arXiv:2302.06255v1 [math.GR] 13 Feb 2023

格罗莫夫随机怪物群的超刚性

KAJAL DAS

摘要：本文证明了格罗莫夫随机怪物群的超刚性。我们证明，对于几乎所有的 α，从格罗莫夫随机怪物群Γ_α 到群 G 的任意态射 ϕ_α 都有有限像，其中 G 是以下任一类群：映射类群 $MCG(S_{g,b})$、辫群 B_n、自由群的外自同构群 $Out(F_N)$、自由群的自同构群 $Aut(F_N)$、分层双曲群、a-L^p-可容群或 K-可容群。我们引入另一种称为遗传超刚性的性质，并证明 Γ_α 对 a-L^p-可容群或 K-可容群具有遗传超刚性。此外，我们还为 Γ_α 具有超刚性和遗传超刚性的群建立了稳定性定理。

数学主题分类（2020）：20F65, 20F67, 20P05, 53C24, 57K20。

关键词：格罗莫夫随机怪物群、Gromov 双曲空间、初等作用与非初等作用、映射类群、辫群、自由群的自同构与外自同构群、双曲圆柱群、分层双曲群、a-L^p-可容群、K-可容群。

1. Introduction

在文章 [Gro03], Gromov 首次将“随机怪物群”作为有限生成无限关系群的一种随机模型引入。我们简要回顾格罗莫夫随机怪物群的构造。给定三个整数 $d \geq 3$、$k \geq 2$ 和 $j \geq 1$，以及一个由大围长有限群 d-正则连通图 $\{\Omega_n\}$ 构成的无限序列，我们对每个 Ω_n 的每条边独立随机地标记一个长度为 j 的词，该词取自以 k 个生成元 F_k 为基的自由群。我们将群 Γ_α（对应于一个固定标记 α）定义为 F_k 除以与 $\{\Omega_n\}$ 中闭合回路对应的词所生成的正规闭包所得的商群。群的集合 $\{\Gamma_\alpha\}$ 可赋予自然的概率测度。此构造的主要意义在于，对于适当的参数 d、k、j，若选取 $\{\Omega_n\}$ 为合适的扩张图序列，则群 Γ_α 几乎必然不能粗嵌入希尔伯特空间，因为序列 $\{\Omega_n\}$ “弱”嵌入到 Γ_α 的凯莱图中。此外，它还提供了一个反例，表明带有交换 C^*-代数系数的群的 Baum-Connes 猜想并不成立

[HLS02]。关于格罗莫夫随机怪物群的更多信息，请参阅文章 [AD08]。

然而，格罗莫夫随机怪物群的第一个刚性性质（或不动点性质）可从该群的 (T) 性质看出（见[Gro03], [Sil03]）。我们回顾一下：一个离散群具有 (T) 性质，当且仅当该离散群在希尔伯特空间 Y 上的每个等距仿射作用都有不动点。后来，这一结果被推广到 [NS11] for p-一致凸度量空间以及围长较大的 p-扩展图 $\{\Omega_n\}$上。这些度量空间包括L^p-空间（$1 < p < \infty$）、CAT(0) 空间等。众所周知，如果一个离散群具有 (T) 性质，那么它就满足 Serre 性质 (FA)。我们回顾一下：如果一个群在单纯树上的每个等距作用都有一个不动点（[Ser03]），就称该群满足性质 (FA)。性质 (FA) 可以广义化为双曲刚性。若一个群 G 在 Gromov 双曲空间上的任意等距作用都是初等作用（初等作用的定义见第 2.2 小节），则称该群具有双曲刚性。Gruber-Sisto-Tessera 在 [GST20] 中，基于对 $\{\Omega_n\}$的另一种条件，为格罗莫夫随机怪物群证明了这类刚性结果。他们假设图 $\{\Omega_n\}$ 的直径与围长之比一致有界，而不是假设 $\{\Omega_n\}$ 是一个扩展图序列。这些结果的细节可见第 2.4 小节。

本文研究以下类型的问题：对于所有 α，设 $\phi_\alpha : \Gamma_\alpha \to G$ 是群同态，其中 G 是可数离散群。对于哪些群 G， ϕ_α 的像对几乎所有 α 都是有限群? 如果一个群 G 满足上述性质，我们就称 $\{\Gamma_\alpha\}$ 相对于 G 具有超刚性。如果 G 是线性群（即 $GL_m(K)$ 的子群，其中 K 是域），我们就称 $\{\Gamma_\alpha\}$ 相对于 G 具有线性超刚性；对于其他群，我们称其具有非线性超刚性。本文证明了相对于映射类群、辫群、 $Out(F_N)$（具有 N 个生成元的自由群的外自同构群）、 $Aut(F_N)$（具有 N 个生成元的自由群的自同构群）、分层双曲群以及 a-L^p-可和群的这类超刚性结果。对于双曲圆柱群 G，我们证明了一个较弱的结果：对几乎所有 α， Γ_α 在 G 中的像是椭圆型的。在我们的结果中，假设图 $\{\Omega_n\}$ 构成一个 d 正则扩张图序列，且这些图的直径与围长之比有界于 C，即对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $diam(\Omega_n) \leq C girth(\Omega_n)$，并且当 $n \to \infty$ 趋于 $\to \infty$ 时， $girth(\Omega_n)$。对于 a-L^P-可和群的情形，我们假设对于 $1 < p < \infty$, $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 相对于 L^p-空间是一个 p-扩张图，并且对于某个常数 C 及所有 $n \in \mathbb{N}$， $girth(\Omega_n) \geq C\, log(|\Omega_n|)$。现在，我们介绍主要结果。这些结果中使用的记号见第 2 节。

定理 1.1. 对于每个 $j \geq 1$ 以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to MCG(S_{g,b})$， Γ_α在几乎每个 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 中都在 $MCG(S_{g,b})$ 中有有限像。

推论 1.2. 对于每个 $j \geq 1$ 以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to B_n$， Γ_α 在几乎每个 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 中都在 B_n 中有有限像。

定理 1.3. 对每个 $j \geq 1$，以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to Out(F_n)$，几乎对所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$\Gamma_\alpha$ 在 $Out(F_n)$ 中的像都是有限群。

推论 1.4. 对每个 $j \geq 1$，以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to Aut(F_n)$，几乎对所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$\Gamma_\alpha$ 在 $Aut(F_n)$ 中的像都是有限群。

定理 1.5. 设 G 是一个双曲圆柱群。对每个 $j \geq 1$，以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to G$，几乎对所有$\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$\Gamma_\alpha$ 在 G 中的像都是椭圆型的。

定理 1.6. 设 G 是一个分层双曲群。对每个 $j \geq 1$，以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to G$，几乎对所有$\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$\Gamma_\alpha$ 在 G 中的像都是有限群。

定理 1.7. 设 G 是一个 a-L^p-menable 群。对于每个 $j \geq 1$ 以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to G$，Γ_α在 G中的像对几乎所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 都是有限像。

推论 1.8. 对几乎所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$\Gamma_\alpha$ 相对于任意 a-FL^p-menable 群都具有遗传超刚性，其中 $1 < p < \infty$。

定理 1.9. 设 G 是一个 K-可容群。对于每个 $j \geq 1$ 以及任意态射 $\Gamma_\alpha \to G$， Γ_α 在 G中的像对几乎所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 都是有限像。

推论 1.10. 对几乎所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$， Γ_α 相对于任意 K-可容群都具有遗传超刚性。

1.1. 章节安排。在第 2 节中，我们定义所需的概念和记号，并介绍各类群。在本节中，我们还陈述了一些结果，这些结果将有助于证明我们的主要定理和推论。在第 3 节中，我们给出主要定理及其推论的证明。在第 4 节中，我们讨论一些开放问题。

2. Some definitions, notations and useful results

2.1. Gromov 双曲空间与 Gromov 双曲群。

定义 2.1. 若存在一个数 $\delta \geq 0$，使得测地度量空间 X 中的每个测地三角形都满足 δ-薄三角形条件，即任意一条边都包含于另外两条边的 δ-邻域内，则称 X 为 Gromov 双曲的，或称为 δ-双曲的。

注 2.2. 本文中我们始终假设空间 X 是可分、正则且局部紧的。

定义 2.3. 若有限生成群 G 关于某个有限生成集的凯莱图是某个 $\delta \geq 0$ 上的 δ-双曲图，则称其为格罗莫夫双曲群或双曲群。

注记 2.4. 群 G 是格罗莫夫双曲群，当且仅当 G 在某个 Gromov 双曲空间 X 上具有等距、适当不连续且余紧的作用。

2.2. 初等与非初等作用。设 G 等距地作用于双曲度量空间 X。我们用 $\Lambda(G)$ 表示 G 在 ∂X （即 X 的格罗莫夫边界）上的极限点集合。也就是说， $\Lambda(G)$ 是 G 在 ∂X 上任一轨道的聚点集合。根据 $|\Lambda(G)|$（参见 [Gro87], 第 8.2 节），（非循环）群在双曲空间上的可能作用分为以下 4 类:

(1) $|\Lambda(G)| = 0$。等价地， G 具有有界轨道。在这种情况下， G 的作用称为椭圆型。(2) $|\Lambda(G)| = 1$。等价地， G 具有无界轨道且不包含双曲元素。在这种情况下， G 的作用称为抛物型。(3) $|\Lambda(G)| = 2$。等价地， G 包含一个双曲元素，且任意两个双曲元素在 ∂X 上具有相同的极限点。在这种情况下， G 的作用称为线性型。(4) $|\Lambda(G)| = \infty$。此时， G 总是包含双曲元素。进一步地，这种情况分为两个子类：(a) G 固定一个点 $\xi \in \partial X$。在这种情况下， ξ 是 G 的所有双曲元素的公共极限点。这种作用称为拟抛物型。(b) G 在 ∂X 中没有不动点。 G 包含无穷多个独立双曲元素。在这种情况下，该作用称为一般型。 G 的作用在情形 (1)–(3) 中称为初等作用，在情形 (4) 中称为非初等作用。

2.3. 扩展图与 dg-有界图。扩展图是图论中的一个重要对象，在我们的讨论中也将发挥关键作用。更确切地说，基于图扩张图序列构造的 Gromov 随机怪物群具有 (T) 性质。在介绍扩展图的定义之前，我们先定义图的切格常数。

定义 2.5. 给定一个具有 $|\Omega|$ 个顶点的有限连通图 Ω，以及一个子集$A \subseteq \Omega$，记 ∂A 为 A 与 $\Omega \setminus A$ 之间的边集。Ω 的切格常数定义为

$$h(\Omega) = \min_{1 \le |A| \le |\Omega|/2} \frac{|\partial A|}{|A|}.$$

现在，我们来定义扩展图。

定义 2.6. 扩张图是一列 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限连通图，其度数一致有界， $|\Omega_n| \to \infty$ 为 $n \to \infty$，且对某个常数 $c > 0$， $h(\Omega_n) \ge c$ 在 $n \in \mathbb{N}$ 上是一致的。

（组合）扩张图的概念可以推广为相对于度量空间的 p-扩张图，如下所示：

定义 2.7. 我们称由 d-正则有限连通图$\{\Omega_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成的序列是关于度量空间 (Y, d_Y) 的 p-扩张图。若$|V_n| \to \infty$ 当 $n \to \infty$ 时，对每个 $f\colon V_n \to \infty$，都有

$$\frac{1}{|V_n|^2} \sum_{u,v \in V_n} d_Y\big(f(u), f(v)\big)^p \leq \frac{C}{|E_n|} \sum_{\overline{uv} \in E_n} d_Y(f(u), f(v))^p,$$

其中 $\overline{uv}$ 表示顶点 u 和 v 之间的一条边。

备注 2.8. (1) 当 $Y = \mathbb{R}$ 和 $p = 2$ 时，上述不等式等价于通常的（组合）扩张图概念。

(2) 每个（组合）扩张图都满足上述不等式，其中 $Y = l^p$ 且 $1 < p < \infty$（参见 [Mat97] 中的命题 3）。(3) 一般而言，假设度量空间 (Y, d_Y) 是 p-一致凸的，其定义为满足以下性质：存在常数 $c > 0$，使得对任意 $x, y, z \in Y$，任意满足 $\gamma(0) = y$、$\gamma(1) = z$ 的测地线段 $\gamma\colon [0,1] \to Y$，以及任意 $t \in [0,1]$，都有：

$$d_Y\big(x, \gamma(t)\big)^p \leq (1-t) d_Y(x,y)^p + t d_Y(x,z)^p - ct(1-t) d_Y(y,z)^p.$$

这包括用于 $1 < p < \infty$ 的 l^p 空间。

现在，我们介绍大围长、对数围长和 dg-有界图的概念，它们在定理 2.15、定理 2.16 和定理 2.18 中都很重要。在给出这些定义之前，我们先定义图的围长和直径。

定义 2.9。图的围长是其最短非平凡圈的边长。图的直径是任意一对顶点之间边长距离的最大值。

定义 2.10。若图序列 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $girth(\Omega_n) \to \infty$ 随着 $n \to \infty$ 而成立，则称其具有大围长；若存在常数 $C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$girth(\Omega_n) \geq C\, log(|\Omega_n|).$$

定义 2.11。若存在常数 $D > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，则称图序列 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 dg-有界。

$$\frac{diam(\Omega_n)}{girth(\Omega_n)} \leq D.$$

备注 2.12。（1）不难看出，对数围长图具有大围长。

(2) 如果 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有一致有界度数且 dg-有界，那么它具有大围长。关于这一事实的证明，请参阅 [AT19]（第 5 页）。

注 2.13. 在我们的主要定理中，有限连通图序列$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 应具有以下性质：

(a) Ω_n 的最大度不超过 d；(b) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 dg-有界的；(c) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有大围长，或者 (c') $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有对数围长（这蕴含 (c)）；(d) $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个扩展图序列（这蕴含，对于所有$p \in (1,\infty)$，$\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$相对于 p-一致凸空间 l^p 是一个 p-扩张图）。

例 2.14. 我们介绍注 2.13 中所述的具有相应性质的图序列的两种构造。

(1) 第一种构造归功于 Margulis（见 [Mar82]）。我们考虑凯莱图 $\{\Omega_p = Cay\big(SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \ \{A_p, B_p\}\big)\}$，其中 p 遍历所有奇素数，而 A_p 和 B_p 分别为以下两个矩阵：

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

这是一列扩展图。它对所有 p 和 $C > 0$ （与 p无关）都满足 $girth(\Omega_p) \geq Clog|\Omega_p|$。因此，当$p \to \infty$ 时，$girth(\Gamma_p) \to \infty$，并且根据塞尔伯格定理（见 [Sel65]），它是 dg-有界的。

(2) 第二种构造是著名的 Ramanujan 图，由 Lubotzky-Phillips-Sarnak 在 [LPS88]中构造。域 q 元素上的射影一般线性群 $PGL_2(\mathbb{F}_q)$，取一组特定的（$p+1$）个生成元，其凯莱图 $X^{p,\ q}$ 满足以下性质：其中 p 和 q 是模 4 同余于 1 的不同素数，且勒让德符号$(\frac{p}{q}) = -1$:

(1) $X^{p,\ q}$ 是 $N = q(q^2-1)$个顶点上的（$p+1$）-正则图；(2) $girth(X^{p,\ q}) \geq 4\ log_p q - log_p 4$；(3) $\{X^{p,q}\}_{q=1}^{\infty}$ 是 Ramanujan 图族，特别地，它是一列扩展图；

对于固定的素数 p 以及上述每个 q，我们设 $\Omega_q = X^{p,\ q}$。那么$\{\Omega_q\}_q$ 是一个扩张图，且 $girth(\Omega_q) \to \infty$ 如 $q \to \infty$。扩展图混合引理保证 Ω_q 的直径为 $O(logN)$。因此，$\{\Omega\}_q$ 是一个 dg-有界扩张图。

2.4. 格罗莫夫随机怪物群。记 F_k 为由大小为 $2k$ 的对称生成元集 T 生成的自由群，设 Ω 为一个图。Ω 的对称F_k标记 α 是从 Ω 的边集映射到 F_k 的一个映射，并且对每条边 e，都有 $\alpha(e^{-1}) = \alpha(e)^{-1}$。对于 $j \in \mathbb{N}$，我们称 $\mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 为取值于 T^j的对称 F_k标记集。设 Ω 是有限连通图 Ω_n的不交并，即 $\Omega = \sqcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$，并在 $\mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 上赋予乘积分布，该分布来自 $\mathcal{A}(\Omega_n, T^j)$ 上的均匀分布。对于 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，定义 Γ_α 为

将 F_k 对 Ω 中所有标记闭合路径的词取商所得的群。本文中，除非明确说明，否则 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均指注 2.13 中提到的序列。根据上下文，我们用符号 $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}(\Omega,T^j)}$ 或 $\{\Gamma_\alpha\}$ 或 $\Gamma(\Omega\ T^j)$ 表示格罗莫夫随机怪物群。

现在，我们陈述定理 1.1、定理 1.3、定理 1.5 和定理 1.6 的重要组成部分之一。

定理 2.15。（ [GST20] 中的定理 1）设 Ω_n 是一个连通有限图序列，其顶点度介于 3 和 d 之间，其中 $d\geq 3$ 为某个固定值。假设，$|\Omega_n|\to\infty$，且存在 $C>0$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$，$diam(\Omega_n)\leq Cgirth(\Omega_n)$。那么，对于每个 $j\geq 1$ 以及几乎所有的 $\alpha\in\mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，我们有：$\Gamma_\alpha$ 不能在任何测地格罗莫夫双曲空间上作非初等作用。

Gromov 发现随机怪物群具有 Kazhdan 性质 (T)，这是证明定理 1.1、定理 1.3、定理 1.5、定理 1.6 和定理 1.9 的一项重要事实。

定理 2.16。（ [Gro03], 中的定理 1.2.A，以及 [Sil03] 中的定理 2.17 和推论 2.19）设 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个连通有限图序列，其顶点度介于 3 和 d 之间，其中某个固定的 $d\geq 3$ 满足 $girth(\Omega_n)\to\infty$，且 $n\to\infty$ 和 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个扩展图序列。那么，对于几乎所有 $\alpha\in\mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$\Gamma_\alpha$ 都具有 (T) 性质。

利用 Γ_α 的 (T) 性质，我们可以证明以下推论。在定理 1.1、定理 1.3、定理 1.5 和定理 1.6 的证明中，我们也会用到这个推论。

推论2.17。设 H_α 是 Γ_α 的一个有限指数子群。那么，对于几乎所有 α，H_α 不会满射到 $\mathbb{Z}$。

现在，我们陈述定理 2.16 的一个推广，它将有助于证明定理 1.7。

定理 2.18。（ [NS11]中的定理 1.1）假设测地度量空间 (Y,d_Y) 是 p-一致凸的，并且包含一个对数围长为 p 的扩张图序列$\{\Omega_n=(V_n,E_n)\}_{n=1}^{\infty}$。那么对于所有 $d\geq 3$、$k\geq 2$ 和 $j\geq 1$，Γ_α 在 Y 上的任意等距作用，对几乎每个 $\alpha\in\mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 都有一个公共不动点。

2.5. 映射类群。设 $S_{g,b}$ 是亏格为 g 且有 b 个边界分支的紧致、定向、连通曲面，其中 $g,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。我们将$Homeo^+(S_{g,b})$ 定义为从 $S_{g,b}$ 到自身、逐个保持边界分支不变的保向同胚所组成的集合。闭曲面的映射类群定义如下。

定义 2.19. $S_{g,b}$ 的映射类群定义为以下群$Homeo^+(S_{g,b})/\sim$，其中，若 $f\sim g$ f 与 g 同伦，即存在一个同伦 $F\colon S_{g,b}\times[0,1]\to S_{g,b}$，使得 $F(\cdot,0)=f$，$F(\cdot,1)=g$，并且对所有 t，$F(\cdot,t)$都是逐集合保持边界分支的同胚。

现在，我们介绍映射类群理论中的一个非常重要的概念。

定义 2.20。曲线复形 $C(S_{g,\ b})$ 是与曲面 $S_{g,\ b}$ 相关联的抽象单纯复形。其 1-骨架由以下数据给出：顶点——对于 $S_{g,\ b}$ 中每个本质简单闭曲线的同伦类， $C(S_{g,\ b})$ 都有一个顶点。边——若 a 和 b 对应的同伦类的几何交数为 a 和 b 零，则 $C(S_{g,\ b})$ 中任意两个顶点之间都有一条边。更一般地，对于每个由 $(k+1)$ 个顶点组成的元组，若每对对应的同伦类的几何交数均为零，则 $C(S_{g,\ b})$ 都有一个 k-单纯形。

下面的定理是 Masur-Minsky 的一项出色成果：

定理2.21。（ [MM99] 中的定理 1.1）曲线复形 $C(S_{g,\ b})$ 是一个 δ-双曲度量空间，其中 δ 取决于 $S_{g,\ b}$。

陈述定理2.24 时需要用到以下定义。

定义 2.22. 若子群 G 属于 $MCG(S_{g,b})$，且存在 $S_{g,b}$ 的一维子流形 C ，由 $S_{g,b}$ 上一个非空有限的互不相交的非周边简单闭曲线系统组成，并且对任意 $f \in G$，都存在一个同胚 $F\colon S_{g,b} \to S_{g,b}$ ，属于 f 的同伦类且保持 C 不变（也就是说，$F(C) = C$），则称该子群为可约的。

现在，我们陈述一些将用于证明定理 1.1 的定理。

定理 2.23. 映射类群 $MCG(S_{g,b})$ 中的元素 ϕ 在 $C(S_{g,b})$ 上作双曲平移作用，当且仅当 ϕ 是“伪阿诺索夫”的。

定理2.24.（[Iva92], 中的定理 4.6）每个子群 $H \leq MCG(S_{g,b})$ 要么

- 包含两个$S_{g,\ b}$ 它们生成一个二阶自由子群 H，或者
- 是几乎循环的，并且由一个“伪阿诺索夫微分同胚”几乎生成，或者
- H 是可约的。

我们通过引入一个将在定理 1.1 的证明中发挥作用的概念来结束本小节。

定义 2.25。我们将曲面的复杂度记为 $\tau(S_{g,\ b})$，定义为数量 $(3g-3+b)$。

注 2.26. 不难看出， $\tau(S) \leq 0$ 当且仅当 S 是以下曲面之一：环带、球面、裤子曲面、圆盘或环面。

2.6. 辫群。由 n 股辫组成的辫群（记作 B_n），其元素为 n-辫的等价类（例如在环境同痕意义下），群运算为辫的复合。

命题 2.27. 设 S_{n+1} 为带有 $(n+1)$ 个挖点的球面，$MCG(S_{n+1})$ 为 S_{n+1} 的映射类群。我们还假设，$MCG_x(S_{n+1})$ 表示 $MCG(S_{n+1})$ 中固定某个挖点 x 的子群。那么有如下短正合列：

$$1 \to \mathbb{Z} \to B_n \to MCG_x(S_{n+1}) \to 1$$

2.7. 自由群的外自同构群。本小节从自由群的外自同构群的定义开始。

定义 2.28. 有限生成自由群 F_N 的外自同构群是商群 $Aut(F_N)/Inn(F_N)$，其中 $Aut(F_N)$ 是 F_N 的自同构群，而 $Inn(F_N)$ 是由内自同构组成的子群。该群记作 $Out(F_N)$。

现在，我们介绍自由因子复形 FF_N 的概念。它最初由 Hatcher 和 Vogtmann 在 [HV98] 中引入。

定义 2.29。自由因子复形 FF_N 是与自由群 F_N 相关联的抽象单纯复形。其顶点集 $V(FF_N)$ 定义为 FF_N 的所有真自由因子 A 的 F_N-共轭类 $[A]$ 的集合。$[A]$ 和 $[B]$ 是 FF_N 的两个不同顶点；当存在分别代表 $[A]$ 和 $[B]$ 的 F_N 的真自由因子 A、B，使得 $A \leq B$ 或 $B \leq A$ 时，这两个顶点由一条边相连。更一般地，对于 $k \geq 1$，若干个 $(k+1)$ 个不同的 FF_N 的顶点 $[A_0]$、$\cdots$、$[A_k]$ 在 FF_N 中张成一个 k-单纯形，当且仅当在对这些顶点进行可能的重新排序后，存在 $[A_i]$ 的代表元 A_i，使得 $A_0 \leq A1 \leq \cdots \leq A_k$。$FF_N$ 上存在一个由单纯自同构给出的规范作用 $Out(F_N)$：若 $\Delta = [A_0]$、...、$[A_k]$ 是一个 k-单纯形，且 $\phi \in Out(F_N)$，则 $\phi(\Delta) := [\phi(A_0)]$、$\cdots$、$[\phi(A_k)]$。

以下结果由 Bestvina-Feign 得出。

定理 2.30. [BF14] 自由因子复形 FF_N 是双曲的。

以下概念将在我们接下来的结果中用到。

定义 2.31. 若自同构 $\phi \in Out(F_N)$ 的任意非平凡幂都不保持 ϕ 中某个真自由因子的共轭类，则称其为完全不可约的。

现在，我们陈述一些有助于证明定理 1.3 的定理。

定理 2.32. 自同构 $\phi \in Out(F_N)$ 在 FF_N 上双曲地作用，当且仅当 ϕ 是完全不可约的。

定理 2.33. [HM09] $Out(F_N)$ 的每个子群（无论是否有限生成）要么

- 包含两个生成二阶自由子群的完全不可约自同构，要么
- 几乎是循环群，且几乎由一个完全不可约自同构生成；或者
- 几乎固定了 F_N 的某个真自由因子的共轭类。

定理 2.34。（ [BW11] 中的推论 2.9）令 $\overline{IA_N}$ 为映射$Out(F_N) \to GL_N(\mathbb{Z})$的核，该映射由 $Out(F_N)$在F_N的第一同调上的作用给出。那么，$\overline{IA_N}$ 的每个非平凡子群都映 onto $\mathbb{Z}$。

2.8. 轴双曲群。本小节中，我们首先定义群的柱面作用。

定义 2.35. 若群 G在度量空间 X 上的作用满足以下条件，则称其为柱面作用：对于每个 $\epsilon > 0$ ，都存在 R、 $N > 0$ ，使得对于满足 $d(x, y) \geq R$的任意两点 x、y，至多有 N个元素 $g \in G$ 满足 $d(x, gx) \leq \epsilon$ 且$d(y, gy) \leq \epsilon$。

现在，我们定义双曲圆柱群。

定义 2.36. 若群 G 具有非初等柱面作用，作用于某个双曲空间，则称其为 G 双曲圆柱群。

例 2.37. 双曲圆柱群的例子如下（见 [Osi16]）

- 非初等双曲群和相对双曲群；
- $MCG(S_{g,b})$ 除非 $g = 0$ 且 $p \leq 3$；
- $Out(F_N)$ $(N \geq 2)$；
- 直接不可分解的直角阿廷群；
- 大多数三维流形群。

现在，我们陈述下面的定理，该定理将在定理 1.5 的证明中发挥作用：

定理 2.38。 [Osi16] 设 G 是一个在双曲空间上圆柱地作用的群。那么， G 恰好满足以下三个条件之一。

- G具有有界轨道，
- G 是几乎循环的，并且包含一个双曲元素，
- G 包含无穷多个独立双曲元素。

2.9. 分层双曲群。在进入分层双曲群的定义之前，我们先定义层级双曲空间。层级双曲空间的定义取自 [BHS17]。

定义 2.39. 度量空间 $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ 是一个层级双曲空间（分层双曲空间）ˆ，若存在 $\delta \geq 0$、一个指标集 $\mathcal{S}$，以及由 δ-双曲空间构成的集合 $\{\mathcal{C}W : W \in \mathcal{S}\}$ ，使得以下条件成立：

(1)（投影）存在一个集合 $\{\pi_W : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{C}W} : W \in \mathcal{S}\}$，其中包含投影，将 $\mathcal{X}$ 中的点映射到直径受某个 $\xi \geq 0$ 控制的集合中，且这些集合位于不同的 $\hat{\mathcal{C}}W, W \in \mathcal{S}$ 中。

（2）（嵌套）$\mathcal{S}$ 配备了一个偏序 $\sqsubseteq$，并且 $S = \phi$ 或 S包含唯一的 $\sqsubseteq$-极大元素；当 $V \sqsubseteq W$时，我们称 V嵌套于 W中。我们要求对所有 $W \in \mathcal{S}$均有 $W \sqsubseteq W$。对于每个 $W \in \mathcal{S}$，我们用 $\mathcal{S}_W$表示满足 $V \sqsubseteq W$的 $V \in \mathcal{S}$的集合。此外，对于所有 V、$W \in \mathcal{S}$，若 V 适当地嵌套于 W中，则存在一个指定子集 $\rho_W^V \subset \hat{\mathcal{C}}W$，使得 $diam_{\hat{\mathcal{C}}W}(\rho_W^V) \leq \xi$。此外，还存在一个投影$\rho_V^W : \hat{\mathcal{C}}W \to 2^{\hat{\mathcal{C}}V}$。（将 ρ_W^V 视为一个粗略常值映射$\hat{\mathcal{C}}V \to 2^{\hat{\mathcal{C}}W}$，即可说明这种记号上的相似性是合理的。）

（3）（正交性）$\mathcal{S}$ 具有一种称为正交性的对称且反自反关系：当 V、W正交时，我们写作 $V \perp W$。此外，只要$V \sqsubseteq W$ 且 $W \perp U$，我们要求 $V \perp U$。最后，我们要求：对于每个 $T \in \mathcal{S}$ 以及满足 $\{V \in \mathcal{S}_T$ 的每个 $U \in \mathcal{S}_T : V \perp U\} \neq \phi$，存在 $W \in \mathcal{S}_T - \{T\}$，使得只要 $V \perp U$ 且 $V \sqsubseteq T$，就有 $V \sqsubseteq W$。最后，如果 $V \perp W$，则 V、W不具有 $\sqsubseteq$-可比性。

（4）（横截性与一致性）如果 V、$W \in \mathcal{S}$ 不正交，且二者均不包含于另一个之中，则称 V、W 横截，记作$V \pitchfork W$。存在 $k_0 \geq 0$，使得当 $V \pitchfork W$ 时，存在集合 $\rho_W^V \subseteq \hat{\mathcal{C}}W$ 和 $\rho_V^W \subseteq \hat{\mathcal{C}}V$，其直径均不超过 ξ，并满足：

$$min\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}\left(\pi_W(x), \rho_W^V\right), d_{\hat{\mathcal{C}}V}\left(\pi_V(x), \rho_V^W\right)\} \leq \kappa_0$$

对所有 $x \in \mathcal{X}$ 均成立；或者，在 $V \sqsubseteq W$ 的情形下，对所有 $x \in \mathcal{X}$ 均有：

$$min\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}\left(\pi_W(x), \rho_W^V\right), diam_{\hat{\mathcal{C}}V}\left(\pi_V(x) \cup \rho_V^W(\pi_W(x))\right)\}\} \leq \kappa_0.$$

假设：$U \not\sqsubseteq V$ 或 $U \pitchfork V$，且 $U \not\sqsubseteq W$ 或 $U \pitchfork W$。那么，如果 $V \pitchfork W$，则有

$$min\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}\left(\rho_W^U, \rho_V^W\right), d_{\hat{\mathcal{C}}V}\left(\rho_V^U, \rho_W^V\right)\} \leq \kappa_0$$

并且，如果 $V \not\sqsubseteq W$，则

$$min\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}\left(\rho_W^U, \rho_W^V\right), diam_{\hat{\mathcal{C}}V}\left(\rho_V^U \cup \rho_V^W(\rho_W^U)\right)\} \leq \kappa_0.$$

最后，如果 $V \sqsubseteq U$ 或 $U \perp V$，则对于满足 $V \sqsubseteq W$ 或 $V \pitchfork W$ 且满足 $U \sqsubseteq W$ 或 $U \pitchfork W$ 的 $\mathcal{S} - \{U, V\}$，$d_{\hat{\mathcal{C}}W}(\rho_W^U, \rho_W^V) \leq \kappa_0$。

（5）（有限复杂度）存在 $n \geq 0$，使得 $\mathcal{X}$（关于 $\mathcal{S}$）的复杂度满足：任何适当地嵌套于 U_{i+1} 中的序列（U_i），其长度至多为 n。

（6）（距离公式）存在 $s_0 \geq \xi$，使得对于所有 $s \geq s_0$，存在常数 K、C，满足对于所有 x、$x' \in \mathcal{X}$,

$$d_{\mathcal{X}}(x, x') \asymp_{(K,C)} \sum_{W \in \mathcal{S}} \{\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}\big(\pi_W(x), \pi_W(x')\big)\}\}_s.$$

我们常用 $\sigma_{\mathcal{X},s}(x, x')$ 表示第 (6) 项右侧的表达式；更一般地，给定 $W \in \mathcal{S}$，我们用 $\sigma_{W,s}(x, x')$ 表示对 $\mathcal{S}_W$ 求和所得的相应和。

(7)（大链接）存在 $\lambda \geq 1$，使得下述结论成立。设$W \in \mathcal{S}$，并设 x, $x' \in \mathcal{X}$。设 $N = \lambda d_{\hat{\mathcal{C}}W}\big(\pi_W(x)\ \pi_W(x')\big) + \lambda$。则存在 $\{T_i\}_{i=1,\cdots,N} \subseteq \mathcal{S}_W - \{W\}$，使得对所有 $T \in \mathcal{S}_W - \{W\}$，或者$T \in \mathcal{S}_{T_i}$对某个 i成立，或者 $d_{\hat{\mathcal{C}}}T\big(\pi_T(x)\ \pi_T(x')\big) < s_0$成立。此外，对每个 i，$d_{\hat{\mathcal{C}}}W\big(\pi_W(x)\ \rho_W^{T_i}\big) \leq N$。

(8)（有界测地线像）对于所有 $W \in \mathcal{S}$、所有 $V \in \mathcal{S}_W - \{W\}$ 以及 $\hat{\mathcal{C}}W$ 的所有测地线 γ，要么 $diam_{\hat{\mathcal{C}}V}\big(\rho_V^W(\gamma)\big) \leq B$，要么对于某个统一的 B、E，$\gamma \cap \mathcal{N}_E(\rho_W^V) \neq \emptyset$。

(9)（实现）对于每个 κ，存在 θ_e、θ_u，使得以下结论成立。设 $\overrightarrow{b} \in \prod_{W \in \mathcal{S}} 2^{\hat{\mathcal{C}}W}$ 的每个坐标对应于 $\hat{\mathcal{C}}W\hat{}$ 的一个子集，且其直径至多为 κ；对于每个 W，令 b_W 表示 $\overrightarrow{b}$ 的 $\mathcal{C}W$ 坐标。假设每当 $V \pitchfork W$ 时，我们都有

$$min\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}(b_W, \rho_W^V), d_{\hat{\mathcal{C}}V}(b_V, \rho_V^W)\} \leq \kappa$$

并且每当 $V \sqsubseteq W$ 时，我们都有

$$min\{d_{\hat{\mathcal{C}}W}(b_W, \rho_W^V), diam_{\hat{\mathcal{C}}V}(b_V \cup \rho_V^W(b_W))\} \leq \kappa$$

那么，所有满足以下条件的 $x \in \mathcal{X}$ 的集合非空且直径至多为 θ_u：对于所有 $\hat{\mathcal{C}}W \in \mathcal{S}$，$d_{\hat{\mathcal{C}}W}(b_W, \pi_W(x)) \leq \theta_e$。（满足上述不等式的元组 $\overrightarrow{b}$ 称为 κ-一致。）

(10)（层级路径）存在 $D \geq 0$，使得 $\mathcal{X}$ 中任意一对点都可以由一条（D, D）-拟测地线 γ 连接，并且对每个$W \in \mathcal{S}$，投影 $\pi_W(\gamma)$ 与连接 $\pi_W(x)$ 和 $\pi_W(y)$ 的任意测地线之间的豪斯多夫距离至多为 D。我们将这样的拟测地线称为层级路径。

现在，我们定义分层双曲群。

定义 2.40。若有限生成群 G 满足：存在一个分层双曲空间（$\mathcal{X}, \mathcal{S}$），使得 $G \leq Aut(\mathcal{S})$，G 在 $\mathcal{X}$ 上的拟作用是正则且余有界的，并且 G 在 $\mathcal{S}$ 上作用且具有有限多个轨道，则称 G 为分层双曲群（HHG）。关于 $Aut(\mathcal{S})$ 的详细定义，即 $Aut(\mathcal{S})$ 在 $\mathcal{X}$ 上的作用，请读者参阅 [DHS17] 的第 1.2 小节。

例 2.41。分层双曲群的例子如下：

(a) 有限型连通定向曲面的映射类群；(b) 双曲群；(c) 某些相对双曲群；
(d) 许多在 $CAT(0)$ 立方复形上几何作用的群，尤其是直角阿廷群。

现在，我们陈述一个定理、两个命题和一个引理，它们将在定理 1.3 的证明中发挥作用。

定理 2.42。（ [BHS17] 中的定理 K）设 $(\mathcal{X},\mathcal{S})$ 是一个分层双曲空间，且 $G \leq Aut(\mathcal{S})$ 在 $\mathcal{X}$ 上正则且余紧地作用。设 S 是 $\mathcal{S}$ 的极大元素，并将相应的双曲空间记为 $\mathcal{C}S$。那么，G 在 $\mathcal{C}S$ 上圆柱地作用。

命题 2.43。（ [DHS17] 中的命题 9.2）设 $(\mathcal{X},\mathcal{S})$ 是一个分层双曲空间，其中 $\mathcal{X}$ 正则且 $\mathcal{S}$ 可数。设可数群 $G \leq Aut(\mathcal{S})$ 在 $\mathcal{X}$ 中具有无界轨道，且在 $\mathcal{C}S$ 的边界 $\partial\mathcal{C}S$ 上没有全局不动点。那么，要么 G 包含一个不可约轴向元素，要么存在 $U \in \mathcal{S} - \{S\}$，使得 $|G \cdot U| < \infty$。

命题 2.44。（ [DHS17]中的命题 9.16）设 G 是一个分层双曲群。则任何 $H \leq G$ 含有不可约轴向元素的群，要么是虚拟 $\mathbb{Z}$，要么包含一个非阿贝尔自由群。

引理 2.45。（ [DHS17]中的引理 9.17）设 G 是一个分层双曲群，且（$\mathcal{X}$，$\mathcal{S}$）是与 G相关联的分层双曲空间。我们假设 $S \in \mathcal{S}$ 是极大元素。假设ˆ $H \leq G$ 在 $\mathcal{C}S$ 中具有有界轨道，并在 $\mathcal{C}S$的边界ˆ ˆ$\partial\mathcal{C}S$ 中固定某个点 p。则 $|H| < \infty$。

2.10. 具有性质 F_{L^p} 和 a-FL^p-可和性的群。

定义 2.46。如果离散群 G 的任意仿射等距作用 on L^p 都有一个不动点，则称其具有性质 F_{L^p}。

由定理 2.18，我们得到，对于几乎所有的 $\alpha \in \mathcal{A}$（$\Omega\ T^j$）以及 $1 < p < \infty$，Gromov 的随机怪兽群都具有性质 F_{L^p}。现在，我们介绍 a-F_{L^p}-可和性这一性质，在某种意义上，它与性质 F_{L^p}相反。

定义 2.47. 若离散群 G 在某个 L^p 空间上存在 G 的真仿射等距作用，则称其具有 a-F_{L^p}-menability 性质，其中某个 $p \in$ 满足 $(1,\infty)$。

具有 a-F_{L^p}-menability 性质的群的例子如下：

- 具有 Haagerup 性质的群（即在希尔伯特空间上具有真仿射等距作用的群），例如自由群、 SL_2中的格（$\mathbb{R}$、$SO(n,1)$、 $SU(n,1)$ 等，见 [CCJ+01]；
- $Sp(n,1)$ 中的格（这在 [Pan90]，中已有隐含说明，但详细内容可见 [MS20]）；
- 双曲群（归功于 G. Yu，见 [Yu05] ）
- 一些相对双曲群（参见 [CD20], [GRT]）。

2.11. K-可容许群。可容许性的另一种弱形式是 K 理论可 amen 性（简称 K-可容许性）。我们给出 K-可容群定义的一个粗略版本。关于 K-可容许性的详细定义，请读者参阅 [Cun83]的定义 2.2。现在，考虑一个离散可数群 G 以及满同态 $\lambda_G : C^*G \to C_r^*G$，该满同态由 G的左正则表示诱导，其中，C^*G 是 G 的最大 C^*-代数，而 C_r^*G 是 G 的约化 C^*-代数。可容许性的一个刻画是：G是可容许的，当且仅当 λ_G 是同构。粗略地说，如果 λ_G 在 K 理论中诱导同构，即，则称 G是 K-可容许的。

$$(\lambda_G)_* : K_i(C^*G) \to K_i(C_r^*)$$

是 $i = 0$,1 的同构。 [Cun83] 中的实际定义蕴含上述条件。

例 2.48。K-可容许群的例子如下：

(1) 具有 Haagerup 性质的群（见 [Tu99]）；(2) 单关系群（见 [BBV99]）；(3) Haken 3-流形的基本群，这一类包含所有纽结群（见 [BBV99]）；(4) $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$（见 [JV84]）。

我们陈述一个定理和一个命题，它们将用于证明定理 1.9。

定理 2.49。（ [Cun83] 中的定理 2.4.(a)）设 G 是一个可数离散群。若 G 是 K-可容群，则 G 的所有子群都是 K-可容群。

定理 2.50。（ [Cun83], [JV84], 中的注 2.7.(b)，以及 [JV84] 中的推论 3.7）任何具有 (T) 性质的 K-可容离散群都是有限群。

2.12. 遗传超刚性与超刚性的稳定性质。显然，如果 Γ_α 关于 G 和 $H \leq G$ 具有超刚性，那么 Γ_α 关于 H 也具有超刚性。这一性质可能不会传递到商群上。不过，我们还没有发现任何反例。现在，我们介绍 Γ_α 的遗传超刚性，这是一种比超刚性更强的性质。

定义 2.51. 我们称 Γ_α 关于群 G 具有遗传超刚性，如果任意有限指数子群 Γ'_α 对几乎所有 $\alpha \in \mathcal{A}$ （Ω T^j）都关于 G 具有超刚性。

例 2.52. Γ_α 关于一个 a-FL^p-menable 群具有遗传超刚性。我们将在第 3 节证明这一事实。

现在，我们研究超刚性在短正合列下的表现。

定理 2.53. 设 $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} G/N \to 1$ 是一个短正合列。若 Γ_α 关于 N 具有遗传超刚性，且关于 G/N 具有超刚性，则它关于 G 具有超刚性。

证明。设 $\phi_\alpha : \Gamma_\alpha \to G$ 是一个群同态。我们考虑同态 $q \circ \phi_\alpha$: $\Gamma_\alpha \to G/N$。由于 Γ_α 关于 G/N 具有超刚性，$(q \circ \phi_\alpha)(\Gamma_\alpha)$ 是有限群。现在，我们考虑子群 $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha) \cap i(N)$。设 Γ'_α 是映射 ϕ_α 下这个子群的逆像。利用 $(q\circ\phi_\alpha)(\Gamma_\alpha)$ 是有限群这一事实，容易看出 Γ'_α 是 Γ_α 的有限指数子群。由于 Γ_α 关于 N 具有遗传超刚性，$\phi_\alpha(\Gamma'_\alpha)$ 是有限群。因此，$\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ 是有限群。□

3. Proofs of main theorems and corollaries

定理 1.1 的证明：我们将对曲面 S 的复杂度 $\tau(S)$ 进行归纳法证明。由注记 2.26可知，$\tau(S) \leq 0$ 当且仅当 S 是以下曲面之一：环带、球面、裤子曲面、圆盘或环面。若 S 是环带、球面、裤子曲面或圆盘，则 $MCG(S)$ 是平凡的；若 S 是环面，则 $MCG(S)$ 是 $SL_2(\mathbb{Z})$。在第一种情形中，该定理显然成立。由于 $SL_2(\mathbb{Z})$ 是 a-L^p- 可和的，由定理 1.7 可得该定理成立。

现在，假设 $S_{g,b}$ 是任意满足 $\tau(S_{g,b}) > 0$ 的曲面，并且该定理对所有满足 $\tau(T) < \tau(S_{g,b})$ 的曲面 T 都成立。设 ϕ_α: $\Gamma_\alpha \to MCG(S_{g,b})$ 为一个群同态，且对所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 有 $H_\alpha = \phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$。令 H_α 为无限的。我们将用反证法证明该定理。由定理2.21，曲线复形$\mathcal{C}(S_{g,b})$ 是双曲的。H_α 在 $\mathcal{C}(S_{g,b})$ 上等距作用。由定理2.15，H_α 在 $\mathcal{C}(S_{g,b})$ 上初等作用。由定理2.24，$MCG(S_{g,b})$ 的任何在 $\mathcal{C}(S_{g,b})$ 上具有初等作用的子群，要么几乎循环，要么可约，即固定 S 上某条简单闭曲线的同伦类。由于对于几乎所有 α，Γ_α 的任何有限指数子群都不满射到 $\mathbb{Z}$（由推论2.17），H_α 不可能几乎循环。因此，H_α 是可约的，这意味着 H_α 固定 S_g 上一个有限、非空的由互不相交的非外围简单闭曲线构成的集合 C，$_b$。由于 H_α 保持 C 不变，它在 S_g 的连通分支 $\{S_1, \cdots, S_n\}$ $(n > 0)$ 上诱导一个置换，$_b \setminus C$。因此，存在一个从 H_α 到 Σ_n 的同态，其中 Σ_n 是 n 个字母上的置换群。令 H^0_α 为该同态的核。

由于 H^0_α 使每个子曲面 S_i 保持不变（这里每个 S_i 都是带边界的紧致曲面），存在一个同态

$$\psi_\alpha : H^0_\alpha \to MCG(S_1) \times \cdots MCG(S_n).$$

根据 [BLM83]，核是阿贝尔群（见引理 2.1）。我们注意到，当且仅当 g 是绕 C 中曲线的德恩扭转之积时，$\psi_\alpha(g) = 1$。设 ψ_α 的核在 H^0_α 中具有有限指数。这意味着 H^0_α，因此 H_α 几乎阿贝尔。但这不可能，因为 Γ_α 的任何有限指数子群都不能满射到 $\mathbb{Z}$。因此，ψ_α 的核在 H^0_α 中具有无限指数，这意味着 $\psi_\alpha(H^0_\alpha)$ 是无限的。对所有 $i = 1$、$\cdots$、n，令 p_i: $MCG(S_1) \times \cdots MCG(S_n) \to MCG(S_i)$ 为自然投影。那么至少存在一个 $1 \leq j \leq n$，使得 $(p_j \circ \psi_\alpha)(H^0_\alpha)$ 是无限的。然而，根据归纳法，由于 $\tau(S_j) < \tau(S_{g,\ b})$，$(p_j \circ \psi_\alpha)(H^0_\alpha)$ 必须是有限的，矛盾。□

推论 1.2 的证明：由命题 2.27，我们有以下短正合列

$$1 \to \mathbb{Z} \to B_n \to MCG_x(S_{n+1}) \to 1$$

由于 $\mathbb{Z}$ 是-FL^p-可容的，利用推论 1.8 可得，对于几乎处处的 α，Γ_α 相对于 $\mathbb{Z}$ 具有遗传超刚性。另一方面，由于 $MCG_x(S_{n+1})$ 是 $MCG(S_{n+1})$ 的子群，利用定理 1.1 可得，对于几乎处处的 α，Γ_α 相对于 $MCG_x(S_{n+1})$ 具有超刚性。现在，利用定理 2.53 可得，对于几乎处处的 α，Γ_α 相对于 B_n 是超刚性的。因此，推论得证。□

定理 1.3 的证明：设 $\phi_\alpha : \Gamma_\alpha \to Out(F_N)$ 是一个群同态，且对所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，$H_\alpha = \phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$。$H_\alpha$ 在 $Out(F_N)$ 的自由因子复形 FF_N 上等距作用。根据定理 2.30，该复形是双曲的。此外，根据定理 2.15，H_α 在 FF_N 上初等作用。现在，根据定理 2.33，$Out(F_N)$ 的任何在 FF_N 上具有初等作用的子群，要么是几乎循环的，要么是可约的，即几乎固定 F_N 的某个真自由因子的共轭类。由于对于几乎处处的 α，Γ_α 的任何有限指数子群都不映满到 $\mathbb{Z}$（见推论2.17），所以 H_α 不是几乎循环的。

设 $F_N = L * L'$，其中 L 是 F_N 的真自由因子，并且存在 H_α 的一个有限指数子群 H_α^0，它固定 L 的共轭类。我们还假设，对所有 $\psi \in H_\alpha^0$，都有 $\psi(L) = g_\psi^{-1} L g_\psi$。注意，$\psi \mapsto \psi|_L$ 定义了一个从 H_α^0 到 $Out(L)$ 的同态。同样，商群 $F_N/\langle\langle L \rangle\rangle$ 上的作用诱导出一个同态 $H_\alpha^0 \to Out(L')$。根据归纳法，我们知道，H_α^0 在 L 和 L' 的阿贝尔化上的诱导作用都通过一个有限群分解。因此，H_α^0 在 $F_N = L * L'$ 的阿贝尔化上的作用属于一个分块上三角子群（相对于由 L 和 L' 的基组成的基）

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ \star & J' \end{bmatrix}$$

位于 $GL_N(\mathbb{Z})$ 内，其中 J 和 J' 是有限群。这个矩阵群是有限生成且几乎阿贝尔的，而 Γ_α 因而 H_α^0 不存在一个有限指数子群能够映 onto $\mathbb{Z}$。因此，H_α^0 在 F_N 的同调上的作用通过一个有限群分解，故 H_α 的作用也如此；也就是说，$H_\alpha \cap \overline{IA_N}$ 在 H_α 中具有有限指数，其中 $\overline{IA_N}$ 是映射 $Out(F_N) \to GL_N(\mathbb{Z})$ 的核，该映射由 $Out(F_N)$ 在 F_N 的第一同调上的作用给出。

现在，根据定理 2.34，$\overline{IA_n}$ 的每个非平凡子群都映射到 $\mathbb{Z}$。由于 H_α 的任何有限指数子群都不能映射到 $\mathbb{Z}$，我们得出 $H_\alpha \cap \overline{IA_N} = \{1\}$。因此，$H_\alpha$ 是有限群。□

推论 1.4 的证明：由于 F_N 的中心是平凡的，我们有 $F_N \cong Inn(F_N)$。因此，我们得到如下短正合列

$$1 \to F_N \to Aut(F_N) \to Out(F_N) \to 1$$

由于 F_N 是-L^p-可容的，根据定理 1.8 Γ_α 对几乎所有 α 都具有关于 F_N 的遗传超刚性。另一方面，根据定理 1.3 Γ_α 对几乎所有 α 都具有关于 $Out(F_N)$ 的超刚性。现在，利用定理 2.53，我们得到 Γ_α 对几乎所有 α 都具有关于 $Aut(F_N)$ 的超刚性。□

定理 1.5 的证明:

设对于几乎所有的 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$， ϕ_α: $\Gamma_\alpha \to G$ 是一个群同态，其中 G 是一个双曲圆柱群。我们将 $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ 记为 H_α。考虑 G 在双曲空间 X 上的一个柱面作用。于是，根据定理 2.15 和定理 2.38， H_α 在 X 上的作用要么是椭圆型的，要么 H_α 几乎循环且包含一个双曲元素。然而，根据推论2.17，H_α 不可能是几乎循环的。因此， H_α 在 X 上的作用是椭圆型的。□

定理 1.6 的证明：设对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$， ϕ_α : $\Gamma_\alpha \to G$ 是一个群同态，其中 G 是一个分层双曲群。假设 $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ 是根据第2.6小节给出的分层双曲群定义所得到的分层双曲空间。我们假定 S 表示 $\mathcal{S}$ 中嵌套层级最高的元素，而 $\mathcal{C}S$ 表示与之关联的双曲空间。令 $\hat{}H_\alpha = \phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$。 H_α 在双曲空间 $\mathcal{C}S$ 上等距作用。根据定理 $\hat{}$ 2.15， H_α 在 $\mathcal{C}S$ 上初等作用。由定理 2.42 可知， $\hat{}$ H_α 在 $\mathcal{C}S$ 上的作用是柱面的。因此，根据定理 2.38，若 H_α 在 $\mathcal{C}S$ 中有无界轨道，则 H_α 几乎循环。由于对于几乎所有的 α ，没有 Γ_α 的有限指数子群映满 $\mathbb{Z}$ （根据推论2.17），所以对于几乎所有的 α， H_α 都不是几乎循环的。$\hat{}$因此， H_α 在 $\mathcal{C}S$ 中有有界轨道。我们分两种情况讨论:

$\hat{}\hat{}$ (1) 设 H_α 固定 $p \in \partial\mathcal{C}S$，即 $\mathcal{C}S$的边界。于是，根据引理 2.45，$|H_\alpha| < \infty$。(2) 设 H_α 没有任何不动边界点。由命题 2.44， H_α 不含任何不可约轴向元素。现在利用命题 2.43，我们得到存在 $U \in \mathcal{S} - \{S\}$ 使得 $|H_\alpha \cdot U| < \infty$。因此，存在 $U' \in \mathcal{S} - \{S\}$ 使得 H_α 的某个有限指数子群 H_α^0 固定 U'。通过复杂度归纳，我们得到对几乎所有 α， H_α 都是有限群。

因此，定理得证。 □

定理 1.7 的证明：设 $\phi_\alpha : \Gamma_\alpha \to G$ 是几乎处处定义在 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 上的群同态，其中 G 是一个 a-L^p-可采纳群。由于性质 F_{L^p}（即在 L^p 空间上的任意仿射等距作用都有不动点）在商群下保持不变（见 [BFGM07] 中的命题 2.15）， $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ 也具有性质 F_{L^p}。另一方面，a-L^p-可采纳群的子群也是 a-L^p-可采纳的。因此， $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$

是一个 a-L^p-可采纳群。但是，任何同时具有性质 F_{L^p} 和 a-L^p-可采纳性的群都是有限群。因此，定理得证。□

推论 1.8 的证明：以下一般事实可由定理 1.7 的证明得到：从具有 F_{L^p} 性质的群到 a-L^p-menable 群的任何群同态都有有限像。因此，只需证明 Γ_α 的任何有限指数子群都具有 F_{L^p} 性质，而这直接由 [BFGM07] 的命题 8.8 得出。于是推论得证。□

定理 1.9 的证明：设 ϕ_α ： $\Gamma_\alpha \to G$ 是从几乎处处的 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$ 到群的一个群同态，其中 G 是一个 K-可容群。由于 (T) 性质可传递到商群，利用定理 2.16 可得，对于几乎处处的 α， $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ 具有 (T) 性质。另一方面，根据定理 2.49， $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ 是 K-可容的。现在利用定理 2.50 可得，对于几乎处处的 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$， $\phi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ 是有限群。□

推论 1.10 的证明：由定理 1.9 的证明可得一个一般事实：从具有 (T) 性质的群到 K-可容群的任意群同态都具有有限像。因此，只需证明 Γ_α 的任意有限指数子群都具有 (T) 性质；这直接由 [BHV08] 的命题 2.5.7（或在 $p = 2$ 被替换的情况下，由 [BFGM07] 的命题 8.8）得出。由此便得到了推论。□

4. Open questions

在已知的线性群中，格罗莫夫随机怪物群相对于 SL_2（$\mathbb{R}$， SO（n，1）、SU（n，1）、 Sp（n，1）中的格，以及相对于辫群，具有超刚性。但我们不知道，对于 SL_n（$\mathbb{Z}$）（ $n \geq 3$）或 Sp_{2n}（$\mathbb{Z}$）（$n \geq 2$），是否也表现出超刚性现象。我们可以在一般框架下提出如下问题：

问题 1：对于几乎处处的 $\alpha \in \mathcal{A}(\Omega\ T^j)$，其中 G 是高秩单李群的乘积中的一个格，或是局部域上的高秩单代数群的乘积中的一个格， Γ_α 是否相对于 G 具有超刚性?

然而，对于 Out（F_N），这种超刚性现象确实成立。但我们并不清楚，这种现象在多大程度上延伸至右角阿廷群（RAAG） A_Λ的外自同构群，其中 Λ 是定义图。若 Λ是由互不相连的顶点构成的图，则 A_Λ 是自由群 F_n；若 Λ 是完全图，则 A_Λ 是自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^n$。此外， Out（$\mathbb{Z}^n$） $=GL_n$（$\mathbb{Z}$）。因此，人们自然会预期， F_n 所共有的特征也为任意 RAAG 所共有。由此，我们提出以下问题：

问题 2：对于 a. e.$\alpha \in \mathcal{A}$（Ω T^j），Γ_α 是否相对于 Out（A_Λ）具有超刚性?

我们已经看到，Γ_α 相对于以下几类双自动群具有超刚性（定义见 [Eps92]）：

(1) 双曲群；由于具有 a-F_{L^p}-可容许性，Γ_α 相对于它们具有超刚性；其双自动性质的证明见 [Eps92]）；(2) 在一个 $CAT(0)$ 立方复形上适当不连续且共紧地作用的群；由于具有 Haagerup 性质，Γ_α 相对于它们具有超刚性；其双自动性质的证明见 [Swi06]；(3) 双曲群的中心扩张；由定理 2.53 可知，Γ_α 相对于它们具有超刚性；其双自动性质的证明见 [NR97];

但是，我们不知道这对所有双自动群是否都成立。

问题 4：对于任意双自动群 G，Γ_α 是否相对于 G 具有超刚性，即对于几乎处处的 $\alpha \in \mathcal{A}$(Ω T^j)?

我们已经看到，Γ_α 相对于带有 $1 < p < \infty$ 的 a-FL^p-可容群和 K-可容群同时具有超刚性和遗传超刚性。但是，我们不知道以下问题的答案：

问题 5：当 G 是映射类群、辫群、$Out(F_N)$、$Aut(F_N)$ 或分层双曲群时，Γ_α 是否相对于 G具有遗传超刚性?

5. 致谢

我谨感谢印度国家高等数学委员会（NBHM）在资金上支持本项目。我还要感谢 John Mackay、Mahan Mj. 和 Romain Tessera 的有益讨论。

References

[AD08] G. Arzhantseva 和 T. Delzant，随机群的例子，见作者个人网站，2008 年。[AT19] G. Arzhantseva 和 R. Tessera，群扩张下粗嵌入性质并不保持，《国际数学研究论文集（IMRN）》2019 年，第 20 期，6480–6498。[BBV99] C. B´eguin、H. Bettaieb 和 A. Valette。单关系群的 C^*-代数的 K 理论。《K-Theory》，16(3):277–298，1999。[BHV08] B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette。Kazhdan 性质 (T)，第 11 卷。剑桥大学出版社，2008 年。

[BF14] M. Bestvina 和 M. Feighn。自由因子复形的双曲性，《数学进展》256 (2014)，104–155。[BFGM07] U. Bader、A. Furman、T. Gelander 和 N. Monod。巴拿赫空间上的作用的 (T) 性质与刚性。《数学学报》，198(1):57–105，2007。[BHS17] J. Behrstock、M. Hagen、A. Sisto。分层双曲空间 I：立方群的曲线复形，《几何与拓扑》21 (2017) 1731–1804。[BLM83] J. Birman、A. Lubotzky、J. McCarthy，映射类群的阿贝尔子群和可解子群。《杜克数学杂志》，1983，50(4)，1107–1120。[BW11] M. Bridson 和 R. Wade。高秩格对自由群的作用，《组合数学》147 (2011)，第 5 期，1573–1580 页。[CCJ+01] P. A. Cherix、M. Cowling、P. Jolissaint、P. Julg 和 A. Valette。具有 Haagerup 性质的群，数学进展第 197 卷，2001。[CD20] I. Chatterji 和 F. Dahmani，相对双曲群在 l^p-空间上的真作用。《亨利·勒贝格年刊》，第 3 卷（2020），第 35–66 页。[Cun83] J. Cuntz。离散群的 K 理论可 amen 性。《纯粹与应用数学杂志》，344:180–195，1983。[DHS17] M. Durham、M. Hagen、A. Sisto。分层双曲空间的边界与自同构，《几何与拓扑》21 (2017) 3659–3758。[Eps92] D. A. Epstein，与 J. Cannon、D. Holt、S. Levy、M. Paterson、W. Thurston 合著，《群中的字处理》，Jones and Bartlett 出版社，波士顿，1992。[Gro87] M. Gromov，《双曲群》。载于：《群论论文集》第 8 卷。数学科学研究所出版物。施普林格，纽约（1987），第 75–263 页。[Gro03] M. Gromov，随机群中的随机游走，《GAFA：几何与泛函分析》13 (2003)。[GRT] E. Guentner、E. Reckwerdt 和 R. Tessera，经典相对双曲群的真作用与弱 amen 性，预印本。[GST20] D. Gruber、A. Sisto、R. Tessera。随机 Gromov 怪物群不会在双曲空间上作非初等作用，《美国数学会会刊》，第 148 卷，第 7 期，2020 年 7 月，第 2773–2782 页。[HLS02] N. Higson、V. Lafforgue 和 G. Skandalis。Baum-Connes 猜想的反例，《几何与泛函分析》12 (2002)，第 2 期，330–354。[HM09] M. Handel、L. Mosher。 $Out(F_n)$ 中的子群分类，arXiv（2009）。[HV98] A. Hatcher、K. Vogtmann。自由群的自由因子复形，《牛津数学季刊》（2）49 (1998)，第 196 期，459–468 页。[Iva92] N. V. Ivanov。《数学专著译丛》，《Teichm¨uller 模群的子群》第 115 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992 年，由 E. J. F. Primrose 从俄文译出并由作者修订。[JV84] P. Julg 和 A. Valette。 $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ 的 K 理论可 amen 性及其在关联树上的作用。《泛函分析杂志》，58(2):194–215，1984。[LPS88] A. Lubotzky、R. Phillips 和 P. Sarnak，Ramanujan 图，《组合数学》8 (1988)，第 3 期，261–277。[Mar82] G. A. Margulis，无短圈图和低密度码的显式构造，《组合数学》2 (1982)，第 1 期，71–78。[Mat97] J. Matoušek。将扩展图嵌入 l_p 空间，《以色列数学杂志》，102:189–197，1997。[MM99] H. A. Masur、Y. N. Minsky。曲线复形的几何。I. 双曲性，《数学发明》138 (1999)，第 1 期，第 103–149 页。[MP89] J. McCarthy、A. Papadapoulos，Thurston 测地叶层射影球面上的动力学。《瑞士数学评论》，1989，64，133–166。[MS20] A. Marrakchi、M. de la Salle， L_p-空间上的等距作用：对 p 取值的依赖。即将在《组合数学》发表。

[NR97] W. D. Neumann 和 L. Reeves，《字双曲群的中心扩张》，《数学年刊》第二辑，第 145 卷，第 1 期（1997 年 1 月），第 183–192 页（共 10 页）。[NS11] A. Naor、L. Silberman，《Poincaré 不等式、嵌入与野群》，《Compositio Mathematica》，第 147 卷，第 5 期，2011 年 9 月，第 1546–1572 页。[Osi16] D. Osin，《轴稳定双曲群》，《美国数学会汇刊》368（2016），第 2 期，第 851–888 页。[Pan90] P. Pansu，《负曲率流形的上同调：一阶情形》，偏微分方程与几何会议，《都灵大学及理工大学数学研讨会论文集》，1990 年，第 95–120 页。[Sel65] A. Selberg，《模形式傅里叶系数的估计》，1965 年，《纯数学研讨会论文集》第 VIII 卷，第 1–15 页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[Ser03] J. P. Serre，《树》。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003 年。由 John Stillwell 从法文原著译出；为 1980 年英文译本的更正后第 2 次印刷本。[Sil03] L. Silberman，《M. Gromov〈随机群上的随机游走〉一文的补遗》，GAFA，《几何与泛函分析》，第 13 卷（2003 年），第 147–177 页。[Swi06] J. Swiatkowski，《正则路径系统与（双）自动群》，《几何专论》118（2006），第 23–48 页。[Tu99] J. L. Tu，《可和叶状结构的 Baum-Connes 猜想》，K-Theory，17(3):215–264，1999 年。[Yu05] G. Yu，《双曲群在 L^p-空间上存在正则仿射等距作用》，《几何与泛函分析》，15(5):1144–1151，2005 年。

Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, 203 Barrackpore Trunk Road, Kolkata 700 108, India电子邮件地址：kdas.math@gmail.com