一个真类），我们应当限制为一组有限集，使其覆盖所有同构类；下文中我们将忽略这一点及类似的技术细节。

证明。参见 [Hau17，第 2.26 条推论及其后的讨论]。 □

命题 1.11。在 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，使得映射 f 是弱等价或纤维化，当且仅当对于每个有限集 A，在单射 $\mathcal{G}_{G,\ \Sigma_A}$-模型结构中，$f(A)$ 分别是弱等价或纤维化。我们称之为 G-等变平坦层模型结构。其弱等价恰好是 G-等变层级弱等价；此外，映射在 $\boldsymbol{G}$-谱上的平坦层模型结构中是余纤维化，当且仅当它在谱上的平坦层模型结构中是余纤维化（即对于 $G = 1$）；我们将这些映射称为平坦余纤维化。

最后，G-等变分层平坦模型结构是组合的，其生成余纤维化为

$$\big\{\big(G_+ \wedge \mathbf{\Sigma}(A,-)\big)/H \wedge (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)_+ : A \textit{ finite set}, H \subset G \times \Sigma_A, n \geq 0\big\}.$$

证明。模型结构的构造以及对生成余纤维化的识别见 [Hau17, Corollary 2.25 and discussion afterwards], ，而平坦余纤维化的刻画见同上文献的注 2.20。□

注 1.12。我们无需了解上述两个模型结构的生成无圈余纤维化具体是什么样子；好奇的读者可以参阅上文提到的 Hausmann 的论述。

定义 1.13。若一个 G-谱 X 满足：对每个 $H \subset G$ 以及所有有限的 H-集 $A \subset B$，导出伴随结构映射 $X(A) \to \mathrm{R}\Omega^{B\smallsetminus A}X(B)$ 都是 H-等变弱等价，其中 H 作用在 X、A和 B上，则称其为 G-Ω-谱。

这里，我们是相对于 H-等变模型结构在$\boldsymbol{H}$-SSet$_*$中导出 $\Omega^{B\smallsetminus A}$；特别地，若 X 在上述任一层模型结构中是纤维的，那么上面的映射已经由普通伴随结构映射表示。

我们也常将上述条件重新表述为：对于所有有限的H-集 A, C，映射 $X(A) \to \mathrm{R}\Omega^C X(A \amalg C)$ 是弱等价。

定理 1.14. G-等变的 $\boldsymbol{G}$-谱上的射影对象层等变模型结构存在一个 Bousfield 局部化，其纤维对象恰好是射影对象层纤维的 G-Ω-谱。类似地，平坦的 G-等变层模型结构存在一个 Bousfield 局部化，其纤维对象是平坦层纤维的 G-Ω-谱。这两种模型结构都是组合的，并且具有相同的弱等价，我们称之为 G-等变弱等价。

证明。参见 [Hau17，定理 4.7 和 4.8]。 □

注 1.15. 关于上述模型结构的生成无圈余纤维化，补充说明如下，参见 [Hau17、例 2.37 及定理 4.8] 之后的讨论：对于任意有限集 A，谱 $\mathbf{\Sigma}(A, –)$ 根据富 Yoneda 引理表示在 A 处的取值；类似地，$S^B \wedge \mathbf{\Sigma}(A \amalg B, –)$ 表示 $X \mapsto \Omega^B X(A \amalg B)$。因此，再应用一次 Yoneda 引理，可得映射 $\lambda_{A,B}$: $S^B \wedge$

$\mathbf{\Sigma}(A \amalg B, -) \to \mathbf{\Sigma}(A, -)$，使得对于任意对称谱 X，映射 $\mathrm{maps}(\lambda_{A,B}, X)$ 在自然同构共轭意义下与伴随结构映射 $X(A) \to \Omega^B X(A \amalg B)$ 一致。

现在，若 $H \subset G$ 作用于 A, B，则 $\lambda_{A,\ B}$ 在诱导作用下成为一个 H-谱之间的映射（记作$\lambda_{H,\ A,\ B}$），我们将其分解为一个射影余纤维化 $\kappa_{H,\ A,\ B}$，后接一个层级弱等价 $\rho_{H,\ A,\ B}$。那么，生成无圈余纤维化集合可由一组生成的层级无圈余纤维化，再加上推出积映射 $(G_+ \wedge_H \kappa_{H,\ A,\ B}) \square i$ 构成，其中 $H \subset G$遍历所有有限的H-集 A, B（按同构计），且 i遍历所有生成余纤维化。

注释 1.16. 作为对后续内容的预告，我们回顾一下：任意组合的单纯（左）适当模型范畴都存在一个稳定化 [Sch97]。我们不加证明地指出，在相应的 ∞-范畴上，这给出了 [Lur18, Corollary 1.4.4.5]，意义下的普适稳定化模型，即到一个可呈示稳定 ∞-范畴的伴随的始对象，或者等价地说，在可呈示的世界中普适地将 $\Sigma := S^1 \wedge -$ 反演的结果。

然而，尽管对于上述任一模型结构，我们都有一个 Quillen 伴随 Σ^∞_+: G-SSet $\rightleftarrows$ G-谱 : Ω^∞，但正如引言中所提到的，这并不能以以上朴素的意义对稳定化进行建模。相反，它定义了一种“真实稳定化”，在普遍意义上将函子 $S^G \wedge -$（在可呈现的 ∞-范畴中）求逆；其中 G 通过置换 $S^G = \bigwedge_G S^1$的 smash 函子发挥作用，或者等价地，对于所有有限 G-集 A，函子 $S^A \wedge -$发挥作用，参见 [GM23，附录 C] 或[CMNN20，定理 A.2]。

对称谱方法的主要缺点是，弱等价只能通过指定局部对象来间接定义。不过，存在一种 $\underline{\pi}_*$-同构的概念，我们现在将对此作出介绍。尽管它未能涵盖所有 G-等变弱等价，但至少足够粗略，可满足许多用途：

构造 1.17. 令 $H \subset G$，并令 $\mathcal{U}_H$ 为一个完备的 H-集合宇宙，即一个可数的 H-集，任何其他可数 H-集都能等变地嵌入其中；记 $s(\mathcal{U}_H)$为 $\mathcal{U}_H$的有限 H-子集所构成的偏序集。

对于每个 G-谱 X 和每个 $k \geq 0$，我们定义

$$\pi_k^H(X) = \mathrm{colim}_{A \in s(\mathcal{U}_H)} [S^{A \amalg \{1,\dots,k\}}, |X(A)|]_*^H$$

其中 $[,]_*^H$表示 H-等变保基点同伦类的集合（针对H-拓扑空间之间的映射），而过渡映射定义为

$$\begin{aligned} [S^{A\amalg\{1,\dots,k\}}, |X(A)|]_*^H &\xrightarrow{S^{B\setminus A}\wedge -} [S^{B\setminus A} \wedge S^{A\amalg\{1,\dots,k\}}, S^{B\setminus A} \wedge |X(A)|]_*^H \\ &\cong [S^{B\amalg\{1,\dots,k\}}, S^{B\setminus A} \wedge |X(A)|]_*^H \\ &\xrightarrow{\sigma} [S^{B\amalg\{1,\dots,k\}}, |X(B)|]_*^H \end{aligned}$$

对所有 $A \subset B$成立，其中 σ 表示对称谱的结构映射，未标记的同构是典范同构。类似地，对于 $k < 0$，我们定义

$$\pi_k^H(X) = \mathrm{colim}_{A \in s(\mathcal{U}_H)} [S^A, |X(A \amalg \{1, \dots, -k\})|]_*^H$$

其过渡映射以类似方式定义。

对于每个 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $H \subset G$，$\pi_k^H X$ 自然构成一个阿贝尔群 [（Hau17，定义 3.1]）；不过，下文不会用到这个群结构。

定义 1.18. 若映射 $f\colon X \to Y$ 是 G-谱之间的映射，且对所有 $H \subset G$ 和所有 $k \in \mathbb{Z}$，$\pi_k^H f$ 都是同构，则称其为一个（G-等变） $\underline{\pi}_*$-同构。

注 1.19. 上述同伦群与 $\mathcal{U}_H$ 的选择无关，至多相差一个自然但一般非典范的同构 [Hau17, 3.3]。特别地， $\underline{\pi}_*$-同构的概念不依赖于任何选择。

定理 1.20. 每个 $\underline{\pi}_*$-谱之间的同构都是 G-等变弱等价。

证明。参见 [Hau17，定理 3.36] □

警告 1.21. 尽管沿单同态的限制函子保留了上述所有结构 [Hau17，5.2], ，等变模型结构与沿一般同态的限制函子无法合理地相容，这与它们的不稳定版本不同。特别是，如果 $\alpha\colon G \to G'$ 不是单射，那么 α^* 通常不会将G'-等变弱等价映射为 G-等变弱等价。

我们将在接下来的两个小节中介绍的 G-全局理论有一个很好的性质：它带有在同伦意义上有意义的“群变换”伴随（我们稍后会用全局模型范畴这一概念将其形式化），尤其是沿任意同态的限制函子确实是同伦的。

1.2. 不稳定的 $\boldsymbol{G}$-全局同伦论。继续用 G 表示一个有限群。现在我们将回顾 [Len20]意义下的 G-全局同伦论；它推广了 Schwede [Sch18],意义下（针对有限群）的全局同伦论，并将成为本文中表述和证明后者性质的关键工具。同样，我们先从不稳定情形讲起：

构造 1.22. 将单纯集合 X 映到其顶点集的遗忘函子 SSet $\to$ Set 有一个右伴随 E，其显式定义为 $(EX)_n = X^{1+n}$，它关于 X 具有显然的函子性，其结构映射由典范同一识 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}([n], X)$ 诱导。

定义 1.23. 我们用 I 表示有限集及单射构成的范畴，并令 $\mathcal{I}$ 表示对所有同态集应用 E 后得到的单纯范畴。我们用 I-SSet 表示到 SSet 的富集函子所构成的富集范畴 $\mathcal{I}\to$，并称其对象为 $\mathcal{I}$-空间或全局空间。更一般地，我们用 $\boldsymbol{G}$-I-SSet 表示 I-SSet 中 G-对象构成的范畴，并称其对象为 G-$\mathcal{I}$-空间或 G-全局空间。

命题 1.24。在 $\boldsymbol{G}$-I-单纯集上存在唯一的模型结构，使得一个映射是弱等价或纤维化，当且仅当对于每个有限集 A， $f(A)$ 在 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,\ G}$-等变模型结构中分别是弱等价或纤维化。我们称此模型结构为 G-全局层模型结构，其弱等价称为 G-全局层弱等价。此模型结构是适当的、单纯的且组合的，其生成余纤维化为

$$\{\mathcal{I}(A,-)\times_\varphi G\times(\partial\Delta^n\hookrightarrow\Delta^n)\colon H\subset\Sigma_A,\varphi\colon H\to G, n\geq 0\},$$

其中 $\times_\varphi$ 表示普通积对 H 在 $\mathcal{I}(A,–)$ 上的右作用与其在 A 上的典范作用，以及 G 上经由 $g.h = g\varphi(h)$ 给出的右作用所诱导的对角映射取商。

最后， G-全局层弱等价的滤过余极限仍然是 G-全局层弱等价。

证明。参见 [Len20，命题 1.4.3]。 □

与 G-对称谱的情形一样，我们现在将对其进行布斯菲尔德局部化，以得到我们真正需要的模型结构。不过，与 G-对称谱不同，我们实际上可以明确描述弱等价和局部对象。我们先从前者说起：

构造 1.25. 设 A 为任意集合，可以是无限集，并设 X 为一个 $\mathcal{I}$-单纯集合。然后我们定义

$$X(A) := \operatorname*{colim}_{B \subset A \text{ finite}} X(B)$$

其过渡映射由 X 的函子性诱导。这以显然的方式成为 X 中的一个函子；特别地，如果 G 作用于 X，那么 $X(A)$ 自然成为一个 G-单纯集合。

此外，幺半群 End(A)（即 A 的自映射所成的幺半群）通过置换余极限中的各项，自然地作用于上述对象。因此，如果 A 是一个 H-集合，且 X 是一个 G-$\mathcal{I}$-单纯集合，那么 $X(A)$ 就成为一个 $(H \times G)$- 单纯集合。

定义 1.26。 $f\colon X \to Y$ 的 G-$\mathcal{I}$-单纯集合映射称为 G-全局弱等价，如果对于每个有限群 H 以及某个（因而任意）完备 H 集宇宙 $\mathcal{U}_H$，所诱导的映射 $f(\mathcal{U}_H)$ 是一个 $\mathcal{G}_{H,\,G}$- 等变弱等价；或者等价地（必要时将 H 替换为一个子群），对于每个 $\varphi\colon H \to G$，映射 $(\varphi^* f)(\mathcal{U}_H)$ 是一个 H-等变弱等价。

接下来，我们来讨论这一情形下 Ω-谱概念的类比：

定义 1.27. 称一个 G-$\mathcal{I}$-单纯集为静态的，如果对每个有限群 H 以及所有有限忠实 H-集 $A \subset B$，由包含映射诱导的映射 $X(A) \to X(B)$ 是一个 $\mathcal{G}_{H,G}$-弱等价。

定理 1.28. $\boldsymbol{G}$-I-SSet 上的 G-全局层模型结构存在一个 Bousfield 局部化，其弱等价为 G-全局弱等价。其纤维对象恰好是层级纤维的静态 G-$\mathcal{I}$-单纯集。

这一模型结构同样是组合的（生成余纤维化映射相同）、单纯的、适当的，并且滤过余极限是同伦的。

证明. 参见 [Len20, 定理 1.4.30]。 □

我们还需要上述模型结构的以下单射变体：

定理 1.29。在 $\boldsymbol{G}$-I-单纯集 上存在唯一的模型结构，其弱等价为 G-全局弱等价，余纤维化为单射余纤维化。我们称之为单射 G-全局模型结构。它是组合的、单纯的、适当的，并且其中的滤过余极限是同伦的。

证明。参见 [Len20，定理 1.4。37] □

注记 1.30。范畴 $\boldsymbol{G}$-$\boldsymbol{I}$-SSet，即 Fun(I, SSet) 中的 G-对象，也带有一个类似于命题 1.24 的 G-全局层模型结构；该结构还允许进行 Bousfield 局部化，并以静态对象作为局部对象，使所得模型范畴与 $\boldsymbol{G}$-I-单纯集 Quillen 等价，参见 [Len20，定理 1.4。31]然而，这个模型结构的弱等价相当复杂（类似于对称谱的情形），尤其不能仅通过在完备的 H-集宇宙上的取值来检验。I 到$\mathcal{I}$ 的转换正是消除了这一微妙之处，因此上述模型对我们来说会更加方便。

除此之外，[Len20，第 1] 章还研究了基于某个幺半群 $\mathcal{M}$ 以及通过构造 1.22 从中得到的单纯幺半群 $E\mathcal{M}$的各种 G-全局同伦论模型；这些模型通过（由 Quillen 等价构成的）链式关系与上述模型相关。

如前所述，上述 G-全局模型结构支持丰富的“群变换”演算：

命题 1.31. 设 $\alpha\colon G \to G'$ 是任意群同态。那么限制 α^*: $\boldsymbol{G'}$-I-单纯集 $\to \boldsymbol{G}$-I-单纯集是同伦的，并且我们有 Quillen 伴随

$$\alpha_! \colon \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{G\text{-global}} \rightleftarrows \boldsymbol{G'}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{G'\text{-global}} : \alpha^*$$
$$\alpha^* \colon \boldsymbol{G'}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{\text{injective } G'\text{-global}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{\text{injective } G\text{-global}} : \alpha_*.$$

证明。参见 [Len20，引理 1.4.40 和推论 1.4.41]。 □

命题 1.32。设 $\alpha\colon G \to G'$ 是一个单同态。那么

$$\alpha_! \colon \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{\text{injective } G\text{-global}} \rightleftarrows \boldsymbol{G'}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{\text{injective } G'\text{-global}} : \alpha^*$$
$$\alpha^* \colon \boldsymbol{G'}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{G'\text{-global}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{G\text{-global}} : \alpha_*.$$

是 Quillen 伴随。

证明。参见 [Len20，引理 1.4.42 和 1.4.43]。 □

由于每个 G-$\mathcal{I}$-单纯集合都是单射余纤维，上述结论结合 Ken Brown 引理可知， $\alpha_!$ 对单射 α而言是同伦的。以下对此结果的推广（明确说明“自由商是同伦的”）将在许多论证中发挥关键作用，特别参见例 2.14。

命题 1.33. 设 $\alpha\colon G \to G'$ 是任意同态，并设 $f\colon X \to Y$是一个G-全局弱等价，且 $\ker(\alpha)$ 在 X 和 Y 上逐层自由作用。那么 $\alpha_! f$ 是一个 G'- 全局层弱等价。

证明. 我们在 G-全局模型结构中将 f 分解为一个无圈余纤维化 $j\colon X \to Z$ ，后接一个纤维化 p （它自动是无圈的）。由命题 1.31， $\alpha_! j$ 是一个 G'-全局弱等价，因此只需证明 $\alpha_! p$ 也是一个弱等价；我们将证明它甚至是一个 G'-全局层弱等价。

为此，我们注意到，对于任意生成余纤维化 i 以及任意有限集A ，映射 $i(A)$ 是 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,\, G}$-等变模型结构中的余纤维化，因为对于每个有限忠实的 H-集 B 和同态φ: $H \to G$， G在 $\mathcal{I}(B, A) \times_\varphi G$ 上自由作用。由于在 A 处的取值是余连续的，我们得知该结论对所有余纤维化也成立，特别是对上述映射 j成立。因此，$\ker(\alpha)$ 在 Z上也逐层自由作用；于是对每一层应用 [Len20, 命题 1.1.22] （取 $M = \Sigma_A$ 和 $\mathcal{E} = \mathcal{A}\ell\ell$）即可得到所述结论。□

1.3. 稳定的 $\boldsymbol{G}$-全局同伦论。最后，我们来讨论稳定的 G-全局同伦论的模型 [Len20，第 3] 章；此处我们只介绍基础内容，并将在需要时回顾更多构造与结果（特别是幺半性质以及对 G-全局空间的张量化）。

1.3.1. 模型结构。在点集层面，我们的模型仍然简单地由带有 G-作用的对称谱给出；我们再次从适当的层模型结构开始 [Len20，命题 3.1.20 和 3.1.23]:

命题 1.34。在 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，使得当且仅当对每个 $A \in \mathbf{\Sigma}$， $f(A)$ 分别是 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,\, G}$-弱等价或纤维化时，一个映射是弱等价或纤维化。我们称之为 G-全局投射层模型结构，并称其弱等价为 G-全局层弱等价。它是适当的、单纯的、组合的，其生成余纤维化为

$$\{\mathbf{\Sigma}(A, -) \wedge_H G_+ \wedge (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)_+ : A \in \mathbf{\Sigma}, H \in \mathcal{G}_{\Sigma_A, G}, n \geq 0\},$$

并且其中的滤余极限是同伦的。 □

命题 1.35。在 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，使得映射是弱等价或纤维化，当且仅当 $f(A)$ 在单射$\mathcal{G}_{\Sigma_A,\ G}$-模型结构中分别是弱等价或纤维化。我们称之为$G$-全局平坦层模型结构；其弱等价恰好是 G-全局层弱等价，其余纤维化则是平坦余纤维化。该模型结构是适当的、单纯的、组合的，并具有生成余纤维化

$$\{\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_H G_+\wedge(\partial\Delta^n\hookrightarrow\Delta^n)_+ : A\in\mathbf{\Sigma}, H\subset\Sigma_A\times G, n\geq 0\},$$

其中的滤过余极限也是同伦的。 □

警告 1.36。请注意， G-全局层弱等价的概念不同于 G-等变层弱等价：前者是关于H-不动点的条件，其中$H\in\mathcal{G}_{\Sigma_A,\ G}$ 而 A变化；后者则是关于$H\in\mathcal{G}_{G,\ \Sigma_A}$ 的条件。

定义 1.37。若一个 G-谱 X 满足：对所有有限群 H 以及所有有限忠实 H-集 $A\subset B$，导出伴随结构映射

$$X(A)\to\mathbf{R}\Omega^{B\smallsetminus A}X(B)$$

是一个$\mathcal{G}_{H,\ G}$-弱等价。

同样，对于在上述任一层级模型结构中为纤维的 G-谱，导出伴随结构映射已经可以由通常的结构映射来建模。

定义 1.38。在 $\boldsymbol{G}$-谱中的映射 f 称为 G-全局弱等价，如果对于每个有限群 H 以及每个同态 $\varphi\colon H\to G$， φ^*f 都是一个 H-等变弱等价。

定理 1.39。 G-全局投射层模型结构允许进行 Bousfield 局部化，其弱等价为 G-全局弱等价。我们称其为G-全局投射模型结构；其纤维对象恰好是那些在 G-全局投射层模型结构中为纤维对象的 G-全局 Ω-谱。

该模型结构同样是组合的（具有与之前相同的生成余纤维化），是单纯的、适当的，并且其中的滤余极限是同伦的。

证明。参见 [Len20，定理 3.1.41 和命题 3.1.47]。 □

定理 1.40。 G-全局平坦层模型结构允许进行 Bousfield 局部化，其弱等价为 G-全局弱等价。我们称其为 G-全局平坦模型结构；其纤维对象恰好是那些在 G-全局平坦层模型结构中为纤维对象的 G-全局 Ω-谱。

此模型结构仍然是组合的（生成余纤维化与之前相同）、单纯的、适当的，并且其中的滤过余极限是同伦的。

证明。参见 [Len20，定理 3.1.40 和命题 3.1.47]。 □

注 1.41。对于 $G=1$ 上述两种模型结构相同，并且恢复了 Hausmann 的全局模型结构 [Hau19，定理 2.18]。

同样，上述模型结构也有单射版本：

定理 1.42。在 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，其弱等价为 G-全局弱等价，余纤维化为单射余纤维化。我们称之为 G-全局单射模型结构。它是组合的、单纯的、适当的，并且其中的滤过余极限是同伦的。

证明。参见 [Len20，推论 3.1.46]。 □

1.3.2. 群变更伴随。正如先前所承诺的（与其等变对应结构不同），这些模型结构在群变换下表现良好：

命题 1.43. 设 $\alpha\colon G \to G'$ 是任意同态。那么限制α^*: $\boldsymbol{G'}$-谱 $\to \boldsymbol{G}$-谱是同伦的，并且我们有 Quillen 伴随

$$\begin{aligned}\alpha_!\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. proj.}} &\rightleftarrows \boldsymbol{G'}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G'\text{-gl. proj.}} :\alpha^*\\ \alpha^*\colon \boldsymbol{G'}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G'\text{-gl. flat}} &\rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. flat}} :\alpha_*\\ \alpha^*\colon \boldsymbol{G'}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G'\text{-gl. inj.}} &\rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. inj.}} :\alpha_*.\end{aligned}$$

证明。除关于单射模型结构的陈述外，其余内容均见于 [Len20，引理 3.1.49 和 3.1.50]。对于最后一条陈述，只需证明 α^* 保留单射余纤维化，这由定义立即可得。□

命题 1.44. 设 $\alpha\colon G \to G'$ 是一个单同态。那么我们还有 Quillen 伴随

$$\begin{aligned}\alpha^*\colon \boldsymbol{G'}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G'\text{-gl. proj.}} &\rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. proj.}} :\alpha_*\\ \alpha_!\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. flat}} &\rightleftarrows \boldsymbol{G'}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G'\text{-gl. flat}} :\alpha^*\\ \alpha_!\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. inj.}} &\rightleftarrows \boldsymbol{G'}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G'\text{-gl. inj.}} :\alpha^*.\end{aligned}$$

证明。后两条陈述见 [Len20，命题 3.1.52 和 3.1.53]。对于第一条陈述，由于 α^* 是同伦的，只需证明 α_* 将 G-全局射影（分级）模型结构中的无圈纤维化映至 G-全局射影（分级）模型结构中的无圈纤维化。利用无圈纤维化是逐级定义且可扩张的这一事实，这相当于说明

$$(\Sigma_A \times \alpha)^*\colon (\boldsymbol{\Sigma_A} \times \boldsymbol{G'})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{\Sigma_A, G'}} \to (\boldsymbol{\Sigma_A} \times \boldsymbol{G})\text{-}\mathbf{SSet}_{\mathcal{G}_{\Sigma_A, G}}$$

对每个有限集 A 都保持余纤维化。这由引理 1.5 立即可得。□

同样，在我们的情形中，适当的自由商具有同伦性：

命题 1.45. 设 $\alpha\colon G \to G'$ 是任意同态，且 $f\colon X \to Y$ 是 $\boldsymbol{G}$-谱中的 G-全局弱等价，并且 $\ker(\alpha)$ 在 X 上逐层自由地作用，且在基点之外的 Y 上也如此。那么 $\alpha_! f$ 是一个 G'-全局弱等价。

证明. 参见 [Len20，命题 3.1.54]。□

1.3.3. 楔积。对称谱的通常楔积通过沿用 G-作用，在 $\boldsymbol{G}$-谱上给出一个楔积。它与上述模型结构相容：

定理 1.46. 楔积定义了左 Quillen 双函子

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global flat}} \times \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global flat}} &\to \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global flat}}\\ \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global proj.}} \times \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global flat}} &\to \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global proj.}}\end{aligned}$$

请注意，在第二个伴随中，实际上只有一个输入因子配备了投射模型结构（两个因子都配备投射模型结构的相应说法可立即推出）。

证明。参见 [Len20，第 3.1.63 和 3.1.64] 条命题。□

特别地，与一个固定的平坦 G-谱作楔积，在上述任一种模型结构下都是左 Quillen 函子，因此根据 Ken Brown 引理，它保持余纤维对象之间的弱等价。下面的（简单） G-全局版本的等变平坦性定理 [Hau17，命题 6.2] 强化了这一结果：

命题 1.47. (1) 设 X 为任意 G-谱。则 $X \wedge -$ 保持平坦 G-谱之间的 G-全局弱等价。(2) 设 X 为平坦的 G-谱。则 $X \wedge -$ 保持 G-全局弱等价。

证明。参见 [Len20，命题 3.1.62]。 □

1.3.4. 与稳定等变同伦论的关系。在点集层面，G-全局谱和 G-等变谱是相同的对象，并且每个 G-全局弱等价特别也是一个 G-等变弱等价。因此，$\boldsymbol{G}$-谱的恒等函子下降为一个函子，将 G-等变稳定同伦范畴呈现为 G-全局稳定同伦范畴的局部化。这个局部化具有左右伴随函子（基于形式上的理由，它们都是全忠实的），其模型范畴论体现如下：

命题 1.48。这些伴随

$$\mathrm{id}\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equivariant projective}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global flat}} :\mathrm{id}$$
$$\mathrm{id}\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global flat}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equivariant flat}} :\mathrm{id}$$

是 Quillen 伴随。

证明。参见 [Len20，命题 3.3.1 和推论 3.3.3]。 □

1.3.5. 悬挂谱。最后，我们来讨论非稳定与稳定的 G全局同伦论之间的关系：

构造 1.49. 设 X 是一个 $\mathcal{I}$-单纯集合（或一个 I-单纯集合）。我们通过$(\Sigma^\bullet_+ X)(A) = S^A \wedge X(A)$+定义一个对称谱 $\Sigma^\bullet_+ X$；若 $i\colon A \to B$ 是有限集之间的单射，则结构映射定义为

$$S^{B\smallsetminus i(A)} \wedge (S^A \wedge X(A)_+) \cong S^B \wedge X(A)_+ \xrightarrow{S^B \wedge X(i)_+} S^B \wedge X(B)_+$$

其中未标记的同构由 i诱导。由此可按如下方式得到一个在 X 中的富化函子：给定一个 $\mathcal{I}$-单纯集合（或 I-单纯集合）的映射 $f\colon X \times \Delta^n \to Y$，我们有一个对称谱的映射$(\Sigma^\bullet_+ X) \wedge \Delta^n_+ \to \Sigma^\bullet_+ Y$，其在次数 A上的定义为

$$(S^A \wedge X(A)_+) \wedge \Delta^n_+ \cong S^A \wedge (X(A) \times \Delta^n)_+ \xrightarrow{S^A \wedge f_A} S^A \wedge Y(A)_+$$

其中未标记的同构是显然的同构。然后我们可以将其提升为一个函子

$$\Sigma^\bullet_+\colon \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet} \to \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra} \tag{1.1}$$

通过拉回 G-作用。

命题 1.50。函子 (1.1) 存在一个单纯右伴随 $\Omega^\bullet$。我们有 Quillen 伴随

$$\Sigma^\bullet_+\colon \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{G\text{-gl. proj.}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. proj.}} :\Omega^\bullet$$
$$\Sigma^\bullet_+\colon \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_{G\text{-gl. inj.}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. inj.}} :\Omega^\bullet,$$

特别是，$\Sigma^\bullet_+$ 是同伦的。

请注意，[Len20] 在 I-单纯集上使用 $\Omega^\bullet$ 表示相应的右伴随，而对上述 $\mathcal{I}$-单纯集上的右伴随则引入了更复杂的记号。由于我们只需要后者，因此决定在此更改记号。

证明。参见 [Len20、推论 3.2.6 和注释 3.2.7]。 □

注 1.51。我们简要说明一下上述右伴随。作为从$\boldsymbol{I}$-SSet出发的函子， $\Sigma^\bullet_+$ 有一个左伴随 $\omega^\bullet$ ，其定义为 $(\omega^\bullet X)(A) = \Omega^A X(A)$，并且在每个变量上都具有显然的函子性。因此，函子 $\Omega^\bullet$ 可通过将 $\omega^\bullet$ 与遗忘函子的右伴随 $\boldsymbol{I}$-SSet $\to$ I-单纯集复合而得到；通常，这就给出了任意 G 对应的右伴随，只需将其作用一并带入。由于遗忘函子 $\boldsymbol{G}$-I-SSet $\to \boldsymbol{G}$-$\boldsymbol{I}$-SSet是射影对象 G-全局模型结构的 Quillen 等价的左半部（见 [Len20，定理 1.4.49],），我们得到一个自然的 G-全局层弱等价，它连接了限制与

$$\boldsymbol{G}\textbf{-Spectra} \xrightarrow{\Omega^\bullet} \boldsymbol{G}\textbf{-}\mathcal{\boldsymbol{I}}\textbf{-SSet} \xrightarrow{\text{forget}} \boldsymbol{G}\textbf{-}\boldsymbol{I}\textbf{-SSet}$$

到射影纤维对象以及相应的 $\omega^\bullet$ 限制；关于下面的 $\Omega^\bullet$ ，我们只需要这些内容。

2. 全局模型范畴

本节中，我们将介绍全局模型范畴的框架；特别是，这一框架将使我们之后能够表述从全局空间到全局谱这一过程的泛性质。

2.1. 预整体模型范畴。

我们先描述一个稍微更一般的概念：

定义 2.1. 预全局模型范畴由一个局部可呈现范畴 $\mathscr{C}$ 组成，该范畴关于 SSet 是富集的、张量化的和余张量化的；此外，对每个有限群 G，范畴 G-$\mathscr{C}$ 中的 G-对象都配有两种模型结构，分别称为射影和扁平 G 全局模型结构，并满足以下条件：

(1) 射影对象全局模型结构和平坦 G-全局模型结构具有相同的弱等价（我们称之为 G-全局弱等价），且伴随 id : G-$\mathscr{C}_{\mathrm{proj}} \rightleftarrows G$-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$:id 是一个 Quillen 伴随（即每个投射余纤维化也是平坦余纤维化，或者等价地，平坦模型结构中的每个纤维化也是射影对象模型结构中的纤维化）。(2) G-$\mathscr{C}$ 上的射影对象模型结构和平坦模型结构都是左适当的、组合的且单纯的。(3) 对于有限群的每个同态 α: $H \to G$ ，限制函子α^*: G-$\mathscr{C} \to H$-$\mathscr{C}$ 保留弱等价、平坦余纤维化和射影对象纤维化。此外，如果 α 是单射，那么 α^* 也保留射影对象余纤维化和平坦纤维化。特别地， α^* 对平坦模型结构总是左 Quillen，对射影对象模型结构总是右 Quillen；如果 α 是单射，那么 α^* 对平坦模型结构也为右 Quillen，对射影对象模型结构也为左 Quillen。

例 2.2. 令 $\mathscr{C}$ =I-SSet。对于每个有限群 G，我们可以分别赋予 $\boldsymbol{G}$-I-SSet G-全局模型结构和单射 G-全局模型结构，使其分别成为射影模型结构和平坦模型结构；这些模型结构都是左适当的、组合的且单纯的（定理 1.28 和 1.29）。由此，命题 1.31 和 1.32 表明，这便得到一个预全局模型范畴，我们记为 $\underline{\mathscr{L}}$，并称之为整体空间的预整体模型范畴。

例 2.3. 令 $\mathscr{C}$ =谱表示对称谱的范畴。对于每个有限的 G，我们都可以在 $\boldsymbol{G}$-谱上赋予射影和单射 G-全局模型结构。于是命题 1.43 和 1.44 表明，这给出了一个预全局模型范畴$\underline{\mathscr{S}p}$，我们称之为全局谱的预全局模型范畴。

注 2.4. 用同样的论证，我们也可以用平坦模型结构代替单射模型结构，从而得到另一个预全局模型范畴（这正是上述术语的由来）。不过，目前上述选择更为方便；稍后，在考察全局谱上的代数结构时，我们会再次用到平坦模型结构（更准确地说，是它们的“正”版本）。

反例 2.5. 若改为考虑定理 1.14 中的 G等变投射模型结构和平坦模型结构，这并不能使谱成为预全局模型范畴：例如，沿任意非单射同态 α的限制 α^* 不保持等变稳定弱等价，并且对于等变投射模型结构，它不是右 Quillen 函子。

我们强调，这不应被视为点集层面的伪象——相反，这是一个模型范畴论体现：左导出函子 Lα^* 不具有左伴随 [CLL23b，警告 9.8]。在 [CLL23a、CLL23b] 的另一种高阶范畴框架中，这导致等变谱的全局∞-范畴并非“全局可呈示”，而只能是“等变可呈示”。

例 2.6. 设 $\underline{\mathscr{C}}$是一个预全局模型范畴，且 G 是一个有限群。那么我们有一个预全局模型范畴 G-$\mathscr{C}$，其底层范畴为 G-$\mathscr{C}$，并且其在 G'-(G-$\mathscr{C}$)上的模型结构是沿着显然的范畴同构从 ($G' \times G$)-$\mathscr{C}$传递得到的。特别地，将其具体化为前面的例子，我们得到 G-全局空间和 G-全局谱的预全局模型范畴。

例 2.7. 最后，我们介绍一个更为特殊的例子。设 $\mathcal{F}$ 是一个全局族，即由有限群构成的非空集合，并且对取子商封闭（因此特别地对同构封闭）。我们按如下方式将 $\mathscr{E}$:= SSet 构造成一个预全局模型范畴：对于每个有限群 G，记 $G \cap \mathcal{F}$ 为 G 中属于 $\mathcal{F}$ 的子群族，并分别在 $\boldsymbol{G}$-SSet 上赋予 ($G \cap \mathcal{F}$)-模型结构和单射 ($G \cap \mathcal{F}$)-模型结构。

如果此时 $\alpha\colon G \to G'$ 是任意群同态，那么 α^* 显然保余纤维化，并且保弱等价和射影纤维化，因为 $(\alpha^* X)^H = X^{\alpha(H)}$ 和 $\alpha(H)$ 是 H的商。此外，如果 α 是单射，那么 α^*也保投射余纤维化；事实上，对于任意 G'-单纯集合 X 以及任意单形x，各向同性群满足 $\mathrm{Iso}_{\alpha^* X}(x) = \alpha^{-1}(\mathrm{Iso}_X(x))$，它同构于 $\mathrm{Iso}_X(x)$ 的一个子群。最后，$\alpha_!$ 总是保单射余纤维化（因为群作用下的商保持集合的单射），而且如果 α 是单射，那么根据 [Len20，命题 1.1.18]（对于 $M = 1$），它还会将 ($G \cap \mathcal{F}$)-弱等价映为 ($G' \cap \mathcal{F}$)-弱等价，因此正如所述，它是单射等变模型结构的左 Quillen 函子。

我们将由此得到的预全局模型范畴称为 $\mathcal{F}$-等变空间的预全局模型范畴 $\underline{\mathscr{E}}_{\mathcal{F}}$（读者可以自行决定 $\mathscr{E}$ 是“等变”（equivariant）还是“奇异”（exotic）的缩写）。

$\mathscr{C}$ 的单纯形丰化、张量化和余张量化使其不仅是 SSet 上的富集范畴、张量范畴和余张量范畴，也是所有 $\boldsymbol{G}$-SSet 上的富集范畴、张量范畴和余张量范畴：张量化和余张量化只需在非等变张量化或余张量化上赋予对角映射和共轭 G-作用即可，而富集则通过取 $\mathscr{C}$ 中的映射空间（即不考虑 G-作用）并为其赋予共轭 G-作用来定义。同理，对于任意有限群 H，我们得到函子 $- \times -\colon (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H})$-SSet $\times\, G$-$\mathscr{C} \to (G \times H)$-$\mathscr{C}$，它是张量化的推广。

引理 2.8. 设 G、H 为有限群。那么上述函子

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(G\times H)}\textbf{-SSet}_{\mathcal{G}_{G,H}}\times G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}&\to (G\times H)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}\\ \boldsymbol{(G\times H)}\textbf{-SSet}\times G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}&\to (G\times H)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}\end{aligned}$$

是左 Quillen 双函子。

特别地，取 $H=1$ 时，G-$\mathscr{C}$ 上的投射模型结构和平坦模型结构，在模型范畴意义下都是关于带通常等变模型结构的 $\boldsymbol{G}$-SSet 的富集模型范畴。

证明。我们先考虑投射模型结构的情形。由伴随性，只需证明

$$\begin{aligned}G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}^{\mathrm{op}}\times (G\times H)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}&\to \boldsymbol{(G\times H)}\textbf{-SSet}_{\mathcal{G}_{G,H}}\\ (X,Y)&\mapsto \mathrm{maps}(\mathrm{triv}_H X,Y)\end{aligned}$$

是右 Quillen 双函子。根据右侧模型结构的定义，这等价于说明：对于任意 $K\subset G$ 和 $\varphi\colon K\to H$，函子 $(X,Y)\mapsto$将$^K(i^*X,(i,\varphi)^*Y)$ 映射到 SSet，是右 Quillen 双函子，其中 $i\colon K\hookrightarrow G$ 是包含映射。然而，由于 $(i,\varphi)^*$ 是右 Quillen 函子，且 i^* 对于投射模型结构是左 Quillen 函子，这立即由 K-$\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$ 是单纯模型范畴这一事实得到。

对于平坦模型结构，我们注意到 $\mathrm{triv}_H\colon G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}\to (G\times H)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 是左 Quillen。必要时将 G 替换为 $G\times H$，因此不妨设 $H=1$。然而，在此情形下，借助伴随性，我们同样归结为证明：对于任意子群 $K\subset G$，$X,Y\mapsto$映射$^K(X,Y)$ 是右 Quillen 双函子。这再次由以下事实推出：限制 $G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}\to K\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 既是左 Quillen 也是右 Quillen，且 K-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 是单纯的。□

2.2. 全局模型范畴。为了支持一个良好的真正稳定化理论，除了预全局模型范畴的公理之外，我们还需要一个额外条件。为说明这一点，我们先回顾：

引理 2.9. 设

$$\begin{array}{ccc}A & \xrightarrow{g} & B\\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p}\\ C & \xrightarrow[f]{} & D\end{array}\tag{2.1}$$

是群的一个拉回方块，其中 p（因而 q 也）是满射，并设 $\mathscr{C}$是一个完备范畴。则 Beck-Chevalley 变换

$$\begin{array}{ccc}A\text{-}\mathscr{C} & \xleftarrow{g^*} & B\text{-}\mathscr{C}\\ {\scriptstyle q_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*}\\ C\text{-}\mathscr{C} & \xleftarrow[f^*]{} & D\text{-}\mathscr{C}\end{array}$$

（即恒等变换的规范伴随变换

$$f^*p_*\xrightarrow{\eta} q_*q^*f^*p_*=q_*g^*p^*p_*\xrightarrow{\epsilon} q_*g^*$$

）是一个同构。

证明。这是众所周知的（例如参见 [Joy08，命题 11.6]，其中给出了一个一般性强得多的结果），但直接证明也足够简单：若 $X\in B\text{-}\mathscr{C}$，则$f^*p_*X=X^{\ker p}$作为 $\mathscr{C}$ 中的对象，而 $q_*g^*X=(g^*X)^{\ker q}$，并且 Beck-Chevalley 变换是覆盖 X 的唯一映射。由于 (2.1) 是一个拉回，故 $g(\ker q)=\ker p$，因此结论成立。□

命题 2.10. 设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个预全局模型范畴。则以下条件等价：

(1) 对于有限群的每个拉回方块 (2.1)，若其中所有映射都是满射，则 Beck-Chevalley 变换 $f^* \circ \mathrm{R}p_* \Rightarrow \mathrm{R}q_* \circ g^*$ 在 $\mathrm{Ho}(C\text{-}\mathscr{C})$ 中是同构。(2) 对于有限群及满射的每个拉回方块 (2.1)，Beck-Chevalley 变换 $\mathrm{L}g_! \circ q^* \Rightarrow p^* \circ \mathrm{L}f_!$ 在 $\mathrm{Ho}(B\text{-}\mathscr{C})$ 中是同构。(3) 对于每个图表

$$C \xleftarrow{q} A \xrightarrow{g} B \tag{2.2}$$

使得 $\ker q \cap \ker g = 1$ 的有限群图表，每个纤维的 $X \in B\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$，以及 $A\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中的某个（因而任意一个）纤维化替换 $g^*X \to Y$，诱导映射 $q_*g^*X \to q_*Y$ 是 C-全局弱等价。(4) 对于每个图表 (2.2)，每个余纤维 $X \in C\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$，以及 $A\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$ 中的某个（因而任意一个）余纤维替换 $Y \to q^*X$，诱导映射 $g_!Y \to g_!q^*X$ 是 B-全局弱等价。

定义 2.11. 满足命题 2.10 的等价条件的预全局模型范畴称为全局模型范畴。

命题 2.10 的证明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) 的等价性立刻由所涉的两个映射互为全伴这一事实得出。现在我们证明 (1) $\Leftrightarrow$ (3)；(2) $\Leftrightarrow$ (4) 的论证则类似。

为证明 (3) $\Rightarrow$ (1)，我们考虑 (2.1) 中的拉回，并固定一个纤维对象 $X \in B\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 以及一个纤维替换函子 $\iota\colon \mathrm{id} \Rightarrow P$，它作用于 $A\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$。由 ι 的自然性，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
f^*p_*X & \xrightarrow{\eta} & q_*q^*f^*p_*X & = & q_*g^*p^*p_*X \xrightarrow{q_*g^*\epsilon} q_*g^*X \\
 & & \downarrow{\scriptstyle q_*\iota} & & \downarrow{\scriptstyle q_*\iota} \qquad \downarrow{\scriptstyle q_*\iota} \\
 & & q_*Pq^*f^*p_*X & = & q_*Pg^*p^*p_*X \xrightarrow[q_*Pg^*\epsilon]{} q_*Pg^*X
\end{array}$$

在 $C\text{-}\mathscr{C}$ 中。这里顶部的水平复合映射由前述引理可知是一个同构；此外，底部的复合映射 $f^*p_*X \to q_*Pg^*X$ 表示 Beck-Chevalley 变换 $f^*\mathrm{R}p_* \Rightarrow \mathrm{R}q_*g^*$，因此这正是我们希望成为 C-全局弱等价的映射。然而，假设表明右侧的垂直映射是一个 C-全局弱等价，因此由三取二性质即可得出结论。

反过来，为证明 (1) $\Rightarrow$ (3)，我们首先注意到，上述结果表明，对于任意由满射构成的拉回方块 (2.1) 以及任意纤维的 $X \in B\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$，典范映射 $q_*g^*X \to \mathrm{R}q_*g^*X$ 是一个 C-全局弱等价。

现在我们将利用这一点证明 (3) 的特殊情形，即 q 和 g 都是满射的情形：具体而言，我们令 $D = A/\ker(g)\ker(q)$，并将 $p\colon B \to D$ 定义为复合映射

$$B \xrightarrow[\cong]{g^{-1}} A/\ker(q) \twoheadrightarrow A/\ker(g)\ker(q) = D$$

类似地，我们定义一个满射同态 $f\colon C \to D$。现在我们断言，交换方形

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{g} & B \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
C & \xrightarrow[f]{} & D
\end{array}$$

满射的拉回方块；确立这一点后，上述观察便完成了这一特殊情形的证明。

要证明这确实是一个拉回，首先注意到 $(g,q)\colon A \to B \times_D C \subset B \times C$ 是单射，因为 $\ker(g,q) = \ker(g) \cap \ker(q) = 1$。因此，只需证明满射性。为此，取 $(b,c) \in B \times C$，其中 $p(b) = f(c)$；于是，若 $a \in A$ 满足 $g(a) = b$，则 $fq(a) = pg(a) = p(b) = f(c)$，所以对于某个 $\bar{x} \in \ker(f)$，有 $c = q(a)\bar{x}$。由 q 的满射性，我们便可写成 $c = q(ax)$，其中某个 $x \in q^{-1}(\ker(f)) = \ker(g)$；但我们还有 $g(ax) = g(a)g(x) = b$，因此 ax 就是 $(b,c) \in B \times_D C$所需的原像。

现在我们可以证明 (3) 的一般情形：将 q 分解为一个满射 $q'\colon A \to C'$，后接一个单射 $i\colon C' \to C$；并将 g 分解为一个满射 $g'\colon A \to B'$，后接一个单射 $j\colon B' \to B$。若此时 $X \in B\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 是纤维的，那么由于 j 是单射，$j^*X \in B'\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 也同样是纤维的。因此，若 $g^*X = (g')^*j^*X \to Y$ 是 $A\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$中的任意纤维化替换，那么将上述特殊情形应用于 j^*X，可知 $q'_*g^*X \to q'_*Y$ 是一个 C'-全局弱等价。右侧在 $C'\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$中是纤维的，我们断言左侧至少在 $C'\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$中是纤维的；由于$i_*$ 凭借单射性是投射模型结构之间的右 Quillen 函子，Ken Brown 引理便表明诱导映射 $i_*q'_*g^*X \to i_*q'_*Y$ 也是一个 C-全局弱等价。又因为此映射与 $q_*g^*X \to q_*Y$ 在由同构共轭的意义下相同，这就完成了该命题的证明。

为证明这一断言，我们注意到 $\ker(g') \cap \ker(q') = \ker(g) \cap \ker(q) = 1$，因此上述论证给出了一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g'} & B' \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ C' & \xrightarrow[p']{} & D' \end{array}$$

由有限群和满射构成。因此，再应用一次引理 2.9 可得$q'_*g^*X = q'_*(g')^*i^*X \cong (p')^*f'_*i^*X$。然而，$f'_*i^*X$在 $D'\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$中是纤维的，因此特别地，它在 $D'\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$中也是纤维的，所以$(p')^*f'_*i^*X$ 在 $C'\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$ 中是纤维的，正如所需。□

注 2.12。上述前两种表述是“从本质上说正确的表述”，它们对应于参数化高阶范畴论中的全局连续性和全局余连续性概念 [BDG+16、MW21]。与此相反，条件 (3) 是我们之后实际会用到的表述（即在定理 3.28 的证明中），而最后一种表述则是最容易在下面的例子中验证的。直观地说，我们可以把$G\text{-}\mathscr{C}$ 中的投射余纤维对象看作一种平坦对象，其中的 G-作用在某种意义上是“自由的”（例如参见引理 2.8）；于是，上述公理的最后一种表述便可视为“自由商是同伦的”这一口号的极抽象体现。

注 2.13. 在上述证明中，我们已经看到，点集层面的条件（某些纤维化替换被送到弱等价）如何编码导出函子的 Beck-Chevalley 条件。类似地，预全局模型范畴的点集层面的条件可以看作编码了导出函子之间的各种相容性条件。作为一个具体例子，考虑单射态射 $i\colon H \to G$和满射 $p\colon K \to G$。若将受限映射记为 $j\colon p^{-1}(H) \to K$和$q\colon p^{-1}(H) \to H$，那么引理 2.9 经对偶化后表明$j_!q^* \cong p^*i_!$。由于对于平坦模型结构，所有函子都是左 Quillen（利用i 和 j 是单射这一点），这便诱导出导出函子的等价 $\mathbf{L}j_!q^* \cong p^*\mathbf{L}i_!$。类似地，对于单射 k，可以给出一个“麦基双陪集公式”，将 $k^*\mathbf{L}i_!$表示为形如 $\mathbf{L}\ell_!r^*$的映射的（导出）余积；这同样源自非导出函子的一个类似公式。

请注意，反过来，这类论证表明，对于每个 $G\text{-}\mathscr{C}$，我们无法仅采用一种模型结构，使限制函子始终既是左 Quillen 又是右 Quillen。例如，对于任意 G，投影 $s\colon G \to 1$ 满足

$s_!s^* \cong \mathrm{id}$，因此，如果 $s_!$ 和 s^* 都是左 Quillen，我们便可推出 $\mathrm{L}s_!s^* \cong \mathrm{id}$。然而，对于 G-全局空间，这并不成立：我们有 $\mathrm{L}s_!s^*(*) \cong \mathcal{I}(G,-)/G$，其底层的非等变空间是一个 $K(G,1)$。

例 2.14. $\underline{\mathscr{L}}$ 和 $\underline{\mathscr{S}p}$ 都是全局模型范畴：这分别由命题 1.33 和 1.45 得出：若 $X \in B\text{-}\mathscr{C}$ 是投射余纤维的，则B 在其上自由作用，因此 $\ker(q)$在 g^*X 上自由作用，因为 g 限制到 $\ker(q)$时是单射。

例 2.15. 全局模型范畴的任何移位仍是全局模型范畴。这由第三种表述立即得出。

反例 2.16. 设 p 是一个素数，且 $\mathcal{F}$ 是一个包含 $\mathbb{Z}/p$ 但不包含 $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$的群的全局族，例如阶数不超过 p的群的全局族。我们断言，例 2.7 中的预全局模型范畴 $\underline{\mathscr{E}}_{\mathcal{F}}$ 不是全局模型范畴；特别是，上述命题的条件并非空泛。

为此，我们将证明条件 (4) 不成立。令 $B = C = \mathbb{Z}/p$ 和 $A = B \times C$，其相应的投影为 q 和 g。于是，$(B \cap \mathcal{F})$-模型结构就是 $\mathcal{A}\ell\ell$-模型结构，特别地，$X = *$ 在其中是余纤维的。现在令 $Y \to * = g^*(*)$ 为 $(A \cap \mathcal{F})$-模型结构中的一个余纤维替换。我们断言，$q_!(Y) = Y/B$ 的 C-不动点不连通，因此它尤其不与 $q_!(*) = *$ 弱等价。

为此，注意到单形 σ 的各向同性 I_σ 只取决于 Y/B 中的类 $[\sigma]$（因为 A 是阿贝尔的）。此外，$[\sigma]$ 是 C-不动点，当且仅当 I_σ 包含一个形如 $(b,1)$ 的元素，其中 $b \in B$ 任意。反过来，对任意 $b \in B$，Y 中都存在一个顶点 y_b，使得 $I_{y_b} \ni (b,1)$：具体而言，$(b,1)$ 生成一个与 $\mathbb{Z}/p$ 同构的子群 $K \subset A$，因此 Y^K 弱可缩，特别是非空的。

现在我们断言，$[y_0]$ 和 $[y_1]$ 不能通过一串 C-固定边在 Y/B中连接起来。为此，考虑任意一条端点为 $[x]$、$[y]$的 C-固定边 $[e]$。则 $I_x \supset I_e \subset I_y$。另一方面，由于 $[e]$ 是 C-固定的，$I_e \neq 1$；而 I_x、$I_y \neq A$ 是$Y^A = \varnothing$，因为 $A \notin \mathcal{F}$。因此，出于基数方面的原因，上述所有包含映射都是等式，尤其是 $I_x = I_y$。

现在假设 $[y_0]$ 和 $[y_1]$ 确实能通过一串 C-固定边连接起来。那么由上述结论归纳可得 $I_{y_0} = I_{y_1}$，从而特别有 $(0,1)$、$(1,1) \in I_{y_0}$。然而，此时 $I_{y_0} = A$，这与上述同样的论证相矛盾。

2.3. 全局 Quillen 伴随。最后，我们来讨论此处恰当的 Quillen 伴随概念：

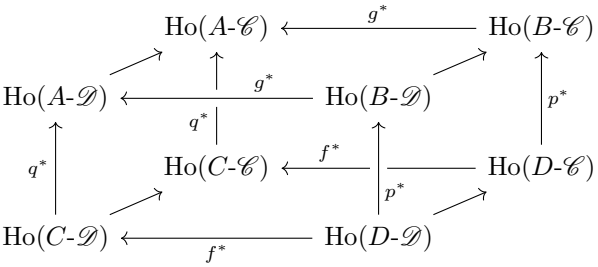
定义 2.17. 设 $\underline{\mathscr{C}}, \underline{\mathscr{D}}$ 为预整体模型范畴。全局 Quillen 伴随 $\underline{F}\colon \underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{D}} \colon \underline{U}$ 是底层范畴之间的单纯富集伴随 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$，并且对每个有限群 G G，诱导的伴随$G\text{-}\mathscr{C} \rightleftarrows G\text{-}\mathscr{D}$ 对于两种模型结构都是 Quillen 伴随。

如果此外每个 $G\text{-}\mathscr{C} \rightleftarrows G\text{-}\mathscr{D}$ 都是 Quillen 等价（对于射影对象模型结构，或等价地，对于平坦模型结构），则称 $\underline{F} \dashv \underline{G}$ 为全局 Quillen 等价。

例 2.18. 悬挂-环路伴随 $\Sigma^\bullet_+\colon$ I-单纯集 $\rightleftarrows$ 谱 $: \Omega^\bullet$ 定义了一个全局 Quillen 伴随 $\underline{\mathscr{L}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{S}p}$，见命题 1.50。

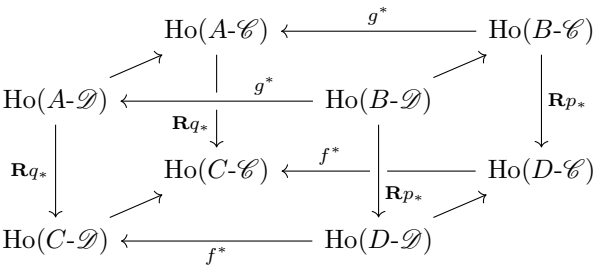
引理 2.19. 设 $\underline{F}\colon \underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{D}} : \underline{U}$ 是预整体模型范畴之间的全局 Quillen 等价。那么 $\underline{\mathscr{C}}$ 是全局模型范畴，当且仅当 $\underline{\mathscr{D}}$ 也是如此。

证明. 对于有限群及满射构成的任意拉回方块 (2.1)，我们得到一个相干立方体



其中，所有从前到后的映射均由 RU 给出，前后两个面严格交换，其余交换方块则由自然同构填充而成；这些自然同构源于以下事实：对于投射模型结构，所有函子都是右 Quillen 函子，且在点集层面严格交换。

相对于伴随 $q^* \dashv \mathbb{R}q_*$ 和 $p^* \dashv \mathbb{R}p_*$ 取典范伴随变换后，我们得到一个相干立方体



其中，顶面、底面、左面和右面中的变换都是同构（后两个面用到了 RU 是一个等价）。再次利用所有从前到后的映射都是等价这一点，可知填充前方交换方块的自然变换是同构，当且仅当填充后方交换方块的自然变换也是同构；由此立即得到所需结论。□

3. Global stability

本节将介绍全局模型范畴的真正稳定性概念，并在此框架下构造普遍稳定化。

3.1. 有基点（预整体）模型范畴。和往常一样，要讨论稳定性，我们首先必须讨论有基点性：

定义 3.1. 若预全局模型范畴 $\mathscr{C}$ 的底层范畴 $\mathscr{C}$ 按通常意义是带基点的，即具有一个零对象，则称其为带基点的。

注释 3.2. 回忆一下 [Hir03, Hir15]：对于一个模型范畴 $\mathscr{C}$，带基点对象的范畴 $\mathscr{C}_*$（即在我们选定的终对象下的切片 $*/\mathscr{C}$）带有一种模型结构，其中一个映射是弱等价、纤维化或余纤维化，当且仅当它在 $\mathscr{C}$中也是如此。如果 $\mathscr{C}$ 是左适当、右适当或组合的，那么$\mathscr{C}_*$也具有相应性质；后一种情况下，其生成（无圈）余纤维化由将左伴随 $(-)_+ = (-) \amalg *\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}_*$ 应用于 $\mathscr{C}$的一组生成（无圈）余纤维化得到。此外，如果 $\mathscr{C}$ 是单纯的，那么通过将映射空间的基点取为零映射，$\mathscr{C}_*$ 便成为一个富集于 SSet$_*$（特别是富集于 SSet）的模型范畴；而张量化 $K \wedge X$ 则由 $\mathscr{C}$ 在 SSet 上的张量化$K \times X$ 通过压缩 $* \times X \amalg K \times *$诱导得到。类似地，我们再次得到 $- \wedge -\colon (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H})\text{-SSet}_* \times G\text{-}\mathscr{C}_* \to (G \times H)\text{-}\mathscr{C}_*$。

现在，如果 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$ 是一个 Quillen 伴随，那么 U 可提升为 $U_*\colon \mathscr{D}_* \to \mathscr{C}_*$（因为它保终对象）； F 不一定能直接提升，但我们得到$\mathscr{C}_* \to F(*)/\mathscr{D}$，再将其与沿唯一映射 $F(*) \to *$ 的推前复合，便得到一个函子 $F_*\colon \mathscr{C}_* \to \mathscr{D}_*$，它是 U_* 的左伴随。由于纤维化和弱等价是在底层范畴中定义的，我们立即看出$F_* \dashv U_*$ 仍然是一个 Quillen 伴随。

特别地，给定一个预全局模型范畴 $\underline{\mathscr{C}}$，我们可以用这种方式将范畴 $\mathscr{C}_*$ 构造成一个预全局模型范畴 $\underline{\mathscr{C}}_*$，并得到一个全局 Quillen 伴随 (–)+: $\underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{C}}_*$: forget。若 $\underline{\mathscr{C}}$ 实际上是一个全局模型范畴，那么 $\underline{\mathscr{C}}_*$ 也如此（参见命题 2.10 的第三种表述）。此外，如果

$$\underline{F}\colon \underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{D}} :\underline{U} \tag{3.1}$$

是一个全局 Quillen 伴随，那么 $F_* \dashv U_*$ 定义了一个全局 Quillen 伴随 $\underline{F}_* \dashv \underline{U}_*$。

引理 3.3. 若 (3.1) 是一个全局 Quillen 等价，那么诱导的全局 Quillen 伴随 $\underline{F}_* \dashv \underline{U}_*$ 也如此。

证明. 我们更一般地证明：对于任意左 proper 模型范畴之间的 Quillen 等价 $L\colon \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{B}\colon R$，诱导的 Quillen 伴随 $L_* \dashv R_*$ 是 Quillen 等价。这是众所周知的结论，也可以稍加推导，从 [Rez02，命题 2.7]，得出；但我们不知道文献中有明确的出处，因此给出一个直接论证。

为此，我们首先注意到， R_* 仍然反映纤维对象之间的弱等价（因为一切都是在底层范畴中定义的），也就是说，其右导出函子是保守的。要完成证明，只需证明对于每个余纤维化

$* \to X$ 以及某个（从而任意）纤维化替换 $L_*(* \to X) \to Z$，诱导映射 $X \to R_*L_*(* \to X) \to RZ$ 在 $\mathscr{C}$ 中是弱等价。

为此，我们取一个余纤维替换 $Q \to *$。将诱导映射 $Q \to$分解 $* \to X$ 为一个余纤维化后接一个弱等价，由此得到交换图

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \end{array} \tag{3.2}$$

其中两条竖直映射都是弱等价。特别地，这是一个同伦推出，即（由于 $Q \to Y$ 是余纤维化），诱导映射 $Y/Q \to X$ 是 $\mathscr{A}_*$中余纤维对象之间的弱等价。因此，只需证明对Y/Q 而非 X成立该断言；也就是说，不失一般性，我们可以假设（3.2）是一个真正的推出。接下来考虑图表

$$\begin{array}{ccc} LQ & \longrightarrow & LY \\ \downarrow & & \downarrow \\ L* & \longrightarrow & LX \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & L_*X \end{array}$$

其中上半部分是 (3.2) 在 L 下的像（因此构成一个推出），下半部分则是定义 $L_*(* \to X)$ 的推出；特别地，整个矩形也是一个推出。由于 $L(Q \to Y)$ 是余纤维化（L 是左 Quillen），且左侧的竖直映射是弱等价，我们得出右侧的竖直复合映射 $LY \to L_*(* \to X)$ 是弱等价，因为 $\mathscr{D}$ 是左适当的。因此，若 $L_*(* \to X) \to Z$ 是一个纤维化替换（在 $\mathscr{C}_*$ 中），那么复合映射 $LY \to Z$

是一个纤维化替换（在 $\mathscr{C}$ 中）。我们得出复合映射 $Y \to RLY \to RZ$ 表示 $L \dashv R$ 的导出单位（因为 Y 是余纤维），所以它是弱等价。由三取二性质可得该结论，因为复合映射 $X \to Y \to RZ$ 表示 $L_* \dashv R_*$ 的导出单位。□

最后，按照注释 3.2 中的论证，我们由引理 2.8 得出：

推论 3.4. 设 G、H 为有限群，且 $\underline{\mathscr{C}}$ 为带基点的预全局模型范畴。则楔积定义了左 Quillen 双函子

$$\big((\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})\text{-}\mathbf{SSet}_*\big)_{\mathcal{G}_{G,H}} \times G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}} \to (G\times H)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$$
$$(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})\text{-}\mathbf{SSet}_* \times G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}} \to (G\times H)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}.$$

特别地，G-$\mathscr{C}$ 上的射影对象模型结构和平坦模型结构都作为模型范畴富集于 $\boldsymbol{G}$-SSet$_*$。□

3.2. 真正稳定性。回顾注释 1.16，从 G-空间到 G-谱的转变可以理解为：对所有有限 G-集 A，将与球面 S^A 作楔积视为可逆。虽然我们不能以同样方式将这一方法直接应用于从全局空间到全局谱的转变（因为与非平凡 G-集 A 作楔积时，S^A 没有直接定义），但对 G-全局空间而言，与 S^A 作楔积是有意义的。因此，沿着 [GN15] 的思路（或者更一般地说，参数化高阶范畴论的理念），我们可以通过考察对所有 G 同时而言，G-全局同伦论中更一般的情形，来尝试刻画从非稳定到稳定全局同伦理论的转变：

定义 3.5. 若一个全局模型范畴$\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的，且对每个有限群 G 以及每个有限 G-集 A，Quillen 伴随 $S^A \wedge -\colon G\text{-}\mathscr{C} \rightleftarrows G\text{-}\mathscr{C}\colon \Omega^A$ 都是 Quillen 等价（对平坦模型结构而言，或等价地，对投射模型结构而言），则称其为真正稳定的（或简称稳定的）。

注意，令 $A = *$ 带有平凡的 G-作用进行特化，可知每个 G-$\mathscr{C}$ 特别地都具有通常意义下的稳定性。

命题 3.6. 例 2.3 中的全局模型范畴 $\underline{\mathscr{S}p}$ 是稳定的。

证明. 对称谱的通常楔积定义了一个左 Quillen 双函

$$\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equiv. proj.}} \times \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. flat}} \to \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl. flat}} \tag{3.3}$$

子；由定理 1.46 和命题 1.48 可知，这使得 G-全局平坦模型结构成为张量化于 G-等变射影模型结构之上的结构。

现在，若 A 是任意有限 G-集，则 $\Sigma^\infty S^A$ 在 G-等变投射模型结构中是余纤维的，因此 $\Sigma^\infty S^A \wedge^{\mathbf{L}} -$与 $S^A \wedge -$的左导出函子一致；所以只需证明 $\Sigma^\infty S^A \wedge^{\mathbf{L}} -$是 G-全局稳定同伦范畴上的自等价。但根据 Hau17，命题 4.9] ，相应函子是 G-等变稳定同伦范畴上的自等价，因此我们得到一个投射余纤维的 G-等变谱 D ，以及一串投射余纤维对象之间的弱等价，它们连接 $D \wedge \Sigma^\infty S^A$ 和 $\mathbb{S}$。由于（3.3）是左 Quillen 双函子，这就表明 $D \wedge^{\mathbf{L}} -$是所需的拟逆。□

注 3.7。在上述论证中，我们关键地利用了 $\Sigma^\infty S^A$ 实际上在等变投射模型结构中是余纤维对象（而不只是平坦对象）；特别是，(3.3) 对 G-等变平坦模型结构不是左 Quillen。另一方面，我们完全可以在所有地方都使用 G-全局投射模型结构来代替平坦模型结构。

引理 3.8. 设 $\underline{F}\colon \underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{D}}\colon \underline{U}$ 是带基点的全局模型范畴之间的全局 Quillen 等价。那么 $\underline{\mathscr{C}}$ 稳定当且仅当 $\underline{\mathscr{D}}$ 也稳定。

证明. 设 G 是一个有限群， A 是一个有限 G-集。由于 F 是单纯的，因而也是 $\mathbf{SSet}_*$-富左伴随函子，故存在一个（典范）同构填充

$$\begin{array}{ccc} G\text{-}\mathscr{C} & \xrightarrow{S^A\wedge -} & G\text{-}\mathscr{C} \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ G\text{-}\mathscr{D} & \xrightarrow[S^A\wedge -]{} & G\text{-}\mathscr{D}, \end{array}$$

由于所有参与的函子都是左 Quillen 函子（例如，对于投射模型结构），这便诱导出左导出函子之间的同构 $\mathrm{L}(S^A\wedge\text{–})\circ \mathrm{L}F \cong \mathrm{L}F\circ \mathrm{L}(S^A\wedge\text{–})$。由三取二性质即可得出结论。□

注 3.9。设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个稳定全局模型范畴，且 G 是一个有限群。那么移位 G-$\mathscr{C}$ 仍然是稳定的：若 G' 是任意有限群，且 A 是一个有限 G'-集，那么将其视为带有平凡 G 作用的 $(G'\times G)$-集可知，左 Quillen 函子 $S^A\wedge\text{–}\colon G'\text{-}G\text{-}\mathscr{C}\to G'\text{-}G\text{-}\mathscr{C}$ 是一个 Quillen 等价。

3.3. 谱化。非等变地，适当良好的单纯模型范畴 $\mathscr{C}$ 的普遍稳定化可以通过 $\mathscr{C}$ 中的谱对象来计算。本小节将这一构造改进并纳入我们的框架；其泛性质将在下一小节中确立。

构造 3.10. 设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个带基点的预全局模型范畴。我们将 $\mathbf{SSet}_*$-富集函子范畴 $\mathbf{\Sigma}\to\mathscr{C}$ 记作 $\mathbf{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$。若映射 f 满足：对于每个有限集 A， $f(A)$ 都是 Σ_A-$\mathscr{C}$ 中的弱等价，则称其为全局层弱等价。此外，若每个 $f(A)$ 分别是投射 Σ_A-全局模型结构或平坦 Σ_A-全局模型结构中的纤维化，则称 f 为投射全局层纤维化或平坦全局层纤维化。

更一般地，若 $\underline{\mathscr{C}}$ 是任意预全局模型范畴，则定义 $\mathbf{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) := \mathbf{Sp}(\underline{\mathscr{C}}_*)$。

命题 3.11. 假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 带基点。全局层弱等价以及全局投射（平坦）层纤维化构成 $\mathbf{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 上一个单纯的、组合的且左适当的模型结构。我们称之为全局投射（平坦）层模型结构。一组可能的生成余纤维化如下给出：

$$\{\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_{\Sigma_A} i : A\in\mathbf{\Sigma},\, i\in I_{\Sigma_A}\}$$

其中 I 表示 Σ_A-$\mathscr{C}$上的射影（平坦）模型结构的一组生成余纤维化；类似地，一组生成无圈余纤维化由下式给出：

$$\{\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_{\Sigma_A} j : A\in\mathbf{\Sigma},\, j\in J_{\Sigma_A}\}$$

对于 Σ_A-$\mathscr{C}$上相应模型结构的一组生成无圈余纤维化 J_{Σ_A}。

这里， $\mathbf{\Sigma}(A,\text{–})\wedge_{\Sigma_A} f$是通过对 $\mathbf{SSet}_*$上的逐层张量除以对角映射 Σ_A-作用得到的映射。

注 3.12. 将 $\underline{\mathscr{C}}$替换为 $\underline{\mathscr{C}}_*$ 后，我们立即得到关于非带基点的 $\mathscr{C}$的类似陈述，此时生成（无圈）余纤维化的形式为 $\mathbf{\Sigma}(A,\text{–})\wedge_{\Sigma_A} f_+$，其中 f 是 Σ_A-$\mathscr{C}$上的生成（无圈）余纤维化。

在该命题的证明中，我们将使用以下简单判据，参见 [Sch18，命题 C.23] 或 [Hau17，定义 2.21]:

引理 3.13. 设 $\mathbb{I}$ 是一个小的 $\mathbf{SSet}_*$-富集范畴，且 $\mathscr{C}$ 是一个由 $\mathbf{SSet}_*$富集的局部可呈范畴。假设对于每个 $X\in\mathbb{I}$，我们都给定了 $\mathbb{E}\mathbf{nd}(X)$-$\mathscr{C}$（即从由 X 张成的满 $\mathbf{SSet}_*$-子范畴到 $\mathscr{C}$的富集函子范畴）上的一个组合模型结构，其生成余纤维化为 I_X，且

生成无圈余纤维化为 J_X，并满足以下“一致性条件”：对于每个 $Y \in \mathbb{I}$，任意相对 $\{\mathbb{I}(X,Y) \wedge_{\mathbb{E}\mathrm{nd}(X)} j\colon X \in \mathbb{I}, j \in J_X\}$- 胞腔复形都是 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(Y)$-$\mathscr{C}$ 中的弱等价。

于是，范畴 $\mathbb{I}$-$\mathscr{C}$ of enriched functors$\mathbb{I} \to \mathscr{C}$ 上存在唯一的模型结构，其中映射 f 是弱等价，当且仅当 $f(X)$ 在给定的模型结构中分别是弱等价或纤维化；对所有 $X \in \mathbb{I}$，该模型结构都定义在 $\mathbb{E}\mathrm{nd}(X)$-$\mathscr{C}$ 上。此模型结构是组合的，且其生成余纤维化为

$$\{\mathbb{I}(X,-) \wedge_{\mathbb{E}\mathrm{nd}(X)} i : X \in \mathbb{I}, i \in I_X\}$$

其生成无圈余纤维化为

$$\{\mathbb{I}(X,-) \wedge_{\mathbb{E}\mathrm{nd}(X)} j : X \in \mathbb{I}, j \in J_X\}.$$

证明。遗忘函子 $\mathbb{I}$-$\mathscr{C} \to \prod_{X\in\mathbb{I}} \mathbb{E}\mathrm{nd}(X)$-$\mathscr{C}$ 有一个左伴随，其定义为$F := \coprod_{X\in\mathbb{I}} \mathbb{I}($ X, –) $\wedge_{\mathbb{E}\mathrm{nd}(X)} \mathrm{pr}_X$。我们将验证此伴随满足 Crans-Kan 转移判据 [Hir03, 定理 11.3.2] 的条件；该判据将给出所需的模型结构，并表明它是余纤维生成的（因而是组合的），其生成（无圈）余纤维化集如上所述。根据局部可呈现性，每个集合都允许使用小对象论证，因此我们只需证明每个相对 $F(J)$-胞腔复形都是弱等价，其中 J 是右侧的一组生成无圈余纤维化。但对于生成无圈余纤维化的标准选取，这恰好就是上述一致性条件。□

命题 3.11 的证明。我们先考虑平坦模型结构的情形。为验证上述一致性条件，只需证明，对所有有限集 $A \subset B$，映射 $\mathbf{\Sigma}(A,B) \wedge_{\Sigma_A} -\colon \Sigma_A$-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}} \to \Sigma_B$-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 是左 Quillen。为此，我们注意到，可以将 $\mathbf{\Sigma}(A,B)$ 识别为单纯集合 $(\Sigma_B)_+ \wedge_{\Sigma_{B\smallsetminus A}} S^{B\smallsetminus A}$，其带有左 Σ_B-作用和右 Σ_A-作用，参见 [Hau17，命题 2.24]，的证明。因此，$\mathbf{\Sigma}(A,B) \wedge_{\Sigma_A} -$ 可分解为如下复合映射

$$\Sigma_A\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}} \xrightarrow{S^{B\smallsetminus A}\wedge -} (\Sigma_A \times \Sigma_{B\smallsetminus A})\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}} \xrightarrow{k_!} \Sigma_B\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$$

其中 $k\colon \Sigma_A \times \Sigma_{B\smallsetminus A} \to \Sigma_B$ 是显然的嵌入。由于 k 是单射，第二个箭头是左 Quillen，依据推论 3.4，第一个箭头也如此。

投射模型结构的一致性条件可由平坦模型结构的一致性条件立即推出，因为它的余纤维化更少，而弱等价相同；这就证明了投射层级模型结构的存在性。

由于 Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上的（平凡）纤维化和余张量都按层定义，我们立即看到这些模型结构仍然是单纯的。同样，对于左适当性，只需注意到任一模型结构的所有生成余纤维化都是逐层平坦余纤维化（由上文可知，$\mathbf{\Sigma}(A,B) \wedge_{\Sigma_A} -$ 是平坦模型结构的左 Quillen 函子），因此 Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 中的每个余纤维化特别都是逐层平坦余纤维化。□

将此应用于 $\underline{\mathscr{C}}$（例 2.6）的移位 G-$\mathscr{C}$，我们在 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上得到两个左适当、单纯且组合的模型结构，分别称为 G-全局投射层模型结构和 G-全局平坦层模型结构。它们的弱等价和纤维化分别是满足以下条件的映射 f：对于每个 $A \in \mathbf{\Sigma}$，$f(A)$ 在相应的 $(G \times \Sigma_A)$-$\mathscr{C}$ 上的模型结构中是弱等价或纤维化。

与此相反，余纤维化并非仅仅逐层定义，而是通过左提升性质来定义。尽管如此，我们仍能对上述余纤维化的各个层次说些什么；首先讨论平坦情形，在上述证明中我们已经注意到：

推论 3.14. 设 f 是 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$)$_{\mathrm{flat}}$ 中的余纤维化，且 B 是一个有限集。那么 $f(B)$是($G \times \Sigma_B$)-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$中的余纤维化。□

在射影情形下，我们得到一个稍弱的陈述:

引理 3.15. 设 i 是 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 中的投射余纤维化。那么，对每个有限 G-集 B， $i(B)$ 都是 G-$\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$ 中的余纤维化。

证明. 只需对生成余纤维化证明此结论。但对任意有限集 A 以及任意 ($G \times \Sigma_A$)-全局射影余纤维化 i

$$(\mathbf{\Sigma}(A, -) \wedge_{\Sigma_A} i)(B) = (\mathbf{\Sigma}(A, B) \wedge i)/\Sigma_A$$

并且 $\mathbf{\Sigma}(A, B) \wedge i$ 是一个 ($G \times \Sigma_A$)-全局射影余纤维化，由推论 3.4 得出；由于商保留投射余纤维化，故结论成立。□

引理 3.16. 射影和扁平 G-全局层级模型结构定义了一个预全局模型范畴 Sp($\underline{\mathscr{C}}$)$_{\mathrm{level}}$。如果 $\underline{\mathscr{C}}$ 实际上是一个全局模型范畴，那么 Sp($\underline{\mathscr{C}}$)$_{\mathrm{level}}$ 也是如此。

证明。无需损失一般性，我们可以假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的。

根据上文，这两个模型结构都是单纯的、组合的且左适当的。此外，显然它们具有相同的弱等价，并且每个（生成的）投射余纤维化也是平坦余纤维化。因此，只需验证换群性质。

为此，设 α: $G \to G'$ 是任意群同态。则限制 ($\alpha \times$ id)*: ($G' \times \Sigma_A$)-$\mathscr{C}$ $\to$ ($G \times \Sigma_A$)-$\mathscr{C}$ 保持弱等价和投射纤维化。因此， α^*: G'-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) $\to$ G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 保持层弱等价以及投射层纤维化。此外，如果 α 是单射，则每个 ($\alpha \times$ id)*: ($G' \times \Sigma_A$)-$\mathscr{C}$ $\to$ ($G \times \Sigma_A$)-$\mathscr{C}$ 也保持平坦纤维化，从而 α^* 保持平坦层纤维化。

类似地，可以证明，对于任意 α， α_*: G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) $\to$ G'-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 保持无圈平坦层纤维化，因此 α^* 保持平坦层余纤维化；并且当 α 是单射时， α_* 也保持无圈射影层纤维化，因此在这种情况下， α^* 保持射影层余纤维化。

综上，我们已经证明 Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 是一个预全局模型范畴。现在假设 $\underline{\mathscr{C}}$实际上是一个全局模型范畴，设 g: $A \to B$和 q: $A \to C$是同态，且 ker $g \cap$ ker $q = 1$；设 $X \in B$-Sp($\underline{\mathscr{C}}$)$_{\mathrm{flat}}$ level 是纤维的，并设 i: $g^*X \to Y$是 A-Sp($\underline{\mathscr{C}}$)$_{\mathrm{flat}}$ level 中的一个纤维化替换；我们需要证明 $q_*(i)$ 是一个 C-全局层弱等价。但对于任意有限集 D， $X(D)$ 在 ($B \times \Sigma_D$)-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中是纤维的，而 $i(D)$ 是 ($A \times \Sigma_D$)-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中的一个纤维化替换。因此，(g_*i)(D) = ($g \times \Sigma_D$)*($i(D)$) 是一个 ($C \times \Sigma_D$)-全局弱等价，因为 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个全局模型范畴，且 ker($g \times$id) $\cap$ ker($q \times$id) $= 1$，由此可得 g_*i 是一个 G-全局层弱等价，证毕。□

引理 3.17. 设 $\underline{F}$: $\underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{D}}$:$\underline{U}$ 是一个全局 Quillen 伴随。那么同样有

$$\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{F})\colon \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{level}} \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{D}})_{\mathrm{level}} :\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{U})$$

是一个全局 Quillen 伴随。如果 $\underline{F} \dashv \underline{G}$ 是一个全局 Quillen 等价，那么 Sp($\underline{F}$) $\dashv$ $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{U})$ 也是如此。

证明。根据引理 3.3，不妨设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是带基点的。进一步进行移位后，只需证明 Sp($\underline{F}$) $\dashv$Sp($\underline{U}$) 对两个层模型结构都是 Quillen 伴随，并且当 $\underline{F} \dashv \underline{U}$ 是一个全局 Quillen 等价时，它是一个 Quillen 等价。

对于第一个陈述，只需注意到 Sp($\underline{U}$) 在任一模型结构中都保留（平凡）纤维化，因为它们的定义仅涉及各层。

对于第二个陈述，只需证明这在平坦模型结构之间构成 Quillen 等价。事实上，若 $X \in \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{flat}}$ 是平坦的，则根据推论 3.14，对每个 A， $X(A)$ 都是平坦的；类似地，若 $FX \to Y$ 是纤维化替换，则每个 $FX(A) \to Y(A)$ 都是 Σ_A-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中的纤维化替换。根据定义，复合映射$X \to UFX \to UY$表示 X 的导出单位；但与此同时，根据上述论证，每个 $X(A) \to UY(A)$ 都表示 Σ_A-$F \dashv \Sigma_A$-U 的导出单位，因此根据假设，它是一个 Σ_A-全局弱等价。类似地，可以证明余单位也是全局层弱等价，从而完成引理的证明。□

和之前一样，我们现在希望通过 Bousfield 局部化，将讨论限制到适当的 Ω-谱概念上。

定义 3.18。设 $\underline{\mathscr{C}}$ 为一个预全局模型范畴。对象 $X \in \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 称为全局 Ω-谱，如果对每个有限群 H、每个有限 H-集 A 以及每个有限 H-集 B，导出伴随结构映射

$$X(A) \to \mathbf{R}\Omega^B X(A \amalg B) \tag{3.4}$$

是一个 H-全局弱等价。

这里，我们相对于 H-全局投射模型结构导出 Ω^B；特别地，如果 X 在上述任一层级模型结构中都是纤维的，那么 (3.4) 已由普通伴随结构映射表示。注意，这里对 A 和 B 没有忠实性假设。

同样，我们可以将此应用于 $\mathscr{C}$ 在 G 下的移位；我们将 G-$\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 中相应的对象称为 G-全局 Ω-谱。

注 3.19。在 G-全局 Ω-谱的定义中，我们等价地可以要求伴随结构映射 $X(A) \to \mathrm{R}\Omega^B X(A \amalg B)$ 对所有有限 $(G \times H)$-集 A, B 都是 $(G \times H)$-全局弱等价（而不仅仅是对 H-集如此）。也就是说，我们只需将上文中的 H 替换为 $G \times H$，然后沿对角映射 $G \times H \to G \times H \times G$ 限制即可。

为了构造相应的 Bousfield 局部化，我们还需要一些额外的记号：

构造 3.20。正如在生成（无圈）余纤维化的描述中已经使用的那样，逐层进行 SSet_* 上的张量化为我们给出了一个双函子

$$- \wedge -\colon \mathbf{Spectra} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}), \tag{3.5}$$

它分别保持每个变量中的余极限。特别地， $X \wedge -$ 对每个谱 X 都有一个右伴随 $F(X, -)\colon \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \to \mathscr{C}$。由此，我们得到双函子

$$- \wedge -\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra} \times G\text{-}\mathscr{C} \to G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \tag{3.6}$$

$$F\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}^{\mathrm{op}} \times G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \to G\text{-}\mathscr{C} \tag{3.7}$$

通过在各处将 G 作用移过来。

引理 3.21. 楔积 (3.6) 相对于 $\boldsymbol{G}$-谱上的 G-等变投射层级模型结构，以及其他位置的投射G-全局（层）模型结构，是一个左 Quillen 双函子。对偶地，(3.7) 是这些模型结构下的右 Quillen 双函子。

证明。同样地，我们可以假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的。根据伴随关系，只需证明该函子

$$G\text{-}\mathscr{C}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{proj.}} \times G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{proj.\ level}} \to \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equiv. proj. level}}$$

通过逐层取映射空间给出一个右 Quillen 双函子。由于弱等价和纤维化也是逐层定义的，只需证明

$$\mathrm{maps}\colon G\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj.}}^{\mathrm{op}} \times (G\times\Sigma_A)\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{proj.}} \to \big((\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\Sigma_A})\textbf{-SSet}_*\big)_{\mathcal{G}_{G,\Sigma_A}\text{-equiv.}}$$

对每个有限集 A，它都是右 Quillen 双函子。再通过一个伴随性论证，这便可由推论 3.4 得出。□

命题 3.22。 G-Sp($\mathscr{C}$) 上的 G-全局投射层模型结构允许进行一种 Bousfield 局部化，其纤维对象恰好是 G-全局投射层级纤维的 G-全局 Ω-谱。我们将所得模型结构称为 G-全局投射模型结构。它同样是左适当的、组合的且单纯的。

证明。与之前一样，我们可以假设 $\mathscr{C}$ 带基点；如有必要，将 $\mathscr{C}$ 替换为 G-$\mathscr{C}$ 后，只需对 $G=1$ 证明此结论。

由于 $\mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{proj.\ 层级}}$ 是左适当的、组合的且单纯的，根据 Lur09 的局部化工具、命题 A.3.7，只需给出一组余纤维化 S，使得纤维对象 $X\in \mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{proj.\ 层级}}$ 是全局 Ω-谱，当且仅当对每个 $f\in S$，限制映射 (f,X) 都是无挠 Kan 纤维化。

为此，我们回顾注 1.15：对于任意有限群 H、任意有限 H-集 A、B，映射 $\lambda_{H,A,B}\colon S^B\wedge\Sigma(A\amalg B,-)\to\Sigma(A,-)$ 表示 $X(A)^H\to(\Omega^B X(A\amalg B))^H$，并且它的分解 $\lambda_{H,A,B}=\rho_{H,A,B}\kappa_{H,A,B}$ 为一个 H-等变投射余纤维化，后接一个层级弱等价。此外，对每个有限群 H，我们选取一组 I_H 作为 H-$\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$的生成余纤维化。现在我们断言，这个集合

$$S:=\{\kappa_{H,A,B}\,\square_H\, i : H,A,B,i\in I_H\} \tag{3.8}$$

由（平衡）推出积构成，其中 H 遍历所有有限群，而 A 和 B 遍历有限 H-集，具有所需的性质。

为此，我们首先注意到，由引理 3.21 可知，每个普通推出积 $\kappa_{H,A,B}\,\square\, i$ 都是 H-Sp($\mathscr{C}$)$_{\mathrm{proj.}}$ 层中的余纤维化，因此 $\kappa_{H,A,B}\,\square_H\, i$ 确实是 Sp($\mathscr{C}$) 中的投射余纤维化，因为 $\mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{level}}$ 是一个预全局模型范畴。现在，根据伴随性，映射$(\kappa_{H,A,B}\,\square_H\, i, X)$是无挠 Kan 纤维化，当且仅当映射 $F(\kappa_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$ 在 H-$\mathscr{C}$中对所有形如 $i\,\square\,(\partial\Delta^n\hookrightarrow\Delta^n)_+$的映射都具有右提升性质。令 i 变化，我们便得到结论（因为一方面 H-$\mathscr{C}$在 SSet 上张量化，另一方面与 $(\partial\Delta^0\to\Delta^0)_+$的推出积在同构意义下给回原映射）：对所有 $i\in I_H$，映射$(\kappa_{H,A,B}\,\square_H\, i, X)$是无挠 Kan 纤维化，当且仅当 $F(\kappa_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$在 H-$\mathscr{C}_{\mathrm{proj}}$中是无圈纤维化。另一方面，$F(\kappa_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$总是纤维化，因为 F 是一个右 Quillen 双函子（再次由引理 3.21），且假设 X 是投射层级纤维的（因此 $\mathrm{triv}_H X$ 是 H-全局投射层级纤维的）。于是，对于所有 i，映射$(\kappa_{H,A,B}\,\square_H\, i, X)$是无圈纤维化，当且仅当 $F(\kappa_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$在 H-$\mathscr{C}$中是弱等价。然而，$\rho_{H,A,B}$是投射余纤维的 H-等变谱之间的一个 H-等变层级弱等价（因为 $\kappa_{H,A,B}$ 是余纤维化，且 $\lambda_{H,A,B}$ 的源对象和目标对象均为余纤维的），所以 Ken Brown 引理表明，$F(\rho_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$ 是一个 H- 全局弱等价。因此，$F(\lambda_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$是 H-全局弱等价，当且仅当 $F(\kappa_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$也是如此。由于 $F(\lambda_{H,A,B},\mathrm{triv}_H X)$与伴随结构映射 $X(A)\to\Omega^B X(A\amalg B)$共轭，断言得证。□

注 3.23. 我们还在上述证明中明确描述了通过局部化得到 G-全局投射模型结构所用的映射集合。考虑移位 G-$\mathscr{C}$，可知该集合为

$$S_G:=\{\kappa_{H,A,B}\,\square_H\, i : H \text{ finite group}, A,B \text{ finite } H\text{-sets}, i\in I_{G\times H}\}. \tag{3.9}$$

推论 3.24. 对任意有限群 G，G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上存在唯一的模型结构，其余纤维化为 G-全局平坦层余纤维化，弱等价为 G-全局弱等价。该模型结构是单纯的、组合的且左适当。此外，其纤维对象恰好是那些在 G-全局平坦层模型结构中为纤维对象的 G-全局 Ω-谱。

证明。再次，我们可以假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的，且 $G = 1$。由于每个全局投射层余纤维化也是全局平坦层余纤维化，我们可以将全局平坦层模型结构在映射 (3.8) 处局部化；又由于全局平坦层模型结构中的每个纤维化也是全局投射层模型结构中的纤维化，因此上述论证表明，一个层纤维谱在这个新模型结构中是纤维的，当且仅当它是全局 Ω-谱。剩下只需证明，这个模型结构的弱等价仍然是全局弱等价。但根据关于 Bousfield 局部化的一般理论，在全局平坦模型结构中，Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 中的映射 f 是弱等价，当且仅当对每个全局 Ω-谱，$[f, X]$ 都是双射，其中 $[,]$ 表示在 Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 对全局层弱等价进行局部化后的同态集。由于全局投射模型结构也满足相同的刻画，结论立即成立。□

警告 3.25。我们或许会想当然地认为，上述 G-全局模型结构的生成无圈余纤维化，是在层模型结构的生成无圈余纤维化中加入集合 S_G（见 (3.9)）得到的，这与等变情形（注 1.15）类似。不过，我们提醒读者：尽管这些显然都是无圈余纤维化，但尚不清楚它们是否构成生成集；更一般地说，上文采用的局部化工具并未对生成无圈余纤维化提供任何保证。事实上，上文提到的等变情形中生成无圈余纤维化的显式刻画，关键依赖于层模型结构的右适当性，而我们的设定并未假设这一点。

尽管有上述提醒，下面的结果通常仍能让我们将生成无圈余纤维化视作上述形式：

命题 3.26。设 G 是一个有限群，$\mathscr{D}$ 是一个左适当的单纯模型范畴，并且存在一个单纯 Quillen 伴随 $F\colon G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{proj.层}} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$。那么，以下条件等价：

(1) F 作为函子 $G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{proj}} \to \mathscr{D}$是左 Quillen 函子。(2) F 将 S_G 中的映射发送为弱等价。(3) U 将纤维对象发送为 G-全局 Ω-谱。

对于平坦 G-全局（分层）模型结构，同样的陈述也成立。

证明将依次依赖于以下一般结果：

引理 3.27。设 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} :U$ 是左适当单纯形模型范畴之间的单纯伴随。则 $F \dashv U$ 是 Quillen 伴随，当且仅当 F 保持余纤维化，且 U 保持纤维对象。

证明。参见 [Lur09，推论 A.3.7。2] □

命题 3.26 的证明。等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (3) 是上述引理的一个实例，而对于 (1) $\Rightarrow$ (2)，只需注意到 S_G 中的映射是无圈余纤维化。因此，只剩下证明 (2) $\Rightarrow$ (3)。

为此，令 X 为纤维的，并令 $f \in S_G$。根据富化伴随性，映射(f, UX)在共轭意义下与映射(Ff, X)一致，因此它是无圈纤维化，因为 Ff 是无圈余纤维化，且假设 X 是纤维的。不过，UX 是层级纤维的，

因此令 f 变化，根据命题 3.22 的证明可知 UX 是一个 G-全局 Ω-谱，正如所需。□

定理 3.28. 设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个全局模型范畴。那么 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上的投射和扁平 G-全局模型结构组装成一个全局模型范畴 Sp($\underline{\mathscr{C}}$)。

证明. 同样，我们可以假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的。我们已经看到，所有这些模型结构都是左适当且组合的。此外，投射和扁平 G-全局模型结构具有相同的弱等价（即 G-全局弱等价），并且根据引理 3.16，每个投射余纤维化也是一个扁平余纤维化。

关于函子性，设 $\alpha\colon G \to G'$ 是任意同态。那么 $\alpha_! \dashv \alpha^*$ 对投射层模型结构构成一个 Quillen 伴随，因此特别地，它也关联于 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上的投射层模型结构和 G'-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上的实际投射模型结构。根据命题 3.26，只需证明 α^* 将任意纤维的 $X \in G'\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})^{\mathrm{proj}}$ 映到一个 G-全局 Ω-谱。事实上，我们已知 α^*X 是投射层级纤维的，因此这相当于说明伴随结构映射

$$(\alpha^*X)(A) \to \Omega^B(\alpha^*X)(A \amalg B)$$

对所有有限的 H-集 A, B，都是一个 $(G \times H)$-全局弱等价。不过，此映射与沿 $\alpha \times \mathrm{id}\colon G \times H \to G' \times H$ 的伴随结构映射的限制相一致；由于 $(\alpha \times \mathrm{id})^*$ 是同伦的，结论得证。

接下来，我们将证明 $\alpha^* \dashv \alpha_*$ 是平坦模型结构之间的 Quillen 伴随；如上所述，这相当于说明：若 $X \in G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{flat}}$ 是纤维的，则对于所有有限的 H-集 A, B，$\alpha_*(X)(A) \to \Omega^B(\alpha_*X)(A \amalg B)$ 是一个 $(G' \times H)$-全局弱等价。这正是我们需要 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个全局（而不只是预全局）模型范畴的地方：具体来说，我们在 $(G \times H)$-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中选取函子性纤维替换，从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X(A) & \xrightarrow{\sim} & \Omega^B X(A \amalg B) \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2. \end{array}$$

这里，根据对 X 的假设，顶部箭头是 $(G \times H)$-全局弱等价，而竖直箭头按构造即为全局弱等价；因此，根据三取二，底部水平箭头也是弱等价。我们要证明，应用 $(\alpha \times \mathrm{id})_*$ 会将顶部箭头映为 $(G' \times H)$-全局弱等价。为此，只需再次应用三取二，证明它将其余所有箭头都映为 $(G' \times H)$-全局弱等价。对于底部水平箭头，这不过是 Ken Brown 引理的一个应用。接下来我们将证明，左侧竖直箭头也会被映为 $(G' \times H)$-全局弱等价；右侧竖直箭头的论证类似。

为此，我们注意到，根据 $(G \times \Sigma_A)$-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中 G-全局平坦模型结构的定义，$X(A)$ 是纤维的。因此，若 $\rho\colon H \to \Sigma_A$ 对 A 上的 H-作用进行分类，并定义 $g := (\mathrm{id} \times \rho)\colon G \times H \to G \times \Sigma_A, q := (\alpha \times \mathrm{id})\colon G \times H \to G' \times H$，那么我们恰好要证明，$q_*$ 将 $(G \times H)$-$\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中的纤维化替换 $g^*X(A) \to Y_1$ 映为弱等价。然而，由于 $\ker g = 1 \times (\ker \rho)$ 与 $(\ker \alpha) \times 1 = \ker q$ 的交为平凡，这正是预全局模型范畴成为全局模型范畴的含义。

由于 α^* 是平坦全局模型结构中的左 Quillen 函子，因此它特别会将无圈余纤维化映为 G-全局弱等价。然而，G'-全局平坦模型结构中的任何无圈纤维化，特别也是 G'-全局层级弱等价，

并且由于 $\mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{level}}$ 是一个预全局模型范畴，因此可知 α^* 会将这些映为G-全局（层级）弱等价。因此， α^* 实际上是同伦的。

现在假设 α 是单射。那么，根据引理 3.16， α^* 保持射影（层）余纤维化，且由上文可知它是同伦的，因此它是射影模型结构上的左 Quillen 伴随。此外，对于平坦层级模型结构， $\alpha_! \dashv \alpha^*$ 是一个 Quillen 伴随；由上文可知， α^* 将纤维对象映为 G-全局 Ω-谱，因此 $\alpha_! \dashv \alpha^*$ 也是平坦模型结构上的 Quillen 伴随。

最后，设 $g\colon A \to C$ 和 $q\colon A \to B$ 是满足 $\ker(g) \cap \ker(q) = 1$ 的同态，设 X 在 C-$\mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{flat}}$ 中是纤维的，并设 $\iota\colon g^*X \to Y$ 是 A-$\mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{flat}}$ 中的一个纤维化替换；我们需要证明 $q_*\iota$ 是一个 B-全局弱等价。然而，由上文可知， g^*X 是一个 A-全局 Ω-谱，因此 ι 实际上是一个 A-全局层弱等价。由此，结论可由 $\mathrm{Sp}(\mathscr{C})_{\mathrm{level}}$ 是一个全局模型范畴推出。□

上述谱化构造与全局 Quillen 伴随及全局 Quillen 等价相容：

命题 3.29. 设 $\underline{F}\colon \underline{\mathscr{C}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{D}}\colon \underline{U}$ 是全局模型范畴之间的全局 Quillen 伴随。那么 $\mathrm{Sp}(\underline{F}) : \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{D}}) : \mathrm{Sp}(\underline{U})$ 是一个全局 Quillen 伴随。如果 $\underline{F} \dashv \underline{U}$ 是全局 Quillen 等价，那么 $\mathrm{Sp}(\underline{F}) \dashv \mathrm{Sp}(\underline{U})$ 也是全局 Quillen 等价。

证明. 根据引理 3.3，我们可以假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 和 $\underline{\mathscr{D}}$ 是带基点的。此外，照例只需证明 $\mathrm{Sp}(\underline{F}): \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{D}}) : \mathrm{Sp}(\underline{U})$ 在射影对象和平坦模型结构下是通常意义上的 Quillen 伴随；若 $\underline{F} \dashv \underline{U}$ 是全局 Quillen 等价，则它还是一个 Quillen 等价（例如，对于平坦模型结构）。

对于第一个结论，我们注意到，根据引理 3.17，该结论对层模型结构成立。因此，只需证明右伴随将投射纤维对象映至全局 Ω-谱，而这直接由 Ken Brown 引理得出。

对于第二个结论，我们令 $Y \in \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{D}})_{\mathrm{flat}}$ 为纤维的，并令 $X \to GY$ 为全局平坦层模型结构中的一个余纤维替换。于是， $FX \to FUY \to Y$ 在全局平坦模型结构中代表导出余单位 $\mathrm{L}F\mathrm{R}UY \to Y$，在全局平坦层模型结构中也同样如此；因此，根据引理 3.17，它是一个全局弱等价。

证明导出单位也是同构则更加复杂。关键观察如下：

断言。设 $W \in \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 是一个平坦全局 Ω-谱。那么 $\mathrm{Sp}(\underline{F})(W)$ 仍是一个全局 Ω-谱。

证明。设 H 是一个有限群。由于 $F \dashv U$ 是一个 SSet_*-富集的伴随，因此对于所有 $K \in \boldsymbol{H}\text{-}\mathrm{SSet}_*$、 $X \in H\text{-}\mathscr{C}$，都有自然比较同构 $K \wedge F(X) \to F(K \wedge X)$。取 $K = S^B$ 为某个有限 H-集 B，并利用相关的所有函子对于平坦模型结构都是左 Quillen 函子，可将这些同构导出为同伦范畴中的同构 $S^B \wedge^{\mathbf{L}} \mathrm{L}F(X) \to \mathrm{L}F(S^B \wedge^{\mathbf{L}} X)$。取典范伴随变换后，我们得到一个自然比较映射 $\mathrm{L}F\mathrm{R}\Omega^B X \to \mathrm{R}\Omega^B \mathrm{L}F(X)$；由于 $\mathrm{L}F$ 假设为等价，该映射仍是同构。代入定义可知，对于一个在平坦模型结构中余纤维、在射影模型结构中纤维的 X，这个比较映射由下式表示：

$$F(Y) \xrightarrow{F(\pi)} F(\Omega^B X) \to \Omega^B F(X) \xrightarrow{\Omega^B \iota} \Omega^B Z \tag{3.10}$$

其中 $\pi\colon Y \to \Omega^B X$ 是平坦模型结构中的余纤维替换，未标记的箭头是由富集给出的比较映射，而 $\iota\colon F(X) \to Z$ 是纤维化替换（例如，在平坦模型结构中）；特别地，复合映射 (3.10) 是一个 H-全局弱等价。

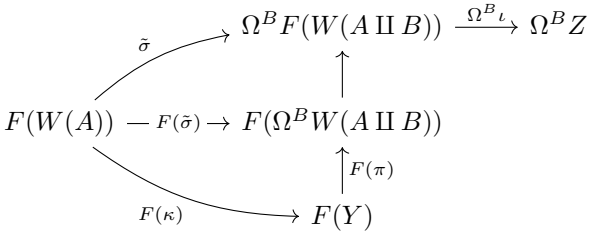
有了这一点，我们现在可以证明该断言。由于 Sp($\underline{F}$) 关于平坦层级模型结构是左 Quillen 的，我们不妨假设 W 在平坦层级模型结构中也是纤维的。现在令 H 为一个有限群，并令 A、B 为有限 H-集合；我们需要证明复合映射

$$F(W(A)) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \Omega^B F(W(A \amalg B)) \xrightarrow{\Omega^B \iota} \Omega^B Z \tag{3.11}$$

是一个 H-全局弱等价，其中第一个映射是通常的伴随结构映射，而 ι 是 $F(W(A \amalg B))$ 在 $H\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中的纤维化替换。为此，我们选取一个分解

$$W(A) \overset{\kappa}{\rightarrowtail} Y \xrightarrow[\sim]{\pi} \Omega^B W(A \amalg B)$$

在 $H\text{-}\mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 中，将 $\tilde{\sigma}$ 分解为一个余纤维化 κ，后接一个弱等价 π；注意，根据三取二，κ 实际上是一个无圈余纤维化；又因为 $W(A)$ 是余纤维的，所以 Y 也是余纤维的，因此 π 是一个余纤维替换。于是我们有一个交换图



其中 $F(\kappa)$ 是一个弱等价，因为 F 是左 Quillen，而复合映射 $F(Y) \to \Omega^B Z$ 与 $X := W(A \amalg B) \in H\text{-}\mathscr{C}$ 的 (3.10) 一致，因此根据上文，它是一个弱等价。于是，根据三取二，顶端的复合映射 (3.11) 也是一个弱等价，从而完成了该断言的证明。△

现在只需证明，只要 X 是平坦全局 Ω-谱，导出单位 $X \to \mathrm{R}U\mathrm{L}FX$ 就是同构。事实上，它由复合映射 $X \to UFX \to UY$ 表示，其中 $FX \to Y$ 是全局投射模型结构中的纤维化替换。根据该断言，FX 是全局 Ω-谱，因此这实际上是层级纤维替换；于是，此复合映射也表示相应层模型结构的导出单位，由引理 3.17 再次可得该断言。□

最后，我们来证明上述构造确实达到了预期目的：

定理 3.30. 设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个全局模型范畴。那么 Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 是稳定的。

证明该定理时，与通常情形一样，我们不妨假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的。现在我们希望采用与 $\underline{\mathscr{S}p}$ 相同的方法（见上文命题 3.6），因此首先需要为 G-等变对称谱引入适当的楔积：

构造 3.31. 记 $\wedge$ 为本质上唯一的 SSet_*-富化函子 $\mathrm{Spectra} \times \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \to \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$，它在每个变量中都保持张量和余极限，并且满足 $\mathbf{\Sigma}(A, -) \wedge (\mathbf{\Sigma}(B, -) \wedge X) = \mathbf{\Sigma}(A \amalg B, -) \wedge X$，且对 A、$B \in \mathbf{\Sigma}$ 和 $X \in \mathscr{C}$ 具有显然的函子性。对于任意有限群 G，我们由此得到一个配对

$$- \wedge - \colon \boldsymbol{G}\textbf{-Spectra} \times G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \to G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \tag{3.12}$$

通过拉回 G-作用。

因此，存在唯一的方式来延拓显然的同构

$$\mathbf{\Sigma}(\varnothing, -) \wedge (\mathbf{\Sigma}(B, -) \wedge X) = \mathbf{\Sigma}(\varnothing \amalg B, -) \wedge X \cong \mathbf{\Sigma}(B, -) \wedge X$$

and

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge\mathbf{\Sigma}(B,-))\wedge(\mathbf{\Sigma}(C,-)\wedge X) &= \mathbf{\Sigma}((A\amalg B)\amalg C,-)\wedge X\\ &\cong \mathbf{\Sigma}(A\amalg(B\amalg C),-)\wedge X\\ &= \mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge(\mathbf{\Sigma}(B,-)\wedge(\mathbf{\Sigma}(C,-)\wedge X))\end{aligned}$$

使 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 成为在 $\boldsymbol{G}$-谱上的张量化范畴。由于局部可呈现性保证所有伴随函子都存在，因此 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 也在 $\boldsymbol{G}$-谱上富集且余张量化；因此，下一个命题可以重新表述为： G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$)^{proj} 在模型范畴意义上富集于 $\boldsymbol{G}$-谱$_{G\text{-equiv. proj.}}$。

命题 3.32。配对 (3.12) 关于 $\boldsymbol{G}$-谱上的G等变投射模型结构以及 G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 上的 G 全局投射模型结构，是一个左 Quillen 双函子。

证明中我们需要：

引理 3.33。设 A 是任意有限的 G-集。那么移位 $\mathrm{sh}^A\colon G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})\to G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 关于 G全局投射模型结构是右 Quillen 函子。

证明。和之前一样，只需证明 sh^A 关于相应的层级模型结构是右 Quillen 函子，并且它将纤维对象映到 G全局 Ω-谱。

对于第一个陈述，我们只需注意到 $\mathrm{ev}_B\circ\mathrm{sh}^A\colon G\text{-Sp}(\mathscr{C})\to(G\times\Sigma_B)\text{-}\mathscr{C}$可分解为以下复合

$$G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\text{proj. 层级等价}}\xrightarrow{A\amalg B}(G\times\Sigma_{A\amalg B})\text{-}\mathscr{C}_{\text{proj 限制}}\longrightarrow(G\times\Sigma_A\times\Sigma_B)\text{-}\mathscr{C}_{\text{proj}}\xrightarrow{\varphi^*}(G\times\Sigma_B)\text{-}\mathscr{C}_{\text{proj}}$$

其中 φ 由 $\varphi(g,\sigma)=(g,g\cdot\sigma)$ 定义，而根据定义，它们各自都是右 Quillen 函子。

最后，若 X 是纤维的，则由上文可知 $\mathrm{sh}^A X$ 是层级纤维的，因此，$\mathrm{sh}^A X$ 是 G-全局 Ω-谱，当且仅当对于所有有限 H-集 B,C， $X(A\amalg B)\to\Omega^C X(A\amalg B\amalg C)$ 都是 $(G\times H)$-全局弱等价。这可由注 3.19 轻易推出（令 H 在 A 上平凡作用，并令 G 在 B,C 上平凡作用）。□

命题 3.32 的证明。我们先证明类似的结论：在 $\boldsymbol{G}$-谱上赋予 G-等变射影对象层级模型结构。由于可以通过添加对象得到，这里只需证明

$$\begin{aligned}G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})^{\mathrm{op}}\times G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})&\to\boldsymbol{G}\textbf{-Spectra}\\ X,Y&\mapsto\big(A\mapsto\mathrm{maps}(X,\mathrm{sh}^A Y)\big)\end{aligned}$$

（对 A、X、Y 具有显然的函子性）是一个右 Quillen 双函子。由于所涉及的所有结构都是逐层定义的，这等价于说，$(X,Y)\mapsto$映射$(X,\mathrm{sh}^A Y)$ 是到 $(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\Sigma_A})$-SSet$_*$（带有 $\mathcal{G}_{G,\ \Sigma_A}$-模型结构）的一个右 Quillen 双函子。然而，由于 Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 是一个全局模型范畴，$\mathrm{triv}^{\Sigma_A}\colon G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})\to(G\times\Sigma_A)\text{-Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 对于投射模型结构是右 Quillen 的；根据前述引理，$(G\times\Sigma_A)$-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 的自函子 sh^A 也具有这一性质（其中 G 在 A 上平凡作用，而 Σ_A 按照显然方式作用）。因此，将推论 3.4 应用于全局模型范畴 Sp($\underline{\mathscr{C}}$)，即可得到所述结论。

对于原命题，现在只需证明：任意标准生成无圈余纤维化 j of $\boldsymbol{G}$-谱$_{G\text{-equiv. proj.}}$与任意生成余纤维化 i of G-Sp($\underline{\mathscr{C}}$) 的推挤积，仍是一个 G-全局弱等价。不过，如果 j 甚至是层级弱等价，这便由上述结论得出；而其他生成无圈余纤维化恰好是映射 $(G_+\wedge_H\kappa_{H,\ A,\ B})\square k$ ，其中 $H\subset G$为子群， H为有限 A-集， B以及 k of$G$-Sp(SSet)$_{G\text{-equiv. proj.}}$ 为（生成）余纤维化，参见注 1.15。于是，推挤积 $(G_+\wedge_H\kappa_{H,\ A,\ B}\square k)\ \square\ i$ 可识别为 $\kappa_{H,\ A,\ B}\square_H(G_+\wedge(k\ \square\ i))$，其中 H 通过其在 j 上的

右作用于第二个因子。根据上述结论， $k \square i$ 是一个（层级）余纤维化；由 G-全局射影对象模型结构的构造可知，因而只需证明

$$G_+ \wedge -\colon G\text{-}\mathrm{Sp}(\mathscr{C}) \to (G \times H)\text{-}\mathrm{Sp}(\mathscr{C})$$

（其中 G 以对角映射作用，而 H 从右侧作用）对于射影（层级）模型结构是左 Quillen 的。然而，由于 $\mathrm{Sp}(\mathscr{C})$ 是一个（预）全局模型范畴，且 G在 $(\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H})$-$\mathrm{SSet}_{\mathcal{G}_{G,\,H}}$（$H$ 从右侧自由作用）中是余纤维的，这不过是再次应用推论 3.4。□

定理 3.30 的证明。该结论可由命题 3.32 得出，方法与命题 3.6 的证明相同。□

3.4. 谱化的泛性质。以下设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 为全局模型范畴。我们首先说明上述构造 Sp 在何种意义下是幂等的：

引理 3.34。假设 $\mathscr{C}$ 是带基点的。则存在一个全局 Quillen 伴随

$$\Sigma^\infty := \mathbb{S} \wedge -\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathscr{C}) :\Omega^\infty := \mathrm{ev}_\varnothing. \tag{3.13}$$

证明。由定义显然可知，Ω^∞ 是右 Quillen（对于层模型结构也已经如此）。□

推论 3.35。设 $\mathscr{C}$为任意全局模型范畴。则我们有一个全局 Quillen 伴随

$$\Sigma^\infty_+ := \mathbb{S} \wedge (-)_+\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathscr{C}) :\Omega^\infty := \mathrm{ev}_\varnothing. \qquad \square$$

定理 3.36。设 $\mathscr{C}$ 为一个全局模型范畴。当且仅当 $\mathscr{C}$ 是带基点的，且全局 Quillen 伴随 (3.13) 是全局 Quillen 等价时，它才是稳定的。

证明。稳定性在全局 Quillen 等价下保持不变（引理 3.8），因此“⇐”由定理 3.30 得出。现在通过通常的移位论证，只需证明当 Σ^∞ 稳定时， $\mathscr{C} \rightleftarrows :\ \mathrm{Sp}(\mathscr{C}) :\Omega^\infty$ 是一个 Quillen 等价。

为此，我们首先注意到，$\mathrm{L}\Sigma^\infty$ 的值域包含于全局 Ω-谱中。也就是说，如果 $X \in \mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$ 是余纤维的，则对于所有有限群 H 以及有限 H-集合 A 和 B，通常的结构映射 $S^B \wedge(\Sigma^\infty X)(A) \to(\Sigma^\infty X)(A \amalg B)$都是同构。然而，$(\Sigma^\infty X)(A) = S^A \wedge X$ 在平坦的 H-全局模型结构中是余纤维的，因此我们可以将其与导出映射 $S^B \wedge^{\mathbf{L}} (\Sigma^\infty X)(A) \to (\Sigma^\infty X)(A \amalg B)$识别。由稳定性，伴随映射$(\Sigma^\infty X)(A) \to \mathrm{R}\Omega^B(\Sigma^\infty X)(A \amalg B)$随后也是一个$H$-全局弱等价，正如所需。

因此，对于每个余纤维 $X \in \mathscr{C}_{\mathrm{flat}}$，普通单位 $X \to\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ 已经表示导出单位。由于前者是同构，导出单位是全局弱等价。

为了完成证明，现在只需证明 Ω^∞ 能反映全局 Ω-谱之间的弱等价。事实上，若 $f\colon X \to Y$ 是全局 Ω-谱的一个映射，且 $f(\varnothing)$ 是全局弱等价，那么 $\mathrm{R}\Omega^A f(A)$ 是一个 Σ_A-全局弱等价，因为它与 $f(\varnothing)$ 共轭（并赋予平凡的 Σ_A-作用）。因此，$f(A)$ 必定是一个 Σ_A-全局弱等价，因为 $\Omega^A\colon \Sigma_A\text{-}\mathscr{C} \to \Sigma_A\text{-}\mathscr{C}$ 是 Quillen 等价的一部分（例如，对于平坦模型结构）。□

定义 3.37. 全局 Quillen 伴随 $\mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}$ 称为全局稳定化，如果 $\mathscr{D}$ 是稳定的，且诱导的全局 Quillen 伴随 $\mathrm{Sp}(\mathscr{C}) \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathscr{D})$ 是全局 Quillen 等价。

定理 3.38. 设 $\mathscr{C}$ 是任意全局模型范畴。那么 $\Sigma^\infty_+\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathscr{C}) :\Omega^\infty$ 是一个全局稳定化。

证明。我们已在定理 3.30 中证明 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 是稳定的。照常将 $\underline{\mathscr{C}}$ 替换为 G-$\mathscr{C}$ 后，只需证明 $\mathrm{Sp}(\underline{\Sigma^\infty_+}) : \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})) : \mathrm{Sp}(\Omega^\infty)$ 是一个 Quillen 等价。比较右伴随函子后，我们立即看到这与 $\mathrm{Sp}(\underline{\Sigma^\infty}) : \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}_*) \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}_*)) : \mathrm{Sp}(\Omega^\infty)$ 一致，因此还可以进一步假设 $\underline{\mathscr{C}}$ 是带基点的。

为证明起见，我们将 SSet_*-范畴 $\mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}))$ 识别为 SSet_*-富集函子范畴 $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma} \to \mathscr{C}$ 其中 $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma}$表示这样一个 SSet_*-范畴：其对象为有限集对 (A, B)，其映射空间为

$$\mathrm{maps}_{\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma}}((A,B),(A',B')) = \mathrm{maps}_{\mathbf{\Sigma}}(A,A') \wedge \mathrm{maps}_{\mathbf{\Sigma}}(B,B')$$

并配备显然的复合。我们约定，$\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma}$ 的第一个因子对应于“外部 Sp”，因此 $\mathrm{Sp}(\Omega^\infty)$ 对应于沿包含映射 $i_1\colon \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma}, A \mapsto (A, \varnothing)$ 的限制。另一方面，沿另一个包含映射 $i_2\colon \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma}$ 进行限制，则对应于 Quillen 等价 Ω^∞。

现在我们用 $\amalg\colon \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$ 表示通常的对称幺半结构（用于构造谱的楔积），它在对象上的定义为 $(A, B) \mapsto A \amalg B$。通过限制，这给出了一个单纯函子 $\amalg^*\colon \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \to \mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}))$，它通过富集 Kan 延拓具有一个单纯左伴随 $\amalg_!$。

断言。单纯伴随 $\amalg_! \dashv \amalg^*$ 相对于投射模型结构是一个 Quillen 伴随。

证明。我们先考虑层模型结构的情形，这相当于说明，对于所有相关范畴上的投射模型结构，$\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}}) \to \Sigma_A\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})\ X \mapsto (\amalg^* X)(A)$ 是右 Quillen 函子。不过，这可以识别为以下复合

$$\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{proj}} \xrightarrow{\mathrm{triv}_{\Sigma_A}} \Sigma_A\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{proj}} \xrightarrow{\mathrm{sh}^A} \Sigma_A\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})_{\mathrm{proj}}$$

其中第一个函子是右 Quillen 函子，因为 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 是一个全局模型范畴；第二个函子则由引理 3.33 得知是右 Quillen 函子。

因此，只需证明：若 X 在 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{C}})$ 上的全局投射模型结构中是纤维的，则 $\amalg^* X$ 是一个全局 Ω-谱；也就是说，对每个有限群 H 以及每个有限 H-集 A, B，映射 $\mathrm{sh}^A X \to \Omega^B \mathrm{sh}^{A\amalg B} X$ 都是一个 H-全局弱等价。事实上，这甚至是一个 H-全局层弱等价：若 C 是任意有限集，则在 C 处取值后，这恰好是伴随结构映射 $X(C \amalg A) \to \Omega^B(C \amalg A \amalg B)$；由于假设 X 是一个全局 Ω-谱，该映射是一个 $(H \times \Sigma_C)$-全局弱等价（令 Σ_C 在 A 和 B 上平凡作用，而 H 在 C 上平凡作用）。△

对称幺半结构的单位同构现在给出同构 $\Omega^\infty \circ \amalg^* \cong \mathrm{id} \cong \mathrm{Sp}(\Omega^\infty) \circ \amalg^*$。由于所有函子都是右 Quillen 函子，这便导出导出函子之间的同构 $\mathrm{R}\Omega^\infty \circ \mathrm{R}\amalg^* \cong \mathrm{id} \cong \mathrm{RSp}(\Omega^\infty) \circ \mathrm{R}\amalg^*$。特别地，由于 $\mathrm{R}\Omega^\infty$ 是等价（定理 3.30 和 3.36），根据三取二，$\mathrm{R}\amalg^*$ 也是等价；同理，$\mathrm{RSp}(\Omega^\infty)$也如此。□

注 3.39。将 GLOBMOD 记作大范畴（其对象为全局模型范畴，态射为全局右 Quillen 函子）取反范畴后，再关于全局 Quillen 等价进行局部化所得的范畴。于是命题 3.29 蕴含，Sp 下降为 GLOBMOD 的一个自函子 Q。此外，全局 Quillen 伴随 $\underline{\Sigma^\infty_+} \dashv \Omega^\infty$ 诱导出一个自然变换 $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow Q$.[1]

[1]这里我们将底层 1-范畴定义为由右 Quillen 函子构成，这一点派上了用场：$\Omega^\infty = \mathrm{ev}_\varnothing$ 是严格自然的，而 $\underline{\Sigma^\infty_+}$仅是伪自然的。不过，采用左 Quillen 函子的方法，或同时编码两个伴随函子，也同样可行；借助余柱论证不难证明，在任一情形下，同构函子在对全局 Quillen 等价局部化后都会变成 $equal$。

由定理 3.30 和 3.36，映射 $\eta_{Q\underline{\mathscr{C}}}$ 对每个 $\underline{\mathscr{C}}$而言都是 GLOBMOD 中的同构；类似地，上面的定理 3.38 表明 $Q\eta_{\underline{\mathscr{C}}}$ 是一个同构。因此，根据抽象范畴论， Q 是到其本质像（即稳定全局模型范畴）的一个 Bousfield 局部化，其单位由 η给出。换言之，对于任意全局模型范畴 $\underline{\mathscr{C}}$，$\Omega^\infty\colon \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{C}}) \to \underline{\mathscr{C}}$（或更一般地，在定义 3.37 意义下的任意全局稳定化中对应的右伴随）是从稳定全局模型范畴出发的全局右 Quillen 函子的同伦泛例；左伴随则有对偶的结论。

4. The stabilization of global spaces

本节将证明：

定理 4.1. 全局 Quillen 伴随

$$\underline{\Sigma^\bullet_+}\colon \underline{\mathscr{L}} \rightleftarrows \underline{\mathscr{S}p} :\underline{\Omega^\bullet} \tag{4.1}$$

来自例 2.18，是一个全局稳定化。

这可以视为对我们框架的合理性检验，同时也使我们能够通过一个泛性质来描述从非稳定全局同伦论到稳定全局同伦论的过渡：(4.1) 是从 $\underline{\mathscr{L}}$ 到一个稳定全局模型范畴的全局 Quillen 伴随的同伦泛性质示例。

为证明起见，我们将把 $\underline{\mathscr{S}p}$ 与上一节构造的全局稳定化进行比较。这需要进行一些准备：

构造 4.2。我们定义一个函子 $\Delta^*\colon \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{L}}) \to$ 谱，如下所示：如果 X 是带基点的 $\mathcal{I}$-单纯集合中的一个谱，那么 $\Delta^* X(A) = X(A)(A)$，其结构映射为

$$S^{B\smallsetminus i(A)} \wedge X(A)(A) \xrightarrow{\sigma} X(B)(A) \xrightarrow{X(B)(i)} X(B)(B)$$

对于每个单射 n $i\colon A \to B$，并且在 i 中具有显然的富集函子性。X 中的函子性。

根据富 Yoneda 引理， Δ^* 具有一个富左伴随函子 $\Delta_!$；该函子在唯一富同构意义下由以下条件刻画：它保留余极限和张量，并满足 $\Delta_!\mathbf{\Sigma}(A,-) = \mathbf{\Sigma}(A,-) \wedge \mathcal{I}(A,-)_+$，且在 A 中具有显然的函子性。将 $\mathbf{\Sigma}(A,B)$ 的单形写成 $B \in \mathbf{\Sigma}$ 的等价类 $[i,\sigma]$，其中包括一个单射 $i\colon A \to B$ 和 $S^{B\smallsetminus i(A)}$ 的一个单形 σ，则 $\mathbf{\Sigma}(A,-)$ 的单位在次数 B 中由 $\mathbf{\Sigma}(A,B) \to \mathbf{\Sigma}(A,B) \wedge \mathcal{I}(A,B)_+, [i,\sigma] \mapsto [i,\sigma] \wedge i$ 给出。

根据富集 Kan 延拓， Δ^* 还具有一个单纯右伴随 Δ_*。

我们现在的实际目标是证明：

定理 4.3。对于任意有限群 G，单纯伴随

$$\Delta_!\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global projective}} \rightleftarrows G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{L}})_{G\text{-global projective}} :\Delta^* \tag{4.2}$$

是一个 Quillen 等价。

证明将在本节余下部分完成；现在先说明它如何推出定理 4.1：

定理 4.1 的证明。我们已经知道，$\underline{\Sigma^\bullet_+} \dashv \underline{\Omega^\bullet}$ 是一个全局 Quillen 伴随，且 $\underline{\mathscr{S}p}$ 是稳定的（命题 3.6）。因此，只需证明对于每个有限的 G，G-$\mathrm{Sp}(\underline{\Omega^\bullet})$ 导出为同伦范畴之间的等价。为此，我们考虑以下右 Quillen 函子图表

$$\begin{array}{ccc} G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})_{\text{proj. } G\text{-gl.}} & \xrightarrow{\quad\Omega^\infty\quad} & \boldsymbol{G}\text{-谱}_{\text{proj. } G\text{-gl.}} \\ & {\scriptstyle G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\Omega^\bullet})} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \Delta^*} & \\ & G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{L}})_{\text{proj. } G\text{-gl.}} & \end{array} \tag{4.3}$$

。该图表并不严格交换，但限制到纤维对象后，注 1.51 表明，下方复合映射在自然的G-全局（层级）弱等价意义下，将一个 G-双谱 X 映射到谱$\delta(X)$；该谱由 $A \mapsto \Omega^A X(A)(A)$ 给出，并具有显然的函子性。此外，我们还有一个自然映射 $\sigma\colon \Omega^\infty X \to \delta(X)$，其在度数 A 中由映射 $X(\varnothing)(A) \to \Omega^A X(A)(A)$ 给出，该映射由伴随结构映射诱导。若 X 是纤维的，则对于每个$X(\varnothing) \to \Omega^A X(A)$，它都是射影 $(G \times \Sigma_A)$-全局模型结构中纤维对象之间的 $(G \times \Sigma_A)$-全局弱等价，因而是 $(G \times \Sigma_A)$-全局层级弱等价。特别地，在 A处取值后，这是一个 $\mathcal{G}_{\Sigma_A, G\times\Sigma_A}$-等变弱等价，因此相对于对角 Σ_A-作用，它也是一个 $\mathcal{G}_{\Sigma_A, G}$-等变弱等价。因此，对于每个纤维$X$， σ 都是一个 G-全局（层级）弱等价。综上，我们得到右导出函子之间的同构 $\mathrm{R}\Omega^\infty \cong \mathrm{R}(G\text{-}\mathrm{Sp}(\Omega^\bullet)) \circ \mathrm{R}\Delta^*$。 —

然而，根据$\mathscr{S}_p$ 的稳定性（命题 3.6），(4.3) 中的上方箭头诱导出同伦范畴之间的等价；根据前述定理， Δ^* 也如此。因此，由三取二可得所需结论。□

剩下要证明定理 4.3。

引理 4.4. 单纯伴随 (4.2) 是一个 Quillen 伴随。

证明. 我们先证明 Δ^* 保持（无圈）层级纤维化。事实上，若$f\colon X \to Y$是 G-Sp($\mathscr{S}$) 中的任意映射，则 $(\Delta^* f)(A) = f(A)(A)$。若此时 f是一个G-全局（无圈）层级纤维化，那么 $f(A)$是一个（$G\times\Sigma_A$）-全局（无圈）纤维化，因而特别是一个（$G \times \Sigma_A$）-全局（无圈）层级纤维化，所以 $f(A)(A)$是一个（无圈）$\mathcal{G}_{\Sigma_A,\ G\times\Sigma_A}$-等变纤维化。与前面一样，它特别还是一个关于对角作用的$\mathcal{G}_{\Sigma_A,\ G}$-等变（无圈）纤维化，也就是说， $\Delta^* f$是一个（无圈）层级纤维化，正如所需。

为了完成证明，现在只需证明 Δ^* 将纤维对象映为 G-全局 Ω-谱。事实上，若 X 是纤维对象，且 A、 B 是有限的 H-集，那么$X(A) \to \Omega^B X(A \amalg B)$ 是射影纤维的 $(G \times H)$-全局空间之间的 $(G \times H)$-全局弱等价，因此也是 $(G \times H)$-全局层弱等价。特别地，$(\Delta^* X)(A) = X(A)(A) \to \Omega^B X(A \amalg B)(A)$ 是一个 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,\ G\times H}$-等变弱等价。因此，若 A 是忠实的，那么根据引理 1.6，这是一个 $\mathcal{G}_{H,\ G\times H}$-弱等价，进而相对于对角作用是一个 $\mathcal{G}_{H,\ G}$-等变弱等价。

现在， $\Delta^* X$ 的伴随结构映射分解为

$$X(A)(A) \xrightarrow{\tilde{\sigma}(A)} \Omega^B X(A \amalg B)(A) \xrightarrow{\Omega^B X(A\amalg B)(\mathrm{incl})} \Omega^B X(A \amalg B)(A \amalg B);$$

若 H 在 A上的作用是忠实的，那么根据上述结果，第一个映射是一个 $\mathcal{G}_{H,\ G}$-等变弱等价；通过同样的计算，第二个映射也是如此，因为 $X(A \amalg B)$ 是一个纤维的 $(G \times H)$-$\mathcal{I}$-空间。□

引理 4.5。函子 $\Delta^*\colon$ G-Sp($\mathscr{S}$)$_{G\text{-global 投射。}} \to$ G-谱$_{G\text{-global 投射。}}$将纤维对象之间的 G-全局弱等价反映为等价，也就是说，其右导出函子 $\mathrm{R}\Delta^*$ 是保守的。

证明。设 $f\colon X \to Y$ 是纤维对象之间的一个映射，且 $\Delta^* f$ 是一个 G-全局弱等价。由于 Δ^* 是右 Quillen， $\Delta^* X$ 和 $\Delta^* Y$ 是纤维对象，因此 $\Delta^* f$ 甚至是一个 G-全局层弱等价；也就是说，对于每个有限群 H 以及任意有限忠实 H-集 A， $f(A)(A)$ 都是 $(G \times H)$-单纯集合之间的 $\mathcal{G}_{H,G}$-等变弱等价。我们要证明 $f(A)$ 已经是一个 $(G \times \Sigma_A)$-全局层弱等价；也就是说，对于每个有限集 B ，映射 $f(A)(B)$ 都是一个 $\mathcal{G}_{\Sigma_B, G\times\Sigma_A}$-等变弱等价。换言之，对于每个以任意方式作用于 A 并忠实地作用于 B 的有限群 H ，映射 $f(A)(B)$ 都是一个 $\mathcal{G}_{H,G}$-等变弱等价。

为此，我们考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} X(A)(B) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \Omega^B X(A \amalg B)(B) & \xrightarrow{\Omega^B X(A\amalg B)(\mathrm{incl})} & \Omega^B(\Delta^* X)(A \amalg B) \\ \downarrow{\scriptstyle f(A)(B)} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega^B f(A\amalg B)(B)} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega^B(\Delta^* f)(A\amalg B)} \\ Y(A)(B) & \xrightarrow[\tilde{\sigma}]{} & \Omega^B Y(A \amalg B)(B) & \xrightarrow[\Omega^B X(A\amalg B)(\mathrm{incl})]{} & \Omega^B(\Delta^* Y)(A \amalg B) \end{array}$$

由于 H 在 $A \amalg B$ 上忠实地作用，根据上述结论，右侧的竖直映射是一个 $\mathcal{G}_{H,G}$-等变弱等价。此外，由于 $X(A) \to \Omega^B X(A \amalg B)$ 是纤维对象之间的一个 $(G \times H)$-全局弱等价，且 H 忠实地作用于 B，左上方的水平映射是一个 $\mathcal{G}_{H,G}$-弱等价；同理，左下方的水平映射也是弱等价。最后， $X(A \amalg B)$ 是一个纤维的 $(G \times H)$-$\mathcal{I}$-空间，因此右上方的水平映射是一个 $\mathcal{G}_{H,G}$-等变弱等价，右下方的水平映射亦然。由三取二即可得出结论。□

现在我们要证明上述引理的以下强化形式：

命题 4.6。函子 Δ^* 生成 G-全局弱等价。

证明中，理解 Δ^* 在生成（无圈）余纤维化上的行为至关重要；更一般地，还需理解它在形如 $\mathbf{\Sigma}(A, -) \wedge_{\Sigma_A} f$ 的映射上的行为，其中 f 是 $(\boldsymbol{G} \times \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{A}})$-I-单纯集中的映射。为此，我们回顾如下标准构造：

构造 4.7. 设 X 为一个谱， Y 为一个带基点的 $\mathcal{I}$-单纯集合。记 $X \otimes Y$ 为这样一个谱：$(X \otimes Y)(A) = X(A) \wedge Y(A)$，其结构映射为

$$S^{B \setminus i(A)} \wedge (X \otimes Y)(A) = S^{B \setminus A} \wedge X(A) \wedge Y(A) \xrightarrow{\sigma \wedge Y(i)} X(B) \wedge Y(B) = (X \otimes Y)(B)$$

对每个单射 $i\colon A \to B$。以显然的方式，这给出一个函子 Spectra $\times$ I-单纯集$_* \to$ Spectra，我们照例将其提升为

$$-\otimes -\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra} \times \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{\mathcal{I}}\text{-}\mathbf{SSet}_* \to \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}. \tag{4.4}$$

换言之，对任意 G-谱 X 以及任意 G-$\mathcal{I}$-单纯集合 Y，有等式 $X \otimes Y = \Delta^*(X \wedge Y)$；这里的逐层 smash 积为 $\boldsymbol{G}$-Spectra $\times \boldsymbol{G}$-I-单纯集$_* \to G$-Sp$(\underline{\mathscr{L}}_*) = G$-Sp$(\underline{\mathscr{L}})$，映射也同样如此。

命题 4.8。张量积 (4.4) 在每个变量上都保持 G-全局弱等价。

证明。设 X 是一个 G-谱，并设 $g\colon Y \to Y'$ 是 G-I-SSet$_*$ 中的一个全局弱等价。我们将证明 $X \otimes g$ 甚至是一个同构。为此，任取一个同态 $\varphi\colon H \to G$。那么， $\varphi^*(X \otimes g) = (\varphi^* X) \otimes (\varphi^* g)$ 在 π_*^H 上的作用，与 $\varphi^* X \wedge (\varphi^* g)(\mathcal{U}_H)$ 的作用在由同构共轭意义下相同，参见 [Len20，引理 3.2.11]。但是 $(\varphi^* g)(\mathcal{U}_H)$ 是一个等变弱等价，因此 $\varphi^* X \wedge (\varphi^* g)(\mathcal{U}_H)$ 甚至是一个等变层级弱等价，特别地是一个同构。由此完成证明：张量积在第二个变量上保持 G-全局弱等价。

另一方面，设 $f\colon X \to X'$ 是一个 G-全局谱之间的全局弱等价，并设 Y 是任意一个 G-全局空间；我们要证明 $f \otimes Y$ 是一个 G-全局弱等价。与上文完全相同地论证可知，$- \otimes Y$ 保持 $\underline{\pi}_*$-同构，因此不失一般性，我们可以假设 f 是平坦 G-谱之间的映射。在此假设下， [Len20, Proposition 3.2.14] 为我们提供了

一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X \wedge \Sigma^\bullet Y & \xrightarrow[\sim]{\psi} & X \otimes Y \\ {\scriptstyle f\wedge\Sigma^\bullet Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes Y} \\ X' \wedge \Sigma^\bullet Y & \xrightarrow[\psi]{\sim} & X' \otimes Y \end{array}$$

其中水平映射是 $\underline{\pi}_*$-同构（特别是 G-全局弱等价）。由命题 1.47，左侧的垂直箭头是一个 G-全局弱等价，因此根据三取二，结论成立。□

命题 4.6 的证明。由引理 4.5，只需证明 Δ^* 是同伦的。我们已经知道 Δ^* 保持无圈纤维化，因此只需证明它也将无圈余纤维化映为弱等价。为此，我们将证明 Δ^* 作为到 $\boldsymbol{G}$-谱的函子实际上也是左 Quillen。

我们先证明 Δ^* 作为函子 $G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{O}})_{\text{proj. } G\text{-全局层}} \to \boldsymbol{G}\text{-谱}_{\text{inj. } G\text{-global}}$ 是左 Quillen。事实上，它显然将生成余纤维化映为单射余纤维化，因此只需证明它将生成无圈余纤维化映为弱等价。这样的生成无圈余纤维化现在具有形式 $\mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge_{\Sigma_A} j_+$，其中 $A \in \mathbf{\Sigma}$ 是 j 在 $(\boldsymbol{G} \times \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{A}})$-I-单纯集中的一个（生成）无圈余纤维化。于是

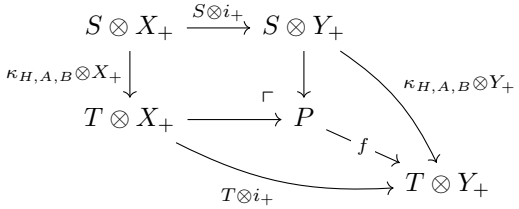
$$\Delta^*(\mathbf{\Sigma}(A,-) \wedge_{\Sigma_A} j_+) = (\mathbf{\Sigma}(A,-) \otimes j_+)/\Sigma_A; \tag{4.5}$$

但是，根据命题 4.8，$\mathbf{\Sigma}(A, –) \otimes j_+$ 是一个（$G \times \Sigma_A$）-全局弱等价，并且Σ_A 在 $\mathbf{\Sigma}(A, –)$ 上自由作用，因此命题 1.45 表明，商（4.5）是一个 G-全局弱等价。这就完成了层模型结构的论证。

对于实际断言，根据命题 3.26，现在只需证明 Δ^* 将（3.9）中的集合 S_G 内的映射发送为弱等价，即证明映射 $\kappa_{H,A,B} \,\square_H\, i_+$对于有限群 H、有限 H-集 A、B以及生成余纤维化 i成立：$X \to Y$是 $(\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H})$-I-单纯集$_*$上的投射模型结构。

为此，我们将按照定理 1.28 选取生成余纤维化（从而它们是余纤维对象之间的映射），并证明 $f := \Delta^*(\kappa_{H,A,B} \square i_+)$ 是一个（$G \times H$）-全局弱等价；随后，根据命题 1.45，由于 f 是一个单射余纤维化，并且 H 在投射余纤维的（$G \times H$）-全局空间上逐层自由地作用，该断言即可推出。

要证明 f是一个（$G \times H$）-全局弱等价，令 S、T分别表示 $\kappa_{H、A、B}$ 的源对象和目标对象，并考虑其像



在定义 $\kappa_{H,A,B} \,\square\, i_+$ 的图表中 Δ^* 之下。现在，$\kappa_{H,A,B}$ 是 H-等变弱等价，且其对象是 H-等变射影余纤维的 H-谱，因此由命题 1.48 可知它是 H-全局弱等价，进而相对于平凡的 G-作用，它是 $(G \times H)$-全局弱等价。因此，命题 4.8 表明 $\kappa_{H,A,B} \otimes X_+$ 和 $\kappa_{H,A,B} \otimes Y_+$ 都是 $(G \times H)$-全局弱等价。但另一方面，直接检查可知 $\kappa_{H,A,B} \otimes X_+$ 也是单射余纤维化，因此推出 $S \otimes Y_+ \to P$ 仍是 $(G \times H)$-全局弱等价。由三取二可得，f 也是 $(G \times H)$-全局弱等价，由此完成

证明 $\Delta^*(\kappa_{H,A,B}\square_H i_+)$ 是 G-全局弱等价，从而完成该命题的证明。□

命题 4.9. 设 H 是有限群， A 是有限的忠实 H-集，且 $\varphi\colon H\to G$ 是任意同态。那么单位

$$\eta\colon \mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_\varphi G_+\to \Delta^*\Delta_!(\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_\varphi G_+)$$

是一个 G-全局弱等价。

证明。根据构造， η 是由“对角映射” $\mathbf{\Sigma}(A,-)\to\mathbf{\Sigma}(A,-)\otimes\mathcal{I}(A,-)_+$ 诱导的；特别地，它有一个由唯一映射 $p\colon \mathcal{I}(A,-)\to *$ 诱导的左逆。根据三取二，只需证明 $(\mathbf{\Sigma}(A,-)\otimes p_+)\wedge_\varphi G_+=\varphi_!(\mathbf{\Sigma}(A,-)\otimes p_+)$ 是一个 G-全局弱等价。

为此，我们注意到 p 是一个 H-全局弱等价，因此根据命题 4.8， $\mathbf{\Sigma}(A,-)\otimes p_+$ 也是如此。由忠实性可知， H 在基点之外的 $\mathbf{\Sigma}(A,-)$ 上自由作用，因此根据命题 1.45，结论再次成立。□

定理 4.3 的证明。由于 $\mathrm{R}\Delta^*$ 是保守的（引理 4.5），只需证明导出单位在同伦范畴中是同构。由于 Δ^* 是同伦的（命题 4.6），这相当于说明，对于每个投射余纤维的 G-全局谱 X，普通单位 $X\to\Delta^*\Delta_!X$ 是一个 G-全局弱等价。

这是一个标准的胞腔归纳论证：也就是说， $\Delta_!$ 是左 Quillen，而 Δ^*是一个将余纤维化映为单射余纤维化的左伴随，因此只需对标准生成余纤维化的源对象和目标对象证明该结论，例如参见 [Len20, Lemma 1.2.64]。然而，这些对象具有如下形式： $\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_\varphi G_+\wedge K_+$，其中 K是一个单纯集合；由于在 SSet 上的张量化是同伦的，且单位与张量化相容（$\Delta_!\dashv\Delta^*$ 是一个单纯伴随），该结论便由前一个命题推出。□

5. Global brave new algebra

现在，我们将注意力转向稳定的 G-全局同伦理论中的乘法结构，推广 Schwede [Sch18，第 5 章]以及 Hausmann [Hau19，第 3 节]中关于 $G=1$ 的结果。

5.1. 正模型结构。即使在非等变情形下，从模型范畴视角研究交换环谱，也需要引入适当的“正”模型结构。本小节致力于构造正平坦和射影 G-全局模型结构；不过，由于这项工作大多与通常的 G-全局模型结构的构造完全平行 [Len20，3.1]，，这里我们将略作简述。

命题 5.1. 在 G-谱上存在唯一的模型结构，使得映射f 是弱等价或纤维化，当且仅当对于每个非空有限集 A， $f(A)$ 分别是 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,\,G}$-弱等价或纤维化。我们称之为正 G-全局投射层模型结构，其弱等价称为正 G-全局层弱等价。该结构是组合的，且其生成余纤维化为

$$\{\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge_\varphi G_+\wedge(\partial\Delta^n\hookrightarrow\Delta^n)_+ : A\neq\varnothing, H\subset\Sigma_A,\varphi\colon H\to G, n\geq 0\},\tag{5.1}$$

其中的单纯的、适当的和滤过余极限都是同伦的。

证明。要证明上述生成余纤维化所确定的模型结构存在且是余纤维生成的（因而是组合的），只需检验 [Sch18，命题 C.23] 中的“一致性条件”，该条件适用于 $(G\times\mathbf{\Sigma}_A)$-SSet$_*$ 上的 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,G}$-模型结构，以及 $(G\times\mathbf{\Sigma}_\varnothing)$-SSet$_*$ 上仅以同构为余纤维化的模型结构。然而，显然，对于 $A\neq\varnothing$ 每个

$\mathbf{\Sigma}(A,B)\ \wedge_{\Sigma_A} -$ 将 $(\boldsymbol{G}\times\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{A}})$-SSet$_*$ 的通常生成无圈余纤维化映为单射余纤维化和弱等价（另见 [Len20，命题 3.1.20] 的证明），甚至在 $A=\varnothing$ 的情况下映为同构。

右适当性、关于滤过余极限的陈述，以及单纯形模型范畴的拉回幂公理都可立即得出，因为所有相关构造和概念都是逐层定义的。最后，所有（生成）余纤维化都是单射余纤维化，因此同理可得左适定性。□

同理可得：

命题 5.2。在 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，使得映射 f 是弱等价或纤维化，当且仅当对于每个 $A\neq\varnothing$，$f(A)$ 在单射 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,G}$-模型结构中分别是弱等价或纤维化。我们称之为正平坦 G-全局层模型结构；其弱等价仍是 G-全局正层弱等价。此外，该模型结构是组合的，且其生成余纤维化为

$$\{(\mathbf{\Sigma}(A,-)\wedge G_+)/H\wedge(\partial\Delta^n\hookrightarrow\Delta^n)_+ : A\neq\varnothing, H\subset\Sigma_A\times G, n\geq 0\}, \tag{5.2}$$

它具有单纯性、适当性，且其中的滤过余极限是同伦的。□

注记 5.3。上述生成余纤维化与 Hausmann 在 [Hau17 命题 2.28] 之后的讨论中给出的 G-等变正平坦模型结构的生成余纤维化一致。特别地，上述余纤维化与群 G 无关，并且与 Hausmann 所称的正平坦余纤维化一致，参见同上注记 2.20。

为了后续使用，我们记录它与通常的射影余纤维化和平坦余纤维化之间的如下关系：

引理 5.4。设 $f\colon X\to Y$ 是 $\boldsymbol{G}$-谱中的一个映射。那么：

(1) f 是正平坦余纤维化，当且仅当它是平坦余纤维化且 $f(\varnothing)$ 是同构。(2) f 是正 G- 全局射影余纤维化，当且仅当它是 G- 全局射影余纤维化且 $f(\varnothing)$ 是同构。

证明。由 [Sch18 中命题 C.23] 以挂接映射刻画余纤维化的结果可立即得出。□

定义 5.5. 若一个 G-谱 X 对每个有限群 H、任意非空有限忠实 H-集 A 以及每个有限 H-集B，其伴随结构映射

$$X(A)\to\mathbf{R}\Omega^B X(A\amalg B)$$

是一个 $\mathcal{G}_{H,G}$-弱等价。

和之前一样，如果 X 在上述任一种正层模型结构中是纤维对象，那么该映射由通常的伴随结构映射表示。

命题 5.6. 在 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，其余纤维化为正 G-全局射影余纤维化，弱等价为通常的 G-全局弱等价。我们称之为正 G-全局射影模型结构。其纤维对象恰好是正向射影分层纤维的正 G-全局 Ω-谱。

此外，它仍然是组合的，具有生成余纤维化 (5.1)，是单纯的、适当的，而且其中的滤过余极限是同伦的。

证明。我们首先构造一个 Bousfield 局部化，使其纤维对象如上所述。为此，我们回顾注 1.15 中针对有限群 H 和有限 H-集 A, B 的映射 $\lambda_{H,A,B}\colon S^B \wedge \mathbf{\Sigma}(A \amalg B, -) \to \mathbf{\Sigma}(A, -)$。遍历所有从有限群到 H 的同态 $\varphi\colon H \to G$，并将 A 限制为非空忠实 H-集后，映射 $\varphi_!\lambda_{H,A,B}$ 就是正 G-全局投射层模型结构中余纤维对象之间的映射，它们余表示伴随结构映射的 φ-不动点。将每个映射分解为余纤维化 $\kappa_{\varphi,A,B}$，后接一个 G-全局正层弱等价后，将 Lur09, Proposition A.3.7. 应用于所有 $\kappa_{\varphi,A,B}$ 的集合，即可得到一个 Bousfield 局部化，其纤维对象如上所述；它也自动仍然是组合的、左适当的、单纯的，而且其中的滤过余极限是同伦的（最后一条见 [Len20, Lemma A.2.4] ）。

现在我们断言，弱等价与 G-全局弱等价一致。为此，我们首先注意到，根据引理 3.27，恒等函子构成一个 Quillen 伴随$\boldsymbol{G}$-谱$_{\text{positive } G\text{-全局射影}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}$-谱$_{G\text{-global 射影}}$，因为左伴随保余纤维化，而右伴随保纤维对象。另一方面，一个简单的余终性论证表明，正向 G-全局层弱等价是 $\underline{\pi}_*$-同构，因此特别是 G-全局弱等价，所以以上模型结构中的每个弱等价都是 G-全局弱等价。

反过来，设 $f\colon X \to Y$ 是一个 G-全局弱等价；我们要证明它是以上模型结构中的弱等价。利用前述方向以及以上模型结构中的函子性分解，根据三取二性质，我们可以将问题归结为 X 和 Y 在上述意义下是纤维的情形，即它们是正向 G-全局 Ω-谱且是正向射影分层纤维。此时，自然映射$X \to \Omega\,\mathrm{sh}\,X$、$Y \to \Omega\,\mathrm{sh}\,Y$是正向 G-全局层弱等价，而 $\Omega\,\mathrm{sh}\,f$是 G-全局 Ω-谱之间的 G-全局弱等价，因此特别是一个（正向）G-全局层弱等价。于是，再次应用三取二性质可知，f 也是一个正向 G-全局层弱等价，因此特别是以上模型结构中的弱等价，证毕。

最后我们注意到，尽管右适当性的定义如此，右适当性并不依赖于纤维化类 [Rez02，命题 2.5], 因此，正G-全局投射模型结构的右适当性可由通常的 G-全局投射模型结构的右适当性推出。□

命题 5.7。 $\boldsymbol{G}$-谱上存在唯一的模型结构，其余纤维化为正平坦余纤维化，弱等价为通常的G-全局弱等价。我们称之为正平坦 G-全局模型结构。其纤维对象恰好是那些在正平坦 G-全局层模型结构中为纤维对象的正 G-全局 Ω-谱。

此外，该模型结构同样是组合的，具有生成余纤维化 (5.2)，是单纯的、适当的，并且其中的滤过余极限是同伦的。

证明。与前面完全相同地推理，可得一个具有所需余纤维化和纤维对象的模型结构。根据关于 Bousfield 局部化的抽象理论，映射 f 在此模型结构或前一命题中的模型结构里是弱等价，当且仅当对于每个正 G-全局 Ω-谱T，映射 $[f, T]$ 都是双射；其中 $[,]$ 表示对正 G-全局层弱等价进行局部化后得到的同态集。特别地，该模型结构的弱等价与前一命题中的弱等价一致，也就是 G-全局弱等价。

最后，其余所有性质都与前一个命题完全相同地得到证明。□

注 5.8. 对于 $G = 1$，上述两个模型结构再次一致，并且它们恢复了 Hausmann 的正全局模型结构 [Hau19, 定理 2.18]。

注 5.9. 我们无需明确知道上述模型结构中的生成无圈余纤维化具体是什么样的。不过，我们记录一条供后文使用的事实：生成余纤维化 (5.2) 是余纤维对象之间的映射，因此 [Bar10, 推论 2.7] 表明，我们也可以为正 G-全局平坦模型结构找到一组生成无圈余纤维化，其中的映射均为余纤维对象之间的映射。

接下来，我们讨论函子的函子性：

引理 5.10. 设 $\alpha\colon H \to G$ 是任意同态。则我们有 Quillen 伴随

$$\alpha_!\colon \boldsymbol{H}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } H\text{-global proj.}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } G\text{-global proj.}} : \alpha^*$$
$$\alpha^*\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } G\text{-global flat}} \rightleftarrows \boldsymbol{H}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } H\text{-global flat}} : \alpha_*.$$

证明. 对于第一个结论，我们首先注意到，由引理 1.5 可知，这对相应的层模型结构成立。对于这里实际考虑的模型结构，只需直接检查 α^* 将纤维对象映为正H-全局 Ω-谱。

对于第二个结论，显然， α^* 保留正平坦余纤维化，并将 G-全局弱等价映为 H-全局弱等价。□

引理 5.11. 设 $\alpha\colon H \to G$ 是单射。则我们也有 Quillen 伴随

$$\alpha_!\colon \boldsymbol{H}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } H\text{-global flat}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } G\text{-global flat}} : \alpha^*$$
$$\alpha^*\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } G\text{-global proj.}} \rightleftarrows \boldsymbol{H}\text{-}\mathbf{Spectra}_{\text{pos. } H\text{-global proj.}} : \alpha_*.$$

证明。对于第一个陈述，我们直接检查可知， $\alpha_!$ 将生成余纤维化映为生成余纤维化；根据命题 1.44，它也是同伦的。

对于第二个陈述，层级模型结构中的相应陈述由以下事实得出：根据引理 1.5， α^* 将 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,G}$-余纤维化映为 $\mathcal{G}_{\Sigma_A,H}$-余纤维化。由于 α^* 是同伦的，实际断言随即成立。□

仿照通常的模型结构进行论证，我们便可由上文得出：

推论 5.12。对于变化的 G ，正 G-全局射影对象和平坦模型结构使谱成为一个全局模型范畴 $\underline{\mathscr{S}p}^+$。□

另一方面，直接根据余纤维化和弱等价的定义，我们有：

推论 5.13。恒等映射定义了一个全局 Quillen 等价 $\underline{\mathscr{S}p}^+ \rightleftarrows \underline{\mathscr{S}p}$。 □

最后，我们来记录楔积相对于上述模型结构的性质：

推论 5.14。楔积 $\boldsymbol{G}$-谱 $\times$ $\boldsymbol{G}$-谱 $\to$ $\boldsymbol{G}$-谱在以下每种情形下都是左 Quillen 双函子：

(1) 源对象上采用 G-全局正平坦模型结构和 G-全局平坦模型结构，目标对象上采用 G-全局正平坦模型结构；(2) 源对象上采用 G-全局正平坦模型结构和 G-全局投射模型结构，目标对象上采用 G-全局正投射模型结构；(3) 源对象上采用 G-全局正投射模型结构和 G-全局平坦模型结构，目标对象上采用 G-全局正投射模型结构。

证明。对于通常的投射模型结构和平坦模型结构，这就是定理 1.46。由此结合引理 5.4 以及对所有对称谱 X, Y 都成立的自然同构 $(X \wedge Y)(\varnothing) \cong X(\varnothing) \wedge Y(\varnothing)$，即可得到这些断言。□

5.2. Smash 幂与范数。接下来，我们讨论 smash 幂的同伦性质。

构造 5.15. 设 X 是一个 G-谱，并设 $n \geq 1$。那么， n重 smash 幂 $X^{\wedge n}$ 带有 n 个彼此交换的 G-作用，以及一个 Σ_n-作用（通过置换各因子）。这些作用共同组成缠绕积 $\Sigma_n \wr G = \Sigma_n \ltimes G^n$的一个自然作用，从而将 $(-)^{\wedge n}$ 提升为函子 $\boldsymbol{G}$-谱 $\to (\boldsymbol{\Sigma_n \wr G})$-谱。

构造 5.16. 设 $H \subset G$ 为有限群，并令 $n := |G/H|$。那么，任取右 H-陪集代表元 g_1、……、g_n，即可定义一个单同态ι: $G \to \Sigma_n \wr H$，如下所示： $\iota(g) = (\sigma(g);\ h_1(g)\ldots\ldots,\ h_n(g))$，其中 $gg_i = g_{\sigma(g)(i)}h_i(g)$。复合映射

$$N_H^G\colon \boldsymbol{H}\text{-}\mathbf{Spectra} \xrightarrow{(-)^{\wedge n}} (\boldsymbol{\Sigma_n \wr H})\text{-}\mathbf{Spectra} \xrightarrow{\iota^*} \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra} \tag{5.3}$$

于是称其为（Hill-Hopkins-Ravenel）范数。

就我们的目的而言，关于范数的等变行为，关键结果如下：

定理 5.17。复合映射 (5.3) 将 H-等变弱等价（平坦 H-谱之间）映为 G-等变弱等价（平坦 G-谱之间）。

证明。这是 [Hau17 定理 6.8] 的特殊情形 $N = 1$ 。 □

现在我们想从 G-全局的视角考察 smash 幂和范数。这里我们将证明以下更强的结果：

定理 5.18。设 $f\colon X \to Y$ 是一个 G-全局弱等价，并假设 X 和 Y 是平坦的。那么 $f^{\wedge n}$ 是一个 $(\Sigma_n \wr G)$-全局弱等价。

沿上述同态限制后， ι 这立即意味着：

推论 5.19. 设 $H \subset G$ 是有限群。则 N_H^G: $\boldsymbol{H}$-谱 $\to \boldsymbol{G}$-谱将平坦 H-谱之间的 H-全局弱等价映为平坦 G-谱之间的 G-全局弱等价。□

定理 5.18 的证明。设 $f\colon X \to Y$ 是平坦 G-谱之间的 G-全局弱等价。首先，我们将证明 $f^{\wedge n}$ 是一个 $(\Sigma_n \wr G)$-等变弱等价。为此，关键观察是：尽管范数是用 smash 幂定义的，但在全局情形下，我们也可以反过来处理，参见 [Sch18，注 5.1.7-(iv)]。具体而言，令 $K \subset \Sigma_n \wr G$ 为满足 $\sigma(1) = 1$的那些 $(\sigma;\ g_1, \ldots, g_n)$ 所构成的子群，它带有一个投影同态$\pi\colon K \to G, \pi(\sigma;\ g_1, \ldots, g_n) = g_1$。现在，对每个 $i = 1, \ldots, n$ 固定一个满足 $\sigma_i(1) = i$的置换σ_i，则 $(\sigma_i; 1, \ldots, 1)$ 构成 $(\Sigma_n \wr G)/K$ 的陪集代表系；根据定义不难验证，由此得到的同态 $\iota\colon \Sigma_n \wr G \to \Sigma_n \wr K$ 具有如下形式

$$(\sigma; g_1, \ldots, g_n) \mapsto (\sigma; (?; g_1, ?, \ldots), (?; g_2, ?, \ldots), \ldots)$$

其中，“?”表示我们不关心的条目。

根据对 f 的假设， $\pi^* f$ 是一个 K-等变弱等价，因此由定理 5.17， $N_K^{\Sigma_n \wr G}(\pi^* f)$ 是一个 $(\Sigma_n \wr G)$-等变弱等价。不过，根据上面对 ι 的描述，这与作为 $(\Sigma_n \wr G)$-谱之间的映射的 $f^{\wedge n}$ 一致，从而完成了该断言的证明。

现在设 $\varphi\colon H \to \Sigma_n \wr G$ 是任意映射。我们需要证明， $\varphi^*(f^{\wedge n})$ 是一个H-等变弱等价。为此，我们将 f 视为一个 $(G \times H)$-谱映射

通过平凡的 H-作用。将上文中的 G 替换为 $G\times H$ 后应用上述结论，可知 $f^{\wedge n}$ 是一个 $\Sigma_n\wr(G\times H)$-等变弱等价，其中 H 的所有副本都平凡作用。现在沿着单同态限制即可得到所述结论

$$H \xrightarrow{(\varphi,\mathrm{id})} (\Sigma_n\wr G)\times H \xrightarrow{\delta} \Sigma_n\wr(G\times H)$$

其中 δ 由 $\delta(\sigma;\ g_1,\dots,g_n;\ h) = (\sigma;(g_1,h)\dots,(g_n,h))$ 给出。 □

最后，我们来讨论正模型结构的一项关键性质，借助它我们将在下文为交换代数建立模型结构：

引理 5.20. 设 X 是一个正平坦谱，且令 $n\geq 1$。那么， Σ_n在 $X^{\wedge n}$ 上的作用在基点之外是逐层自由的。

证明. 这是 [Har14, 命题 7.7*-(a)] 的一个特例。 □

推论 5.21. 设 $f\colon X\to Y$ 是一个 G-全局弱等价，并假设 X 和Y 是正平坦的。那么，$f^{\wedge n}/\Sigma_n$ 仍是一个 G-全局弱等价。

证明。由定理 5.18， $f^{\wedge n}$ 是一个（$\Sigma_n\wr G$）-全局弱等价，因此特别是一个（$\Sigma_n\times G$）-全局弱等价。根据前述引理， Σ_n 在源对象和目标对象上都自由作用，故结论成立。□

5.3. 模的全局模型范畴。以下始终设 G 为一个有限群。

定义 5.22. G-全局环谱是 $\boldsymbol{G}$-谱中的一个幺半群 R （相对于楔积）。我们将 $\boldsymbol{G}$-谱中以幺半群 R为底的（左）模范畴记作 Mod_R^G （如果上下文清楚，则简称为 Mod_R ），其中 G 。

命题 5.23. 设 R 是一个 G-全局环谱。那么， $\boldsymbol{G}$-谱上的正射影和正平坦 G-全局模型结构可沿自由-遗忘伴随传递

$$R\wedge -\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra} \rightleftarrows \mathbf{Mod}_R :\mathbb{U}.$$

该模型结构是适当的、单纯的且组合的，其生成余纤维化为 $R\wedge I$ ，生成无圈余纤维化为 $R\wedge J$ ；这里所用的是正射影/平坦 G-全局模型结构的一组生成（无圈）余纤维化 I、 J 。此外，其中的滤过余极限是同伦的。

证明。为了证明模型结构存在，我们验证 Crans-Kan 转移判据的假设。由局部可呈现性，每个集合都满足小对象论证，因此只需证明：对于某个（因而任意一个）由 J 生成的 $\boldsymbol{G}$-谱的无圈余纤维化集合，遗忘函子 $\mathbb{U}$ 会将相对 $(R\wedge J)$-胞腔复形映为弱等价。然而， $\mathbb{U}$ 也是左伴随函子，因此只需证明它将 $R\wedge J$ 中的映射映为单射 G-全局模型结构中的无圈余纤维化。取 J 为由余纤维对象之间的映射组成的集合（见注 5.9），由命题 1.47 可立即得出此结论。

显然，该模型结构在上述生成（无圈）余纤维化下是组合的、右适当的且单纯的，并且其中的滤过余极限是同伦的。要证明它也是左适当的，只需注意到，根据上述结果， $\mathbb{U}$ 作为函子到 $\boldsymbol{G}$-谱上的单射 G-全局模型结构中时也是左 Quillen 函子。因此，由 $\boldsymbol{G}$-谱左适当这一性质即可得出结论：G-global 单射，根据 Len20，引理 A.2。15]。□

注 5.24。通常的射影对象模型结构和平坦模型结构也同样成立（通过相同的论证）；不过，对我们而言，上述版本会更加方便，因为稍后我们希望将上述内容与交换代数范畴联系起来。

构造 5.25。设 H 是一个有限群。将 $\boldsymbol{H}$-Mod_R^G 识别为 $(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{G})$-谱中模的范畴（其中 H 在 R 上平凡作用），我们在 $\boldsymbol{H}$-Mod_R^G 上得到正射影对象模型结构和平坦模型结构；等价地，这些模型结构沿着显然的遗忘函子从 $(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{G})$-谱转移而来。

引理 5.26. 上述内容使 Mod_R^G 成为一个全局模型范畴 $\underline{\mathscr{M}}_R^G$。

证明. 我们已经注意到，所有这些模型结构都是组合的、单纯的且（左）适当的。要完成预全局模型范畴定义的证明，只需指出，对于任意 $\alpha\colon H\to H'$，α^* 与 $\mathbb{U}$ 和 $R\wedge$均交换，因此通过取伴随变换，α_* 与 $\mathbb{U}$ 交换；由此，所有函子性性质都可由 $\underline{\mathscr{S}p}^+$的相应结论推出。

同样，$\underline{\mathscr{M}}_R^G$ 是一个全局模型范畴这一事实，可由 G-$\underline{\mathscr{S}p}^+$ 的相应结果，利用命题 2.10 的第三种表述得出。□

推论 5.27. 全局模型范畴 $\underline{\mathscr{M}}_R^G$ 是稳定的。

证明. 设 H 是一个有限群，A 是一个有限 H-集。那么 $S^A\wedge$与遗忘函子 $\mathbb{U}$交换，因此是同伦的。因此，（总体或等价地，左）导出函子也交换。同样，Ω^A 与 $\mathbb{U}$交换；由于二者都是右 Quillen 函子，它们的右导出函子也交换（通过上述等价的伴随变换）。由 G-$\underline{\mathscr{S}p}$ 的相应结论（命题 3.6）即可立即得到所述结论，因为 Ho($\mathbb{U}$)是保守的。□

引理 5.28. 设 G 是一个有限群，且 R 是一个平坦的 G-全局环谱。那么我们有全局 Quillen 伴随

$$\underline{R\wedge -}\colon G\text{-}\underline{\mathscr{S}p}^+ \rightleftarrows \underline{\mathscr{M}}_R^G : \underline{\mathbb{U}} \qquad and \qquad \underline{\mathbb{U}}\colon \underline{\mathscr{M}}_R^G \rightleftarrows G\text{-}\underline{\mathscr{S}p}^+ : \underline{F(R,-)}$$

此外，$R\wedge$– 和 $\underline{\mathbb{U}}$ 都是同伦的。

证明. 根据定义，$\mathbb{U}$ 在任一模型结构中都保持弱等价和纤维化；特别地，它是右 Quillen 的。此外，根据命题 5.14，它将生成余纤维化映为余纤维化，因此它也是左 Quillen 的。最后，根据平坦性定理（命题 1.47），$R\wedge$– 也是同伦的。□

由于 Mod_R^G 是一个稳定模型范畴，其同伦范畴自然是一个三角范畴。为供后文使用，我们记录其上的一个 t-结构；为此，首先需要回顾 G-全局谱的真正同伦群（与之前讨论的朴素同伦群相对）：

构造 5.29. 设 X 是一个 G-全局谱，设 $\varphi\colon H\to G$ 是从有限群 H 出发的同态，并设 $k\in\mathbb{Z}$。我们将真正的 k 阶 φ-等变同伦群定义为

$$\hat{\pi}_k^{\varphi}(X) := [\Sigma_+^{\bullet+k} I(H,-)\times_{\varphi} G, X],$$

其中 $[,]$ 表示 G-全局稳定同伦范畴中的同态集；注意，由于后者的可加性，$\hat{}\pi_k^{\varphi}(X)$ 带有自然的阿贝尔群结构；此外，借助三角范畴的一般性质，特异三角会在 $\hat{}\pi_*^{\varphi}$ 中诱导长正合序列。

此外，对于变化的 φ，我们用 $\hat{}\underline{\pi}_k(X)$ 表示所有 φ-等变同伦群及其间所有自然映射所构成的集合。对于 $G=1$，根据 Sch22，注 6.5]，这一结构可以明确描述为一个全局（Mackey）函子 [；对于非平凡的 G，我们将不需要明确描述。

注 5.30. X 的真正 φ等变同伦群，也可以等价地描述为 H等变谱φ^*X的真正 H等变同伦群，参见 [Len20, 推论 3.3.4]。

命题 5.31. 设 R 是一个 G-全局环谱。

(1) 三角范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)$ 是紧生成的，其生成元为有限集 A、子群 $H \subset \Sigma_A$ 及同态 $\varphi\colon H \to G$ 所对应的 $R \wedge \Sigma_+^\bullet\big(I(A, -) \times_\varphi G\big)$。(2) 假设 R 是连通的，即对于每个 $k < 0$，底层 G-全局谱的真同伦群 $\hat{}\underline{\pi}_k R$ 都是平凡的。那么 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)$ 带有一个 t-结构，其

- 连通部分是连通的 R-模
- 余连通部分是指那些 R-模 X，它们在如下意义下是余连通的：对所有 $k > 0$，$\hat{}\underline{\pi}_k X = 0$ 都成立。此外，连通部分是包含上述生成元且对余积、扩张和悬挂封闭的最小子范畴。

证明。对于 $R = \mathbb{S}$，即 G-全局谱的情形，这些结论属于 [CLL23a 定理 7.112]及其证明的一部分。

现在我们将由此推导出一般情形。为此，我们首先注意到有一个正合伴随

$$R \wedge^{\mathbf{L}} -\colon \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^G) : \mathbb{U} \tag{5.4}$$

其右伴随按构造是保守的，因此 $R \wedge \Sigma_+^\bullet I(A, -) \times_\varphi G$ 构成一组生成元（这里我们暗中使用了命题 1.47，将 $R \wedge^{\mathbf{L}} \Sigma_+^\bullet I(A, -) \times_\varphi G$ 识别为非导出 smash 积）。现在我们注意到，G-全局谱的余积是同伦的（Len20，引理 3.143] ），而且 $\mathbb{U}$ 在点集层面保持这些余积；由此可知，Mod_R^G 中的余积也是同伦的，并且 (5.4) 中的右伴随保持余积，因此其左伴随保持紧对象。这就完成了第一个陈述的证明。

对于第二个结论，我们结合上述结果与 [ATLS03，定理 A.1] ，在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)$ 上得到一个 t-结构，其连通部分是由 $R \wedge \Sigma_+^\bullet I(A, -) \times_\varphi G$ 所生成的、对余积、悬挂和扩张封闭的最小子范畴；我们断言这就是上文所述的 t-结构。为证明这一点，我们首先注意到，在此 t-结构下，一个 R-模 X 是余连通的，当且仅当对所有 $T \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)_{\geq 0}$，都有 $[\Sigma T, X] = 0$。取特例 $T = R \wedge \Sigma_+^{\infty+k} I(A, -) \times_\varphi G$ 并使用伴随同构可知，此时 X 按照上述意义是余连通的。反过来，固定 X，容易看出，满足对所有 $k > 0$ 都有 $[\Sigma^k T, X] = 0$ 的对象类 T 对余积、悬挂和扩张封闭（最后一点可由长正合序列得到）；因此，如果 X 的正次数同伦群均为零，那么 $X \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)_{\leq 0}$。

为识别连通部分，我们首先证明：

断言。设 X、Y 为连通的 G-全局谱。则导出 smash 积 $X \wedge^{\mathbf{L}} Y$ 仍然是连通的。

证明。导出 smash 积来自一个左 Quillen 双函子，因此它在每个变量中都保持余积，并且在每个变量中都是正合的。根据上文回顾的 G-全局谱上的 t-结构，因此只需证明：G-全局模型结构的上述任意两个生成元的（导出，或等价地，非导出）smash 积仍然是连通的。然而，一个简单的 Yoneda 论证表明，$\Sigma_+^\bullet I(A, -) \wedge \Sigma_+^\bullet I(B, -) \cong \Sigma_+^\bullet I(A \amalg B, -)$ 自然地关于 A 和 B，因此

$$\big(\Sigma_+^\bullet I(A, -) \times_\varphi G\big) \wedge \big(\Sigma_+^\bullet I(B, -) \times_\psi G\big) \cong \Sigma_+^\bullet \big(I(A \amalg B) \times (G \times G)\big)/(H \times K)$$

（其中 $H \subset \Sigma_A$、$K \subset \Sigma_B$ 分别是 φ 和 ψ 的源对象），显然它仍然是连通的。△

由于 R 是连通的，该断言表明，保持余积的正合函子 $\mathbb{U}$: Ho(Mod$_R^G$) $\to$ Ho(***G***-谱) 将选定的生成元映射为连通谱；因此，Ho(Mod$_R^G$)$_{\geq 0}$ 包含于 Ho(***G***-谱)$_{\geq 0}$ 在 $\mathbb{U}$ 下的原像中，即 Ho(Mod$_R^G$)$_{\geq 0}$ 的所有对象按上述意义都是连通的。反过来，若 X 是连通的，则有一个 distinguished 三角

$$X_{\geq 0} \to X \to X_{\leq -1} \to \Sigma X_{\geq 0}$$

根据 t-结构的公理，$X_{\geq 0} \in$ Ho(Mod$_R^G$)$_{\geq 0}$ 和 $X_{\leq -1} \in$ Ho(Mod$_R^G$)$_{\leq -1}$。由上述结果可知，$X_{\geq 0}$ 是连通的，因此根据长正合序列，$X_{\leq -1}$ 也是连通的。但另一方面，根据上述对余连通部分的刻画，$X_{\leq -1}$ 的非负同伦群均为零，因此 $X_{\leq -1} = 0$，进而 $X \cong X_{\geq 0} \in$Ho(Mod$_R^G$)$_{\geq 0}$，如所述。□

作为推论 5.27 的结果，悬挂谱—环空间伴随给出了 $\underline{\mathscr{M}}_R^G$ 与其稳定化 Sp($\underline{\mathscr{M}}_R^G$) 之间的全局 Quillen 等价，因此后者不包含新的同伦论信息。尽管如此，这个具体模型在之后与其他稳定化进行比较时会很有用。最后，我们将进一步了解它的弱等价。

引理 5.32. 设 R 是一个 G-全局环谱。那么，Sp($\underline{\mathscr{M}}_R^G$) 中的 G-全局弱等价在沿单射余纤维化（即逐层单射）作推出时仍然是全局弱等价，而且在任意滤过余极限下也如此。

证明. 对于第一个结论，设 $i\colon X \to Y$ 是一个单射余纤维化，且令 $f\colon X \to Z$ 是一个 G-全局弱等价。我们将 f 分解（例如，在投射模型结构中）为一个无圈余纤维化 k，后接一个无圈纤维化 p；特别地，p 是一个 G-全局层弱等价。于是我们有一个迭代推出方块

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{f}{\frown} & & \\ X & \xrightarrow[k]{\sim} & H & \xrightarrow[p]{\sim} & Z \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[\ell]{} & K & \xrightarrow[q]{} & P \end{array}$$

其中 ℓ 是一个无圈余纤维化（因为它是无圈余纤维化的推出），而 j 又是一个单射余纤维化。因此，逐层应用单射模型结构的左适定性可知，q 是一个 G-全局（层级）弱等价；由于 $q\ell$ 是沿 i 对 $f = pk$ 作推出，结论即得。

第二个陈述可由 Mod$_R^G$ 的相应陈述类似地推出，另见 [Len20，引理 A.2.4]。□

引理 5.33. 设 R 是一个平坦的 G-全局环谱。那么 Quillen 伴随中的两个伴随函子

$$\mathrm{Sp}(\underline{R} \wedge -)\colon \mathrm{Sp}(G\text{-}\underline{\mathscr{S}p}^+) \rightleftarrows \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}}_R^G) : \mathrm{Sp}(\underline{\mathbb{U}})$$

都是同伦的。此外，Sp($\underline{\mathscr{M}}_G^R$) 上的投射模型结构是沿上述伴随从 Sp($G$-$\underline{\mathscr{S}p}^+$) 上的投射模型结构转移而来的，平坦模型结构也同样如此。

请注意，一般而言，稳定化与模型结构的转移并不交换！

证明。由引理 5.28 可知，两个函子都是左 Quillen（对任一种模型结构而言），特别是它们会将平坦无圈余纤维化映为弱等价。此外，Sp($\underline{\mathbb{U}}$) 和 Sp($R \wedge$–) 都保持层级弱等价，因为如前述引理~~所述，~~ $\underline{\mathbb{U}}$ 和 $R \wedge$ – 都是同伦的。将任意弱等价分解~~为~~

一个平坦余纤维化后接一个层级弱等价，我们便可看出这两个函子实际上都是同伦的。

现在，设 $f\colon X \to Y$ 是 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{M}}_R^G)$ 中的一个映射，使得 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})(f)$ 是一个弱等价；我们必须证明 f 是一个弱等价。由于 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})$ 是同伦的，根据三取二性质，我们可以假设 f 是纤维对象之间的映射。但此时 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})(f)$ 也同样是纤维对象之间的映射，因而是层级弱等价，所以 f 也同样是一个（层级）弱等价。

最后，为了证明 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{M}}_R^G)$ 上的射影和扁平模型结构是沿上述伴随转移而来的，我们将先证明转移模型结构存在，然后再证明它们与给定的模型结构一致。

关于其存在性，根据局部可呈现性，只需证明 $\underline{\mathrm{Sp}}(R \wedge –)(J)$-cell 复形经 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})$ 映射后成为弱等价，其中 J 是我们最喜欢的一组生成无圈余纤维化。但由于 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})$ 是左 Quillen 函子，我们只需证明 $\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})$ 将 $\underline{\mathrm{Sp}}(R \wedge –)(J)$ 中的映射送到无圈余纤维化；这立即成立，因为 $\underline{\mathrm{Sp}}(R \wedge –)$ 也是左 Quillen 函子。

现在我们只需注意到，转移模型结构具有正确的无圈纤维化（显然如此）以及弱等价（由上文可知），因此它正如所声称的那样与给定的模型结构一致。□

注 5.34。该引理的后半部分对于所有 G-全局环谱 R（不一定是平坦的）更一般地成立；不过，我们只需要上述版本，因为它的证明稍微容易一些。

5.4. 代数的全局模型范畴。现在我们开始讨论本文余下部分的关键研究对象。

定义 5.35。超交换 G-全局环谱是 $\boldsymbol{G}$-谱中的一个交换幺半群 R（关于楔积）。记作：

(1) $\mathrm{UCom}^G = \boldsymbol{G}\text{-}\mathrm{UCom}$，表示交换幺半群的范畴；(2) UCom_R^G，表示 R-代数的范畴（即 Mod_R^G 中关于相对楔积的交换幺半群；该范畴与切片范畴 R/UCom^G 典范同构）。

命题 5.36. 设 R 是一个连通的 G-全局超交换环谱，并为 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)$ 配备命题 5.31 中的 t-结构。则导出相对楔积限制为函子

$$-\wedge_R^{\mathbf{L}} -\colon \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^G)_{\geq m} \times \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^G)_{\geq n} \to \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^G)_{\geq m+n}$$

对所有 m、$n \in \mathbb{Z}$ 均成立。

证明. 相对楔积来自一个左 Quillen 双函子，因此它在每个变量中都是正合的，并且在每个变量中都保持余积。因此，我们首先将问题归约到 $m = n = 0$ 的情形，然后（根据 t-结构的连通部分的刻画）归约为证明 G-全局谱 $(R \wedge \Sigma_+^\bullet I(A, –) \times_\varphi G) \wedge_R (R \wedge \Sigma_+^\bullet I(B, –) \times_\varphi G)$ 是连通的。但这同构于 $R \wedge (\Sigma_+^\bullet I(A, –) \times_\varphi G) \wedge (\Sigma_+^\bullet I(A, –) \times_\psi G)$，根据命题 5.31 的证明中的断言（以及两个悬挂谱的平坦性），它是连通的。□

接下来，我们将讨论 UCom^G 上的模型结构，更一般地说，讨论 G-全局超交换环谱 R 上的 R-代数范畴的模型结构。这些模型结构可以利用 [SS00] 的幺半群公理以及 [Whi17] 的交换幺半群公理来构造。我们回顾相关结果，然后证明这些公理对于正射影和扁平 G-全局模型结构成立。

构造 5.37。设 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 是一个余完备闭对称幺半范畴。对于 $\mathscr{C}$ 中的任意对象 X，我们用 $\mathbb{P}^m X = X^{\otimes m}/\Sigma_m$ 表示 X 的 m 次对称幂。我们考虑推出挤积的一般化

$$f \square g \colon A \otimes Y \amalg_{A\otimes B} X \otimes B \to X \otimes Y$$

两个态射 $f\colon A \to X$ 和 $g\colon B \to Y$：

设 $f\colon A \to X$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个态射，且 $m \geq 1$。我们考虑偏序集范畴 $\mathscr{P}(\{1,\dots,m\})$ 和超立方体形图表

$$W(f)\colon \mathscr{P}(\{1,\dots,m\}) \to \mathscr{C},$$
$$S \mapsto W_1(f,S) \otimes \dots \otimes W_m(f,S),$$

其中

$$W_k(f,S) = \begin{cases} A & \text{if } k \notin S, \\ X & \text{if } k \in S. \end{cases}$$

对于一个包含映射 $i\colon S \hookrightarrow T$，函子 $W(f)$ 赋予态射 $W(f,i) = W_1(f,i) \otimes \dots \otimes W_m(f,i)$，其中

$$W_k(f,i) = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{if } k \notin T \smallsetminus S, \\ f & \text{if } k \in T \smallsetminus S. \end{cases}$$

该图表定义了一个态射

$$f^{\square m}\colon Q^m := \mathrm{colim}_{\mathscr{P}(\{1,\dots,m\})\smallsetminus\{1,\dots,m\}} W(f) \to X^{\otimes m} = W(f,\{1,\dots,m\}).$$

对于由 Σ_m 在 $\{1,\dots,m\}$上的置换作用所诱导的作用，该态射是 Σ_m-等变的，因此诱导出一个映射

$$f^{\square m}/\Sigma_m\colon Q^m/\Sigma_m \to \mathbb{P}^m X = X^{\otimes m}/\Sigma_m. \tag{5.5}$$

在余不变量上。

定义 5.38. 设 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 是一个对称幺半模型范畴。我们称 $\mathscr{C}$ 满足

(1) 幺半群公理：每个 $(\{\text{无圈余纤维化}\} \otimes \mathscr{C})$-胞腔映射都是弱等价。(2) 交换幺半群公理：对于任意无圈余纤维化 $f\colon X \to Y$ 以及任意 $n \geq 0$，映射 $f^{\square n}/\Sigma_n$ 是无圈余纤维化。(3) 强交换幺半群公理：对于任意余纤维化或无圈余纤维化 $f\colon X \to Y$以及任意 $n \geq 0$，映射 $f^{\square n}/\Sigma_n$ 分别是余纤维化或无圈余纤维化。

命题 5.39. 设 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 是满足幺半群公理和交换幺半群公理的组合对称幺半模型范畴，且 R 是 $\mathscr{C}$ 中的一个交换幺半群。那么：

(1) R-模范畴 Mod_R 从 $\mathscr{C}$ 继承一个模型结构，该结构沿着以下伴随传递

$$\mathscr{C} \underset{\mathbb{U}}{\overset{R\otimes -}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_R\,.$$

(2) 交换 R-代数的范畴 CAlg_R 从 $\mathscr{C}$继承了模型结构，该结构沿自由-遗忘伴随转移而来

$$\mathscr{C} \underset{\mathbb{U}}{\overset{R\otimes\mathbb{P} := R\otimes\coprod_{n\geq 0}\mathbb{P}^n}{\rightleftarrows}} \mathsf{CAlg}_R\,.$$

(3) 非幺交换 R-代数的范畴 NUCA_R（即配备了结合且交换乘法 $M \wedge_R M \to M$的 R-模M）从 $\mathscr{C}$继承了模型结构，该结构沿自由-遗忘伴随转移而来

$$\mathscr{C} \underset{\mathbb{U}}{\overset{R\otimes \mathbb{P}^{>0} := R\otimes \coprod_{n>0}\mathbb{P}^n}{\rightleftarrows}} \mathrm{NUCA}_R\,.$$

证明。第一个断言是 [SS00 定理 4.1]，的一部分；第二个断言见 [Whi17 定理 3.2、注 3.3]；最后一个断言见 [Sta22 定理 B.2.6]。□

注 5.40。我们对 [Sta22] 中关于非幺交换代数的结果的证明作些说明。与其他结果一样，主要步骤是分析非幺交换代数范畴中的某些推出。为简便起见，我们仅考虑 $R = \mathbf{1}$。具体而言，对于一个对称幺半模型范畴 $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbf{1})$，我们考虑态射 $h\colon K \to L$和 $p\colon K \to X$（位于 $\mathscr{C}$ 中），其中 X 是一个非幺交换代数，并分析以下推出

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{>0}K & \xrightarrow{\mathbb{P}^{>0}h} & \mathbb{P}^{>0}L \\ {\scriptstyle \tilde{p}}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & P \end{array} \tag{5.6}$$

在非幺交换代数的范畴 NUCA 中。为了证明命题 5.39，我们需要验证：若 h 是无圈余纤维化，则推出态射 $f\colon X \to P$ 是弱等价。我们通过定义一个滤子来证明这一点

$$X = P_0 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \to \mathrm{colim}_{n\geq 0}\, P_n = P.$$

这里，P_n 通过推出迭代定义

$$\begin{array}{ccc} (Q^{n+1}/\Sigma_{n+1}) \amalg X \otimes (Q^{n+1}/\Sigma_{n+1}) & \xrightarrow{h^{\square n+1}/\Sigma_{n+1}\amalg X\otimes h^{\square n+1}/\Sigma_{n+1}} & \mathbb{P}^{n+1}L \amalg X \otimes \mathbb{P}^{n+1}L \\ {\scriptstyle t_{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{n+1}} \\ P_n & \xrightarrow[f_{n+1}]{} & P_{n+1}. \end{array}$$

我们无需确切了解这些竖直映射是如何定义的；非正式地说，t_n 是通过经由 p 将 K 中的所有项映射到 X，再将由此得到的所有项相乘而得，而 L 中的所有项则汇集到 $\mathbb{P}^{0<*\leq n}L$ 中。

我们还需要以下左适定性判据：

命题 5.41。设 $\mathscr{C}$ 是一个满足幺半群公理和强交换幺半群公理的组合的对称幺半模型范畴。那么，只要满足以下所有条件，CAlg 上的转移模型结构就是左适当的：

(1) $\mathscr{C}$ 是左适当的，且其中的滤过余极限是同伦的。(2) 存在一组 $\mathscr{C}$ 的生成余纤维化，且这些映射的两端都是余纤维对象。(3) 对任意 $X \in \mathscr{C}$ 及任意余纤维化 i，沿 $X \otimes i$ 的推出都是同伦推出。(4) 对任意余纤维 X，函子 $X \otimes$–是同伦的。

证明。这是 [Whi17，定理 4.17]，的一个特例；另见 [Len20，定理 2.1.34]，以了解如何归约到 White 的结果。□

现在让我们将其具体化为 G-全局谱上的代数结构：

命题 5.42. 设 G 是一个有限群。那么 $\boldsymbol{G}$-谱上的正射影对象和正平坦 G-全局模型结构是对称幺半的。此外，它们满足幺半群公理和强交换幺半群公理。

证明。推出积公理直接由推论 5.14 得出。此外，如果$p\colon\ \mathbb{S}^+ \to \mathbb{S}$ 是这两个模型结构中的任一个的余纤维替换，并且 X是任意 G-谱，那么根据 $\mathbb{S}$ 的平坦性和命题 1.47，$X \wedge p$ 是一个 G-全局弱等价。因此，这两个模型结构都是对称幺半的。

对于幺半群公理，我们再次简单地注意到，对于任意 G-全局谱 R 以及任意无圈余纤维化（例如，在正平坦模型结构中）j，映射 $R \wedge j$ 是一个 G-全局弱等价和单射余纤维化。

现在，如果 f 是一个正平坦余纤维化，那么仅由幺半性即可知 $f^{\square n}$ 是一个正平坦余纤维化；另见 [Hau17，注记 6.9]。对于正平坦余纤维化，强交换幺半群公理随即成立，因为（–）$/\Sigma_n$ 保持正平坦余纤维化（因为 triv_{Σ_n} 显然保持无圈纤维化）。

在射影情形中，我们明确计算得，对于生成余纤维化$f = \boldsymbol{\Sigma}(A, –) \wedge_H G_+ \wedge (\partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m)$，其中 H 忠实地作用于 $A \neq \varnothing$，映射$f^{\square n}/\Sigma_n$ 在同构意义下与下式一致

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{n} \times A, -) \wedge_{\Sigma_n \wr H} G_+^n \wedge (\partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m)_+^{\square n} \tag{5.7}$$

其中 $\Sigma_n \wr H$通过$(\sigma, h_\bullet).(i, a) \mapsto (\sigma(i)\ h_i.a)$作用于 $\boldsymbol{n} \times A$，该作用是忠实的$A \neq \varnothing$，且 H 忠实地作用。现在，$(\partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m)_+^{\square n}$是单纯集合的一个余纤维化，且 G 在 G^n上自由作用，因此 $G_+^n \wedge (\partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m)_+^{\square n}$是一个$\mathcal{G}_{\Sigma_n \wr H,\ G}$-余纤维化，由此(5.7)仍是一个投射余纤维化。

最后，对于无圈余纤维化的（强）交换幺半群公理，我们注意到，如前所述，我们可以选取由正平坦 G-谱之间的映射组成的生成无圈余纤维化集合。因此，根据 [GG16，推论 10 和 23]，只需证明对于正平坦G-谱之间的任意 G-G全局弱等价 f，映射 $f^{\wedge n}/\Sigma_n$ 也是弱等价，而这正是推论 5.21 的内容。□

推论 5.43. 设 G 是一个有限群，并设 R 是一个 G-全局超交换环谱。那么，Mod_R^G 上的正射影对象和正平坦 G-全局模型结构沿自由-遗忘伴随 $\mathbb{P}\colon \mathrm{Mod}_R^G \rightleftarrows \mathrm{UCom}_R^G\colon \mathbb{U}$转移。所得模型结构仍然是组合的、适当的、单纯的，并且其中的滤过余极限是同伦的。

证明。将UCom_R^G 视为切片 R/UCom^G后，只需考虑 $R = \mathbb{S}$的情形。因此，根据 White 判据（命题 5.39）和前一个命题，模型结构的存在性成立。

由于该模型结构是从 $\boldsymbol{G}$-谱转移而来的，我们立即看到它是组合的、右适当的、单纯的，并且其中的滤过余极限是同伦的。接下来需要验证左适定性，为此我们将验证命题 5.41 的假设：

由命题 5.6 和 5.7 可知，$\boldsymbol{G}$-谱上的两种正模型结构都是左适当的，其中的滤余极限是同伦的，而且标准生成余纤维化是余纤维对象之间的映射。如上所述，对于任意的 X 和任意（生成）余纤维化 i，$X \wedge i$ 都是单射余纤维化，因此沿其进行的推出都是同伦推出。最后，若 X 在这两种模型结构中的任一种下都是余纤维的，那么根据命题 1.47，$X \wedge –$ 是同伦的。□

同样，对于所有有限群 H，我们更一般地在$\boldsymbol{H}$-UCom_R^G 上得到正射影对象模型结构和平坦模型结构。

引理 5.44。这些结构使 UCom_R^G 成为一个全局模型范畴 $\mathscr{C}\mathrm{om}_R^G$，而自由-遗忘伴随定义了一个全局 Quillen 伴随 $\mathbb{P}\colon \underline{\mathscr{M}}_R^G \rightleftarrows \mathscr{C}\mathrm{om}_R^G \colon \underline{\mathbb{U}}$。

证明。对于第一个结论，论证方法与 $\underline{\mathscr{M}}_R^G$（引理 5.26）完全相同。第二个结论显然。□

定义 5.45。设 R 是一个 G-全局超交换环谱，并以显然的方式将其视为自身上的交换代数。增广交换R-代数是切片 UCom_R^G/R 中的一个对象，也就是说，它是一个交换 R-代数 A，并带有一个 R-代数同态 $\epsilon\colon A \to R$（注意，凭借单位性，ϵ 自动是单位 $R \to A$ 的一个收缩）。

注释 5.46。按照注释 3.2 中的论证，UCom_R^G/R 带有一个左适定单纯组合模型结构，其中一个映射是弱等价、纤维化或余纤维化，当且仅当它在 UCom_R^G 上的正射影模型结构中具有相应性质。类似地，我们得到一个正平坦模型结构；通过通常的识别，这些结构使 UCom_R^G/R 成为一个全局模型范畴 $\mathscr{C}\mathrm{om}_R^G/R$。

定义 5.47. 设 R 是一个 G-全局超交换环谱。我们将非幺交换 R-代数的范畴记为 NUCA_R^G。

推论 5.48. 设 G 是一个有限群，并设 R 是一个 G-全局超交换环谱。则 Mod_R^G 上的正射影和扁平 G-全局模型结构沿自由-遗忘伴随 $\mathbb{P}^{>0}\colon \mathrm{Mod}_R^G \rightleftarrows \mathrm{NUCA}_R^G \colon \mathbb{U}$ 转移。所得模型结构仍然是组合的、适当的、单纯的，并且其中的滤子余极限是同伦的。

证明. 除左适定性外，所有断言都可按照普通交换代数的情形（推论 5.43）得到。另一方面，对于左适定性，我们注意到，（非满的）包含映射 $\mathrm{UCom}_R^G \hookrightarrow \mathrm{NUCA}_R^G$ 具有一个左伴随 K，它由 $X \mapsto (R \hookrightarrow R \vee X)$ 给出，并带有将 X 上的乘法延拓而得的唯一乘法。然后直接检查可知，K 保持（生成）余纤维化；根据 [Len20，引理 3.1，它是同伦的。最后，它还反映弱等价，因为在底层 G-谱的层面上，X 自然是 $R \vee X = K(X)$ 的一个收缩。因此，根据 [Len20，引理 A.2，NUCA_R^G 的左适定性由 UCom_R^G 的左适定性推出。□

再次，对于所有有限群 H，我们更一般地在$\boldsymbol{H}$-NUCA_R^G 上得到了正射影模型结构和平坦模型结构。

引理 5.49. 这些结构使 NUCA_R^G 成为一个全局模型范畴 $\underline{\mathscr{N}}_R^G$，而自由-遗忘伴随定义了一个全局 Quillen 伴随 $\mathbb{P}^{>0}\colon \underline{\mathscr{M}}_R^G \rightleftarrows \underline{\mathscr{N}}_R^G \colon \underline{\mathbb{U}}$。

证明. 对于第一个陈述，论证与 $\underline{\mathscr{M}}_R^G$ 中的完全相同；而第二个陈述直接由定义可知。□

6. Global topological André-Quillen cohomology[2]

本节中，我们介绍拓扑 Andr´e-Quillen 上同调的 G-全局版本。经典的非等变上同调理论由 Basterra 在 [Bas99] 中引入，作为（增广）交换 S-代数的上同调理论。其代数先驱——由 Andr´e 和 Quillen [And67, Qui70]，定义的同调理论——是 K¨ahler 微分的一个导出函子；而 Kähler 微分又可以构造为增广代数的增广理想的不可分解元模。Basterra 对拓扑 Andr´e-Quillen（余）同调的构造，以及我们将在下文介绍的 G-全局版本，都仿照了这一构造。

[2]本节前两个小节的内容改编自第二作者学位论文的一部分 [Sta22，第 2] 章。

6.1. 一般模型范畴中的余切复形。我们的构造适用于一般的抽象情形：在全文中，我们固定一个组合的、稳定的对称幺半模型范畴 $\mathscr{C}$，它满足幺半群公理和交换幺半群公理，并且其中的有限余积是同伦的；读者应当牢记、且我们稍后将专门讨论的例子，是第 5 节构造的 $\boldsymbol{G}$-谱上的正 G-全局模型结构。

定义 6.1. 设 R 是 $\mathscr{C}$ 中的交换幺半群，且 S 是一个增广的 R-代数，其增广为 $\epsilon\colon S \to R$。那么，我们将 S 的增广理想 $I(S)$ 定义为严格拉回

$$\begin{array}{ccc} I(S) & \longrightarrow & S \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ * & \longrightarrow & R \end{array}$$

R-模范畴 $\mathbf{Mod}_R$ 中的对象。

它继承了来自 S 的非幺 R-代数结构，从而得到一个函子 $I\colon \mathbf{CAlg}_R/R \to \mathbf{NUCA}_R$。反向还存在一个幺化函子，其定义为

$$K\colon \mathrm{NUCA}_R \to \mathrm{CAlg}_R/R, \quad J \mapsto R \amalg J.$$

该对象配备了一个乘法，它利用了 R 和 J 上的乘法，以及 J 上的 R-模结构。

此外，我们定义一个将非幺交换代数映至其不可分解元模的函子。

定义 6.2。令 R 为 $\mathscr{C}$ 中的交换幺半群，令 J 为带有乘法映射 $\mu\colon J \otimes_R J \to J$ 的非单位交换 R-代数。于是，我们将 J 的不可分解元模 $Q(J)$ 定义为以下严格推出

$$\begin{array}{ccc} J \otimes_R J & \xrightarrow{\mu} & J \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Q(J) \end{array}$$

在 $\mathbf{Mod}_R$ 中。

这定义了一个函子 $Q\colon \mathbf{NUCA}_R \to \mathbf{Mod}_R$。反过来，我们可以赋予一个 R-模零乘法，从而得到一个函子

$$Z\colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{NUCA}_R\,.$$

命题 6.3。这些函子

$$\mathrm{CAlg}_R/R \underset{I}{\overset{K}{\rightleftarrows}} \mathrm{NUCA}_R \underset{Z}{\overset{Q}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_R$$

对于第 5.4 节诱导的模型结构定义了两个 Quillen 伴随，其中左伴随为上方箭头。Quillen 伴随 $K \dashv I$ 是 Quillen 等价。此外，函子 K 和 Z 是同伦的。

证明。这两对函子互为伴随这一事实，可以通过明确考察单位和余单位看出。对于第一个伴随，单位由下列交换方块给出

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\mathrm{incl}} & R \amalg J \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ * & \longrightarrow & R \end{array}$$

余单位则由 (η, incl): $R \amalg I(A) \to A$ 给出，其中 $\eta\colon R \to A$ 是代数 A 的单位映射。对于第二个伴随，单位由定义推出中的投影 $J \to Q(J)$ 给出，将其视为在 $Q(J)$ 上采用零乘法的非幺交换幺半群之间的映射。余单位由下列交换方块定义

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R M & \xrightarrow{*} & M \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ * & \longrightarrow & M \end{array}$$

对任意 R-模 M，其中上方的态射是零映射。

于是，第一个伴随是一个 Quillen 伴随，因为 K 保留非幺交换代数的余纤维化和无圈余纤维化。为此，只需检查生成（无圈）余纤维化，它们具有如下形式：$R \otimes \mathbb{P}^{>0} f$，其中 f 是 $\mathscr{C}$的一个生成（无圈）余纤维化。这些态射经 K 映为 $R \otimes \mathbb{P} f$，恰好是增广代数范畴上模型结构的生成（无圈）余纤维化。由此可知，K 是左 Quillen，因此第一个伴随是一个 Quillen 伴随。此外，由于余积在 $\mathscr{C}$中是同伦的，K 也是同伦的。

对于第二个伴随，我们注意到右伴随 Z 在底层对象和态射上是恒等映射。由于非幺代数和模的模型范畴中，纤维化和弱等价均由底层对象上的性质定义，因此可知 Z 是右 Quillen 且是同伦的。

最后，我们需要验证 $K \dashv I$ 是 Quillen 等价。我们按照 [Hov99，定义 1.3.12]中的以下判据进行验证：设 $J \in \mathrm{NUCA}_R$ 是余纤维的非幺交换 R-代数，且 $S \in \mathrm{CAlg}_R/R$ 是纤维的增广代数。那么我们需要证明，态射 $f\colon KJ \to S$ 是弱等价~当且仅当其伴随 $f\colon J \to IS$ 是弱等价。由于 S 是纤维的，增广映射 $\epsilon\colon S \to R$在 $\mathscr{C}$中是一个纤维化，因此定义图表

$$\begin{array}{ccc} I(S) & \xrightarrow{\mathrm{incl}} & S \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ * & \longrightarrow & R \end{array}$$

是 $\mathscr{C}$中的一个同伦拉回方块。映射 $\eta\colon R \to A$定义了 ϵ的一个截面，因此 distinguished 三角

$$I(S) \xrightarrow{\mathrm{incl}} S \xrightarrow{\epsilon} R \to \Sigma I(S)$$

~在 $\mathrm{Ho}(\mathscr{C})$中分裂，且余单位 (η, incl) 是弱等价。此外，由于 f是~ $R \amalg f$的一个收缩，且 $R \amalg (-)$ 是同伦的，因此其中一个是弱等价当且仅~当另一个也是弱等价。总之，由于我们有关系 $f = (\eta, i) \circ (R \amalg f)$，可知 $K \dashv I$ 是 Quillen 等价。□

我们还有一个基变换伴随

$$\mathrm{CAlg}_R/S \underset{\text{forget}}{\overset{S \otimes_R -}{\rightleftarrows}} \mathrm{CAlg}_S/S \tag{6.1}$$

对于任意 R-代数 S。由于遗忘函子在底层对象和态射上是恒等的，因此它是右 Quillen，所以这个伴随也是一个 Quillen 伴随。

定义 6.4. 设 R 是 $\mathscr{C}$ 中的交换幺半群，且 S 是一个交换的 R-代数。则我们将阿贝尔化函子定义为以下复合映射

$$\mathrm{Ab}_{S/R}\colon \mathrm{Ho}(\mathrm{CAlg}_R/S) \xrightarrow{S \otimes^{\mathbf{L}}_R -} \mathrm{Ho}(\mathrm{CAlg}_S/S) \xrightarrow{\mathbf{R}I} \mathrm{Ho}(\mathrm{NUCA}_S) \xrightarrow{\mathbf{L}Q} \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_S).$$

注 6.5. 上述构造称为阿贝尔化，源于代数领域：正如 Beck [Bec03] 早已指出的，在交换环 R 上的增广代数范畴中，阿贝尔群对象等价于 R-模；这一等价在一个方向上由平方零扩张给出，在另一个方向上则由增广理想给出。进而可以看出，K¨ahler 微分定义了一个左伴随函子，将阿贝尔群对象（视为模）包含到所有增广代数中。

在我们的 G-全局同伦论背景下，我们在定理 6.38 中证明，$\mathrm{Ab}^{R/R} \simeq \mathbb{L}Q\mathbb{R}I$ 可以解释为一种全局稳定化。

命题 6.6。设 R 是 $\mathscr{C}$ 中的交换幺半群， S 是一个交换R-代数。函子

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{CAlg}_R/S) \underset{\mathbf{L}K\circ\mathbf{R}Z}{\overset{\mathrm{Ab}_{S/R}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_S)$$

构成伴随，其中阿贝尔化是左伴随。

证明。我们使用命题 6.3 和（6.1）中的 Quillen 伴随，对一个 S-模 M 和一个带有到 S 的增广的 R-代数 T 计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_S)(\mathrm{Ab}_{S/R}(T), M) &\cong \mathrm{Ho}(\mathrm{NUCA}_S)((\mathbf{R}I)(S \otimes^{\mathbf{L}}_R T), (\mathbf{R}Z)(M)) \\ &\cong \mathrm{Ho}(\mathrm{CAlg}_S/S)((\mathbf{L}K)(\mathbf{R}I)(S \otimes^{\mathbf{L}}_R T), (\mathbf{L}K)(\mathbf{R}Z)(M)) \\ &\cong \mathrm{Ho}(\mathrm{CAlg}_R/S)(T, (\mathbf{L}K)(\mathbf{R}Z)(M)).\end{aligned}$$

□

利用这些伴随，我们现在定义余切复形：

定义 6.7. 设 R 是 $\mathscr{C}$ 中的交换幺半群，且 S 是一个 R-代数。S 在 R 上的余切复形定义为对象

$$\Omega_{S/R} = \mathrm{Ab}_{S/R}(S) = (\mathbf{L}Q)(\mathbf{R}I)(S \otimes^{\mathbf{L}}_R S)$$

在同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_S)$ 中。

例 6.8. 若 $R \to S$ 是弱等价，则 S 是 $\mathrm{Ho}(\mathrm{CAlg}_R/S)$ 中的始对象。由于 $\mathrm{Ab}^{S/R}$ 是上面命题所述的左伴随，我们得出 $\Omega_{S/R} = 0$。

对于任意交换方块

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & S' \end{array}$$

在模型范畴 CAlg 中，我们得到余切复形 $\Omega^{S/R} \to \Omega^{S'/R'}$ 上的一个诱导态射，视为 S-模。这源于推出和拉回的泛性质。

对于任意交换 R-代数 S，我们还得到一个自然的泛导子

$$d_{S/R} \colon S \to \Omega_{S/R} \tag{6.2}$$

将命题 6.6 中伴随的单位 $S \to S \amalg \Omega^{S/R} = (KZ)(\mathrm{Ab}^{S/R}(S))$ 与到 $\Omega^{S/R}$ 的投影复合。

这个余切复形的性质与经典交换代数情形相同：它带有一个传递性正合列和一个基变换公式。这些性质使我们能够将余切复形视为增广交换代数的一种上同调理论。为了确立这些性质，我们首先需要考察增广理想和不可分解元在基变换下的表现。

引理 6.9. 设 R 是 $\mathscr{C}$ 中的一个交换幺半群， S 是一个交换 R-代数，且 T 是一个增广交换 R-代数。那么交换方形

$$\begin{array}{ccc} I_R(T) \otimes_R S & \longrightarrow & T \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & S \end{array} \tag{6.3}$$

诱导一个态射

$$\mathbf{R}I_R(T) \otimes_R^{\mathbf{L}} S \to \mathbf{R}I_S(T \otimes_R^{\mathbf{L}} S),$$

它是非幺交换 S-代数同伦范畴中的一个同构。

证明。(6.3) 中的交换方块通过考虑拉回，诱导出一个自然变换 $I_R(-) \otimes_R S \Rightarrow I_S(- \otimes_R S)$。这里，函子 $(-) \otimes_R S$ 可以左导出，而函子 I 可以右导出。因此，我们考虑由模型范畴以及左、右可导出函子构成的双范畴。在此背景下， [Shu11 定理 7.6] 表明，取同伦范畴和导出函子是一个双伪函子。特别地，上述自然变换诱导出一个变换

$$\mathbf{R}I_R(-) \otimes_R^{\mathbf{L}} S \Rightarrow \mathbf{R}I_S(- \otimes_R^{\mathbf{L}} S)$$

如所愿。

由于 I 是一个 Quillen 等价，且其逆为 K，我们可以通过考虑它的伴随变换，证明这个变换是同伦范畴中的一个自然同构

$$\mathbf{L}K_S(- \otimes_R^{\mathbf{L}} S) \Rightarrow \mathbf{L}K_R(-) \otimes_R^{\mathbf{L}} S.$$

此变换由左 Quillen 函子间的自然同构 $S \amalg (- \otimes_R S) \cong (R \amalg -) \otimes_R S$ 诱导，因此是自然同构。□

引理 6.10. 设 R 是 $\mathscr{C}$中的交换幺半群， S 是交换R-代数，而 J 是非幺交换 R-代数。则交换方形

$$\begin{array}{ccc} (J \otimes_R J) \otimes_R S & \longrightarrow & J \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Q_R(J) \otimes_R S \end{array} \tag{6.4}$$

诱导出一个态射

$$\mathbf{L}Q_S(J \otimes_R^{\mathbf{L}} S) \to \mathbf{L}Q_R(T) \otimes_R^{\mathbf{L}} S,$$

它是 S-模的同伦范畴中的一个同构。

证明。由于标记为 Q 的函子以及基变换 $(-) \otimes_R S$ 都是左 Quillen 函子，所需的态射可通过考虑余纤维替换，由图表 (6.4) 在推出上诱导的自然态射 $Q_S(J \otimes_R^{\mathbf{L}} S) \to Q_R(J) \otimes_R^{\mathbf{L}} S$ 得到。此外，由于 $(-) \otimes_R S$ 是左伴随，它保留推出，因此该态射是一个同构。□

引理 6.11. 设 R 是 $\mathscr{C}$ 中的交换幺半群，且 S 和 T 是交换 R-代数，并有一个交换 R-代数的映射 $S \to T$。此外，假设 $\mathsf{CAlg}(\mathscr{C})$ 是左适当的，或者 S 作为交换 R-代数是余纤维的。则 $S \otimes_R^{\mathbf{L}} T \to T \otimes_R^{\mathbf{L}} T$ 在 CAlg_T/T 中的一个同伦余纤维由 $T \otimes_S^{\mathbf{L}} T$ 给出。

证明. 该陈述可通过考虑余纤维替换来证明。为了计算 $S \otimes^{\mathbf{L}}_R T$，我们将 S 作为交换 R-代数作余纤维替换 $\Gamma_R S \to S$。此外，为了计算 $T \otimes^{\mathbf{L}}_R T$，我们将态射 $\Gamma_R S \to S \to T$ 分解为先一个余纤维化、再一个弱等价，如下：
$\Gamma_R S \to \Gamma_R T \to T$。

现在我们取.....的同伦余纤维

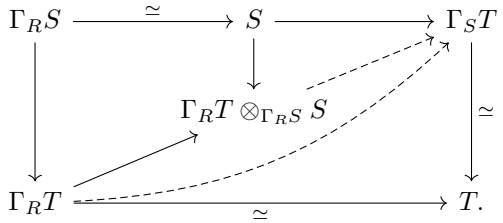
$$\Gamma_R S \otimes_R T \to \Gamma_R T \otimes_R T.$$

此态射是将左 Quillen 函子 $- \otimes_R T$: $\mathrm{CAlg}_R/T \to \mathrm{CAlg}_T/T$ 作用于余纤维化 $\Gamma_R S \to \Gamma_R T$（其两端均为余纤维对象）所得，因此它本身也是余纤维对象之间的余纤维化。因此，其同伦余纤维可由 1-范畴余纤维表示，后者可计算为

$$(\Gamma_R T \otimes_R T) \otimes_{\Gamma_R S \otimes_R T} T \cong (\Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} \Gamma_R S \otimes_R T) \otimes_{\Gamma_R S \otimes_R T} T \cong \Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} T.$$

现在我们需要将其与 $\Gamma_S T \otimes_S T$进行比较，其中 $\Gamma_S T$是 T作为交换 S-代数的一个余纤维替换。为此，只需证明存在交换 S-代数之间的弱等价$\Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} S \to \Gamma_S T$。由于 $\Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} S$和 $\Gamma_S T$都是余纤维 S-代数（前者因为 $- \otimes_{\Gamma_R S} S$ 是左 Quillen 函子，后者则根据定义），左 Quillen 函子 $- \otimes_S T$ 因此保留了这个弱等价。

为了建立这个弱等价，我们考虑图表



这里， $S \to \Gamma_S T \to T$ 是由余纤维替换 $\Gamma_S T$提供的 $S \to T$ 的分解，该分解先经过余纤维化，再经过无圈纤维化。由于 $\Gamma_R S \to \Gamma_R T$是余纤维化，所以 $S \to \Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} S$ 也是余纤维化，并且由提升性质可知对角虚线态射存在。此外，由于相关范畴是左适当的，或者 S 是余纤维的，我们得出态射 $\Gamma_R T \to \Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} S$ 是弱等价。因此，正如三取二性质所要求的，我们确实得到了所需的弱等价 $\Gamma_R T \otimes_{\Gamma_R S} S \to \Gamma_S T$。□

由这个余纤维计算，我们推导出余切复形的传递序列。

定理 6.12. 设 $R \to S \to T$ 是 $\mathscr{C}$中的交换幺半群序列。此外，假设 $\mathrm{CAlg}(\mathscr{C})$ 是左适当的，或者 S 作为交换 R-代数是余纤维的。那么序列

$$\Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_S T \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S},$$

由 Ω 的函子性诱导，并具有 T-模的同伦余纤维序列结构。

证明。我们考虑 $S \otimes^{\mathbf{L}}_R T \to T \otimes^{\mathbf{L}}_R T$，它是增广到 T 的 T-代数态射。根据引理 6.11，该态射在 CAlg_T/T 中的同伦余纤维由 $T \otimes^{\mathbf{L}}_S T$ 给出。由于 I 是 Quillen 等价，且 Q 是左 Quillen 函子，对所得的同伦余纤维序列应用 $\mathbf{L}Q_T \circ \mathbf{R}I_T$ 后，可得到 T-模的同伦余纤维序列。其形式为

$$\mathbf{L}Q_T(\mathbf{R}I_T(S \otimes^{\mathbf{L}}_R T)) \to \mathbf{L}Q_T(\mathbf{R}I_T(T \otimes^{\mathbf{L}}_R T)) \to \mathbf{L}Q_T(\mathbf{R}I_T(T \otimes^{\mathbf{L}}_S T)).$$

根据定义，最后两项分别是余切复形 $\Omega^{T/R}$ 和 $\Omega^{T/S}$。因此，我们只需将第一项识别为 $\Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_S T$。

为此，我们注意到 $S \otimes^{\mathbf{L}}_R T \cong (S \otimes^{\mathbf{L}}_R S) \otimes^{\mathbf{L}}_S T$，并利用引理 6.9 和 6.10 进行计算

$$\begin{aligned}\mathbf{L}Q_T(\mathbf{R}I_T(S \otimes^{\mathbf{L}}_R T)) &\cong \mathbf{L}Q_T(\mathbf{R}I_T((S \otimes^{\mathbf{L}}_R S) \otimes^{\mathbf{L}}_S T)) \\ &\cong \mathbf{L}Q_T(\mathbf{R}I_S(S \otimes^{\mathbf{L}}_R S) \otimes^{\mathbf{L}}_S T) \\ &\cong \mathbf{L}Q_S(\mathbf{R}I_S(S \otimes^{\mathbf{L}}_R S)) \otimes^{\mathbf{L}}_S T \\ &\cong \Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_S T.\end{aligned}$$

综上，我们得到了所需的同伦余纤维序列。 □

作为前述定理的一个特例，现在可以明确地说，余切复形在每个变量上都是同伦不变的。

推论 6.13。假设 CAlg($\mathscr{C}$) 是左适当的，令 $R' \to R$ 为 $\mathscr{C}$ 中交换幺半群之间的一个弱等价，并令 S 为一个交换 R-代数。那么在 S-模的同伦范畴中，诱导映射 $\Omega^{S/R'} \to \Omega^{S/R}$ 是一个同构。

证明。根据前述定理，该映射的同伦纤维由 $\Omega_{R/R'} \otimes^{\mathbf{L}}_R S$ 给出，而根据例 6.8，它是平凡的。由 $\mathscr{C}$ 的稳定性可得结论。□

同理可证：

推论 6.14. 假设 CAlg($\mathscr{C}$) 是左适当的，令 R 为一个交换幺半群，并令 $S \to S'$ 为交换 R-代数之间的一个弱等价。则诱导映射 $\Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_S S' \to \Omega^{S'/R}$ 在 S'-模的同伦范畴中是一个同构。□

此外，我们还得到基变换和可加性结果。

命题 6.15. 令 R 为 $\mathscr{C}$ 中的一个交换幺半群，并令 S 和 T 为两个交换 R-代数。假设 CAlg($\mathscr{C}$) 是左适当的，或者 S 和 T 在 R/CAlg($\mathscr{C}$) 中是余纤维的。则存在自然同构

$$\begin{aligned}&\Omega_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T/T} \cong \Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_R T \qquad and \\ &\Omega_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T/R} \cong (\Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_R T) \amalg (S \otimes^{\mathbf{L}}_R \Omega_{T/R}).\end{aligned}$$

证明。对于第一个断言，我们计算

$$\begin{aligned}\Omega_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T/T} &\cong \mathbf{L}Q_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T}(\mathbf{R}I_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T}((S \otimes^{\mathbf{L}}_R T) \otimes^{\mathbf{L}}_T (S \otimes^{\mathbf{L}}_R T))) \\ &\cong \mathbf{L}Q_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T}(\mathbf{R}I_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T}((S \otimes^{\mathbf{L}}_R S) \otimes^{\mathbf{L}}_S (S \otimes^{\mathbf{L}}_R T))) \\ &\cong \mathbf{L}Q_{S \otimes^{\mathbf{L}}_R T}(\mathbf{R}I_S(S \otimes^{\mathbf{L}}_R S) \otimes^{\mathbf{L}}_S (S \otimes^{\mathbf{L}}_R T)) \\ &\cong \mathbf{L}Q_S(\mathbf{R}I_S(S \otimes^{\mathbf{L}}_R S)) \otimes^{\mathbf{L}}_S (S \otimes^{\mathbf{L}}_R T) \\ &\cong \Omega_{S/R} \otimes^{\mathbf{L}}_R T.\end{aligned}$$

第二个断言源于以下观察：$R \to S \to S \otimes^{\mathbf{L}}_R T$ 和 $R \to T \to S \otimes^{\mathbf{L}}_R T$ 的传递性余纤维序列组合在一起，为彼此定义分裂，并将第一个断言应用于由此得到的余切复形。□

6.2. ´e-Quillen 上同调。由命题 5.42 可知，$\boldsymbol{G}$-谱上的正 G-全局模型结构是对称幺半的，并满足幺半群公理和强交换幺半群公理；此外，根据 [Len20，引理 3.1.43]，其中的余积是同伦的。因此，我们可以将上述讨论具体应用于此情形，得到：

定义 6.16. 设 R 是一个 G-全局超交换环谱，且 S 是一个 R-代数。 S 在 R 上的余切复形定义为

$$\Omega_{S/R} = (\mathbf{L}Q)(\mathbf{R}I)(S \wedge^{\mathbf{L}}_{R} S).$$

这是一个 S-模，由它表示的同调与上同调理论称为（G-全局）拓扑 Andr´e-Quillen（余）同调。具体而言，对于一个 S-模 M， S 在 R 上、以 M 为系数的拓扑 Andr´e-Quillen（余）同调定义为

$$\underline{\mathrm{TAQ}}_{*}(S, R; M) = \underline{\hat{\pi}}_{*}(\Omega_{S/R} \wedge^{\mathbf{L}}_{S} M)$$
$$\underline{\mathrm{TAQ}}^{*}(S, R; M) = \underline{\hat{\pi}}_{-*}(\mathbf{R}F(\Omega_{S/R}, M)).$$

这里， F 表示 S-模范畴中的内 Hom。

由定理 6.12 和命题 6.15 可得这些对象的传递序列与基变换。我们明确给出同伦群中的传递序列。

推论 6.17. 设 $R \to S \to T$ 是 G-全局超交换环谱的态射，且 M 是一个 T-模。则存在长正合序列

$$\cdots \to \underline{\mathrm{TAQ}}_{n+1}(T, S; M) \to \underline{\mathrm{TAQ}}_{n}(S, R; M) \to \underline{\mathrm{TAQ}}_{n}(T, R; M) \to \underline{\mathrm{TAQ}}_{n}(T, S; M) \to \cdots$$

and

$$\cdots \to \underline{\mathrm{TAQ}}^{n}(T, S; M) \to \underline{\mathrm{TAQ}}^{n}(T, R; M) \to \underline{\mathrm{TAQ}}^{n}(S, R; M) \to \underline{\mathrm{TAQ}}^{n+1}(T, S; M) \to \cdots$$

它们由定理 6.12 中的余纤维序列诱导。 □

现在我们介绍上述理论在研究 G-全局超交换环谱中的两个应用。第一个是 Hurewicz 定理，它指出，（相对）Andr´e-Quillen 同调的消失可以检测 G-全局超交换环谱之间的等价。另一个应用是为全局超交换环谱构造 Post-nikov 塔，其 k-不变量取值于全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调。这些应用类似于在 [Bas99 第 8], 章中对拓扑 Andr´e-Quillen 同调的运用，但借助 t-结构，证明得以简化。

这两个结果都需要连通性假设，第一步是考察不可分解元函子 Q 与连通性的相互作用。

引理 6.18. 设 R 是一个连通的 G-全局超交换环谱， J 是一个余纤维的非幺交换 R代数。此外，假设 J对 $n \geq 0$是 n-连通的。那么 $Q(J)$ 也对 $n \geq 0$是 n-连通的，并且伴随单位q: $J \to Q(J)$ 在 $n+1 \leq k \leq 2n+1$上诱导一个同构。

证明。不可分解元模由余纤维序列定义

$$J \wedge_{R} J \to J \xrightarrow{\eta} Q(J)$$

R-模。根据假设， J 是 n-连通的，而由命题 5.36， $J \wedge_{R} J$ 是 $(2n+1)$-连通的；由长正合序列即可得到该结论。□

现在我们来讨论 Hurewicz 定理。为陈述该定理，回顾对任意 R-代数 η，都有泛导子 $d_{S/R}$: $S \to \Omega^{S/R}$: $R \to S$。由自然性，复合映射

$$R \xrightarrow{\eta} S \xrightarrow{d_{S/R}} \Omega_{S/R}$$

在同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}^{G}_{R})$ 中将通过 $\Omega^{R/R}$ 分解，因此由例 6.8 可知它为零。于是，$d_{S/R}$总是非典范地通过一个 R-模映射 $C(\eta) \to \Omega^{S/R}$ 分解。

定理 6.19（Hurewicz 定理）。设 R 是一个连通的 G-全局超交换环谱，且 S 是一个连通的交换 R-代数，并且单位映射 $\eta\colon R \to S$ 对于 $n \geq 1$ 是一个 n-等价。那么 $\Omega^{S/R}$ 是 n-连通的，通过 $C(\eta)$ 对 $d_{S/R}$ 的分解是唯一的，并且这诱导出一个同构 $\hat{\pi}_{n+1}(C(\eta)) \cong \hat{\pi}_{n+1}(\Omega^{S/R})$。

证明。经过余纤维替换后，我们可以假设 S 是一个余纤维的交换 R-代数。我们考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\eta} & S & \longrightarrow & C(\eta) \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota} \\ S & \longrightarrow & S \wedge_R S & \longrightarrow & S \wedge_R C(\eta)。 \end{array}$$

根据定义，图表的第一行是一个余纤维序列；第二行则是对其应用 $S \wedge_R -$ 得到的。由于 S 是余纤维的，这仍是一个余纤维序列。垂直态射是作为右因子的包含映射。根据命题 6.3，余单位

$$S \vee \mathbf{R}I(S \wedge_R S) \to S \wedge_R S$$

是一个等价，因此通过比较余纤维，我们得到 $S \wedge_R C(\eta) \cong \mathrm{R}I(S \wedge_R S)$。现在考虑复合映射

$$C(\eta) \xrightarrow{\iota} S \wedge_R C(\eta) \cong \mathbf{R}I(S \wedge_R S) \xrightarrow{q} \Omega_{S/R},$$

其中，最后一个映射是引理 6.18 中所考虑的单位映射 $J \to \mathrm{L}Q(J)$ 的一个实例，其对应的非幺代数为 $J = S \wedge_R C(\eta) \cong \mathrm{R}I(S \wedge_R S)$。由于 η 是 n-连通的，$C(\eta)$ 也如此。由于 S 是连通的，$S \wedge_R C(\eta)$ 也具有 n-连通性，并且态射 ι 在 $k \leq n+1$ 的 $\hat{\pi}_k$ 上是同构。根据引理 6.18，q 在 $k \leq n+1$ 的 $\hat{\pi}_k$ 上也诱导出同构。由此完成证明：$\Omega^{S/R}$ 是 n-连通的，并且通过上述复合映射 $C(\eta) \to \Omega^{S/R}$，有 $\hat{\pi}_{n+1}(C(\eta)) \cong \hat{\pi}_{n+1}(\Omega^{S/R})$。

展开这个态射 $C(\eta) \to \Omega^{S/R}$ 的定义，我们看到它确实是由泛导子 $d_{S/R}\colon S \to \Omega^{S/R}$ 诱导的。接下来只需证明经由 $C(\eta)$ 的分解唯一；为此，我们考察与余纤维序列 $R \to S \to C(\eta)$ 相关的上同调长正合序列中的以下部分：

$$\cdots \leftarrow [S, \Omega_{S/R}] \leftarrow [C(\eta), \Omega_{S/R}] \leftarrow [\Sigma R, \Omega_{S/R}] \leftarrow \cdots$$

这里，$[,]$ 表示同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^G)$ 中的同态集。要证明的结论等价于说明 $[S, \Omega_{S/R}] \leftarrow [C(\eta), \Omega_{S/R}]$ 是单射；只需证明 $[\Sigma R, \Omega_{S/R}] = 0$ 即可。事实上，根据伴随关系，$[\Sigma R, \Omega_{S/R}] \cong \hat{\pi}_1^{\mathrm{id}_G}(\Omega^{S/R})$，而它为零，因为根据上述内容，$\Omega^{S/R}$ 是 n-连通的，并且我们假设了 $n \geq 1$。□

推论 6.20. 设 R 是一个连通的 G-全局超交换环谱，且 S 是一个连通的 R-代数，使得单位映射 $\eta\colon R \to S$ 是 1-连通的，并且 $\Omega_{S/R} \simeq 0$。那么 $\eta\colon R \to S$ 已经是一个等价。

证明。假设 η 不是等价，并令 $\hat{\pi}_k(C(\eta))$，$k \geq 2$ 为锥的第一个非平凡同伦群。根据定理 6.19，还有 $\hat{\pi}_k(\Omega^{S/R}) \neq 0$，这与余切复形的平凡性矛盾。□

接下来，我们为全局超交换环谱构造 Postnikov 塔。为此，我们将说明拓扑 Andr´e-Quillen 上同调中的元素如何参数化代数扩张。

构造 6.21. 设 R 是一个 G-全局超交换环谱， S 是一个交换 R-代数， M 是一个 S-模。由伴随关系和拓扑 Andr´e-Quillen 上同调的定义，我们得到如下同一关系：

$$\begin{aligned}\mathrm{TAQ}^n_{\mathrm{id}_G}(S,R;M) &\cong \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra})\big(\mathbb{S}, \Sigma^n \mathbf{R}F(\Omega_{S/R}, M)\big)\\ &\cong \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra})\big(\mathbb{S}, \mathbf{R}F(\Omega_{S/R}, \Sigma^n M)\big)\\ &\cong \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}^G_S)\big(S, \mathbf{R}F(\Omega_{S/R}, \Sigma^n M)\big)\\ &\cong \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}^G_S)(\Omega_{S/R}, \Sigma^n M)\\ &\cong \mathrm{Ho}(\mathbf{UCom}^G_R/S)(S, S\vee\Sigma^n M).\end{aligned}$$

特别地，对于给定的类 $k \in \mathrm{TAQ}^n_{\mathrm{id}_G}(S,R;M)$，我们可以将其解释为一个交换 R 代数在 S 上的态射 $S \to S\vee\Sigma^n M$。我们构造同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} S[k] & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ S & \xrightarrow[k]{} & S\vee\Sigma^n M \end{array}$$

在 R-代数中，并称其为 S 对 k 的扩张。这里，右侧的垂直映射是将 S 作为第一个楔和项的包含映射。

拓扑 Andr´e-Quillen 上同调可以通过在 (6.2) 中构造的泛导子 $d_{S/R}\colon S \to \Omega^{S/R}$ con-˜，与由 G-全局谱表示的通常上同调联系起来。将一个映射 $k\colon \Omega^{S/R} \to \Sigma^n M$˜（它表示 $\mathrm{TAQ}^n_{\mathrm{id}_G}(S,R;M)$ 中的一个元素）与该泛导子复合，得到映射 $k\circ d_{S/R}\colon S \to \Sigma^n M$。根据泛导子的定义，这在同伦范畴中与以下复合一致

$$\mathrm{pr}\circ k\colon S \to S\vee\Sigma^n M \to \Sigma^n M,$$

˜其中， k 是平方零扩张与K¨ahler 微分之间伴随下的 k 的伴随函子。

利用这一翻译，我们注意到， $S[k]$也是总交换方块中的同伦拉回

$$\begin{array}{ccccc} S[k] & \longrightarrow & S & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow \\ S & \xrightarrow[k]{} & S\vee\Sigma^n M & \xrightarrow[\mathrm{pr}]{} & \Sigma^n M \end{array}$$

˜因此也是 R-模范畴中 $k\circ d_{S/R}$ 的同伦纤维。

如果 X 是任意超交换环谱，那么其零次同伦群 ˆ$\underline{\pi}_0 X$ 带有额外的范数映射，这些映射通过 smash 幂上的乘法定义，从而赋予它们所谓的全局幂函子 [Sch18, 定义 5.1.6]的结构。在下一个定理中，我们将需要以下事实：反之，任意全局幂函子 F 都会产生一个超交换 Eilenberg-Mac Lane 谱 HF，即一个超交换整体环谱，其中 ˆ$\underline{\pi}_0(HF) \cong F$ 作为全局幂函子，并且 ˆ$\underline{\pi}_k(HF) = 0$ 对于 $k \neq 0$，参见 [Sch18，定理 5.4.14]。由于 G-全局同伦论中关于一般 G 的相应结果尚未建立，这意味着我们在此必须限制于 $G = 1$ ； 然而，一旦相应的 Eilenberg-MacLane 谱理论建立起来，对于任意 G，同样的结果也将成立，证明亦相同。

定理 6.22. 设 R 是一个连通全局超交换环谱。则存在一个序列 $R_0, R_1, \ldots$ 的交换 R-代数，并配有映射

$R_{n+1} \to R_n$ 个 R-代数以及类 $k_n \in \mathrm{TAQ}_e^{n+1}(R_n, R;\ H\hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R))$，使得满足以下性质：

(1) $R_0 \cong H\hat{\underline{\pi}}_0(R)$ 和 $R_{n+1} \cong R_n[k_n]$，(2) $\hat{\underline{\pi}}_k(R_n) = 0$ 对于 $k > n$，(3) 单位映射 $\eta_n\colon\ R \to R_n$ 是 $(n+1)$-等价。

证明。我们将 $R_0 = H\hat{\underline{\pi}}_0(R)$ 定义为整体幂函子 $\hat{\underline{\pi}}_0(R)$ 的 Eilenberg–Mac Lane 谱。这是一个全局超交换环谱，并且它带有一个超交换环谱的态射 η_0 : $R \to H\hat{\underline{\pi}}_0(R)$，该态射在 $\hat{\underline{\pi}}_0$ 上诱导同构（参见 [Sch18，定理 5.4.14] 之前的注记）。因此R_0 可以作为 Postnikov 塔的第一阶段。

现在假设我们已经将塔构造到第 n 层。特别地，我们有一个超交换环谱的态射 $\eta_n\colon\ R \to R_n$ ，它是一个 $(n+1)$-等价，并且 $\hat{\underline{\pi}}_{n+2}(R_n) = \hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R_n) = 0$。Hurewicz 定理 6.19 表明，$\Omega^{R_n/R}$ 因而是 $(n+1)$-连通的，且 $\hat{\underline{\pi}}_{n+2}(\Omega^{R_n/R}) \cong \hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R)$。这个同构定义了一个 R-模的态射 $\tilde{k}_n\colon \Omega_{R_n/R} \to \Sigma^{n+2} H\hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R)$，它对应于一个元素 $k_n \in \mathrm{TAQ}_e^{n+1}(R_n, R;\ H\hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R))$。

利用这个元素和构造 6.21，我们定义 $R_{n+1} = R_n[k_n]$。它附带一个 R-代数的映射 $R_{n+1} \to R_n$。此外，作为一个 R-模，代数R_{n+1} 是以下映射的同伦纤维

$$R_n \xrightarrow{d_{R_n/R}} \Omega_{R_n/R} \xrightarrow{\tilde{k}_n} \Sigma^{n+2} H\hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R).$$

因此，态射 $\eta_{n+1}\colon\ R \to R_{n+1}$ 确实是一个（$n+2$）-等价，并且 R_{n+1} 的所有高阶同伦群都消失了。因此，该定理由归纳法得证。□

6.3. 等变拓扑 Andr´e-Quillen（余）同调。根据 [Hau17，定理 4.7] ，定理 1.14 中回顾的 G-等变平坦模型结构还存在一个“正”版本，其弱等价相同，但其余纤维化为正平坦余纤维化。在本小节中，我们将把余切复形形式体系专用于这一情形，从而定义 G-等变拓扑 Andr´e-Quillen（余）同调，并说明它与上一节发展的 G-全局理论之间的关系。

命题 6.23。 G-谱上的正 G-等变平坦模型结构满足构造抽象余切复形的所有假设，即

(1) 它是一个组合稳定模型范畴。(2) 它是一个对称幺半模型范畴，并满足幺半群公理和交换幺半群公理。(3) 有限余积是同伦的。

此外，交换幺半群（即交换G-环谱）上的诱导模型结构是左适当的。

证明。根据 [Hau17，定理 4.8], 之后的讨论，正平坦等变模型结构是组合的。此外，由于通常的等变平坦模型结构是稳定的，它也是稳定的。

根据 [Hau17，第 6.1], 小节，该模型结构还是对称幺半的，并满足幺半群公理；而强交换幺半群公理由同上文献中的命题 6.22 验证。

第三个性质是 [Hau17，命题 4.2-(1)] 的一个实例。

最后，为了证明交换幺半群上的诱导模型结构是左适当的，只需验证命题 5.41 的假设。

正平坦模型结构是左适当的，见 [Hau17, 命题 4.2-(4)],；更一般地，同上文献还表明，对于任意余纤维化 i，沿其作出的推出 $X \wedge i$ 都是

同伦推出。要证明其中的滤过余极限是同伦的，只需考虑通常的等变平坦模型结构。根据 [Len20, 引理 A.2，4] 进一步只需证明等变分层平坦模型结构中的类似命题，而这一点显然成立。

标准生成余纤维化是余纤维对象之间的映射。最后，等变平坦性定理 [Hau17, 命题 6.2-(i)] 特别表明，与任意固定的余纤维对象作楔积是同伦的。由此完成了对命题 5.41 假设的验证，从而证明交换幺半群上的转移模型结构是左适当的。□

因此，对于交换 G-环谱的任意映射 $R \to S$，我们都得到一个 G-等变余切复形，记作 $\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}$，以免与上一节的 G-全局余切复形 $\Omega^{G\text{-gl}}_{S/R}$ 混淆。具体而言：

定义 6.24. 设 R 是一个交换 G-环谱，且 S 是一个交换 R-代数。我们定义

$$\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R} := \mathbf{L}Q\mathbf{R}I(S \wedge^{\mathbf{L}}_{R} S)$$

并将其称为 G-等变余切复形。这里，Q 仍是前述的不可分解元函子，I 表示增广理想，并且所有函子都是相对于等变正平坦模型结构（及其提升）导出的。

对于任意 S-模 M，我们定义 G-等变拓扑 Andr´e-Quillen（余）同调群为真等变同伦群

$$\underline{\mathrm{TAQ}}^{\mathrm{equiv}}_{*}(S, R; M) = \underline{\hat{\pi}}_{*}(\Omega_{S/R} \wedge^{\mathbf{L}}_{S} M)$$
$$\underline{\mathrm{TAQ}}^{*}_{\mathrm{equiv}}(S, R; M) = \underline{\hat{\pi}}_{-*}(\mathbf{R}F(\Omega_{S/R}, M)).$$

注 6.25。对于 $G = 1$，这恢复了 Basterra 最初构造的拓扑 Andr´e-Quillen 上同调 [Bas99]（从 S-模转换为对称谱）。

于是，第 6.1 小节的结果可特化为说明，这具有同伦不变性，带有传递性长正合列，并满足基变换公式。

注 6.26。等变投射模型结构 [Hau17, 定理 4.8]，还有一个正向类比，它采用通常的弱等价，并以映射作为生成余纤维化

$$(\mathbf{\Sigma}(A, -) \wedge G_+)/H \wedge (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)_+$$

对所有有限非空的 A、$H \subset G \times \Sigma_A$ 和 $n \geq 0$ 都成立。虽然这不满足交换幺半群公理，但交换代数和 NUCA 上的转移模型结构仍然存在，因为正射影模型结构的 Crans-Kan 转移判据是正平坦模型结构对应判据的形式推论。由于通过直接检查可知，对于这些模型结构，Z 和 I 仍然是右 Quillen 函子，因此我们也可以等价地将等变余切复形定义为处处相对于正等变投射模型结构取导出。

6.3.1. G-全局与 G-等变拓扑 André-Quillen 上同调。为了将这些构造与其 G-全局类似物进行比较，我们首先必须了解如何将交换 G-环谱嵌入 G-全局超交换环谱中。

引理 6.27。恒等函子构成一个 Quillen 伴随

$$\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equivariant pos. proj.}} \rightleftarrows \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global pos. flat}}.$$

证明。由命题 1.48 可知， G-等变投射模型结构中的（无）余纤维化也是 G-全局平坦模型结构中的（无）余纤维化。由于正等变投射模型结构的余纤维化少于通常的等变投射模型结构，因此只需证明正等变投射模型结构的生成余纤维化是正平坦余纤维化。由引理 5.4 可立即得出这一点，因为上述生成余纤维化显然在次数 $\varnothing$ 上是同构。□

特别地，我们有一个正合伴随

$$\mathcal{L}\colon \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equiv}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global}})\colon \mathrm{forget}$$

它属于三角范畴，其中右伴随是一个局部化，因此 $\mathcal{L}$ 是全忠实的；我们称其本质像中的对象为左诱导对象。

利用转移模型结构（注 6.26），恒等映射也定义了交换幺半群之间的 Quillen 伴随，从而得到一个伴随

$$\mathcal{L}^{\mathrm{com}}\colon \mathrm{Ho}(\mathbf{UCom}^{G\text{-equiv}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathbf{UCom}^{G\text{-gl}})\colon \mathrm{forget}.$$

这里，右伴随仍然是一个局部化，因此 $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}$ 是全忠实的；同样，我们称其本质像中的对象为左诱导对象。

警告 6.28。图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}(\mathbf{UCom}^{G\text{-equiv}}) & \xrightarrow{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}} & \mathrm{Ho}(\mathbf{UCom}^{G\text{-gl}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{forget}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{forget}} \\ \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-equiv}}) & \xrightarrow[\mathcal{L}]{} & \mathrm{Ho}(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-gl}}) \end{array}$$

即使对于 $G = 1$ 也不交换。

例如，谱 $X := \Sigma^\bullet_+ I(1, -) \cong \mathbf{\Sigma}(1, -) \wedge S^1$ 在正非等变投射模型结构中是余纤维的，因此自由交换环谱 $\mathbb{P}(X) := \bigvee_{n\geq 0} \Sigma^\bullet_+ I(\boldsymbol{n}, -)/\Sigma_n$ 在相应的交换幺半群模型结构中是余纤维的，因而表示一个左诱导的交换环谱。然而，其底层谱所表示的全局稳定同伦类型并非左诱导的：例如，它包含 $\Sigma^\bullet_+ I(2, -)/\Sigma_2$ 作为收缩，而后者在非等变意义下与 $\mathcal{L}\Sigma^\infty_+ B\Sigma_2$ 弱等价，但在全局意义下并非如此。

构造 6.29。设 R 是一个交换 G-环谱。与之前相同，我们得到一个伴随 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^{G\text{-equiv}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^{G\text{-gl}})$。现在我们将说明如何对此进行修改，从而得到一个值落在 $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R$ 上的模范畴中的伴随。

为此请注意，在点集层面， $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R$ 只是正射影等变模型结构中的一个余纤维替换，特别是它伴有一个等变弱等价 $\epsilon\colon \mathcal{L}^{\mathrm{com}}R \to R$ （它刻画了导出伴随的余单位）。因此，我们可以考虑复合映射

$$\mathcal{L}_R\colon \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^{G\text{-equiv}}) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R}^{G\text{-equiv}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R}^{G\text{-gl}}).$$

引理 6.30。函子 ϵ^* 是一个等价。特别地， $\mathcal{L}_R$ 是全忠实的。

证明。函子 ϵ^* 是保守的，并且它有一个左伴随 $\epsilon_! = \mathrm{L}(R \wedge_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R} -)$。因此，只需证明对于每个 X，单位 $X \to \epsilon^*\epsilon_! X$ 都是同构。由于两个伴随函子都保任意余积，只需在 R-模三角范畴的生成元上验证这一点。

G-谱的同伦范畴由对象 $\Sigma^\infty_+ G/H$ for $H \subset G$ 生成，这由 [Hau17，命题 4.9-(3)], 给出，因此 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_R^{G\text{-equiv}})$ 由对象 $R\wedge\Sigma^\infty_+ G/H$生成，论证与命题 5.31 的证明相同。但是

在这些对象上，单位可识别为映射 $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R\wedge\Sigma^\infty_+G/H\to R\wedge\Sigma^\infty_+G/H$，因此由 Σ^∞_+G/H的平坦性可得所述结论。□

借助这一点，我们现在可以精确说明，通过转向左诱导的 G-全局超交换环谱，如何从 G-全局余切复形恢复出 G-等变余切复形：

命题 6.31. 设 $R\to S$ 是交换 G-环谱的一个映射。则存在一个典范同构

$$\mathcal{L}_S\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\cong\Omega^{G\text{-gl}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S/\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R}$$

在同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}^{G\text{-gl}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S})$ 中。特别地，$\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}$ 和 $\Omega^{G\text{-gl}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S/\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R}$ 在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}^{G\text{-equiv}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S})$ 中典范同构。

证明. 只需证明第一个结论；然后对从 G-全局 $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S$-模到 G-等变模的遗忘函子应用该结论，即可推出第二个结论。

根据推论 6.13，我们可以假设 R 作为交换 G-环谱是余纤维的（因此 $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R=R$）。利用推论 6.14 以及 $\mathcal{L}^{\mathrm{com}}$ 和 $\mathcal{L}_S$ 的定义，问题可进一步归结为证明：只要 $R\to S$ 是余纤维化，就有 $\mathcal{L}\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\cong\Omega^{G\text{-gl}}_{S/R}$ 作为 G-全局S-模成立。

现在我们有如下交换图表

同伦范畴($\mathbf{UCom}^{G\text{-gl}}_R/S$) 同伦范畴($\mathbf{UCom}^{G\text{-gl}}_S/S$) 同伦范畴($\mathbf{NUCA}^{G\text{-gl}}_S$) 同伦范畴($\mathbf{Mod}^{G\text{-gl}}_S$) 忘却 同伦范畴($K$)≃ 同伦范畴($Z$) 忘却 忘却 忘却 忘却 同伦范畴($\mathbf{UCom}^{G\text{-equiv}}_R/S$) 同伦范畴($\mathbf{UCom}^{G\text{-equiv}}_S/S$) 同伦范畴($\mathbf{NUCA}^{G\text{-equiv}}_S$) 同伦范畴($\mathbf{Mod}^{G\text{-equiv}}_S$) 忘却 同伦范畴($K$)≃ 同伦范畴($Z$)

它来自相应的同伦函子交换图表。取左伴随后得到自然同构 $\mathrm{Ab}^{G\text{-gl}}_{S/R}\circ\mathrm{Lid}\cong\mathcal{L}\circ\mathrm{Ab}^{G\text{-equiv}}_{S/R}$，再沿着 $\mathrm{UCom}^{G\text{-equiv}}_R/S$ 中的（正射影余纤维）对象 id_S 追踪，即可得出所述结论。□

推论 6.32。设 $H\subset G$ 是任意子群，且令 $M\in\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}^{G\text{-equiv}}_S)$。那么我们有一个典范同构

$$\underline{\mathrm{TAQ}}^H_*(S,R;M)\cong\underline{\mathrm{TAQ}}^{H\hookrightarrow G}_*(\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S,\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R;\mathcal{L}_SM)$$

等变与全局拓扑 Andr´e-Quillen 同调群之间。

证明。我们有规范的识别

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\wedge^{\mathbf{L}}_S M)=\mathcal{L}\epsilon^*(\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\wedge^{\mathbf{L}}_S M)&\cong\mathcal{L}(\epsilon^*\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\wedge^{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S}\epsilon^*M)\\&\cong\mathcal{L}_S\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\wedge^{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S}\mathcal{L}_SM\end{aligned}$$

其中，最后一个同构来自未导出函子的相等性，而第二个同构则源于这样一个事实：ϵ^* 的逆 $\epsilon_!$ 由一个强对称幺半函子诱导。结合前一个命题，我们得到 $\mathcal{L}_S(\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\wedge^{\mathbf{L}}_S M)\cong\Omega^{G\text{-gl}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S/\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R}\wedge^{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S}\mathcal{L}_SM$。忘掉结构后，我们得出 $\Omega^{G\text{-gl}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S/\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R}\wedge^{\mathbf{L}}_{\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S}\mathcal{L}_SM$和 $\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}\wedge^{\mathbf{L}}_S M$的底层 G-等变谱一致。对同伦群取值即可得到所述结论。□

类似地可证：

推论 6.33. 设 $H\subset G$ 是任意子群，且 $M\in$同伦范畴($\mathbf{Mod}^{G\text{-gl}}_S$)。那么我们有一个典范同构

$$\underline{\mathrm{TAQ}}^*_H(S,R;\mathrm{forget}\,M)\cong\underline{\mathrm{TAQ}}^*_{H\hookrightarrow G}(\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S,\mathcal{L}^{\mathrm{com}}R;\epsilon^*M).$$

特别地，若 $N \in$ 同伦范畴(Mod$_S^{G\text{-equiv}}$)，那么我们有一个典范同构

$$\underline{\mathrm{TAQ}}^*_H(S, R; N) \cong \underline{\mathrm{TAQ}}^*_{H\hookrightarrow G}(\mathcal{L}^{\mathrm{com}}S, \mathcal{L}^{\mathrm{com}}R; \mathcal{L}_S N). \qquad \square$$

6.3.2. 交换 G-环谱的 Postnikov 塔。本小节最后将讨论 Hurewicz 定理和 Postnikov 塔的等变类比。

我们从 Hurewicz 定理开始。由于这完全类似于上文证明的 G-全局陈述，这里将从简介绍。

引理 6.34. 设 R 是一个连通的 G-环谱。则 Ho(Mod$_R^{G\text{-equiv}}$) 带有一个 t-结构，其连通部分 Ho(Mod$_R^{G\text{-equiv}}$)$_{\geq 0}$ 由作为 G-等变谱而言是连通的 R-模组成，而其余连通部分则由正次数同伦群消失的谱组成。

此外，若 R 是交换的，则导出 smash 积限制为

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^{G\text{-equiv}})_{\geq m} \times \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^{G\text{-equiv}})_{\geq n} \to \mathrm{Ho}(\mathbf{Mod}_R^{G\text{-equiv}})_{\geq m+n}$$

对所有 m、$n \in \mathbb{Z}$ 均成立。

证明。我们将对 $R = \mathbb{S}$ 进行论证。一般情形随后可通过与命题 5.31 和 5.36 的证明相同的论证得到。

对于第一个陈述，我们再次回顾 [Hau17，命题 4.9-(3)]：三角范畴 Ho(G-谱$^{G\text{-equiv}}$) 是紧生成的，其生成元为对象 $\Sigma^\infty_+ G/H$ for $H \subset G$。因此，[ATLS03，定理 A.1] 给出了一个 t-结构，其连通部分是由 $\Sigma^\infty_+ G/H$ 在余积、悬挂和扩张下生成的子范畴。按照命题 5.31 证明中的论证，我们即可看出，该 t-结构具有上述描述。

对于第二个陈述，我们可以像之前一样，将问题归结为证明导出 smash 积将生成元映射为连通谱。由于悬挂谱是平坦的，导出 smash 积由非导出 smash 积给出，因此我们立即计算出 $\Sigma^\infty_+ G/H \wedge \Sigma^\infty_+ G/K \cong \Sigma^\infty_+(G/H \times G/K)$，显然它是连通的。□

定理 6.35（等变 Hurewicz 定理）。设 R 是一个连通交换 G-环谱，并且对于某个 $n \geq 1$，$\eta\colon R \to S$ 是一个 n-等价。那么 $\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R}$ 是 n-连通的，泛导子 $d_{S/R}$ 经由 $C(\eta)$ 的分解是唯一的，并且它诱导出一个同构 $\hat{\pi}_{n+1}(C(\eta)) \cong \hat{\pi}_{n+1}(\Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R})$。

证明。借助前述引理，我们可以逐字照搬引理 6.18 和定理 6.19 的证明。□

现在我们来讨论连通 G-等变交换代数的 Postnikov 塔。

构造 6.36。设 $R \to S$ 是交换 G-环谱的一个映射，且 S 是一个 R-模。与构造 6.21 类似，我们可以将任意 $k \in \mathrm{TAQ}^n_G(S, R; M)$ 解释为一个 S-模之间的态射 $\tilde{k}\colon \Omega^{G\text{-equiv}}_{S/R} \to \Sigma^n M$；或者等价地（通过阿贝尔化与平方零扩张之间的伴随），将其解释为一个映射 $k\colon S \to S \vee \Sigma^n M$，它是 S 上的交换 G-等变 R-代数之间的映射。

于是，我们可以通过同伦拉回将一个交换的 R-代数 $S[k]$ 关联到 S 上

$$\begin{array}{ccc} S[k] & \longrightarrow & S \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ S & \xrightarrow[k]{} & S \vee \Sigma^n M. \end{array}$$

如全局情形中所述，底层的 R-模映射 $S[k] \to S$ 也可以~等价地视为复合映射 $k \circ d_{S/R}$: $S \to \Sigma^n M$的同伦纤维。

如果 R 是一个交换 G-环谱，那么它的零次同伦群 $\hat{}\underline{\pi}_0(R)$ 将具有所谓的 G-Tambara 函子结构。根据 [Ull13，定理 5.1]，这一构造存在一个截面，它将任意 G-Tambara 函子 $\underline{T}$ 送至一个适当的 Eilenberg-MacLane 交换 G-环谱 $H\underline{T}$，从而推广了通常针对 Mackey 函子的等变 Eilenberg-MacLane 谱。

定理 6.37. 设 R 是一个连通交换 G-环谱。那么存在一个由交换 R-代数组成的无限塔 $\cdots \to R_2 \to R_1 \to R_0$，并伴有类 $k_n \in \mathrm{TAQ}_G^{n+1}(R_n, R;\ H\hat{}\underline{\pi}_{n+1}(R))$，满足以下性质：

(1) $R_0 \cong H\hat{}\underline{\pi}_0(R)$ 和 $R_{n+1} \cong R_n[k_n]$。(2) $\hat{}\underline{\pi}_k(R_n) = 0$，
对于 $k > n$(3) 单位映射 $R \to R_n$ 是 $(n+1)$-等价。

证明。由 [Ull13, 定理 5.2], H 在限制到连通交换 G-环谱时是 $\hat{}\underline{\pi}_0$ 的右伴随。特别地，我们得到映射 $R \to R_0 := H\hat{}\underline{\pi}_0(R)$，它给出了塔的底层阶段。

现在假设我们已经将塔构造到 R_n。特别地，单位 $R \to R_n$ 是一个 $(n+1)$-等价，并且对于 $k > n$，$\hat{}\underline{\pi}_k(R_n) = 0$。因此，由等变 Hurewicz 定理和长正合序列可知，$\Omega^{G\text{-equiv}}_{R_n/R}$ 是 $(n+1)$-连通的，且

$$\hat{\underline{\pi}}_{n+2}(\Omega_{R_n/R}) \cong \hat{\underline{\pi}}_{n+2}(C(\eta)) \cong \hat{\underline{\pi}}_{n+1}(R).$$

于是，这个同构定义了一个 R-模映射 $\tilde{k}_n : \Omega_{R_n/R} \to \Sigma^{n+2} H\hat{}\underline{\pi}_{n+1}(R)$，对应于一个类 $k_n \in \mathrm{TAQ}_G^{n+1}(R_n, R;\ H\hat{}\underline{\pi}_{n+1}(R))$。因此，前述构造给出一个 R-代数 $R_{n+1} = R_n[k_n]$，以及一个 R-代数映射$R_{n+1} \to R_n$；其底层 R-模映射将 R_{n+1} 表示为复合映射 $R_n \to \Omega^{G\text{-equiv}}_{R_n/R} \to \Sigma^{n+1} H\hat{}\underline{\pi}_{n+1}(R)$ 的同伦纤维。长正合序列进而表明，$R \to R_{n+1}$ 是一个 $(n+2)$-等价，并且对于 $k > n+1$，$\hat{}\underline{\pi}_k(R_{n+1}) = 0$，从而完成归纳步骤。□

6.4.（余）同调作为稳定化。现在我们说明，G-全局拓扑 Andr´e-Quillen 上同调如何解释为全局稳定化：

定理 6.38. 设 R 是一个平坦的 G-全局超交换环谱。那么以下所有全局 Quillen 伴随

$$\underline{\mathscr{M}}_R \underset{\Omega^\infty}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{M}}_R) \underset{\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{Z})}{\overset{\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{Q})}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{N}}_R) \underset{\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{I})}{\overset{\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{K})}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{C}om}_R/R) \tag{6.5}$$

都是全局 Quillen 等价。特别地，复合映射

$$\underline{\mathscr{M}}_R \xrightarrow{Z} \underline{\mathscr{N}}_R \xrightarrow{I^{-1}} \underline{\mathscr{C}om}_R/R$$

在 GLOBMOD 中（它在同伦范畴上给出 $\mathrm{Ab}^{R/R}$ 的右伴随）是从稳定全局模型范畴到 $\mathscr{C}\mathrm{om}_R/R$的泛映射。

证明的关键步骤是证明，全局 Quillen 伴随的另一种稳定化是等价；具体来说，就是非幺交换 R-代数的自由—遗忘伴随：

定理 6.39。在上述情形下，全局 Quillen 伴随

$$\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{M}}_R) \underset{\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{U}})}{\overset{\underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathbb{P}^{>0}})}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{N}}_R) \tag{6.6}$$

是全局 Quillen 等价。

证明这一点需要大量工作，我们将在第 7 节专门处理此事。现在，我们先利用它推导定理 6.38：

定理 6.38 的证明。由于 $\underline{K} \dashv \underline{I}$ 是全局 Quillen 等价，根据命题 3.29，全局稳定化后的伴随 $\mathrm{Sp}(\underline{K}) \dashv \mathrm{Sp}(\underline{I})$ 也是如此。此外，全局模型范畴 $\underline{\mathscr{M}}_R$ 是全局稳定的（推论 5.27），因此稳定化伴随

$$\underline{\mathscr{M}}_R \underset{\Omega^\infty}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Sp}}(\underline{\mathscr{M}}_R)$$

根据定理 3.36，这是一个全局 Quillen 等价。

最后，我们需要考察伴随 $\underline{Q} \dashv \underline{Z}$ 在稳定化后的表现。为此，我们利用定理 6.39 的结论：伴随 (6.6) 是一个全局 Quillen 等价。现在注意到，左 Quillen 函子的复合映射 $\underline{Q} \circ \underline{\mathbb{P}^{>0}}$: $\underline{\mathscr{M}}_R \to \underline{\mathscr{N}}_R \to \underline{\mathscr{M}}_R$自然同构于恒等函子。因此，稳定化后这一结论仍然成立，相应的左导出函子复合映射也自然同构于恒等函子。于是，根据三取二，$\underline{Q} \dashv \underline{Z}$ 在稳定化后诱导出一个全局 Quillen 等价，证明完毕。□

7. The stabilization of global NUCAs

7.1. 计算稳定化。本节旨在证明定理 6.39。我们首先将左伴随 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathbb{P}^{>0}})$ 改写为一种更便于使用的形式：

构造 7.1. 设 $X, Y \in \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$。我们将 $X \diamond Y$ 定义为如下双谱：$(X \diamond Y)(B) = X(B) \wedge Y(B)$（右侧是谱上的通常 Day 卷积 smash 积），其结构映射为

$$\begin{aligned} S^A \wedge (X \diamond Y)(B) = S^A \wedge X(B) \wedge Y(B) &\xrightarrow{\delta} S^A \wedge X(B) \wedge S^A \wedge Y(B) \\ &\xrightarrow{\sigma \wedge \sigma} X(A \amalg B) \wedge Y(A \amalg B) = (X \diamond Y)(A \amalg B) \end{aligned}$$

其中，第一个映射由对角映射 $S^A \to S^A \wedge S^A$ 诱导。显然，这便成为一个函子。

若 G 作用于 X，且 H 作用于 Y，则由函子性，$G \times H$ 作用于 $X \diamond Y$；若 $G = H$，我们通常给 $X \diamond Y$ 配备对角 G-作用，从而得到一个双函子 $G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p}) = \mathrm{Sp}(G\text{-}\underline{\mathscr{S}p})$。

最后，令 $X \in G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$，并令 $n \geq 1$。于是，我们在 n 重 $\diamond$ 积 $X^{\diamond n}$ 上得到 n 个彼此交换的 G-作用；这些作用与通过置换各因子得到的 Σ_n-作用合在一起，构成一个 $(\Sigma_n \wr G)$-作用。我们也会经常通过对角 G-作用，将 $X^{\diamond n}$ 视为 $(\Sigma_n \times G)$-$\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$ 中的对象。

更一般地，若 R 是一个 (G-)全局超交换环谱，则定义 $\diamond_R$ 为关于 R 的逐点 smash 积，从而得到函子 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}}_R^G) \times \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}}_R^G) \to \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}}_R^G)$。

注 7.2。为后续使用，我们记录如下事实：同一构造更一般地也可应用于范畴 $\mathrm{Fun}(\mathbf{\Sigma}, \text{谱})$ 和 $\mathrm{Fun}(\mathbf{\Sigma}, \mathrm{Mod}_R^G)$，它们分别由所有 SSet-富集（而非 SSet_*-富集）的函子 $\mathbf{\Sigma} \to$谱或 $\mathbf{\Sigma} \to \mathrm{Mod}_R^G$ 组成。对于这些较大的范畴，$\diamond$ 和 $\diamond_R$ 是对称幺半结构的张量积，其单位分别是取值为 $\mathbb{S}$ 或 R 的常值函子（而在 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$ 和 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}}_R^G)$ 中，幺性并不成立）。

若此时 $X \in \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$，则比较右伴随函子可得一个自然同构 $\mathrm{Sp}(\mathbb{P}_R^{\geq 0})\mathrm{Sp}(R \wedge -)(X) \cong \mathrm{Sp}(R \wedge -)\mathrm{Sp}(\mathbb{P}_{\mathbb{S}}^{\geq 0})(X) = \mathrm{Sp}(R \wedge -)\big(\bigvee_{n \geq 1} X^{\diamond n}/\Sigma_n\big)$。在非等变情形下，Basterra 和 Mandell [BM05, 定理 2.8] 证明了

由 $n>1$ 索引的直和项消失（对于适当的余纤维 X），这是比较 R-NUCA 的谱与 R-模时所用的关键非形式性要素（参见前引文的定理 3.7）。类似地，下面的 G-全局比较将是证明我们的定理 6.39 的关键计算要素：

Th定理 7.3。（1）设 $X,Y\in G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$ 逐层平坦。那么 $X\diamond Y$ 与 0 全局弱等价。（2）设 $X\in G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{S}p})$ 逐层正平坦。那么对于每个 $n>1$，$X^{\diamond n}/\Sigma_n$ 与 0 全局弱等价。（3）若 $i\colon X\to Y$是逐层正平坦余纤维化，则对于每个 $n>1$，$i^{\square n}/\Sigma_n\colon Q^n/\Sigma_n\to Y^{\diamond n}/\Sigma_n$ 是逐层正平坦余纤维化，且是 G-全局弱等价。特别地，若 Y 逐层正平坦，则 Q^n/Σ_n 与 0 全局弱等价。

证明将在稍作准备后给出；现在，我们先用它来推导该定理：

定理 6.39 的证明。取一个有限群 H。我们需要证明，对于平坦模型结构，H-Sp($\underline{\mathbb{P}^{>0}}$) $\dashv H$-Sp($\underline{\mathbb{U}}$) 是 Quillen 等价。将 G 替换为$G\times H$（并令 H在 R上平凡作用），不失一般性，我们可以假设 $H=1$。

断言。Sp($\underline{\mathscr{M}_R^G}$) 上的正平坦全局模型结构沿着 Sp($\underline{\mathbb{P}^{>0}}$) $\dashv$ Sp($\underline{\mathbb{U}}$) 转移到 Sp($\underline{\mathscr{N}_R^G}$)。

证明。由于 Sp($\underline{\mathscr{M}_R^G}$) 上的正平坦全局模型结构又是从 Sp($G$-$\underline{\mathscr{S}p^+}$) 转移而来（引理 5.33 ），因此只需考虑复合伴随

$$\mathrm{Sp}(\underline{R\wedge\mathbb{P}^{\geq 0}_{\mathbb{S}}})\colon \mathrm{Sp}(G\text{-}\underline{\mathscr{S}p^+})\rightleftarrows \mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{N}_R^G})\colon \mathrm{Sp}(\underline{\mathbb{U}}).$$

根据局部可呈现性，我们只需证明，每个 Sp($\underline{R\wedge\mathbb{P}^{\geq 0}_{\mathbb{S}}}$)($J$)-胞腔复合体经 Sp($\underline{\mathbb{U}}$) 映射后都是 G-全局弱等价，其中 J 是我们选定的 G-Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 的一组生成无圈余纤维化。

为此，我们考虑一个推出方块

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Sp}(\underline{R\wedge\mathbb{P}^{>0}})(A) & \xrightarrow{\mathrm{Sp}(\underline{R\wedge\mathbb{P}^{>0}})(j)} & \mathrm{Sp}(\underline{R\wedge\mathbb{P}^{>0}})(B)\\ \downarrow & & \downarrow\\ X & \xrightarrow[k]{} & Y\end{array}$$

在 Sp($\underline{\mathscr{N}_R^G}$) 中，其中带有 $j\in J$。我们希望将 Sp($\underline{\mathbb{U}}$)(k) 表示为弱等价的超限复合。为此我们注意到，可以将位于 Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 之上的 1-范畴 Sp($\underline{\mathscr{N}_R^G}$) 识别为 Sp($\underline{\mathscr{M}_R^G}$) 中关于非幺对称积 $\diamond_R$ 的非幺交换幺半群。尽管在此情形下我们不能直接应用注 5.40（因为缺少单位），但可以在更大的范畴 Fun($\mathbf{\Sigma}$,Mod$_R^G$) 内进行这一操作；由于谱对象在 SSet-富集函子中对所有余极限封闭，该操作随后将 k 分解为 G-Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 中的一个映射，并进一步分解为映射的超限复合 k_n，这些映射适合组成推出方块

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Sp}(\underline{R\wedge -})(Q^n/\Sigma_n\vee X\diamond Q^n/\Sigma_n) & \xrightarrow{\mathrm{Sp}(\underline{R\wedge -})(j^{\square n}/\Sigma_n\vee X\diamond j^{\square n}/\Sigma_n)} & \mathrm{Sp}(\underline{R\wedge -})(L^{\diamond n}/\Sigma_n\vee X\diamond L^{\diamond n}/\Sigma_n)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \cdot & \xrightarrow[k_n]{} & \cdot\end{array}$$

在 G-Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 中。由上文定理 7.3 可知，顶部的映射是弱可缩对象之间的映射，因此是弱等价，而且还是逐层正平坦余纤维化（特别是单射余纤维化）。因此，k_n 也为一个

弱等价，因此 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathbb{U}})(k)$ 也是弱等价，因为 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}_R^G})$ 中的滤过余极限是同伦的（引理 5.32）。由于 $\mathrm{Sp}(\underline{\mathbb{U}})$ 保持滤过余极限，由同样的论证可知，任意上述形式映射的超限复合也会被映为 G-全局弱等价，如所需。△

现在我们注意到，$\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{N}_R^G})$ 上的转移模型结构与全局模型结构具有相同的无圈纤维化（即满足以下条件的映射：对每个 $f(A)$，它都是 $(G\times\Sigma_A)$-$\mathrm{Sp}(\underline{\mathcal{S}p}^+)$ 上正平坦 $(G\times\Sigma_A)$-全局模型结构中的纤维化），并且具有相同的纤维对象（即满足以下条件的 X：每个 $X(A)$ 都是 $(G\times\Sigma_A)$-全局正平坦纤维的，并且对于所有 H-集 A,B，$X(A)\to\Omega^B X(A\amalg B)$ 都是 NUCA 的 $(G\times H)$-全局弱等价，等价地说，是谱的全局弱等价）。因此，这两个模型结构实际上相同；特别地，我们看到 $\mathrm{Sp}(\mathbb{U}):\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{N}_R^G})\to\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{M}_R^G})$ 保持并反映弱等价。为完成证明，现在只需证明，对于每个余纤维 X，通常的单位 $X\to\mathrm{Sp}(\underline{\mathbb{UP}^{>0}})(X)$ 是弱等价。

这又是一个标准的胞腔归纳论证 [Len20, 推论 1.2.65]，使用定理 7.3：我们令 $\mathscr{H}$ 表示所有满足上述映射为弱等价的对象组成的类。若 Y 是一个逐层正平坦的 G-双谱，且 $X=\mathrm{Sp}(R\wedge\text{–})(Y)$，那么 X 的单位与 $\bigvee_{n\geq1}\mathrm{Sp}(R\wedge\text{–})(Y^{\diamond n}/\Sigma_n)$中第一直和项的包含映射在同构意义下相同，因此由定理 7.3 可知它是弱等价，即 $\mathrm{Sp}(R\wedge\text{–})(Y)\in\mathscr{H}$；特别地，$\mathscr{H}$包含始对象 0，以及通常的生成余纤维化 I的所有源对象和目标对象。然而，$\mathscr{H}$在沿余纤维化作推出时封闭（因为右 Quillen 函子 $\mathrm{Sp}(\mathbb{U})$ 根据稳定性和左适定性会将这些映射变为同伦推出），在滤过余极限下也封闭（因为根据引理 5.32，这些映射是同伦的，且由 $\mathrm{Sp}(\mathbb{U})$ 保持），因此$\mathscr{H}$更一般地包含所有 I-胞腔复形，进而包含所有余纤维对象；这是 Quillen 的 retract 论证的结论。□

7.2. 逐层 smash 积是平凡的。在本小节中，我们将通过证明定理 7.3 来完成定理 6.39 的证明。

7.2.1. 普通谱的情形。为此，我们先考察普通 G-谱中构造 7.1 和定理 7.3 的类比：

构造 7.4. 设 X,Y 为谱。我们将 $X\diamond Y$ 定义为具有 $(X\diamond Y)(B)=X(B)\wedge Y(B)$（带基点单纯集合的楔积）以及如下结构映射的谱

$$\begin{aligned}S^A\wedge(X\diamond Y)(B)=S^A\wedge X(B)\wedge Y(B)&\xrightarrow{\delta}S^A\wedge X(B)\wedge S^A\wedge Y(B)\\&\xrightarrow{\sigma\wedge\sigma}X(A\amalg B)\wedge Y(A\amalg B)=(X\diamond Y)(A\amalg B)\end{aligned}$$

其中第一个映射由对角映射 $S^A\to S^A\wedge S^A$ 诱导。显然，这就定义了一个函子。

若 X 和 Y 是 G-谱，则我们赋予 $X\diamond Y$ 诱导作用。给定任意 $n\geq1$，我们将 $X^{\diamond n}$ 视为一个 $(\Sigma_n\wr G)$-谱或 $(\Sigma_n\times G)$-谱。

命题 7.5. 设 X、Y 为 G-谱。

(1) $X\diamond Y$ 是 G-整体弱可缩的。(2) 设 $n>1$。则 $X^{\diamond n}$ 是 $(\Sigma_n\wr G)$-整体弱可缩的。

证明。我们将证明第二个陈述，第一个陈述的证明类似但更简单。我们将说明它甚至与 0 $\underline{\pi}_*$-同构；为此，我们需要以下简单的几何输入：

断言。设 H 是有限群，F、A 是有限的 H-集，且 F 非空且自由，而 $|A| > 1$。那么拓扑空间 H 上的对角嵌入 $\delta\colon S^F \to S^{A\times F}$ 是 H-等变的基点零伦。

证明。映射 δ 是对角映射 $\delta\colon \mathbb{R}[F] \to \mathbb{R}[A\times F]$ 的一点紧化。现在，源对象的 H-不动点维数为 $|F/H|$，而目标对象的 H-不动点维数为 $|(A\times F)/H| = |A|\cdot|F/H| > |F/H|$，其中第一个等式利用了 F 的自由性。特别地，存在一个位于对角线之外的 H-不动点 $p \in \mathbb{R}[A\times F]$。然而

$$(0,1]\times\mathbb{R}[F] \to \mathbb{R}[A\times F]$$
$$(t,x) \mapsto p + t^{-1}(\delta(x) - p)$$

是 H-等变的，并且很容易验证，它可延拓为一个等变保基点同伦，从取常值 ∞ 的映射到对角嵌入 $S^F \to S^{A\times F}$。$\triangle$

现在固定一个有限群 H 和一个同态 $\varphi\colon H \to \Sigma_n \wr G$；我们将证明 $\pi_0^\varphi(X^{\diamond n}) = 0$，其他维数的论证类似，但需要稍多一些记号。为此，我们选取一个穷尽序列 $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset \mathcal{U}_H$，它属于我们最喜欢的完备 H-集宇宙 $\mathcal{U}_H$，并且每个 $B_{k+1}\smallsetminus B_k$ 都包含一个自由的 H-轨道。然后

$$\pi_0^\varphi(X^{\diamond n}) = \operatorname{colim}_{B\in s(\mathcal{U}_H)}[S^B, |\varphi^*(X^{\diamond n})(B)|]_*^H \cong \operatorname{colim}_k [S^{B_k}, |\varphi^*(X^{\diamond n})(B_k)|]_*^H$$

由余终性可得。但另一方面，若 $F \subset B_{k+1}\smallsetminus B_k$ 是自由的 H-轨道，则过渡映射 $[S^{B_k}, |\varphi^*(X^{\diamond n})(B_k)|]_*^H \to [S^{B_{k+1}}, |\varphi^*(X^{\diamond n})(B_{k+1})|]_*^H$ 按定义分解为

$$[S^F\wedge S^{B_k}, S^F\wedge|\varphi^*(X^{\diamond n})(B_k)|]_*^H \xrightarrow{\delta\wedge|\varphi^*(X^{\diamond n})(B_k)|} [S^F\wedge S^{B_k}, S^{(\mathrm{pr}_{\Sigma_n}\circ\varphi)^*\boldsymbol{n}\times F}\wedge|\varphi^*(X^{\diamond n})(B_k)|]_*^H$$

根据该断言，这个映射为零。 □

请注意，定理 7.3 并不能仅通过逐级应用命题得出；特别是，在第一项中取 $X = Y = \Sigma^\infty\mathbb{S}$，$X\diamond Y$ A ≅，我们有 $\Sigma^{2\cdot A}\mathbb{S}$ $X\diamond Y$ 0 ()()，因此 并非全局逐级等价于 。相反，这一归约还需要进一步的准备。

7.2.2. 外部 smash 积。我们先介绍另一种 smash 积：

构造 7.6。设 $X, Y \in$ 为谱。于是我们将外部 smash 积 $X\mathbin{\widehat{\wedge}}Y \in$ Sp(Spectra) 定义为如下双谱：$(X\mathbin{\widehat{\wedge}}Y)(A)(B) = X(A)\wedge Y(B)$，其结构映射显然，即 $(X\mathbin{\widehat{\wedge}}Y)(A) = X(A)\wedge Y$ 和 $(X\mathbin{\widehat{\wedge}}Y)(-)(B) = X\wedge Y(B)$，均为谱。同样，我们通过沿 G-作用传递，将其推广到 G-谱。

注意，上述内容与第3.3小节中考虑的函子 $-\wedge-\colon$ 谱 $\times\,\mathscr{C} \to \mathrm{Sp}(\mathscr{C})$ 在特化到 $\mathscr{C} =$谱时一致。然而，在我们的设定中再次使用“∧”会产生很大的歧义，因此我们引入了上述记号。

定理 7.7. 设 G 为任意有限群。则外部 smash 积

$$-\mathbin{\widehat{\wedge}}-\colon \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global}} \times \boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{Spectra}_{G\text{-global}} \to G\text{-}\mathrm{Sp}(\underline{\mathscr{S}p})_{G\text{-global}}$$

在两个变量上都是同伦的。

关于第二个变量的陈述实际上相当简单：

引理 7.8. 设 X 是一个 G-谱，且设 f 是一个 G-谱之间的全局弱等价。那么 $X\mathbin{\widehat{\wedge}}f$ 在 G-Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 中是一个 G- 全局弱等价。

证明. 若 A 是任意有限集，则 f 是一个 $(G \times \Sigma_A)$-全局弱等价（相对于平凡的 Σ_A-作用），因此 $X(A) \wedge f$ 也如此。因此， $X \mathbin{\widehat{\wedge}} f$ 甚至是一个 G-全局层级弱等价。□

证明外部 smash 积在第一变量上也具有同伦性要困难得多。我们先给出 G-全局弱等价在 G-Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 中的一些进一步闭包性质，它们类似于引理 5.32：

引理 7.9。设 $f\colon X \to Y$ 是 G-Sp($\underline{\mathscr{S}p}$) 中的一个 G-全局弱等价，并设 $\alpha\colon G \to G'$ 是有限群之间的同态。假设 $\ker(\alpha)$ 在 X 和 Y 上逐层自由作用于基点之外。那么 $\alpha_! f$ 是一个 G'-全局弱等价。

证明。在 G-全局投射层模型结构中使用函子性分解，我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

使得竖直映射是 G-全局层弱等价，并且 X'、Y' 是投射余纤维的。由三取二可知， f' 是一个 G-全局弱等价，因此由 Ken Brown 引理可知， $\alpha_! f'$ 是一个 G'-全局弱等价。再应用一次三取二，只需证明 $\alpha_!$ 将竖直映射映为 G'-全局弱等价即可。然而，根据 Len20，注 3.1， G （因此特别是 $\ker\alpha$）在 X' 和 Y' 上逐层自由作用于基点之外。22] 再结合引理 3.15（指标集上的平凡 G-作用），即可由命题 1.45 得出结论。□

此外，同样可以证明：

引理 7.10. 逐层 smash 积

$$(\boldsymbol{G}\text{-}\mathbf{SSet}_*)_{G\text{-equivariant}} \times G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{S}p})_{G\text{-global}} \to G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{S}p})_{G\text{-global}}$$

在每个变量上都是同伦的。 □

定理 7.7 的证明。记 $\mathscr{H}$ 为满足 $-\mathbin{\widehat{\wedge}} X$ 是同伦的 G-全局谱 X 所组成的类。我们的目标是证明 $\mathscr{H}$ 包含所有对象，这将分几个步骤完成。

步骤 1. 对每个 $Y \in \boldsymbol{G}$-I-单纯集$_*$，我们都有 $\Sigma^\bullet Y \in \mathscr{H}$。
代入定义可得，对每个 G-全局谱 T 以及所有有限集 A、B，都有一个自然同构

$$\begin{aligned}(T \mathbin{\widehat{\wedge}} \Sigma^\bullet Y)(A)(B) = T(A) \wedge S^B \wedge Y(B) &\cong S^B \wedge T(A) \wedge Y(B) \\ &= \big(G\text{-Sp}(\underline{\Sigma^\bullet})(T \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)\big)(A)(B)\end{aligned}$$

其中， $\mathbin{\widehat{\otimes}}$ 表示一个 G-谱与一个 G-$\mathcal{I}$-单纯集合的“外部张量积”，即 I-SSet$_*$ 中的 G-谱对象，由 $(T \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)(A)(B) = T(A) \wedge Y(B)$ 给出，并具有显然的函子性。令 A 和 B 变化，便可容易验证，上述内容诱导出一个自然同构 $T \mathbin{\widehat{\wedge}} \Sigma^\bullet Y \cong G$-Sp($\underline{\Sigma^\bullet}$)($T \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$)。然而，$G$-Sp($\underline{\Sigma^\bullet}$) 是左 Quillen 函子（例如，对于投射模型结构而言），并且保持 G-全局层弱等价（命题 1.50），因此它实际上是完全同伦的。于是，只需证明 $- \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$ 将G-谱之间的 G-全局弱等价映射为 G-Sp($\underline{\mathscr{S}}$) 中的 G-全局弱等价。然而，根据命题 4.6，后者可由对角限制 Δ^* 检测，而 $\Delta^*(- \mathbin{\widehat{\otimes}} Y) = - \otimes Y$ 根据命题 4.8 保持 G-谱之间的 G-全局弱等价。

步骤 2。对于每个 $Y \in \boldsymbol{G}\text{-}\boldsymbol{I}\text{-SSet}_*$，我们有 $\Sigma^\bullet Y \in \mathscr{H}$。
由引理 7.8 和三取二，$\mathscr{H}$在 G-全局弱等价下封闭。但由 Len20、定理 1.4.31 和命题 3.2.2] 可得，对于某个带基点的 G-$\mathcal{I}$-单纯集合 $\mathcal{I} \times_I Y$，存在一个 G-全局弱等价$\Sigma^\bullet Y \simeq \Sigma^\bullet(\mathcal{I} \times_I Y)$，因此该结论由前一步推出。

步骤 3。对于每个有限 G-集 A 和每个 $K \in \boldsymbol{G}\text{-SSet}_*$，$\mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge K \in \mathscr{H}$。自函子 $S^A \wedge –: G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{P}p})$ 同伦不变（由前述引理），且构成 Quillen 等价的一部分（由稳定性），因此它反映弱等价。因此，只需证明，对于每个G-全局弱等价 f，$S^A \wedge (f \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge K)$ 是一个 G-全局弱等价。然而，这与 $f \mathbin{\widehat{\wedge}} \left(S^A \wedge \mathbf{\Sigma}(A, –)\right) \wedge K$ 共轭；由一个简单的 Yoneda 论证，$S^A \wedge \mathbf{\Sigma}(A, –) \cong \Sigma^\bullet_+ I(A, –)$ 关于 A 自然（因此G-等变）。于是该结论由前一步推出。

步骤 4。设 H 为有限群，$\varphi\colon H \to G$ 为同态，且 A 为有限忠实 H-集。那么，对于每个带基点的 G-单纯集合 K，$\mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge_\varphi G_+ \wedge K \in \mathscr{H}$。
将 G 替换为 $G \times H$ 并应用上一步可知，函子 $– \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge G_+ \wedge K$ 将 G-全局弱等价映为 $(G \times H)$-全局弱等价，其中 H 按给定方式作用于 A，通过 φ 从右侧作用于 G，并在其他所有地方都平凡作用。然而，由于 A 是忠实的，对于每个有限集 B，H 在基点之外自由作用于 $\mathbf{\Sigma}(A, B)$。因此，引理 7.9 立即推出 $(– \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge G_+ \wedge K)/H \cong – \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{\Sigma}(A, –) \wedge_\varphi G_+ \wedge K$ 是同伦的。

Step 5. 全局函 y *proj*子 y *cofi*纤维的 G全局谱 p包含于 $\mathscr{H}$。
固定一个 G-全局弱等价 $f\colon T \to U$，它诱导出一个自然变换$T \mathbin{\widehat{\wedge}} – \Rightarrow U \mathbin{\widehat{\wedge}} –$。我们要证明，对于所有投射余纤维对象，这都是弱等价。这再次是一个标准的胞腔归纳论证 [Len20，引理 1.2.64]：根据上一步，该结论对标准生成余纤维化的源对象和目标对象成立；此外，对于任意 G-谱 V，函子 $V \mathbin{\widehat{\wedge}} –$ 保持余极限以及单射余纤维化；因此由引理 5.32 可得该结论。

步骤 6。所有 G-全局谱都属于 $\mathscr{H}$。
每个 G-全局谱都弱等价于一个投射余纤维谱。因此，结合上一步和引理 7.8，即得所述结论。□

7.2.3. 平凡性的证明。利用这一点，我们可以证明定理 7.3 的一个关键特例：

命题 7.11。设 A 是任意有限集，X 是正平坦的（$G \times \Sigma_A$）-谱，且 $n > 1$。那么 $(\mathbf{\Sigma}(A, –) \mathbin{\widehat{\wedge}}_{\Sigma_A} X)^{\diamond n}/\Sigma_n$ 是 G-整体弱可缩的。

证明。重新排列各因子，可得

$$(\mathbf{\Sigma}(A, –) \mathbin{\widehat{\wedge}} X)^{\diamond n}(B)(C) \cong \mathbf{\Sigma}(A, B)^{\wedge n} \wedge X^{\wedge n}(C)$$

从而诱导出一个双谱的 $G \times (\Sigma_n \wr \Sigma_A)$-等变同构 $(\mathbf{\Sigma}(A, –) \mathbin{\widehat{\wedge}} X)^{\diamond n} \cong \mathbf{\Sigma}(A, –)^{\diamond n} \mathbin{\widehat{\wedge}} X^{\wedge n}$。由命题 7.5，$\mathbf{\Sigma}(A, –)^{\diamond n}$ 是 $\Sigma_n \wr (G \times \Sigma_A)$-整体弱可缩的，因而也是 $G \times (\Sigma_n \wr \Sigma_A)$-整体弱可缩的，所以定理 7.7 表明 $\mathbf{\Sigma}(A, –)^{\diamond n} \mathbin{\widehat{\wedge}} X^{\wedge n}$ 是 $G \times (\Sigma_n \wr \Sigma_A)$-整体弱可缩的。现在，$\Sigma_A^n$ 在此逐层自由地作用（它在 $\mathbf{\Sigma}(A, –)^{\wedge n}$ 上本来就如此作用），因此由引理 7.9 可知 $(\mathbf{\Sigma}(A, –) \mathbin{\widehat{\wedge}}_{\Sigma_A} X)^{\diamond n} \cong \mathbf{\Sigma}(A, –)^{\diamond n} \mathbin{\widehat{\wedge}}_{\Sigma_A^n} X^{\wedge n}$ 是 $(G \times \Sigma_n)$-整体弱可缩的。但是 $\mathbf{\Sigma}(A, –) \mathbin{\widehat{\wedge}}_{\Sigma_A} X$ 是逐层正平坦的，因此由引理 5.20，Σ_n 在其 n 次 $\diamond$ 幂上的作用是自由的，命题遂由再次应用引理 7.9 得证。□

同理可证：

命题 7.12. 设 A、B 为有限集，X 为一个平坦的 $(G \times \Sigma_A)$-谱，且 Y 为一个平坦的 $(G \times \Sigma_B)$-谱。那么 $\mathbf{\Sigma}(A, –) \widehat{\wedge}_{\Sigma_A} X) \diamond (\mathbf{\Sigma}(B, –) \widehat{\wedge}_{\Sigma_B} Y)$ 是 G-整体弱可缩的。□

由此，我们可以立即轻松地推出定理 7.3 第一部分的以下略微加强版：

命题 7.13。设 $X, Y \in G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{O}p})$，并假设其中至少一个是逐层平坦的。那么 $X \diamond Y$ 是 G-整体弱可缩的。

*Pro*我们首先观察以下闭包性 质：

断言。对于任意（逐层）平坦的 $X \in G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{O}p})$，使得 $X \diamond Y$ 弱可缩的对象类 Y 在 (a) 滤过余极限和 (b) 沿逐层平坦余纤维化的推出下是闭合的。

证明。我们将证明第二个陈述，第一个陈述的论证类似。考虑如下左侧的 $G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{O}p})$ 中的一个推出

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X \diamond A & \xrightarrow{X \diamond i} & X \diamond B \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ X \diamond C & \longrightarrow & X \diamond D \end{array}$$

其中 i 是逐层平坦的。对其应用 $X \diamond –$，可得到右侧的一个推出（因为 $X \diamond –$ 是余连续的），且 $X \diamond i$ 是逐层平坦的余纤维化（特别是单射余纤维化）。因此，若 $X \diamond A$、$X \diamond B$、$X \diamond D$ 弱可缩，则由引理 5.32 可知 $X \diamond D$ 也弱可缩。△

利用这一点，前一个命题立即证明了如下特殊情形：Y 平坦，且对某个平坦的 Z，有 $X = \mathbf{\Sigma}(A, –) \widehat{\wedge}_{\Sigma_A} Z$。但是，对于任意平坦的 Y，使得 $X \diamond Y$ 弱可缩的 X 类同样在滤过余极限以及沿平坦余纤维化的推出下封闭（由对称性可知），从而证明了 X 和 Y 均平坦的情形。由于对于任意逐层平坦的 Z，$– \diamond Z$ 和 $Z \diamond –$ 都保持 G- 全局层弱等价，该结论现在可由余纤维替换推出。□

定理 7.3 的证明。第一个陈述是前一个命题的特例。对于第二个陈述，我们注意到，满足 $X^{\diamond n}/\Sigma_n$ is G-整体弱可缩的逐层正平坦 $X \in G\text{-Sp}(\underline{\mathscr{O}p})$ 类包含 0，且在滤过余极限下封闭。因此，要完成证明，只需证明该类在沿生成余纤维化作推出时也封闭。为此，我们更一般地考虑任意一个推出

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Sigma}(A, –) \widehat{\wedge}_{\Sigma_A} X & \xrightarrow{\mathbf{\Sigma}(A,–)\widehat{\wedge}_{\Sigma_A} i} & \mathbf{\Sigma}(A, –) \widehat{\wedge}_{\Sigma_A} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow[j]{} & P \end{array} \tag{7.1}$$

使得 $i\colon X \to Y$ 是 $(G \times \Sigma_A)$-谱中的正平坦余纤维化，并且 Z 是逐层正平坦的，且对所有 $n > 1$都有 $Z^{\diamond n}/\Sigma_n \simeq 0$；我们将证明，对所有 $n > 1$也有 $P^{\diamond n}/\Sigma_n \simeq 0$。为此，我们应用 [GG16，定理 22]（到所有 SSet-富集函子组成的更大范畴），得到分解

$$Z^{\diamond n}/\Sigma_n = Q_0^n \to Q_1^n \to \cdots \to Q_{n-1}^n \to Q_n^n = P^{\diamond n}/\Sigma_n$$

对所有 n 的 $j^{\diamond n}/\Sigma_n$，使得对于 $k < n-1$ 我们有一个推出

$$\begin{array}{ccc} Z^{\diamond(n-k)}/\Sigma_{n-k} \diamond Q^k_{k-1} & \xrightarrow{Z^{\diamond(n-k)}/\Sigma_{n-k}\diamond j^{\square k}/\Sigma_k} & Z^{\diamond(n-k)}/\Sigma_{n-k} \diamond P^{\diamond k}/\Sigma_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q^n_k & \longrightarrow & Q^n_{k+1} \end{array} \tag{7.2}$$

（其中，当 $k = 0$ 时，空的 $\diamond$-次幂必须解释为形式单位元），而$Q^n_{n-1} \to Q^n_n$ 则还原为 $j^{\square n}/\Sigma_n$。

断言。对于所有 $0 \le k < n$，映射 $Q^n_k \to Q^n_{k+1}$ 都是逐层平坦的余纤维化。

证明。对于 $k = n-1$，这是对对称谱上的正平坦模型结构（例如，非等变情形）的强交换幺半群公理的应用。

另一方面，对于 $k < n-1$，我们注意到推出方块（7.2）中的上方箭头是正的逐层平坦余纤维化，这是由上述特殊情形以及 $Z^{\diamond(n-k)}/\Sigma_{n-k}$的逐层平坦性得出的。断言立即成立。△

由（通常的）稳定性可知，只需证明对于所有 $0 \le k < n$，$Q^n_k \to Q^n_{k+1}$ 的 1-范畴余纤维是平凡的。然而，根据前述[GG16，定理 22]，，此余纤维同构于 $Z^{\diamond(n-k)}/\Sigma_{n-k} \diamond \mathsf{cofib}(j)^{\diamond k}/\Sigma_k$。当 $0 < k < n$ 时，根据命题 7.13，它是 G-整体弱可缩的；而当$k = 0$ 时，根据对 Z的假设，它是 G-整体弱可缩的。最后，若 $k = n$，则由推出（7.1）可知 $\mathsf{cofib}(j) \cong \mathbf{\Sigma}(A, –) \mathbin{\widehat{\wedge}}_{\Sigma_A} \mathsf{cofib}(i)$；由于 $\mathsf{cofib}(i)$ 是逐层正平坦的，命题 7.11 即可推出所述结论。

最后，对于第三个陈述，我们只需像之前一样论证即可看出：对于任意逐层正平坦余纤维化 i，推挤积 $i^{\square n}/\Sigma_n$ 仍然是逐层正平坦余纤维化，并且其（1-范畴意义下的）余纤维与 $\mathsf{cofib}(i)^{\diamond n}/\Sigma_n$ 一致；根据第二个陈述，它是 G-整体弱可缩的。□

References

[And67] Michel Andr´e, *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative*, 《数学讲义》第32卷，施普林格出版社，柏林–纽约，1967年。[Ang08] Vigleik Angeltveit, *Topological Hochschild homology and cohomology of A_∞ ring spectra* **12** 2008 2, 987 1032 ，《Geom. Topol.》（），第 – 期。[AT65] Shˆorˆo Araki 和 Hirosi Toda, *Multiplicative structures in q cohomology theories.* mod ，《Osaka J. Math.》（），–。*I* **2** 1965 71 115

[ATLS03] Leovigildo Alonso Tarr ´ ´ ´ ´ ´ *Con-* ıo、Ana Jeremıas Lopez 和 Marıa Jose Souto Salorio *struction of t-structures and equivalences of derived categories* ，《Trans. Am. Math. Soc.》355（2003年），第6期，2523–2543。[Bar10] Clark Barwick, *On left and right model categories and left and right Bousfield local izations* **12** 2010 2, 245 320 ，《Homology Homotopy Appl.》（），第 – 期。[Bas99] Maria Basterra, *André-Quillen cohomology of commutative S-algebras*, 《J. Pure Appl. Algebra》144（1999年），第2期，111–143。[BDG+16] Clark Barwick、Emanuele Dotto、Saul Glasman、Denis Nardin 和 Jay Shah, *Parametrized higher category theory and higher algebra: Exposé I – Elements of parametrized higher category theory*, 预印本，arXiv:1608.03657，2016年。[Bec03] Jonathan M. Beck, *Triples, algebras and cohomology*, 《Repr. Theory Appl. Categ.》2（2003年），1–59；重印自1967年的博士论文。[BM05] Maria Basterra 和 Michael A. Mandell, *Homology and cohomology of E_∞ ring spectra* **249** 2005 4, 903 944 ，《Math. Z.》（），第 – 期。[BM13] *The multiplication on BP*, 《J. Topol.》6（2013年），第2期，285–310。[CLL23a] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens, *Parametrized stability and the universal property of global spectra* arXiv:2301.08240 2023 ，预印本，，。[CLL23b] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens, *Partial parametrized presentability and the universal property of equivariant spectra* arXiv:2307.11001 2023 ，预印本，，。[CMNN20] Dustin Clausen、Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel, *Descent and vanishing in chromatic algebraic K-theory via group actions* *Ann. Sci. Éc.*，即将在《》发表，现可通过获取，。*Norm. Supér. (4)* arXiv:2011.08233 2020

[GG16] Sergey Gorchinskiy 和 Vladimir Guletski ˘ *Symmetric powers in abstract homotopy* 1, , 《Adv. Math.》 *categories* **292** 2016 707 754 （）, –。[GH04] Paul G. Goerss 和 Michael J. Hopkins, *Moduli spaces of commutative ring spectra*, 《Structured ring spectra》, 《London Math. Soc. Lecture Note Ser.》第315卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2004年, 第151–200页。[GM23] David Gepner 和 Lennart Meier, *On equivariant topological modular forms*, 《Compos. Math.》159（2023年）, 第12期, 2638–2693。[GN15] David Gepner 和 Thomas Nikolaus, *The universal property of global spectra and elliptic cohomology* 12 , 《同伦论》, 《 Oberwolfach Rep.》（Paul G. Goerss、John P. C. Greenlees 和 Stefan Schwede 编）, EMS Press, 2015年。[Har14] John E. Harper, *Corrigendum to "Homotopy theory of modules over operads in symmetric spectra"* https://arxiv.org/abs/0801.0193v4 2014 , ,。[Hau17] Markus Hausmann, *G-symmetric spectra semistability and the multiplicative norm*, 《J. Pure Appl. Algebra》221（2017年）, 第10期, 2582–2632。[Hau19] *Symmetric spectra model global homotopy theory of finite groups*, 《Algebr. Geom. Topol.》19（2019年）, 第3期, 1413–1452。[Hau22] *Global group laws and equivariant bordism rings*, 《Ann. Math.》（2）195（2022年）, 第3期, 841–910。[HHR16] Michael A. Hill、Michael J. Hopkins 和 Douglas C. Ravenel, *On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one* 2 **184** 2016 1, 1 262 , 《Ann. Math.》 （）（）, 第 – 期。[Hil17] Michael A. Hill, *On the André-Quillen homology of Tambara functors*, 《J. Algebra》489（2017年）, 115–137。[Hir03] Philip S. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localizations*, 《Math. Surv. Monogr.》第99卷, 美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）, 2003年。[Hir15] *Overcategories and undercategories of model categories*, 可见 arXiv:1507.01642, 2015年。[Hov99] Mark Hovey, *Model Categories*, 《Math. Surv. Monogr.》第63卷, 美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会, 1999年。[HSS00] Mark Hovey、Brooke Shipley 和 Jeff Smith, *Symmetric spectra*, 《J. Am. Math. Soc.》13（2000年）, 第1期, 149–208。[Joy08] Andr´e Joyal, *The Theory of Quasi-Categories and its Applications*, 讲义, 可见于 https://ncatlab.org/nlab/files/JoyalTheoryOfQuasiCategories.pdf, 2008年。[Law18] Tyler Lawson, *Secondary power operations and the Brown-Peterson spectrum at the prime 2* 2 **188** 2018 2, 513 576 , 《Ann. Math.》（）（）, 第 – 期。[Len20] Tobias Lenz, *G-Global Homotopy Theory and Algebraic K-Theory*, 即将在*Mem. Amer. Math. Soc.*发表, 可通过 arXiv:2012.12676获取, 2020年。[Lew99] L. Gaunce Lewis, jr., *When projective does not imply flat and other homological anomalies* **5** 1999 202 250 , , 《Theory Appl. Categ.》（）, –。[Lur09] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*, 美国新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社, 2009年; 更新版本可见于 www.math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf。[Lur18] *Higher Algebra*, 预印本, 可见于 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf , 2018.[MMSS01] Michael A. Mandell、J. Peter May、Stefan Schwede 和 Brooke Shipley, *Model categories of diagram spectra* 3 **82** 2001 2, 441 512 , 《伦敦数学会会刊》 （）（）, 第 – 期。[MW21] Louis Martini 和 Sebastian Wolf, *Colimits and cocompletions in internal higher category theory* arXiv:2111.14495 2021 , 预印本, , 。[Nar16] Denis Nardin, *Parametrized higher category theory and higher algebra: Exposé IV –*, 预印本, , 。[Qui70] Daniel G. Quillen, *On the (co-) homology of commutative rings*, 《范畴代数的应用》（纯数学专题讨论会论文集, 第 XVII 卷, 纽约, 1968年）, 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, 1970年, 第65–87页。[Rez02] Charles Rezk, *Every homotopy theory of simplicial algebras admits a proper model*, 《拓扑学应用》119（2002年）, 第1期, 65–94页。[Sch97] Stefan Schwede, *Spectra in model categories and applications to the algebraic cotangent complex* **120** 1997 1, 77 104 , 《纯粹与应用代数杂志》（）, 第 – 期。[Sch18] , *Global Homotopy Theory*, 新数学专著, 第34卷, 剑桥：剑桥大学出版社, 2018年。[Sch22] , *Global algebraic K-theory*, 《拓扑学杂志》15（2022年）, 第3期, 1325–1454页。[Sen17] Andrew Senger, *The Brown-Peterson spectrum is not* $\mathbb{E}_{2(p^2+2)}$ *at odd primes*, arXiv:1710.09822, 2017年。

[Shi04] Brooke Shipley, *A convenient model category for commutative ring spectra*, 《同伦论：与代数几何、群上同调及代数 K-理论的关系》。代数拓扑国际会议论文集，西北大学，美国伊利诺伊州埃文斯顿，2002年3月24–28日，《当代数学》，第346卷，罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2004年，第473–483页。[Shu11] Michael Shulman, *Comparing composites of left and right derived functors*, 《纽约数学杂志》17（2011年），75–125页。[SS00] Stefan Schwede 和 Brooke Shipley, *Algebras and modules in monoidal model categories* 3 **80** 2000 2, 491 511 , 《伦敦数学会会刊》 () ()，第 – 期。[Sta22] MICHAEL STAHLHAUER, *André-Quillen homology of global power functors and ultra-commutative ring spectra* 2022, ，博士学位论文，波恩大学，可见于`https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:5-69505`。[Ste16] Marc Stephan, *On equivariant homotopy theory for model categories*, 《同调与同伦应用》18（2016年），第2期，183–208页。[Tam93] Daisuke Tambara, *On multiplicative transfer* **21** 1993 4, , 《通讯代数》1393 1420 ()，第 – 期。[Ull13] John Ullman, *Tambara functors and commutative ring spectra*, 预印本，`arXiv:1304.4912`，2013年。[Whi17] David White, *Model structures on commutative monoids in general model categories*, 《纯粹与应用代数杂志》221（2017年），第12期，3124–3168页。

T.L.: Mathematisches Institut, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany & Mathematical Institute, University ofUtrecht, Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht, The Netherlands (*current address*)

M.S.: Mathematisches Institut, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany