arXiv:2302.06257v2 [math.GR] 5 Jun 2023

具有循环中心的 p-群的忠实拟置换表示的最小次数

Sunil Kumar Prajapati* 和 Ayush Udeep

Abstract. 对于有限群 G，我们分别用 $\mu(G)$ 和 $c(G)$ 表示 G的忠实置换表示的最小次数，以及 G在复数域 $\mathbb{C}$上通过拟置换矩阵实现的忠实表示的最小次数。本文研究了具有循环中心的各种非阿贝尔 $\mu(G)$ 和 $c(G)$ 群。我们证明了具有循环中心的正规单项式 p群的一个结果，该结果推广了 Behravesh 关于具有循环中心且幂零类 2 的有限 p 群的结果 p 定理 4。[5，此外，我们还计算了某些亚交换 12] 群的最小次数。 p

1. 引言

在本文中， G 是一个有限群， p 是一个素数。凯莱定理指出， G 可以嵌入 $S_{|G|}$，即作用在 $|G|$ 个符号上的对称群。 G 的最小忠实置换次数$\mu(G)$是满足以下条件的最小正整数 n： G 同构于 S_n的某个子群。Wong [19]将拟置换群定义为一种类似于置换群定义的有限线性群 G：其次数为 n，且 G 中每个元素的迹都是非负整数。由此还得到另一个次数 $c(G)$，它表示 G 通过复拟置换矩阵（迹为非负整数的复数域上的方阵）所作忠实表示的最小次数（见 [8]）。由于每个置换矩阵都是拟置换矩阵，因此容易看出 $c(G) \leq \mu(G)$，也就是说， $c(G)$为 $\mu(G)$提供了一个下界。近年来，若干研究者对 $\mu(G)$和 $c(G)$进行了深入研究（见 [1, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 18, 20]）。在 [7, 定理 3.2], 中，Behravesh 和 Ghaffarzadeh 证明，若 G是一个奇数阶有限 p-群，则 $c(G) = \mu(G)$。在 [5], 中，Behravesh 证明了以下结果。

Theorem 1. [5, 定理 4.12] 若 G 是一个幂零类 2 且具有循环中心的 p-群，则 $c(G) = |G/Z(G)|^{1/2}|Z(G)|$。

在 [4], 中，Behravesh 计算了 $c(G)$，其中 G 是一个具有循环中心的元循环 2-群。文献中尚无关于具有循环中心的一般 p-群的 $c(G)$ 的结果。本文研究具有循环中心的奇数阶有限 p-群的若干类的 $\mu(G)$ 和 $c(G)$。我们首先为若干类有限非阿贝尔 p-群的 $c(G)$ 确定一个范围。

在[7, 引理 2.2], 中，Behravesh 和 Ghaffarzadeh 给出了计算 $c(G)$ 的算法。令$X \subseteq \mathrm{Irr}(G)$，使得对于 X 的每个真子集 Y， $\cap_{\chi\in X}\ker(\chi) = 1$ 且 $\cap_{\chi\in Y}\ker(\chi) \neq 1$。令$\xi_X = \sum_{\chi\in X}\left[\sum_{\sigma\in\Gamma(\chi)}\chi^{\sigma}\right]$，并令 $m(\xi_X)$ 为 ξ_X 在 G 上取值时的最小值的绝对值。则

$$c(G) = \min\{\xi_X(1) + m(\xi_X) \mid X \subset \mathrm{Irr}(G) \text{ satisfying the above property}\}.$$

W我们称集合 $X_G \subset$Irr(G) 为 G i 的最小忠实拟置换表示 f

$$\bigcap_{\chi\in X_G}\ker(\chi) = 1 \text{ and } \bigcap_{\chi\in Y}\ker(\chi) \neq 1 \text{ for any } Y \subset X_G, \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 20D15；次分类号 20C15、20B05。

Key words and phrases. p-群，元可解 p-群，循环中心，拟置换表示。*通讯作者。

使得 $c(G) = \xi(1) + m(\xi)$ 。一般而言， X_G 可能包含 G的线性特征标。在定理 2中，我们给出了一类非阿贝尔 p-群，其中线性特征标不属于 X_G。

THEOREM 2. 设 G 是一个非阿贝尔 p-群，满足 $d(Z(G) \cap G') = d(Z(G))$。则 $X_G \cap \mathsf{lin}(G) = \emptyset$，且 p^{s+1} 整除 $c(G)$，其中 $p^s = \mathsf{min}\{\chi(1) \mid \chi \in \mathsf{nl}(G)\}$。

现在，若 G 是一个有限非阿贝尔 p-群，则可知 $c(G) = f(p) = a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_rp^r$，并且$0 \leq a_i < p$ 使得 $\sum_{i=1}^{r} a_k = d(Z(G))$。基于上述事实，我们证明以下关于任意有限非阿贝尔 p-群的结果。

THEOREM 3. 设 G 是一个非阿贝尔 p-群，满足 $\mathsf{exp}(G) = p^b$，且 $\max \mathsf{cd}(G) = p^e$。假设$c(G) = f(p) = a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_rp^r$，且 $0 \leq a_i < p$。则 $b \leq r$。此外，若 $d(Z(G)) < p$，则$b \leq r \leq b + e$。这些界是最佳可能的。

由定理 3，我们推得以下推论。

COROLLARY 4. 设 G 是一个非阿贝尔 p群，满足 $\mathsf{exp}(G) = p$，且 $\mathsf{cd}(G) = \{1, p\}$。则$c(G) \leq d(Z(G))p^2$。此外，若 $p \geq 3$ 且 G 不是阿贝尔群与非阿贝尔群的直积，则 $c(G) = d(Z(G))p^2$。

定理 5 保证存在一个阶为 p^n $(p \geq 3)$ 的非阿贝尔置换群，它在 p^i 个点上传递作用；对每个 i ($2 \leq i \leq n-1$)，其中 $p \geq n$。

THEOREM 5. 设 G 是一个阶为 p^n $(p \geq 3)$、中心为循环群的非阿贝尔 p群。则

$$c(G) = \mu(G) \in \{p^2, p^3, \ldots, p^{n-1}\}.$$

此外，对于每个 $n \geq 3$以及 $\{2, \ldots, n-1\}$中的每个 i，都存在一个阶为 p^n的 p群，其中某个素数p（例如 G_i）满足 $\mu(G_i) = p^i$。

设 G 是一个非阿贝尔 p阶为 p^n $(p \geq 3)$且具有循环中心的群。由定理 5可知， p^2整除 $c(G)$，且 $c(G)$ 整除 p^{n-1}。在推论6中，我们借助定理 3改进这些界。

COROLLARY 6. 设 G 是一个具有循环中心的非阿贝尔 p群。假设 $p^e = \mathsf{maxcd}(G)$ 且$p^\alpha = \mathsf{min}\{\chi(1) \mid \mathsf{ker}(\chi) = 1, \chi \in \mathsf{nl}(G)\}$。那么

$$p^\alpha |Z(G)| \text{ divides } c(G) \text{ and } c(G) \text{ divides } p^e \cdot \exp(G).$$

特别地，若 $\mathsf{cd}(G) = \{1, p, p^e\}$ $(e > 1)$ 且 $\mathsf{exp}(G) = p$，则 $c(G) = p^{e+1}$。

若群 G 的每个复不可约特征都是由 G 的某个正规子群的线性特征标诱导而来，则称群 G为 p正规单项式群。注意，满足推论6 假设的 p群未必是正规单项式群。在定理 7中，我们改进推论 $c(G)$中得到的关于正规单项式 p群的界。

THEOREM 7. 设 G 是一个中心为循环群的正规单项式 p-群。假设 A 是 G中阶最大的阿贝尔正规子群。那么

$$(\max \mathrm{cd}(G))|Z(G)| \text{ divides } c(G) \text{ and } c(G) \text{ divides } (\max \mathrm{cd}(G)) \exp(A).$$

REMARK 8. 设 G 是一个中心为循环群的正规单项式 p-群。假设 A 是 G 中阶最大的阿贝尔正规子群，且 $|Z(G)| = \mathsf{exp}(A)$。由定理 7，我们得到$c(G) = (\mathsf{maxcd}(G))|Z(G)|$。若 G 是一个幂零类 2 的群，则 G 是一个亚交换群，因此也是正规单项式群。此外，在命题 24 中，我们证明了：若 G 是一个中心为循环群的有限 p-群（$p \geq 3$），且其幂零类为 2，则存在一个阶最大的阿贝尔正规子群 A，使得 $|Z(G)| = \mathsf{exp}(A)$。因此，我们通过定理 7 推得了关于 $p \geq 3$的定理 1。

我们以一条关于亚元阿贝尔 p-群的结果作为本文的结尾。亚元阿贝尔 p-群的类别十分广泛，而且由于 $c(G)$ 和 $\mu(G)$ 的计算在很大程度上取决于群的结构 G，因此对于任意一般的亚元阿贝尔 $c(G)$ 和 $\mu(G)$ 群都很难进行计算。在定理 10 中，我们通过研究若干类亚元阿贝尔 p-群，朝这个方向迈进了一步。

Remark 9. 设 G 是一个非阿贝尔 p-群（$p \geq 3$），满足 cd(G) $= \{1, p\}$、exp(G) $\in \{p, p^2\}$ 且 $d(Z(G)) < p$。那么由定理 3 可得，对于某些 $0 \leq a$、b、$c < p$，有 $c(G) = ap + bp^2 + cp^3$，其中 $a + b + c = d(Z(G))$。此外，若 G 不是一个阿贝尔子群与一个非阿贝尔子群的直积，则由引理 14 和 [7, 定理 3.2], 可得，对于某些 $0 \leq a$、$b < p$，有 $c(G) = ap^2 + bp^3$，其中$a + b = d(Z(G))$。例 27(1) 表明，这个界是最佳可能的。

在定理 10中，在某些条件下，我们研究一类非阿贝尔 p-群，使得 cd(G) ={$1, p, p^2$} 并求出 $c(G)$ 的一个取值范围。事实上，我们证明如下结果。

Theorem 10. 设 G 是一个非阿贝尔 p-群（$p \geq 3$），满足 exp(G) $\in \{p, p^2\}$、cd(G) $= \{1, p, p^2\}$、$d(Z(G)) \geq 2$，且 G 不是阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积。假设 G中存在一个指数为 p^2 的初等阿贝尔正规子群。那么，对某个满足 $a + b = d(Z(G))$ 的 $0 \leq a$，有 $c(G) = ap^2 + bp^3$。

在第 2 节中，我们总结了本文其余部分将用到的符号和一些预备结果。我们在第 3 节中证明本文的结果。在第 3.1 小节中，我们计算了各类 p-群 G的 $c(G)$ 的一个取值范围。在第 3.2 小节中，我们研究具有循环中心的正规单项式 p-群的 $c(G)$。在同一小节中，当 G 是一个具有循环中心的 p-群（$p \geq 3$）时，我们计算 $\mu(G)$ 和 $c(G)$。最后一小节，即第 3.3 小节，给出定理 10 的证明。

2. 记号与预备知识

我们用 $\emptyset$ 表示空集。对于有限群 G， $d(G)$ 和 G' 分别表示 G 的最小生成元个数和换位子群。对于 $g \in G$， $o(g)$ 表示元素 g 的阶；对于 G 的子群 H，$\mathrm{Core}_G(H)$ 表示 H 在 G 中的核。令 Irr(G)、lin(G) 和 nl(G) 分别表示 G 的不可约复特征标集、线性特征标集和非线性不可约特征标集。我们用 cd(G) 表示 G 的特征标次数集，即 $\{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$。对于 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$， $\mathbb{Q}(\chi)$ 表示将所有 $\chi(g)$（其中 $g \in G$）的取值添入 $\mathbb{Q}$ 后得到的域； $\Gamma(\chi)$ 表示 $\mathbb{Q}(\chi)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗瓦群。对于任意 $k \geq 3$，我们用 C_p^k 表示秩为 k 的初等阿贝尔 p-群。令 $\phi(n)$ 为欧拉 φ 函数，令 ω_n 为本原 n^{th} 次单位根。

接下来，我们引用一些将在全文中用到的有用结果。关于 μ（G）的一些有趣背景结果，读者可参阅 [16, 20]。Johnson [16] 证明了以下结果，它给出了一个 p-群的极小忠实置换表示中传递成分的数量。

Lemma 11. [16, 定理 3] 设 G 为一个 p-群，并设 $\mathcal{H} = \{G_1, \ldots, G_n\}$ 为 G的一个极小忠实置换表示。若 p 为奇数，则 $n = d$（Z（G））。若 $p = 2$，则 d（Z（G））$/2 \leq n \leq d$（Z（G））， 且界 $n = d$（Z（G））可以达到。

设 χ, $\psi \in$ Irr（G）。若存在 $\sigma \in \Gamma$（χ）使得 $\chi^\sigma = \psi$，则称 χ 和 ψ 在 $\mathbb{Q}$ 上伽罗瓦共轭。可以验证，伽罗瓦共轭在Irr（G）上定义了一个等价关系。此外，若 $\mathcal{C}$ 表示 χ 关于在 $\mathbb{Q}$上的伽罗瓦共轭的等价类，则 $|\mathcal{C}| = |\mathbb{Q}$（$\chi$）： $\mathbb{Q}|$（见 [13, 引理 9.17]）。对于 $\psi \in$ Irr（G），令 Ψ 为其关于 $\mathbb{Q}$的伽罗瓦和，即$\Psi = \sum_{\sigma \in \Gamma(\psi)} \psi^\sigma$。令{$1_G = \Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_r$} 表示 G的不可约特征标的所有伽罗瓦和。注意，这些是 G 的 $\mathbb{Z}$-值特征标。在上述设定下，我们给出以下定义和结果，并用它们来计算c（G）。

Definition 2.0.1. 设 G 为有限群。

(i) 对于 $\psi \in$ Irr(G)，定义 $d(\psi) = |\Gamma(\psi)$ $|\psi(1)$。(ii) 对于任意复特征标 χ of G，定义

$$m(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi(g) \geq 0 \text{ for all } g \in G, \\ -\min\left\{ \sum_{\sigma \in \Gamma(\chi)} \chi^\sigma(g) : g \in G \right\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 12. 设 G 为非阿贝尔有限群。则以下结论成立。

(i) [7, 引理 2。2] G 具有最小次数的忠实拟置换特征标，即 $c(G)$，其形式为 $m(\xi)1_G+\xi$，其中 $\xi=\sum_{i\in I}\Psi_i$，$I\subseteq\{1,2,\ldots,r\}$ 且

$$\bigcap_{i\in I}\ker(\Psi_i)=1,\quad \bigcap_{i\in J}\ker(\Psi_i)\neq 1 \text{ for any } J\subset I. \tag{2}$$

(ii) [12, 定理 2.3] 如果 G 是一个 p-群，那么 $m(\xi)=\frac{1}{p-1}\xi(1)$，且 $|I|$ 是 $Z(G)$的最少生成元数。

[7, 引理 2.2] 的证明存在一个小错误，我们在此予以修正。

引理 12(i). 设 ξ 是 G 的一个次数最小的忠实拟置换特征标。那么

$$\xi=m'1_G+\sum_{i\in I}d_i\Psi_i \qquad (m',d_i\geq 1 \text{ and } I\subseteq\{1,\ldots,r\})$$

这里，$1=\ker(\xi)=\cap_{i\in I}\ker(\Psi_i)$，且 $-m'$ 是 $\sum_{i\in I}d_i\Psi_i$的最小值。取 $I'\subset I$ 使得

$$\bigcap_{i\in I'}\ker(\Psi_i)=1,\quad \bigcap_{i\in J}\ker(\Psi_i)\neq 1 \text{ for any } J\subset I'. \tag{3}$$

(这样的子集 I' 的存在性可通过对 $|I|$进行归纳证明。)考虑特征标 $\sum_{i\in I'}\Psi_i$（取有理值），并设 $-m$ 为其最小值。取 $\eta=m1_G+\sum_{i\in I'}\Psi_i$。那么 η 是 G的一个拟置换特征标，且它是忠实的。因此 $\eta(1)\geq\xi(1)$。我们可以将 ξ 写成

$$\xi=(m'-m)1_G+\sum_{i\in I',d_i>1}(d_i-1)\Psi_i+\sum_{i\in I-I'}d_i\Psi_i+\eta. \tag{4}$$

若 $m'>m$，则 η 将是 ξ 的子特征标，因此 $\xi(1)>\eta(1)$，矛盾。所以 $m\geq m'$。现在 $-m$ 是 $\sum_{i\in I'}\Psi_i$ 的最小值，设为某个 $h\in G$ 的 $-m=\sum_{i\in I'}\Psi_i(h)$，即 $\eta(h)=0$。由于 $\Psi_i(h)\leq|\Psi_i(h)|\leq\Psi_i(1)$，我们得到

$$\begin{aligned}0\leq\xi(h)&=(m'-m)+\sum_{i\in I',d_i>1}(d_i-1)\Psi_i(h)+\sum_{i\in I-I'}d_i\Psi_i(h)\\&\leq(m'-m)+\sum_{i\in I',d_i>1}(d_i-1)\Psi_i(1)+\sum_{i\in I-I'}d_i\Psi_i(1)\end{aligned}$$

因此，由方程（4），我们得到

$$\xi(1)=(m'-m)+\sum_{i\in I',d_i>1}(d_i-1)\Psi_i(1)+\sum_{i\in I-I'}d_i\Psi_i(1)+\eta(1)\geq\eta(1)\geq\xi(1).$$

So $\eta=m1_G+\sum_{i\in I'}\Psi_i$ 是满足（条件的最小次数的忠实拟置换特征标 3). □

注：存在非阿贝尔群，例如 SD_{16}，其阶为 16，具有如下形式的最小次数忠实拟置换特征标：$m(\xi')1_G+\xi'$，其中 $\xi'=\sum_{i\in I}d_i\Psi_i$ 且 $d_i\geq 2$，对某个 i，或者 $\{\Psi_i\}_{i\in I}$不满足（2）。

若 $G\cong\prod_{i=1}^{k}C_{p^{r_i}}$ 且 $p\geq 3$，则 $c(G)=\mu(G)=\sum_{i=1}^{k}p^{r_i}$（参见 [6, 定理 2.11] 和 [7, 定理 3.2]）。对于有限 p-群的不可约特征标，Ford 在 [11] 中证明了以下结果。

Lemma 13. [11, 定理 1] 设 G 为一个 p-群，且 χ 为 G的一个不可约复特征标。则以下情况之一成立：

(i) 存在一个定义在 G 的子群 H 上的线性特征标 λ，它诱导出 χ，并生成与 χ 相同的域，即 $\lambda\uparrow_H^G=\chi$ 和 $\mathbb{Q}(\lambda)=\mathbb{Q}(\chi)$。(ii) $p=2$，且在 G 中存在子群 $H<K$，满足 $|K/H|=2$，以及 H 的一个线性特征标 λ，使得对于 $\lambda\uparrow_H^K=\eta$，有 $[\mathbb{Q}(\lambda):\mathbb{Q}(\eta)]=2$，$\eta\uparrow_K^G=\chi$，且 $\mathbb{Q}(\eta)=\mathbb{Q}(\chi)$。

3. 结果

3.1. p-群的 $c(G)$ 取值范围。记 $\overline{G_p}$ 为具有极小忠实置换表示 $\mathcal{H}=\{G_1,\ldots,G_n\}$ 的 p-群类，其中 $\{Z(G)\cap G_1,\ldots,Z(G)\cap G_n\}$ 是 $Z(G)$ 的极小忠实置换表示。Johnson 在命题 3] 中证明，若 $\overline{G_p}$ 中的非阿贝尔群 G 满足 $p\geq 3$，且 G 不是非平凡直积，则 $p\mu(Z(G))\leq\mu(G)\leq\frac{1}{p}|G:Z(G)|\mu(Z(G))$。这一结果在计算 p-群的 $\mu(G)$ 时非常有用。出于同样的动机，本小节将推导任意 p-群 G 的 $c(G)$ 的取值范围。

若 G 是一个非阿贝尔 p-群（$p\geq 3$），则 $\mu(G)=c(G)=f(p)=a_1p+a_2p^2+\cdots+a_rp^r$，且满足 $0\leq a_i<p$。在以下结果中，我们给出关于 G 的一个充分条件，使得 $f'(0)=0$。

Lemma 14. 设 G 是一个阶为 p^n（$p\geq 3$）的非阿贝尔 p-群，且 G 不是一个阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积。那么 p^2 整除 $\mu(G)$。

证明。设 $X=\{H_1,H_2,\ldots,H_t\}$ 是 G的极小忠实置换表示。那么由引理 11，可得 $t=d(Z(G))$。现在，令 $\mu(G)=\sum_{k=1}^{r}a_kp^k$，其中 $0\leq a_k<p\ (1\leq k\leq r)$。由于$|X|=d(Z(G))$，我们有 $\sum_{k=1}^{r}a_k=d(Z(G))$。

断言：$a_1=0$。反之，假设 $a_1>0$。那么，对于某个 $H_i\in X$，$|G/H_i|=p$ 且 $\mathrm{Core}_G(H_i)=H_i$。不失一般性，我们可以假设 $|G/H_1|=p$。于是，

$$\bigcap_{j=1}^{t}\mathrm{Core}_G(H_j)=1\Rightarrow\mathrm{Core}_G(H_1)\bigcap\left(\bigcap_{j=2}^{t}\mathrm{Core}_G(H_j)\right)=1\Rightarrow H_1\bigcap\left(\bigcap_{j=2}^{t}\mathrm{Core}_G(H_j)\right)=1.$$

令 $\bigcap_{j=2}^{t}\mathrm{Core}_G(H_j)=K_1$。那么 K_1 是 G 的正规子群，且 $|K_1|=p$。由于 $|H_1|=p^{n-1}$，我们得到 $G=H_1\times K_1\cong H_1\times C_p$，矛盾。因此，$a_1=0$，这意味着 p^2 整除 $\mu(G)$ 或$f'(0)=0$。□

Remark 15. 引理 14 的逆命题不成立，即存在一个群 G，使得 p^2 整除$\mu(G)$，但 G 是一个阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积。例如，取 $G=H\times K$，其中 $H=\langle x、y\mid y^{-1}x^{-1}yx=x^p、x^{p^2}=y^p=1\rangle$ 且 $K\cong C_{p^2}$。这里，H是一个阶为p^3的非阿贝尔 p-群。于是，由 [20, 推论 2.2]，$\mu(G)=\mu(H)+\mu(K)=2p^2$，因此 p^2 整除 $\mu(G)$。

定理 2的证明。设 $X_G=\{\chi_i\}_{i=1}^{m}$，其中 $\chi_i\in\mathrm{nl}(G)$，对每个 $1\leq i\leq m$。对每个$1\leq i\leq m$，设 $\chi_i(1)=p^{a_i}$ 且 $|\Gamma(\chi_i)|=\phi(p^{b_i})$。于是

$$\xi_{X_G}(1)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in\Gamma(\chi_i)}\chi_i^{\sigma}(1)=\sum_{i=1}^{m}\chi_i(1)|\Gamma(\chi_i)|=\sum_{i=1}^{m}p^{a_i}\phi(p^{b_i})=\sum_{i=1}^{m}p^{a_i+b_i}-p^{a_i+b_i-1}.$$

由引理 12,

$$m(\xi_{X_G})=\frac{1}{(p-1)}\xi_{X_G}(1)=\sum_{i=1}^{m}p^{a_i+b_i-1}.$$

因此，我们得到 $c(G)=\xi_{X_G}(1)+m(\xi_{X_G})=\sum_{i=1}^{m}p^{a_i+b_i}$.现在，设 $p^s=\min\{\chi(1)\mid\chi\in\mathrm{nl}(G)\}$。由于 $a_i\geq s$ 且 $b_i\geq 1$，对每个 $1\leq i\leq m$，我们得到 p^{s+1} 整除 $c(G)$。

现在，我们证明：若 $d(Z(G)\cap G')=d(Z(G))$，则 $X_G\cap\mathrm{lin}(G)=\emptyset$。当 $d(Z(G))=1$，即 $Z(G)$ 是循环的时，结论显然成立。现在，设 $d(Z(G))=m>1$，且 $d(Z(G)\cap G')=d(Z(G))$。令 $X_G=\{\psi_i\}_{i=1}^{m}$ 为满足(1) 的 G 的最小忠实拟置换表示。为证明每个 ψ_i 都是非线性的，假设对某个 $1\leq r\leq m$，ψ_r 是线性的。由于 $\cap_{i=1,i\neq r}^{m}\ker(\psi_i)\neq 1$，取$z\in\left(\cap_{i=1,i\neq r}^{m}\ker(\psi_i)\right)\cap Z(G)$，其阶为 p。由于 $d(Z(G)\cap G')=d(Z(G))$，因此 $Z(G)$ 中所有阶为p 的中心元素也都属于 G'。于是，$z\in G'\subseteq\ker(\psi_r)$，从而 $z\in\cap_{i=1}^{m}\ker(\psi_i)$，这与假设矛盾。□

Remark 16. 在定理2中，若 $d(Z(G)\cap G')\neq d(Z(G))$，则 ψ 可能属于 X_G，对于某个 $\psi\in\mathrm{lin}(G)$。例如，考虑

$$G=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta_1,\beta_2\mid[\alpha_4,\alpha_5]=\alpha_3,[\alpha_3,\alpha_5]=\alpha_2,[\alpha_2,\alpha_5]=\alpha_1=\beta_1,\alpha_4^p=\beta_2,$$
$$\alpha_5^p=\beta_1,\alpha_2^p=\alpha_3^p=\beta_1^p=\beta_2^p=1\rangle$$

它是一个阶为 p^6 $(p \geq 5)$ 的 p-群，属于同斜系 Φ_9（见 [10]）。在上述群表示中，所有形如 $[\alpha, \beta] = 1$（其中 α、β 为生成元）的关系均已省略。现在，这里$Z(G) = \langle \alpha_5^p$、$\alpha_4^p \rangle \cong C_p \times C_p$、$G' = \langle \alpha_5^p$、$\alpha_3$、$\alpha_2 \rangle \cong C_p^3$以及 $G/G' = \langle \alpha_5 G'$、$\alpha_4 G' \rangle \cong C_p \times C_{p^2}$。因此$d(Z(G) \cap G') = 1 \neq d(Z(G))$。现在，取 $A = \langle \alpha_5^p$、α_4、α_3、$\alpha_2 \rangle \cong C_p \times C_{p^2} \times C_p \times C_p$。则 A 是 G 中指数为 p 的阿贝尔正规子群。因此，由 [13, 定理 12。11], $\mathsf{cd}(G) = \{1, p\}$。由引理 12，$|X_G| = 2$。

设 $\psi \in \mathsf{lin}(G/G')$ 由 $\psi = 1_{\langle \alpha_5 G' \rangle} \cdot \psi_{\langle \alpha_4 G' \rangle}$ 给出，其中 $\psi_{\langle \alpha_4 G' \rangle}$ 是 $\langle \alpha_4 G' \rangle$ 的忠实线性特征标。另一方面，设 $\lambda \in \mathsf{lin}(A)$ 由 $\lambda = \lambda_{\langle \alpha_5^p \rangle} \cdot 1_{\langle \alpha_4 \rangle} \cdot 1_{\langle \alpha_3 \rangle} \cdot 1_{\langle \alpha_2 \rangle}$ 给出，其中 $\lambda_{\langle \alpha_5^p \rangle}$ 是$\langle \alpha_5^p \rangle$ 的忠实线性特征标。由于 λ 在 G 中的惯性群为 $\mathsf{I}_G(\lambda) = A$，我们得到 $\lambda \uparrow_A^G \in \mathsf{nl}(G)$。这里，$\ker(\psi) \cap \ker(\lambda \uparrow_A^G) = \ker(\psi) \cap \mathsf{Core}_G(\ker(\lambda)) = 1$。现在，$d(\psi) = \phi(p^2) = p(p-1)$，且 $d(\lambda \uparrow_A^G) = \lambda \uparrow_A^G(1)|\Gamma(\lambda \uparrow_A^G)| \leq p|\Gamma(\lambda)| = p\phi(p) = p(p-1)$。由于 $|\Gamma(\lambda \uparrow_A^G)| \geq \phi(p)$，我们得到 $d(\lambda \uparrow_A^G) = p(p-1)$。假设 $\xi = \left[\sum_{\sigma \in \Gamma(\psi)} \psi^\sigma\right] + \left[\sum_{\sigma \in \Gamma(\lambda \uparrow_A^G)} \left(\lambda \uparrow_A^G\right)^\sigma\right]$。那么 $\xi(1) = 2p(p-1)$。由 [5, 引理 4.5], , 我们得到 $m(\xi) = 2p$。因此，$\xi(1) + m(\xi) = 2p^2$，这意味着 $c(G) \leq 2p^2$。由引理 14 和 [7, 定理 3. 2], , 容易看出 $c(G) = \mu(G) \geq 2p^2$。因此，我们得到 $c(G) = 2p^2$ 和 $X_G = \{\psi, \lambda \uparrow_A^G\}$，其中 $\psi \in \mathsf{lin}(G)$。

Remark 17. 存在非阿贝尔 p-群，它们不存在满足 $X_G \cap \mathsf{lin}(G) = \emptyset$ 的最小忠实拟置换表示 X_G。例如，考虑 $G = H \times K$，其中 H是一个阶为 p^3 $(p \geq 3)$、指数 $\exp(H) = p$ 的特殊p-群，并且 $K \cong C_p$。由 [7, 定理 3.2]，$c(G) = p^2 + p$。若可能，假设 $X_G = \{\chi_1, \chi_2\} \subset \mathsf{nl}(G)$ 是 G 的最小忠实拟置换表示。那么

$$\xi(1) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\sigma \in \Gamma(\chi_i)} {\chi_i}^\sigma(1) = 2p(p-1) \text{ and } m(\xi) = 2p \text{ (from Lemma 12)},$$

这意味着 $2p^2 = \xi(1) + m(\xi) > c(G)$，矛盾。

Corollary 18. 设 G 是一个非阿贝尔 p-群，满足 $\exp(G) = p$、$\mathsf{cd}(G) = \{1, p^s\}$ $(s > 1)$，且$d(Z(G) \cap G') = d(Z(G))$。则 $c(G) = d(Z(G))p^{s+1}$。

证明。由引理 12，得到 $|X_G| = d(Z(G)) = t$（记作）。令 $X_G = \{\chi_i\}_{i=1}^t$。由定理 2，得到$X_G \cap \mathsf{lin}(G) = \emptyset$。因此，对于 $1 \leq i \leq t$，得到 $\chi_i(1) = p^s$。由于 G 是一个 M-群，对于 $1 \leq i \leq t$，存在 $H_i \leq G$，使得 $|G/H_i| = p^s$，且对于某个 $\lambda_i \in \mathsf{lin}(H_i)$，有 $\chi_i = \lambda_i \uparrow_{H_i}^G$。由于 $\exp(G) = p$，且 λ_i不是 H_i的平凡特征，对于 $1 \leq i \leq t$，得到 $\mathbb{Q}(\chi_i) = \mathbb{Q}(\lambda_i) = \mathbb{Q}(\omega_p)$。这意味着 $d(\chi_i) = \chi_i(1)|\Gamma(\chi_i)| = p^s|\Gamma(\lambda_i)| = p^s\phi(p) = p^{s+1} - p^s$。由引理 12，得到 $c(G) = tp^{s+1} = d(Z(G))p^{s+1}$。□

Proposition 19. 设 G 是一个非阿贝尔的 p-群，且 G 有一个指数为 p 的初等阿贝尔子群，并且 $X_G \cap \mathsf{lin}(G) = \emptyset$。那么 $c(G) = d(Z(G))p^2$。

证明。由 [13, 定理 12.11], 可得 $\mathsf{cd}(G) = \{1, p\}$。由引理 12，可得 $|X_G| = d(Z(G))$。由于$X_G \cap \mathsf{lin}(G) = \emptyset$，因此对所有 $\chi \in X_G$，都有 $\chi(1) = p$。设 A 是 G中指数为 p 的初等阿贝尔正规子群。任取 $\chi \in X_G$。若 $\lambda \in \mathsf{Irr}(A)$ 出现在 $\chi \downarrow_A$中，则 χ 出现在 $\lambda \uparrow_A^G$中。由于 $\lambda \uparrow_A^G(1) = p$，可得 $\lambda \uparrow_A^G = \chi$。因此 $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\lambda) = \mathbb{Q}(\omega_p)$，且 $|\Gamma(\chi)| = p - 1$。所以，对所有$\chi \in X_G$，都有 $d(\chi) = p(p-1)$。由引理 12，容易看出 $c(G) = d(Z(G))p^2$。□

现在我们证明定理3。

定理3的证明。由引理12，我们得到 $|X_G| = d(Z(G)) = m$（记作）。现在，令 $X_G = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m\}$，并设 $\xi = \sum_{i=1}^m (\sum_{\sigma \in \Gamma(\chi_i)} \chi_i^\sigma)$。由于 $\exp(G) = p^b$，所以对所有 $1 \leq i \leq m$ 和所有 $g \in G$，$\chi_i(g) \in \mathbb{Q}(\omega_{p^b})$。因此 $|\Gamma(\chi_i)| \leq \phi(p^b) = p^b - p^{b-1}$。此外，对所有 i，$\chi_i(1) \leq p^e$。因此

$$c(G) = \xi(1) + m(\xi) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \Gamma(\chi_i)} \chi_i^\sigma(1)\right) + \frac{1}{p-1}\left(\sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \Gamma(\chi_i)} \chi_i^\sigma(1)\right) \leq \frac{p}{p-1} \sum_{i=1}^m p^e(p^b - p^{b-1}) = mp^{b+e}.$$

另一方面，若 $g \in G$ 的阶为 p^b，则 $p^b = c(\langle g \rangle) \leq c(G)$。
现在，令 $d(\chi_i) = |\Gamma(\chi_i)|\chi_i(1) = \phi(p^{t_i})$，其中 $1 \leq i \leq m$ 和 $1 \leq t_i \leq b + e$。于是显然

$\xi(1) = \sum_{i=1}^{m} p^{t_i} - p^{t_i-1}$。由引理 12，可得 $m(\xi) = \sum_{i=1}^{m} p^{t_i-1}$。因此，可得 $c(G) = \sum_{i=1}^{m} p^{t_i}$，其中 $1 \le t_i \le b+e$。这意味着 $c(G) = f(p) = a_1 p + \cdots + a_r p^r$，其中 $0 \le a_i < p$对每个 i，且 $a_r \neq 0$满足 $\sum_{l=1}^{r} a_l = m$。于是

(i) $p^b \le c(G) = a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r$蕴含 $b \le r$。(ii) $c(G) \le m p^{b+e}$（即 $a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r \le m p^{b+e}$）蕴含：如果 $m < p$，那么 $r \le b+e$（因为，如果$b+e<r$，那么 $p^{b+e+1} \le p^r \le a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r < p^{b+e+1}$，矛盾）。

现在，为证明范围 $b \le r \le b+e$是最佳可能范围，我们考虑以下关于 $p \ge 5$的群：

$$G_1 = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_5, \beta_1 \mid [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_3, [\alpha_3, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_2, \alpha_5] = [\alpha_3, \alpha_4] = \alpha_1 = \beta_1^p, \alpha_2^p = \alpha_3^p = \alpha_4^p = \alpha_5^p = \beta_1^{p^2} = 1 \rangle$$

$$G_2 = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_5, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_3, [\alpha_3, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_2, \alpha_5] = [\alpha_3, \alpha_4] = \alpha_1 = \beta_1, \alpha_5^p = \beta_2, \alpha_2^p = \alpha_3^p = \alpha_4^p = \beta_1^p = \beta_2^p = 1 \rangle \text{ and}$$

$$G_3 = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_6 \mid [\alpha_3, \alpha_4] = \alpha_1, [\alpha_5, \alpha_6] = \alpha_2, \alpha_3^p = \alpha_1, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_4^p = \alpha_5^p = \alpha_6^p = 1 \rangle.$$

上面提到的群 G_1、G_2 和 G_3 的阶均为 p^6。这里，G_1 和 G_2 属于同斜系Φ_{10}，而 G_3 属于同斜系 Φ_{12}（见[10]）。在所有群表示中，所有形如 $[\alpha, \beta] = 1$ 的关系（其中 α、β为生成元）均已省略。这里，对于 $1 \le i \le 3$, $\exp(G_i) = p^2$ 且 $\mathrm{cd}(G_i) = \{1, p, p^2\}$。那么，对于这三个群，均有 $b = 2$ 和 $e = 2$。我们有以下几种情况。

(1) $r = b + e$：我们有 $Z(G_1) = \langle \beta_1 \rangle \cong C_{p^2}$。沿用注 16 的思路，我们得到$c(G_1) = p^4$。于是，$r = 4$、$b = 2$ 和 $e = 2$。因此，我们得到 $r = 4 = 2 + 2 = b + e$。(2) $b < r < b + e$：我们有 $Z(G_2) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle \cong C_p \times C_p$。沿用注 16 的思路，我们得到 $c(G_2) = p^3 + p^2$。于是，$r = 3$、$b = 2$ 和 $e = 2$。因此，我们得到 $b < r < b + e$。(3) $b = r$：我们有 $Z(G_3) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \cong C_p \times C_p$。沿用注 16 的思路，我们得到 $c(G_3) = 2p^2$。于是，$r = b = 2$。

证明至此完成。 □

REMARK 20. 定理 3 也可以表述为以下形式：
设 G 是一个非阿贝尔 p 群，满足 $d(Z(G)) < p$、$\exp(G) = p^b$ 且 $\mathrm{maxcd}(G) = p^e$。那么存在 $f(p) = \sum_{k=1}^{b} a_k p^k$ 和 $g(p) = \sum_{l=1}^{b+e} c_l p^l$，使得 $0 \le a_k$、$c_l < p$、$a_b \neq 0$、$c_{b+e} \neq 0$ 且 $\sum_{k=1}^{b} a_k = \sum_{l=1}^{b+e} c_l = d(Z(G))$，从而 $f(p) \le c(G) \le g(p)$。

推论 4 的证明。由定理3 和引理 14，结论得证。 □

3.2. 有限非阿贝尔 p群的循环中心。在定理5中，我们证明存在一个阶为 p^n 的非阿贝尔置换群，它传递地作用于 p^i 个点，对每个 $i\,(2 \le i \le n-1)$。

定理 5的证明。设 G 是一个非阿贝尔 p阶群，且其阶为 p^n $(p \ge 3)$，中心为循环中心。由于$d(Z(G)) = 1$，由引理 11可知，G 的所有最小忠实置换表示都是传递的。因此，我们得到 $p^2 \le \mu(G) \le p^{n-1}$。所以，$\mu(G) = c(G) \in \{p^2, p^3, \ldots, p^{n-1}\}$。
现在，设 $p \ge n$。我们证明存在一个阶为 p^n 的群 G，使得 $c(G) = \mu(G) = p^i$，对每个 $2 \le i \le n-1$ 均成立。在下面的群表示中，所有形如 $[\alpha, \beta] = 1$（其中 α、β 为生成元）的关系均被省略。符号 $\alpha_{i+1}^{(p)}$ 表示 $\alpha_{i+1}^{p} \alpha_{i+2}^{\binom{p}{2}} \cdots \alpha_{i+k}^{\binom{p}{k}} \cdots \alpha_{i+p}$，其中 i 为正整数，且 α_{i+2}、……、α_{i+p} 均作了适当定义。考虑

$$G_2 = \langle \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \mid [\alpha_j, \alpha] = \alpha_{j+1}, \alpha^p = \alpha_j^{(p)} = \alpha_{n-1}^{(p)} = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, n-2) \rangle.$$

由于 $p \ge n$，容易验证 $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j^p = 1\,(1 \le j \le n-1)$。这里，$|G_2| = p^n$，$\mathrm{cd}(G_2) = \{1, p\}$,$Z(G_2) = \langle \alpha_{n-1} \rangle \cong C_p$，且 G_2 的幂零类为 $n-1$。现在，取 $H = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2} \rangle \cong C_p^{n-2}$。由于 $H \cap Z(G_2) = 1$，我们得到 $\mathrm{Core}_{G_2}(H) = 1$。因此，$\mu(G_2) \le p^2$。由于 G_2 是一个非阿贝尔群，我们得到 $\mu(G_2) \ge p^2$。因此，$\mu(G_2) = p^2$。

现在，对于 $3 \leq i \leq n-1$，考虑

$$G_i = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-i+1}, \alpha_{n-i+2} \mid [\alpha_1, \alpha] = \alpha_2, [\alpha_j, \alpha] = \alpha_{j+1}, \alpha_1^{p^{i-2}} = \alpha_{n-i+2}, \\ \alpha^p = \alpha_j^{(p)} = \alpha_{n-i+2}^{(p)} = 1, \ (j = 2, 3, \ldots, n-i+1) \rangle.$$

容易验证，对于 $p \geq n-1$，有 $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j^p = 1$ $(2 \leq j \leq n-i+2)$。这里，对于 $3 \leq i \leq n-1$，$|G_i| = p^n$，$\mathrm{cd}(G_i) = \{1, p\}$，$Z(G_i) = \langle \alpha_1^p \rangle \cong C_{p^{i-2}}$，且 G_i 的幂零类为 $n+2-i$。现在，取 $H = \langle \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-i+1} \rangle \cong C_p^{n-i}$。由于 $H \cap Z(G) = 1$，我们得到 $\mathrm{Core}_{G_i}(H) = 1$。因此，对于每个 i $(3 \leq i \leq n-1)$，都有 $\mu(G_i) \leq p^{n-(n-i)} = p^i$。另一方面，$\mu(\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle) = p^{i-1} + p$，所以对于 $3 \leq i \leq n-1$，有 $\mu(G_i) \geq p^i$。因此，对于每个 i $(3 \leq i \leq n-1)$，我们得到 $\mu(G_i) = p^i$。□

Lemma 21. 设 G 是一个非阿贝尔 p-群，满足 $\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^a\}$，其中 $a > 1$为某个整数。若$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 是忠实的，则 $\chi(1) = p^a$。

证明。设 χ 是 G的一个忠实不可约特征标，并假设 $\chi(1) = p$。现在 $\chi = \lambda\uparrow_H^G$，其中 H 是一个指数为 p 的子群（因为 G 是一个 M-群），且 $\lambda \in \in \mathrm{lin}(H)$。于是 H' 是 G 的正规子群，且包含于 $\ker(\lambda)$ 中。因此 $H' \subset \ker(\chi) = 1$，即 H 是 G中指数为 p 的阿贝尔子群。于是 $\mathrm{cd}(G) \subset \{1, p\}$，这与假设矛盾。□

注意，Isaacs 和 Moret´o [14, 定理 5。2] 证明了存在一个 p-群，其特征标次数集为$\{1, p, p^a\}$，其中 $a > 1$ 为任意整数， p为素数。

现在，借助定理 3，我们证明推论6，并在其中计算一般 p-群的最小忠实拟置换表示次数，其中该群的中心为循环的。

推论 6 的证明。由引理 12，得到 $|X_G| = 1$。设 $Z(G) \cong C_{p^m}$, $p^e = \max \mathrm{cd}(G)$ 且 $p^\alpha = \min\{\chi(1) \mid \ker(\chi) = 1, \chi \in \mathrm{nl}(G)\}$。令 $X_G = \{\chi\}$，其中 χ 是 G的忠实不可约特征标。由于 $Z(G)$ 是循环的，因此 $d(\chi) = \chi(1)|\Gamma(\chi)| \geq p^\alpha \phi(|Z(G)|) = p^\alpha \phi(p^m) = p^{\alpha+m-1}(p-1)$。由引理 12，得到 $p^{\alpha+m} = p^\alpha |Z(G)| \leq c(G)$。由定理 3，得到 $c(G) \leq p^e \cdot \exp(G)$。因此， $p^\alpha |Z(G)|$ 整除 $c(G)$，且 $c(G)$ 整除 $p^e \cdot \exp(G)$。现在，设 $\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^e\}$ $(e > 1)$ 且 $\exp(G) = p$。那么由引理 21， $\chi(1) = p^e$。根据以上讨论，得到 $p^e |Z(G)| \leq c(G) \leq p^e \cdot p$。这说明 $c(G) = p^{e+1}$。□

现在计算 $c(G)$ 对于一个具有循环中心的正规单项式 p-群 G 。设 χ 是 G的忠实不可约特征标。那么，所有线性诱导 χ 的正规子群都是阿贝尔群，并且在 G 的所有阿贝尔子群中具有最大阶（见[17, 命题 3]）。此外， G 的所有忠实不可约特征标具有相同的次数，该次数是 G的所有不可约特征标中的最大次数。注意，后元阿贝尔群都是正规单项式群（见 [3]）。现在我们证明定理7。

定理 7 的证明：设 $X_G = \{\chi\}$，其中 χ 是 G的忠实不可约特征标。设 A 是 G中具有最大阶的阿贝尔正规子群。那么，对于某个 $\lambda \in \mathrm{lin}(A)$，有 $\chi = \lambda\uparrow_A^G$，且 $\chi(1) = \mathrm{maxcd}(G)$ [17, 命题 3]。令 $|\Gamma(\chi)| = \phi p^b$，其中 $b \geq 1$。于是 $d(\chi) = \chi(1)|\Gamma(\chi)| = \chi(1)\phi(p^b)$。由引理 12，得到 $c(G) = \chi(1)p^b$。由于 $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\lambda) \subseteq \mathbb{Q}(\omega_{\exp(A)})$，得到 $p^b \leq \exp(A)$。此外，由于 $Z(G)$ 是循环的且 χ 是忠实的， $\phi(|Z(G)|) \leq |\Gamma(\chi)| = \phi(p^b)$。因此， $|Z(G)| \leq p^b$。所以，我们得到$\chi(1)|Z(G)| \leq c(G) = \chi(1)p^b \leq \chi(1) \exp(A)$，从而 $(\max \mathrm{cd}(G))|Z(G)| \leq c(G) \leq (\max \mathrm{cd}(G)) \exp(A)$。证明完毕。□

Remark 22. 定理 7 还可以表述如下：
设 G 是一个阶为 p^n、满足 $\max \mathrm{cd}(G) = p^a$ 且 $Z(G) \cong C_{p^m}$ 的正常单项式 p-群。设 A 是 G中阶最大的阿贝尔正规子群。若 $\exp(A) = b$，则 $c(G) \in \{p^{a+m}, p^{a+m+1}, \ldots, p^{a+b}\}$。

Corollary 23. 设 G 是一个具有循环中心的正常单项式 p-群。
(i) 若 $\exp(G) = p$ 且 $\mathrm{maxcd}(G) = p^a$，则 $c(G) = p^{a+1}$。

(ii) 若 A 是 G 中阶最大的阿贝尔正规子群，且 $\exp(A) = |Z(G)|$，则$c(G) = (\max\mathrm{cd}(G))|Z(G)|$。

证明。 由注22，(i) 显然成立。由定理 7可得 (ii)。 □

若 G 是一个幂零类为 2 的有限 p-群（$p \geq 3$），则 G 是一个正规单项式 p-群。在这种情况下，我们得到以下结果。

Proposition 24. 设 G 是一个幂零类为 2 且中心为循环群的有限 p-群（$p \geq 3$）。则存在一个阿贝尔正规子群，记为 H，它在 G 中具有最大阶，并满足 $\exp(H) = |Z(G)|$。

证明。设 G 是一个幂零类为 2 且中心为循环群的有限 p-群（$p \geq 3$）。设 χ 是 G的一个忠实不可约特征标。由引理 13，存在 G 的一个子群 H 上的线性特征标 λ，使得 $\chi = \lambda\uparrow_H^G$ 且 $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\lambda)$。这里，$H' \subseteq \ker(\lambda)$。由于 G 是一个幂零类为 2 的群，我们得到$H' \subseteq G' \subseteq Z(G)$。由于 $\ker(\chi) = \mathrm{Core}_G(\ker(\lambda)) = 1$，$H' = 1$。由于 G是一个元阿贝尔 p-群，G 是一个正规单项式 p-群。设 A 是一个正规子群，它线性诱导 χ。那么由 [17,命题 3]可知，A 是 G中具有最大阶的阿贝尔正规子群。此外，$\chi(1) = \max\mathrm{cd}(G)$。由于 $\chi(1) = |G/A| = |G/H|$，H 在 G 的所有阿贝尔子群中也具有最大阶。因此，$G' \subseteq Z(G) \subseteq H$，这意味着 H 是 G的一个阿贝尔正规子群。

设 $X_G = \{\chi\}$，其中 χ 是 G的忠实不可约特征标。由上述讨论可知，在 G 中存在一个阶最大的阿贝尔正规子群 H，并且 $\lambda \in \mathrm{lin}(H)$，使得 $\chi = \lambda\uparrow_H^G$ 且 $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\lambda)$。由于 G 是一个亚交换群，我们得到 $\left|{}^H\ker(\lambda)\right| = \exp(H)$。这意味着 $|\Gamma(\chi)| = |\Gamma(\lambda)| = \phi(\exp(H))$。另一方面，由于 G 的幂零类为 2，$\chi(1) = |G/Z(G)|^{1/2}$（见 [13, 定理 2.31]），并且对所有 $g \in G \setminus Z(G)$，都有 $\chi(g) = 0$（见 [13, 推论 2.30]）。由于 $Z(G)$是循环的，对于某个 $Z(G)$的忠实线性特征标 μ，有 $\chi\downarrow_{Z(G)} = \chi(1)\mu$。因此，$|\Gamma(\chi)| = |\Gamma(\mu)| = \phi(|Z(G)|)$。于是，$\phi(|Z(G)|) = \phi(\exp(H))$。证毕。□

Consequence 25. (1) 若 G 是一个幂零类 2 且具有循环中心的有限 p-群（$p \geq 3$），则由定理 7 和命题 24 可得 $c(G) = (\max\mathrm{cd}(G))|Z(G)| = |G/Z(G)|^{1/2}|Z(G)|$。这表明，对于 $p \geq 3$，定理 1 可由定理 7 推出。(2) 在特殊情形下，若 G 是一个具有循环中心的正规单项式 p-群，且 G' 是 G 中阶最大的阿贝尔正规子群，则 G' 是 G 中唯一的最大阶正规阿贝尔子群。因此，在这种情形下，我们得到

$$(\max\mathrm{cd}(G))|Z(G)| \ \textit{divides}\ c(G) \ \textit{and}\ c(G) \ \textit{divides}\ (\max\mathrm{cd}(G))\exp(G').$$

Corollary 26. 设 G 是一个阶为 p^n（$p \geq 5$ 且 $n \leq 6$）并具有循环中心的非阿贝尔 p-群，且假设 G' 是 G 的所有阿贝尔子群中阶最大的子群。则有以下结论。

(1) $n > 4$。(2) 当 $n = 5$, $c(G) = p^3$ 且当 $n = 6$, $c(G) \in \{p^3, p^4\}$。

证明。众所周知，阶为 $\leq p^4$ 的 p-群含有一个指数为 p 的阿贝尔子群（见 [9, 练习 8，第 28] 页）。此外，对于非阿贝尔 p-群 G，有 $|G : G'| \geq p^2$。因此 $n > 4$。
现在，设 $|G| = p^5 (p \geq 5)$。由 [15, 第 4 节5], 容易看出，若 $G \in \Phi_i$，其中 $i \in \{2, 3, \ldots, 9\}$，则 G' 在所有阿贝尔子群中并非具有最大阶。现在，设 $G \in \Phi_{10}$。则 $G' \cong C_p^3$，$\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^2\}$ 且 $Z(G) \cong C_p$（见 [15, 第 4.1 节和第 4.5] 节）。因此，$\exp(G') = p = |Z(G)|$，故由定理 7，$c(G) = \max\mathrm{cd}(G) \cdot \exp(A) = p^2 \cdot p = p^3$。

现在，令 $|G| = p^6 (p \geq 5)$。由 [10], 可知，若 $G \in \Phi_i$，其中 $i \in \{2, 3, \ldots, 43\} \setminus \{36, 38, 40, 41, 42, 43\}$，则 G' 在 G 的所有阿贝尔子群中不具有最大阶。现在，令 $G \in \Phi_i$，其中 $i \in \{36, 38, 40, 41\}$。则 $G' \cong C_p^4$，$\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^2\}$，且 $Z(G) \cong C_p$（见 [10]）。因此，$\exp(G') = p = |Z(G)|$，故由定理 7 可得

$c(G) = \max\mathrm{cd}(G) \cdot \exp(A) = p^2 \cdot p = p^3$，对所有 $G \in \Phi_i$，其中 $i \in \{36, 38, 40, 41\}$ 且 $|G| = p^6 (p \geq 5)$。

接下来，假设 $G \in \Phi_i$，其中 $i \in \{42, 43\}$。则 $G' \cong C_{p^2} \times C_p \times C_p$，$\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^2\}$ 且 $Z(G) \cong C_p$（见 [10]）。这里 $\exp(G') = p^2$。因此，由定理 7，可得

$$(\max \mathrm{cd}(G))|Z(G)| \leq c(G) \leq (\max \mathrm{cd}(G)) \exp(A) \Rightarrow p^3 \leq c(G) \leq p^4.$$

为了得到 $c(G)$ 的精确值，我们需要分别研究 Φ_{42} 和 Φ_{43} 中的每个群。我们使用 Easterfield 在 [10]中计算出的群表示。记号 $G_{(i,j)}$ 表示该群是阶为 p^6 $(p \geq 5)$ 的群列表中，同斜系 Φ_i 里的第 j^{th} 个群。以下群表示中省略了所有形如 $[\alpha, \beta] = 1$（带有α、 β 个生成元）的关系。我们有以下这些群。

$$\begin{aligned}
G_{(42,1)} =& \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \mid [\alpha_5, \alpha_6] = \alpha_4, [\alpha_4, \alpha_6] = \alpha_3, [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_3, \alpha_6] = \alpha_1, [\alpha_2, \alpha_5] = \alpha_1^{-1}, \\
& \alpha_4^p = \alpha_1, \alpha_5^p = \alpha_3 \alpha_1, \alpha_6^p = \alpha_2 \alpha_1^{-1}, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = 1 \rangle \\
G_{(42,2)} =& \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \mid [\alpha_5, \alpha_6] = \alpha_4, [\alpha_4, \alpha_6] = \alpha_3, [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_3, \alpha_6] = \alpha_1, [\alpha_2, \alpha_5] = \alpha_1^{-1}, \\
& \alpha_4^p = \alpha_1, \alpha_5^p = \alpha_3, \alpha_6^p = \alpha_2, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = 1 \rangle \\
G_{(42,3k)} =& \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \mid [\alpha_5, \alpha_6] = \alpha_4, [\alpha_4, \alpha_6] = \alpha_3, [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_3, \alpha_6] = \alpha_1, [\alpha_2, \alpha_5] = \alpha_1^{-1}, \\
& \alpha_4^p = \alpha_1, \alpha_5^p = \alpha_3 \alpha_1^{-a-1}, \alpha_6^p = \alpha_2 \alpha_1^{1-b}, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = 1 \rangle, \text{ 其中 } a \text{ 和 } b \text{ 是最小的} \\
& \text{满足 } a^2 - b^2 \equiv k \text{ 模 } p \text{的正整数，其中 } k = 1, 2, \ldots, p-1 \\
G_{(43,1)} =& \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \mid [\alpha_5, \alpha_6] = \alpha_4, [\alpha_4, \alpha_6] = \alpha_3, [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_3, \alpha_6] = \alpha_1, [\alpha_2, \alpha_5] = \alpha^{-\nu_1^{-1}}, \\
& \alpha_4^p = \alpha_1, \alpha_5^p = \alpha_3 \alpha_1^{-1}, \alpha_6^p = \alpha_2^\nu \alpha_1, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = 1 \rangle \\
G_{(43,2k)} =& \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \mid [\alpha_5, \alpha_6] = \alpha_4, [\alpha_4, \alpha_6] = \alpha_3, [\alpha_4, \alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_3, \alpha_6] = \alpha_1, [\alpha_2, \alpha_5] = \alpha_1^{-\nu^{-1}}, \\
& \alpha_4^p = \alpha_1, \alpha_5^p = \alpha_3 \alpha_1^{-a-1}, \alpha_6^p = \alpha_2^\nu \alpha_1^{1-b}, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = 1 \rangle, \text{ 其中 } a \text{ 和 } b \text{ 是满足 } a^2 - \nu^{-1} b^2 \equiv k \text{ 模 } p \text{的最} \\
& \text{小正整数，其中 } k = 1, 2, \ldots, p-1, \text{ 且}\nu \text{ 是模 } p.\text{的最小非二次剩余正整数}
\end{aligned}$$

假设 $G \in \{G_{(42,1)}, G_{(42,2)}, G_{(42,3k)}, G_{(43,1)}, G_{(43,2k)}\}$。那么 $\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^2\}$, $Z(G) = \langle \alpha_1 \rangle \cong C_p$ 且 $G' = \langle \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2 \rangle \cong C_{p^2} \times C_p \times C_p$。为使表达简洁，取 $G' = A$。于是 A 是 G的极大阿贝尔正规子群。设 $X_G = \{\chi\}$，其中 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 是忠实的。由于 G 是正规单项式的，$\chi = \lambda \uparrow_A^G$，对某个 $\lambda \in \mathrm{lin}(A)$成立。这里，$\ker(\chi) = \mathrm{Core}_G(\ker(\lambda)) = 1$。由于 G 是亚二面体群，我们得到$\left| {}^A\ker(\lambda) \right| = \exp(A) = p^2$。因此，${}^A\ker(\lambda) \cong C_{p^2}$，从而 $|\overline{\Gamma(\lambda)}| = \phi(p^2)$。通过常规计算，容易证明 $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\lambda)$。于是，$d(\chi) = \chi(1)|\Gamma(\chi)| = p^2\phi(p^2) = p^3(p-1)$。由引理 12，我们得到$m(\chi) = p^3$，因此 $c(G) = p^4$。□

3.3. 定理 10 的证明。设 G 是一个阶为 p^n $(p \geq 3)$ 的非阿贝尔 p-群，满足 $\exp(G) \in \{p, p^2\}$、$\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^2\}$、$d(Z(G)) \geq 2$，且 G 不是一个阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积。由定理 10 的假设，容易看出 G 是一个后阿贝尔 p-群。令 $d(Z(G)) = m$。根据引理 12，$|X_G| = m$。设 $X_G = \{\chi_i\}_{i=1}^m \subset \mathrm{Irr}(G)$。设 A 是 G 的一个包含 G'的极大阿贝尔子群。那么由 [2, 关于 $1 \leq i \leq m$ 的定理 2]，，存在 $\rho_i \in \mathrm{lin}(K_{D_i})$，其中 $D_i \leq A$ 满足 A/D_i 为循环的且 $\ker(\rho_i \downarrow_A) = D_i$，使得

$$\chi_i = \rho_i \uparrow_{K_{D_i}}^G \in \mathrm{Irr}(G), \tag{5}$$

其中，对于每个 i，K_{D_i} 是 $\{T \mid A \leq T \leq G \text{ 和 } T' \leq D_i\}$ 的一个固定极大元。由于 X_G 满足 (1)，我们得到 $\bigcap_{i=1}^m \ker\left(\rho_i \uparrow_{K_{D_i}}^G\right) = 1$。根据 [13, 定理 12.11]，$G$ 没有指数为 p 的阿贝尔子群 G。在这种情况下，我们取 A 为指数为 p^2 的初等阿贝尔子群 G。假设 $i = 1$。对于 K_{D_1}，有三种可能性，即 G、K 和 A，其中 $K \leq G$ 使得 $|G/K| = p$ 且 $A \subset K$ 满足 $K' \subseteq D_1$。

情形 I ($K_{D_1} = G$)：这里 ${}^{G\ker(\rho_1)} \cong C_{p^2}$ 或 C_p。现在，~~若 G $\ker(\rho_1)$~~ $\cong C_p$，则 $d(\rho_1) = \phi(p)$。于是，由引理 12，可得 $c(G) = \delta_1 + \delta_2 p$，其中某些 δ_1、$\delta_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $\delta_2 \neq 0$。由于 G 不是阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积，根据[7, 定理 3.2] 和引理 14，可得矛盾。因此，$G\ker(\rho_1) \cong C_{p^2}$，从而 $d(\rho_1) = \phi(p^2) = p(p-1)$。

情形 II ($K_{D_1} = K$)：这里 $^{K}\ker(\rho_1) \cong C_{p^2}$ 或 C_p。于是，$d(\rho_1\uparrow_K^G) = p|\Gamma(\rho_1\uparrow_K^G)| \le p|\Gamma(\rho_1)| \le p \cdot p(p-1) = p^2(p-1)$。另一方面，$d(\rho_1\uparrow_K^G) \ge \rho_1\uparrow_K^G(1) \cdot (p-1) = p(p-1)$。因此，$p(p-1) \le d(\rho_1\uparrow_K^G) \le p^2(p-1)$。于是可得 $d(\rho_1\uparrow_K^G) = p(p-1)$，或 $p^2(p-1)$。
情形 III（$K_{D_1} = A$）：在此情形下，我们得到 $^{A}\ker(\rho_1) \cong C_p$，且 $d(\rho_1) = p-1$。这意味着$d(\rho_1\uparrow_A^G) \le p^2(p-1)$。另一方面，$d(\rho_1\uparrow_A^G) \ge p^2(p-1)$。因此，我们得到 $d(\rho_1\uparrow_A^G) = p^2(p-1)$。类似地，对于 $2 \le i \le m$，我们得到 $d(\rho_i\uparrow_{K_{D_i}}^G) = p(p-1)$，或 $p^2(p-1)$。于是，$\sum_{i=1}^m d(\rho_i\uparrow_{K_{D_i}}^G) = ap(p-1) + bp^2(p-1)$，其中 $0 \le a$、$b < p$ 满足 $a+b = m$。由引理 12 可得，对于某些满足 $a+b=m$ 的 $0 \le a$、$b < p$，有 $c(G) = ap^2 + bp^3$。
□

这里给出一些满足 p-群 G 的例子，使得 $d(Z(G)) = 2$ 以及 $c(G)$ 取遍定理10中得到的所有可能值。

EXAMPLE 27. 在以下群表示中，省略了所有形如 $[\alpha,\beta] = 1$ （具有 α、β 个生成元）的关系。

(1) 考虑群

$$G_1 = \phi_4(221)b = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_i,\alpha] = \beta_i, \alpha^p = \beta_2, \alpha_2^p = \beta_1, \alpha_1^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1,2)\rangle,$$
$$G_2 = \phi_4(221)f_0 = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_i,\alpha] = \beta_i, \alpha_1^p = \beta_2, \alpha_2^p = \beta_1^\nu, \alpha^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1,2)\rangle,$$
$$\text{and } G_3 = \phi_4(2111)a = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_i,\alpha] = \beta_i, \alpha^p = \beta_2, \alpha_i^p = \beta_i^p = 1 \ (i = 1,2)\rangle$$

阶为 p^5 ($p \ge 5$)、属于同斜系 Φ_4 （见 [15, 第 4.5] 节）的群。于是对于 $1 \le i \le 3$，$\exp(G_i) = p^2$，$Z(G_i) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$，$d(Z(G_i)) = 2$，$\mathrm{cd}(G_i) = \{1, p\}$，并且 G_i 不是阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积。从 G_i的群表示可知，对于 $1 \le i \le 3$，容易看出 G_i 有一个指数为 p的阿贝尔正规子群，即 $K = \langle \alpha_1、\alpha_2、\beta_1、\beta_2 \rangle$。由注 9 可得，对于某些满足 $a+b=2$的 $0 \le a$、$b < p$，有 $c(G_i) = ap^2 + bp^3$。于是对每个 i，都有 $c(G_i) \in \{2p^2, p^3+p^2, 2p^3\}$。容易验证，$c(G_1) = p^3 + p^2$，$c(G_2) = 2p^3$，且 $c(G_3) = 2p^2$。

(2) 考虑群

$$\begin{aligned} G_1 = \langle \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6 \mid {} & [\alpha_3,\alpha_4] = \alpha_1, [\alpha_5,\alpha_6] = \alpha_2, \alpha_3^p = \alpha_2, \\ & \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_4^p = \alpha_5^p = \alpha_6^p = 1\rangle, \\ G_2 = \langle \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6 \mid {} & [\alpha_3,\alpha_4] = \alpha_1, [\alpha_5,\alpha_6] = \alpha_2, \alpha_3^p = \alpha_1, \\ & \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_4^p = \alpha_5^p = \alpha_6^p = 1\rangle, \text{ and} \\ G_3 = \langle \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6 \mid {} & [\alpha_3,\alpha_4] = \alpha_1, [\alpha_5,\alpha_6] = \alpha_2, \alpha_4^p = \alpha_5^p = \alpha_1\alpha_2, \\ & \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = \alpha_6^p = 1\rangle \end{aligned}$$

其阶为 p^6 ($p \ge 5$)，属于同斜系 Φ_{12} （见 [10]）。那么对于 $1 \le i \le 3$, $|G_i| = p^6$，$\exp(G_i) = p^2$，$Z(G_i) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$，$d(Z(G_i)) = 2$，$\mathrm{cd}(G_i) = \{1, p, p^2\}$，且 G_i 不是一个阿贝尔子群与一个非阿贝尔子群的直积。容易看出，$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6 \rangle$ 和 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6 \rangle$ 分别是 $G_i\,(i = 1, 2)$ 和 G_3 中指数为 p^2 的初等阿贝尔正规子群。由定理 10，$c(G_i) = ap^2 + bp^3$，其中某个 $0 \le a, b < p$ 满足 $a+b=2$。那么对于每个 i，$c(G_i) \in \{2p^2, p^3+p^2, 2p^3\}$。容易验证，$c(G_1) = p^3 + p^2$, $c(G_2) = 2p^2$，且 $c(G_3) = 2p^3$。

REMARK 28. 设 G 是一个阶为 p^n ($p \ge 3$) 的非阿贝尔 p-群，满足 $\exp(G) \in \{p, p^2\}$, $d(Z(G)) \ge 2$, $\mathrm{cd}(G) = \{1, p, p^2\}$，且 G 不是一个阿贝尔子群与非阿贝尔子群的直积。那么 G 在 G中可能没有指数为 p^2 的初等阿贝尔子群。例如，对于 $p \ge 5$，考虑

$$G = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_6 \mid [\alpha_5,\alpha_6] = \alpha_3, [\alpha_4,\alpha_5] = \alpha_2, [\alpha_3,\alpha_6] = \alpha_1, \alpha_4^p = \alpha_1, \alpha_5^p = \alpha_2, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = \alpha_6^p = 1\rangle,$$

它是一个阶为 p^6 、属于同斜系 Φ_{17} （见 [10]）的 p-群。设 A 是 G 中指数为 p^2 的正规阿贝尔子群。那么 G' 包含于 A 中。经过常规计算，容易看出 $\exp(A)$ 必为 p^2。

4. 致谢

Ayush Udeep 谨此感谢印度政府大学拨款委员会（档案编号：Nov2017- 434175）。通讯作者感谢印度政府 SERB 通过资助项目（MTR/2019/000118）提供的经费支持。作者感谢匿名审稿人提出的宝贵建议，并提供了部分证明的更简短版本。他还提供了[7, 引理 22]的更正证明。

参考文献

[1] M. H. Abbaspour, H. Behravesh，有限群拟置换表示札记，Int. J. Contemp. Math. Sci., 4(27) (2009), 1315-1320.[2] G. K. Bakshi, R. S. Kulkarni, 和 I. B. S. Passi，有限群的有理群代数，J. Algebra Appl., 12(03) (2013), 1250168.[3] B. G. Basmaji，单项表示与后元阿贝尔群，Nagoya Math. J., 35 (1969), 99-107.[4] H. Behravesh，具有循环中心的元循环 2-群的拟置换表示，Bull. Iranian Math. Soc., 24 (01) (1998), 1-14.[5] H. Behravesh，2 阶 p-群的拟置换表示 p，J. London Math. Soc., 55(02) (1997), 251-260.[6] H. Behravesh，阿贝尔群的忠实拟置换表示的最小次数，Glasgow Math. J., 39(01) (1997), 51-57.[7] H. Behravesh 和 G. Ghaffarzadeh，p-群的忠实拟置换表示的最小次数，Algerba Colloquium, 18 (2011), 843–846.[8] J. M.Burns, B. Goldsmith, B. Hartley 和 R. Sandling，有限群的拟置换表示，Glasgow Math. J., 36(03) (1994), 301-308.[9] Y. Berkovich，素数幂阶群，第一卷，Walter de Gruyter，柏林，2008.[10] T. E. Easterfield（1940），阶为 p^6 的群分类，博士论文，剑桥大学（1940）。[11] C. E. Ford， p-群的特征标，Proceedings of the American Mathematical Society, 101(04)（1987年12月），595-601.[12] G. Ghaffarzadeh 和 M. H. Abbaspour， p-群直积的忠实拟置换表示的最小次数，Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 122(03) (2012), 329-334.[13] I. M. Isaacs，有限群特征标理论，Academic，纽约，1976.[14] I. M. Isaacs 和 A. Moret´o， p-群的特征标次数与幂零类，J. Algebra, 238(02) (2001), 827-842.[15] R. James，阶为 p^6 的群（p 个奇素数），Math. Comp., 34(150) (1980), 613-637.[16] D. L. Johnson，有限群的最小置换表示，American Journal of Mathematics, 93(04)（1971年10月），857-866.[17] A. Mann， p-群的最小特征标，J. Group Theory, 02 (1999), 225-250.[18] S. K. Prajapati 和 A. Udeep，VZ 群和 Camina p-群的忠实拟置换表示，Comm. Algebra (2022).[19] W. J. Wong，与置换群类似的线性群，J. Austral. Math. Soc., (Sec A), 03 (1963), 180-184.[20] D. Wright，某些直积的最小嵌入次数，Amer. J. Math., 97(04) (1975), 897-903.

Indian Institute of Technology, Bhubaneswar, Arugul Campus, Jatni, Khurda-752050, India.
Email address: skprajapati@iitbbs.ac.in

Indian Institute of Technology, Bhubaneswar, Arugul Campus, Jatni, Khurda-752050, Indi a.
Email address: udeepayush@gmail.com