arXiv:2302.06267v2 [math.AC] 4 Aug 2023

通过同调维数研究 Gorenstein 环，以及 Ext 和 Tate 上同调消失的对称性

Dipankar Ghosh 和 Tony J. Puthenpurakal

Abstract. 本文旨在考察由张量-同态伴随诱导的谱序列，并给出若干新的结果。设 R 为维数为 d的交换诺特局部环。在第一部分中，我们证明： R 是 Gorenstein 环，当且仅当它存在一个非零 CM（Cohen–Macaulay）模 M，其具有有限 Gorenstein 维数 g，且 type(M) 6μ(Ext$^g_R(M,R)$)（例如，type(M) $=1$）。这显著加强了 Takahashi 的一个结果。此外，我们证明：如果存在一个深度为 $\geqslant d-1$ 的非零 R-模 M，使得 M、Hom$_R(M,M)$ 和 Ext$^1_R(M,M)$ 的内射维数均有限，那么 M 具有有限投射维数，且 R是 Gorenstein 环。在第二部分中，我们假设 R 是具有典范模 ω的 CM 环。对于 CM R-模 M 和 N，我们证明，以下各项中的任一项消失，都将蕴含其他各项也消失：Ext$^{\gg 0}_R(M,N^+)$、Ext$^{\gg 0}_R(N,M^+)$ 和 Tor$^R_{\gg 0}(M,N)$，其中 M^+ 表示 Ext$^{d-\dim(M)}_R(M,\omega)$。这加强了 Huneke 和 Jorgensen 的一个结果。此外，在 R 为 Gorenstein 环这一附加条件下，我们还证明了 Tate 上同调群的一个类似结果。

1. Introduction

除非另有说明，全文中（$R,\mathfrak{m},k$）均为交换诺特局部环。所有 R-模均假定为有限生成。

本文旨在考察由张量-Hom 伴随性诱导的谱序列，并就以下主题证明若干新结果：（I）根据某些模的 Gorenstein 维数和内射维数，判定局部环为 Gorenstein 环的准则。（II）分别在 Cohen–Macaulay（CM）局部环和 Gorenstein 局部环上，Ext 与 Tate上同调消失的对称性。

（I）关于第一个主题的结果，受以下刻画的启发。

定理 1.1（Auslander-Bridger、Takahashi、Celikbas–Sather-Wagstaff）。环 R 是 Gorenstein 环，当且仅当以下条件至少有一个成立。
（1）G-维数$_R(k)<\infty$，例如参见 [7, (1.4.9)]。（2） [1, (4.20)] 对每个 R-模 M，G-维数$_R(M)<\infty$。（3） [29, 定理 6.5] 对于某个满足 depth(R) $+2$的 $0\leqslant n\leqslant$，第 n 个上同调核模 $\Omega^n_R(k)$ 含有一个 G-维数为 0 的非零直和项。（4） [6, 定理 4.8] R 有一个整闭理想 I，使得 depth(R/I) $=0$ 且 G-维数$_R(I)<\infty$。更强的结果见 [20, 推论 5.5.(4)] 。

Date: 2023年2月17日 通讯作者：Dipankar Ghosh。
2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：13D05、13D07、13H10。
Key words and phrases. Gorenstein环；Cohen–Macaulay 模和 G-完美模；同调维数；Ext 和 Tate（余）上同调；谱序列。

各种局部环可以通过某些模的内射维数来刻画。例如，R 是正则的，当且仅当剩余域 k 的内射维数有限，参见 [5, 3.1.26]。[19, 的定理 3.7] 将这一结果进一步推广：R 是正则的，当且仅当某个上同调核 $\Omega^n_R(k)$（$n \geqslant 0$）含有一个内射维数有限的非零直和项。Bass 猜想（由 [25, 26] 所知）指出，若 R 存在一个内射维数有限的非零（有限生成）模，则它是 Cohen–Macaulay 环。对于 Gorenstein 局部环，以下结果已为人所知。

定理 1.2（Peskine-Szpiro 和 Foxby）。

环 R 是 Gorenstein 环，当且仅当下列条件至少有一个成立。

(1) [25, Ch.II, (5.5)] R 存在一个非零的有限内射维数循环模。(2) [18] R 存在一个非零模 M，使得内射维数 $\mathrm{id}_R(M)$ 和投射维数 $\mathrm{pd}_R(M)$ 均有限。

Celikbas 和 Sather-Wagstaff 通过证明如下命题，推导出了定理 1.1.(4)：若 M 是一个 G-维数检验 R-模（定义 2.1），且对所有 $i \gg 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$，则 R 是 Gorenstein 环；参见 [6, 定理 4.4]。他们的证明依赖于导出范畴的使用。在本研究中，我们在假设 R 是 Cohen–Macaulay 环的条件下，对这一结果给出一个非常简短且初等的证明，见定理 2.3。第 3 节中，我们研究 G-完美模（定义 3.2）。在定理 3.3 中，我们证明有限 G-维数的 Cohen–Macaulay R-模总是 G-完美的；反过来，当 R 是 Cohen–Macaulay 环时，结论也成立。此外，我们证明如下结果：

定理 3.5. 若 M 是一个 G-完美的 R-模，其 G-维数为 g，则

$$\mathrm{type}(M) = \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M, R))\,\mathrm{type}(R),$$

其中 $\mu(L)$ 表示 R-模 L的最小生成元个数。

作为定理 3.3 和 3.5 的推论，我们得到以下关于某些模的 G-维数的 Gorenstein 局部环刻画。

推论 3.10. 以下陈述等价：

(1) R 是 Gorenstein 的。(2) R 存在一个非零的有限 G-维数 CM 模 M g，使得

$$\mathrm{type}(M) \leqslant \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M, R)) \quad (e.g.,\ \mathrm{type}(M) = 1).$$

在 [28, 定理 2.3], 中，Takahashi 证明了 R 是 Gorenstein 的，当且仅当存在一个有限 G-维数且型为 1 的 CM R-模。推论 3.10 大大加强了这一结果。它还对以下问题给出了肯定答案，但需附加假设：$\mathrm{type}(M) \leqslant \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M, R))$，其中 $g = \text{G-dim}_R(M)$。

问题 1.3（Christensen）。[7, 第 40] 页。如果存在一个非零的、有限 G-维数的 CM R-模 M，那么 R 是 CM 吗?

当 $\mathrm{pd}_R(M)$ 有限时，问题 1.3 的答案是肯定的，这是交叉定理的推论，参见例如 [7, 第 40]页。正如 [7, (1.5.7)]所指出的，交叉定理无法推广到 G-维数。不过，问题 1.3 也有一些部分肯定的答案，参见 [28, 定理 2.3], [10, 推论 4.4 和 4.5]以及 [11, 定理 3.6]。

鉴于定理 1.2 中的结果，我们希望找到一些 R-模类，使得这些模具有有限内射维数便能保证 R 是 Gorenstein。在这一主题下，我们证明了定理4.6，该定理还指出：

有限内射维数的非零模可用作测试模，用来检测给定模的投射维数是否有限。

定理4.6. 设 N 是一个非零 R-模，满足 $\operatorname{depth}(N) \geqslant \dim(R) - 1$，且 $\operatorname{id}_R(N) < \infty$。对于一个 R-模 M，若对所有 i，$\operatorname{id}_R(\operatorname{Ext}^i_R(M,N))$ 都是有限的，则 $\operatorname{pd}_R(M)$ 有限。

因此，我们得到 Gorenstein 局部环的如下刻画，它是通过某些模的有限内射维数给出的。

推论 4.7. 若存在一个非零 R-模 M，其深度为 $\geqslant \dim(R)-1$，且 M、$\operatorname{Hom}_R(M,M)$ 和 $\operatorname{Ext}^1_R(M,M)$ 的内射维数均有限，则 M 的投射维数有限，且 R 是 Gorenstein。

(II) 在本文的第二部分，我们研究 Ext 和 Tate 上同调消失的对称性，以及它们分别与 Tor 和 Tate 同调消失之间的关系。Avramov-Buchweitz [2] 首先在完全交环上研究了这些问题。Tate（余）上同调的定义见 5.5。对于 R-模 M 和 N，其消失

$$\operatorname{Ext}^{\gg 0}_R(M,N) \text{ (resp., } \operatorname{Ext}^{\ll 0}_R(M,N), \operatorname{Ext}^{\star}_R(M,N))$$

这意味着对所有 $i \gg 0$（分别地，对 $i \ll 0$、$i \in \mathbb{Z}$），$\operatorname{Ext}^i_R(M,N) = 0$。当 R是局部完全交叉环时，Avramov-Buchweitz 证明了以下条件等价：

(1) $\operatorname{Ext}^{\gg 0}_R(M,N) = 0$, (2) $\operatorname{Ext}^{\gg 0}_R(N,M) = 0$, (3) $\operatorname{Tor}^R_{\gg 0}(M,N) = 0$, (4) $\widehat{\operatorname{Ext}}^{\ll 0}_R(M,N) = 0$, (5) $\widehat{\operatorname{Ext}}^{\ll 0}_R(N,M) = 0$, (6) $\widehat{\operatorname{Tor}}_{\ll 0}(M,N) = 0$, (7) $\widehat{\operatorname{Ext}}^{\star}_R(M,N) = 0$, (8) $\widehat{\operatorname{Ext}}^{\star}_R(N,M) = 0$, 以及 (9) $\widehat{\operatorname{Tor}}^R_{\star}(M,N) = 0$,

参见 [2, 定理 4.7、4.9 和 6.1]。在 [23, 定理 4.1], 中，Huneke-Jorgensen 证明，对于一类新的环，即 AB 环（[23, 定义 3.1]），Ext 消失的对称性（即 (1) 与 (2) 等价）成立。这类环严格介于完全交叉环与 Gorenstein 环之间（参见 [23, 定理 3.6] 和 [13, 第 471 页，定理]）。然而，由于 [15, 定理 1.2], Ext 消失的对称性并非对所有 Gorenstein 环都成立。在本研究中，我们证明了带有典范模的 CM 局部环上 Ext 消失的一种不同形式的对称性，见定理 5.2。这显著加强了 Huneke-Jorgensen 的一项结果： [23,定理 2.1], 。该结果是在 R 为 Gorenstein 环，且 M、 N为 MCM（极大 Cohen–Macaulay） R-模的条件下证明的。

定理 5.2. 设 R 是一个带有典范模 ω的 CM 局部环。设 M 和N是 CM R-模。令 $M^+ := \operatorname{Ext}^n_R(M,\omega)$，其中 $n =$维数$(R) -$维数(M)。那么以下条件等价：(1) $\operatorname{Ext}^{\gg 0}_R(M,N^+) = 0$，(2) $\operatorname{Ext}^{\gg 0}_R(N,M^+) = 0$，以及 (3) $\operatorname{Tor}^R_{\gg 0}(M,N) = 0$。

沿着同一思路，我们还研究了 Gorenstein 局部环上 Tate上同调消失的对称性。

定理 5.8. 除满足 5.2 中的假设外，进一步假设 R 是 Goren- stein。则以下条件等价：

(1) $\widehat{\operatorname{Ext}}^{\ll 0}_R(M,N^+) = 0$, (2) $\widehat{\operatorname{Ext}}^{\ll 0}_R(N,M^+) = 0$, 以及 (3) $\widehat{\operatorname{Tor}}^R_{\ll 0}(M,N) = 0$。

2. A criterion for Gorenstein rings via G-dim-test modules

定义 2.1. 若一个 R-模 M 满足以下条件，则称其为 pd-测试模（分别地，G-维数-测试模）：对于任意满足对所有 $i \gg 0$ 均有 $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$ 的 R-模 N，均有 $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$（分别地，G-维数$_R(N) < \infty$）。

如果 M 是一个 pd-test 模，那么它就是一个 G-维数测试模，但反过来不一定成立。存在不是 pd-test 模的 G-维数测试模；例如参见 [6, 3.11]。作为一类 pd-test 模，我们应注意，如果 I 是 R 的整闭理想，且深度$(R/I) = 0$（例如，当 I 是 $\mathfrak{m}$-主理想时），那么 I 是一个 pd-test（因此也是 G-维数测试） R-模， [6, 2.3]。

引理 2.2. 设 M 是一个 G-维数测试 R-模。设 x 是 R上的正则元，且 M。那么 M/xM 是 R/xR上的 G-维数测试模。

证明。设 T是 R/xR上的一个模。设对所有 $i \gg 0$，$\operatorname{Tor}_i^{R/xR}(M/xM,T) = 0$。由于 M是一个 G-维数测试 R-模，且对所有 $i \gg 0$，$\operatorname{Tor}_i^R(M,T) \cong \operatorname{Tor}_i^{R/xR}(M/xM,T) = 0$，可得 G-维数$_R(T) < \infty$。这意味着 G-维数$_{R/xR}(T) < \infty$；例如参见 [7, 第 39]页。因此， M/xM 是 R/xR上的 G-维数测试模。□

下面的论证为环是 CM 环的情形下的 [6, 4.4] 提供了另一种证明。与 [6, 4.4] 的证明相比，我们的证明非常简短且初等。

定理 2.3. 设 R 是一个 CM 局部环，且 M 是 R 上的 G-维数测试模。假设对所有 $i \gg 0$，都有 $\operatorname{Ext}_R^i(M,R) = 0$。那么 R 是 Gorenstein 环。

证明. 令 d:= depth(R)。首先假设 $d > 0$。将 M 替换为高阶上同调核后，可假设 M 是极大 Cohen–Macaulay 模。取一个在 R 和 M 上都正则的元素 $x \in R$。于是，对所有 $i \gg 0$，都有 $\operatorname{Ext}_{R/xR}^i(M/xM, R/xR) = 0$。由于 R/xR 是 CM 环，且 M/xM 是 G-维数测试 R/xR-模（引理 2.2），我们可以继续论证，将问题归约到 R 是 Artinian 环的情形。因此，假设 $d = 0$，即 R 是 Artinian 环。

令 $(-)^\vee := \operatorname{Hom}_R(-,E)$，其中 E 是 R的剩余域的内包。于是，对所有 $i \geqslant 0$，$\operatorname{Tor}_i^R(M,E)^\vee \cong \operatorname{Ext}_R^i(M,E^\vee) \cong \operatorname{Ext}_R^i(M,R)$。因此，由我们的假设可得 $\operatorname{Tor}_i^R(M,E)^\vee$，从而对所有 $i \gg 0$，$\operatorname{Tor}_i^R(M,E)$ 都消失。因此 G-维数$_R(E) < \infty$。这意味着 R 是 Gorenstein；例如参见 [12, 1.2]。□

3. Criteria for Gorenstein rings via G-dimension

3.1. 对于一个深度为 t的 R-模 M， M的型记作 type(M)，定义为第 t个 Bass 数 $\dim_k\left(\operatorname{Ext}_R^t(k,M)\right)$。 M的最小生成元个数记作 $\mu(M)$，即 $\mu(M) := \dim_k(M \otimes_R k)$。令 $M^* := \operatorname{Hom}_R(M,R)$。当 $g =$ G-维数$_R(M) < \infty$时，我们记 $M^\dagger := \operatorname{Ext}_R^g(M,R)$。

定义 3.2. (1) M 的级定义为

$$\operatorname{grade}(M) = \min\{i : \operatorname{Ext}_R^i(M,R) \neq 0\}.$$

(2) [1, (4.34)]一个非零的 R-模 M 称为 G-完美，如果

$$\text{G-dim}_R(M) = \operatorname{grade}(M),$$

等价地，如果

$$\operatorname{Ext}_R^n(M,R) = 0 \text{ for all } n \neq g, \text{ where } g = \text{G-dim}_R(M) < \infty.$$

称非零的 R-模 M 为完美模，若 $\mathrm{pd}_R(M) = \mathrm{grade}(M)$。每个完美模都是 G-完美的，但反过来一般不成立。事实上，每个 G-维数为 0 的非零模总是 G-完美的，但未必是完美模。

若 R 是 Cohen–Macaulay，且 M 是有限投射维数的 R-模，那么众所周知， M 是 Cohen–Macaulay，当且仅当 M 是完美模，参见 [5, 2.1.5]。Golod [22, p.63, 9.] 将这一结果进一步推广到 G-完美模。我们证明，“仅当”这一方向对任意局部环都成立。注意，“如果”这一方向一般并不成立。例如， $M = R$ 总是完美模，但不一定是 Cohen–Macaulay。

定理 3.3. 设 M 是一个非零的有限 G-维数 R-模。那么

$$M \text{ is CM} \quad \Longrightarrow \quad M \text{ is } G\text{-perfect.}$$

当 R 是 Cohen–Macaulay 时，逆命题成立。

证明. 设 M 是一个有限 G-维数的 Cohen–Macaulay R-模。令 d:= depth(R)， s :=dim(M)， g:= G-维数$_R$(M) 和 h:=grade(M)。由 Auslander-Bridger公式[1,(4.13).(b)]， g =G-维数$_R$(M) = depth(R) − depth(M) $= d - s$，因为 M 是 Cohen–Macaulay。为证明 M 是 G-完美的，即 $g = h$，我们对 s 使用归纳法。

在基础情形下，假设 $s = 0$。那么 M 具有有限长度，且 Supp(M) =$\{\mathfrak{m}\}$。由此可得，depth(R) =min$\{i : \mathrm{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}$ =grade(M)，例如参见[5, 1.2.10.(e)]。因此 $g = d = h$。

接下来假设 $s \geqslant 1$。由于 M 是 Cohen–Macaulay，存在一个 M-正则元 x。那么 M/xM 是一个维数为 $s-1$的 Cohen–Macaulay R-模。此外，G-维数$_R$(M/xM) =G-维数$_R$(M) $+1 = g+1$ 有限。因此，根据归纳假设， M/xM是一个 G-完美 R-模，其 G-维数为 $g+1$。因此

$$\mathrm{Ext}^i_R(M/xM, R) = 0 \ \text{ for all } i \neq g+1. \tag{3.1}$$

考虑短正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$，我们得到一个正合列

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, R) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^i_R(M, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M/xM, R) \ \text{ for every } i. \tag{3.2}$$

因此，由 (3.1)、(3.2) 和中山引理可知，对所有 $i \neq g$， Ext^i_R(M, R) $= 0$。因此 M 是 G-完美的。

逆命题部分可仿照完美模的情形证明，参见 [5, 2.1.5] 的证明。由于 M 是 G-完美的，且 R 是 Cohen–Macaulay 的，因此 grade(M) =G-维数$_R$(M) =维数(R) −深度(M)。另一方面，

$$\mathrm{grade}(M) = \mathrm{depth}(\mathrm{ann}_R(M), R) = \dim(R) - \dim(M),$$

例如参见 [5, 1.2.10.(e) 和 2.1.4]。因此，深度(M) = 维数(M)，也就是说， M 是 Cohen–Macaulay 的。 □

注 3.4。在 [17], 中，Foxby 证明了：若 R 是 Cohen–Macaulay 的，则一个级为 g 的 R-模 M 是 G-完美的，当且仅当 M 是 Cohen–Macaulay 的，且 Ext^g_R(M, R) 是 G-完美的。Avramov 和 Martsinkovsky 在 [3, 6.3] 中证明了：若一个 R-模 M 是级为 g 的 G-完美模，则 Ext^g_R(M, R) 也具有这一性质。定理 3.3 中的主要蕴含关系并不能由这些结果推出，而是 Foxby 结果的一个变体。

下面的定理表明，G-完美 R-模的型是 R 的型的倍数。

定理 3.5。如果 M 是一个 G-完美的 R-模，且其 G-维数为 g，那么

$$\mathrm{type}(M) = \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M, R))\,\mathrm{type}(R).$$

为了证明定理 3.5，我们使用谱序列。

3.6. 设 L、M 和 N 是 R-模。设 $\mathbb{P}_L$ 是 L 的一个投射分解，$\mathbb{I}_N$ 是 N 的一个内射分解。张量-同态伴随给出以下双复形之间的同构：

$$\mathbb{X} := \operatorname{Hom}_R(\mathbb{P}_L, \operatorname{Hom}_R(M, \mathbb{I}_N)) \cong \operatorname{Hom}_R(\mathbb{P}_L \otimes_R M, \mathbb{I}_N) =: \mathbb{Y}. \tag{3.3}$$

由于 $\operatorname{Hom}_R(\mathbb{P}_L, -)$ 是一个正合函子，先垂直计算 $\mathbb{X}$ 的上同调，再水平计算，我们得到谱序列的前两页

$$\begin{aligned} {}^{v}E_1^{p,q}(\mathbb{X}) &= \operatorname{Hom}_R\left(P_p, \operatorname{Ext}_R^q(M,N)\right) \quad \text{and} \\ {}^{v}E_2^{p,q}(\mathbb{X}) &= \operatorname{Ext}_R^p\left(L, \operatorname{Ext}_R^q(M,N)\right) \text{ for all } p,q. \end{aligned} \tag{3.4}$$

另一方面，由于 $\operatorname{Hom}_R(-, \mathbb{I}_N)$ 是一个正合函子，先水平计算 $\mathbb{Y}$ 的上同调，再垂直计算，我们得到另一个谱序列

$$\begin{aligned} {}^{h}E_1^{p,q}(\mathbb{Y}) &= \operatorname{Hom}_R\left(\operatorname{Tor}_p^R(L,M), I^q\right) \quad \text{and} \\ {}^{h}E_2^{p,q}(\mathbb{Y}) &= \operatorname{Ext}_R^q\left(\operatorname{Tor}_p^R(L,M), N\right) \text{ for all } p,q. \end{aligned} \tag{3.5}$$

由于 $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$，它们的全复形同构，因此它们的上同调群也同构，即，

$$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) \cong H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{Y})) \text{ for all } n. \tag{3.6}$$

现在我们可以证明定理 3.5 了。

定理 3.5 的证明。考虑 3.6 中讨论的关于 $L = k$和 $N = R$的谱序列。记 $\tau(-) := \text{型}(-)$。令 $g = \text{G-维数}_R(M)$。由于 M 是 G-完美的，g 有限，且对所有 $q \neq g$，$\operatorname{Ext}_R^q(M,R) = 0$。因此，谱序列 (3.4)

$${}^{v}E_2^{p,q}(\mathbb{X}) = \operatorname{Ext}_R^p\left(k, \operatorname{Ext}_R^q(M,R)\right)$$

在第二页沿着 $q = g$ 这一行退化。因此

$$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) \cong {}^{v}E_2^{n-g,g}(\mathbb{X}) = \operatorname{Ext}_R^{n-g}\left(k, \operatorname{Ext}_R^g(M,R)\right) \text{ for all } n,$$

例如，参见 [30, 5.2.7]。设 $s := \text{深度}(M^\dagger)$。记 $M^\dagger = \operatorname{Ext}_R^g(M,R)$，

$$\begin{aligned} &H^{s+g}(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) \cong \operatorname{Ext}_R^s(k, M^\dagger) \cong k^{\tau(M^\dagger)} \neq 0 \quad \text{and} \\ &H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) = 0 \text{ for all } n < s+g. \end{aligned} \tag{3.7}$$

设 $d := \text{深度}(R)$。由于 $\operatorname{Tor}_p^R(k,M)$ 是一个自由的 k-模，另一个谱序列 (3.5) 满足

$${}^{h}E_2^{p,q}(\mathbb{Y}) = \operatorname{Ext}_R^q\left(\operatorname{Tor}_p^R(k,M), R\right) = 0 \text{ for all } p < 0 \text{ or } q < d.$$

因此，对于 $p < 0$ 或 $q < d$，${}^{h}E^{p,}{}_{r}{}^{q} = 0$ 对所有 $r \geqslant 2$ 均成立，这意味着 ${}^{h}E^{p,}{}_{\infty}{}^{q} = 0$。此外，由于第 r 页的微分由 ${}^{h}d^{p,}{}_{r}{}^{q}$: ${}^{h}E^{p,}{}_{r}{}^{q} \longrightarrow {}^{h}E^{p-r+1,}{}_{r}{}^{q+r}$ 给出，可以注意到

$${}^{h}d_r^{r-1,d-r} : {}^{h}E_r^{r-1,d-r} \longrightarrow {}^{h}E_r^{0,d} \quad \text{and} \quad {}^{h}d_r^{0,d} : {}^{h}E_r^{0,d} \longrightarrow {}^{h}E_r^{-r+1,d+r}$$

对于所有 $r \geqslant 2$，这些映射均为零，由此可得 ${}^{h}E^{0,}{}_{\infty}{}^{d} = {}^{h}E^{0,}{}_{2}{}^{d}$。因此，${}^{h}E^{0,}{}_{\infty}{}^{d}$是谱序列极限项中直线 $p+q=d$ 上唯一可能非零的项

谱序列 ${}^{h}E^{p}{}_{r}{}^{q}(\mathbb{Y})$ 中，直线 $p+q=n$ 上的所有项对于 $n<d$ 均为零。因此，考虑到 $H^n(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y}))$ 的滤过（参见 [30, 5.2.5 和 5.2.6]），可得

$$
\begin{aligned}
(3.8)\qquad H^d(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y})) &\cong {}^{h}E_{\infty}^{0,d}(\mathbb{Y}) = {}^{h}E_{2}^{0,d}(\mathbb{Y}) \\
&= \mathrm{Ext}_R^d\left(\mathrm{Tor}_0^R(k,M),R\right) \cong k^{\mu(M)\tau(R)} \neq 0 \quad \text{and} \\
H^n(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y})) &= 0 \ \text{ for all } \ n<d.
\end{aligned}
$$

由 (3.6)、(3.7) 和 (3.8) 可知，对于 G-完美 R-模 M，

$$
(3.9)\qquad \tau(M^{\dagger}) = \mu(M)\tau(R).
$$

由 [3,定理 6.3],，由于 $M^{\dagger}$ 也是一个 G-完美 R-模（级为 g），且 $M\cong M^{\dagger\dagger}$，对 $M^{\dagger}$ 应用 (3.9)，可得 $\tau(M) = \tau(M^{\dagger\dagger}) = \mu(M^{\dagger})\tau(R)$，由此完成证明。□

非 G-完美模也可能满足定理 3.5 中的等式。

例 3.7. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个维数为 $d\geqslant 2$ 的 Gorenstein 局部环。那么，正合列 $0\to\mathfrak{m}\to R\to k\to 0$ 导出 $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m},R)\cong R$，并且

$$
\mathrm{Ext}_R^i(\mathfrak{m},R)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+1}(k,R)\cong\begin{cases}0 & \text{if } i\geqslant 1 \text{ and } i\neq d-1,\\ k\neq 0 & \text{if } i=d-1.\end{cases}
$$

因此，$\mathfrak{m}$ 不是 G-完美 R-模，G-维数$_R(\mathfrak{m}) = d-1$，且深度$(\mathfrak{m}) = 1$。由于 $\mathrm{Ext}_R^1(k,\mathfrak{m})\cong\mathrm{Hom}_R(k,k)\cong k$，型$(\mathfrak{m}) = 1 = \mu(\mathrm{Ext}_R^{d-1}(\mathfrak{m},R))$ 型(R)。

存在一些 Cohen–Macaulay（非自由）R-模 M 具有有限 G-维数 g，使得 $\mathrm{type}(M) = \mu(\mathrm{Ext}_R^g(M,R))$，其中 $\mathrm{type}(M)$ 可以任意大。

例 3.8. 设 $R=k[X_1,\dots,X_n]/\langle X_1^2,\dots,X_n^2\rangle$ 是域 k上的元素，其中 $n\geqslant 2$。显然，$R=k[x_1,\dots,x_n]$ 是一个 Gorenstein Artin局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$。因此，每个 R-模都是 Cohen–Macaulay 模，且 G-维数为 0（故为 G-完美）。令 $I:=\langle x_ix_j : 1\leqslant i<j\leqslant n\rangle$ 且 $M:=R/I$。注意，M 不是自由模，并且 $\mathrm{Soc}(M) = (0:_M\mathfrak{m}) = kx_1\oplus\cdots\oplus kx_n$。因此，$\mathrm{type}(M) = \dim_k(\mathrm{Soc}(M)) = n$。另一方面，$\mathrm{Hom}_R(M,R)\cong(0:_R I)$ 可表示为

$$
(3.10)\qquad K\text{-Span}\{x_1x_2\cdots x_n,\ x_1\cdots x_{i-1}\widehat{x_i}x_{i+1}\cdots x_n : 1\leqslant i\leqslant n\}.
$$

因此 $\mu(\mathrm{Ext}_R^0(M,R)) = n$。由于 $\mathrm{type}(R) = 1$，等式

$$
\mathrm{type}(M) = \mu(\mathrm{Ext}_R^0(M,R))\,\mathrm{type}(R)
$$

如定理 3.5 所示成立。

鉴于定理 3.5 和例 3.7，下面的自然问题随之产生。

问题 3.9。是否存在一个 R-模 M，其 G-维数有限，g 使得 $\mathrm{type}(M)\neq\mu(\mathrm{Ext}_R^g(M,R))\,\mathrm{type}(R)$?

作为定理 3.3 和 3.5 的推论，我们得到 Gorenstein 局部环的如下刻画，其表述涉及某些有限 G-维数模的存在性。

推论 3.10。以下陈述等价：

(1) R 是 Gorenstein。（2）R 具有一个非零 CM 模 M，其 G-维数有限，g 使得

$$
\mathrm{type}(M)\leqslant\mu(\mathrm{Ext}_R^g(M,R)) \quad (e.g.,\ \mathrm{type}(M)=1).
$$

（3） R 是 CM，且它具有一个 G-完美模 M，其 G-维数为 g，使得 type(M) $\leqslant \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M,R))$。

证明。（1）$\Rightarrow$（2）和（1）$\Rightarrow$（3）：由于 R 是 Gorenstein 环，因此它是型为 1 的 Cohen–Macaulay 环，参见例如 [5, 3.2.10]。注意到 $M = R$ 满足条件（2）和（3）。

（2）$\Rightarrow$（1）：根据定理 3.3，M 是 G-完美的。因此，定理 3.5 给出 type(M) $= \mu(M^\dagger)$ type(R)。由于 type(M) $\leqslant \mu(M^\dagger)$，可知 R的型为 1。因此，根据 [28, 定理 2.3.（i）$\Leftrightarrow$（iv）]，R 是 Gorenstein 环。

（3）$\Rightarrow$（1）：由给定的不等式，根据定理 3.5，可得 type(R) =1。因此，由于 R 是 Cohen–Macaulay 环，R 必为 Gorenstein 环，参见例如 [5, 3.2.10]。□

注 3.11. 存在有限 G-维数的 Cohen–Macaulay（非自由）R-模 M g，使得 type(M) $= \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M,R))$；其中 type($M$) 可以任意大，参见例如例 3.8）。这说明推论 3.10.(1)$\Leftrightarrow$(2) 显著强化了 [28,定理 2.3.(i)$\Leftrightarrow$(iii)]。

注 3.12. 存在型为 1 的 G-完美 R-模，并不一定意味着 R 是 Gorenstein。例如，$R = K[[X,Y]]/(X^2, XY)$ 的型为 1，且它不是 Cohen–Macaulay。因此，$M = R$ 是型为 1 的 G-完美 R-模，但 R 不是 Gorenstein。因此，（2）中的 "M 是 Cohen–Macaulay" 和（3）中的 "R 是 Cohen–Macaulay"这两个条件不能删去。

注 3.13. 存在一个非零的有限 G-维数 CM R-模 M n 并不保证 R 是 Gorenstein，例如 $M = R$，其中 R 是一个非 Gorenstein CM 局部环。因此，推论 3.10 中 (2) 和 (3) 的假设 type(M) $\leqslant \mu(\mathrm{Ext}^g_R(M,R))$ 不可省略。

4. When Ext modules have finite injective dimension

本节研究某些 Ext 模具有有限内射维数所带来的结果。我们首先推广 Foxby 的一个结果，该结果针对 CM 模在 [16, Prop. 3.5.(b)]，中得到证明，见注 4.3。

命题 4.1. 设 R 是一个具有典范模 ω 的 CM 局部环。设 M 是一个 R-模。若对所有 $i \geqslant 0$，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(M,\omega))$ 均有限，则 $\mathrm{pd}_R(M)$ 有限。

证明。对所有 $i \geqslant 0$，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(M,\omega)) < \infty$。为了证明 $\mathrm{pd}_R(M)$ 有限，我们可以假设 M 是极大 Cohen–Macaulay，因为 M 可替换为上同调核模 $\Omega^d_R(M)$，它是极大 Cohen–Macaulay，其中 $d =$ 维数(R)。要说明这一化简是合理的，只需证明对所有 i，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\Omega(M)\ \omega))$ 有限。考虑短正合列 $0 \to \Omega(M) \to R^b \to M \to 0$，可得正合列：

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,\omega) \longrightarrow \omega^b \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega(M),\omega) \longrightarrow \\
\mathrm{Ext}^1_R(M,\omega) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\Omega(M),\omega) \longrightarrow \\
\mathrm{Ext}^2_R(M,\omega) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(\Omega(M),\omega) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

由于对所有 $i \geqslant 0$，ω 和 $\mathrm{Ext}^i_R(M,\omega)$ 都有有限内射维数，由正合列 (4.1) 可知，对所有 i，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(\Omega(M)\ \omega))$ 有限。

由于 M 是极大 Cohen–Macaulay，对所有 $i \neq 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,\omega) = 0$，且 $\mathrm{Hom}_R(M,\omega)$ 也是极大 Cohen–Macaulay（例如参见 [5, 3.3.3]）。因此，$\mathrm{Hom}_R(M,\omega)$ 是具有有限内射维数的极大 Cohen–Macaulay 模。因此，由 [5, 3.3.28]，可知，对于某个 $r \geqslant 1$，$\mathrm{Hom}_R(M,\omega) \cong \omega^r$。于是，应用$\omega$-对偶可得 M 是自由的（参见 [5, 3.3.10]）。□

注 4.2. 设 M 和 N 是非零的 R-模。则

$$\operatorname{depth}(\operatorname{ann}_R(M), N) = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(M, N) \neq 0\}.$$

如果 $\mathrm{id}_R(N) < \infty$，那么我们还可以得到

$$\dim(R) - \operatorname{depth}(M) = \sup\{i : \operatorname{Ext}^i_R(M, N) \neq 0\},$$

例如，参见 [5, 1.2.10.(e) 和 3.1.24]。

注 4.3. 设 R 是一个维数为 d 且有典范模 ω的 CM 局部环。设 M 是一个维数为 s 的 CM R-模。那么，由注 4.2 可知，$\mathrm{Ext}^i_R(M,\omega) \neq 0$ 当且仅当 $i = d - s$。在 [16, 命题 3.5.(b)], 中，Foxby 证明了 $\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^{d-s}_R(M,\omega))$ 有限当且仅当 $\mathrm{pd}_R(M)$ 有限。注意，命题 4.1 推广了“仅当”部分，而“当”部分是显然的。此外，我们的证明是初等的，不使用谱序列。

注 4.4. 我们从 Holanda 处得知，Thiago-Holanda 在 [14] 中证明了一个与命题 4.1 类似的结果。设 R 是 Gorenstein 局部环 S的一个同态像。设 M 是一个 R-模，满足对所有 i，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_S(M,S)) < \infty$。那么 $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$，参见 [14, 推论 4.7]。当 R 是 CM 时，由局部对偶可知，命题 4.1 与 [14, 推论 4.7], 相同；例如参见 [4, 11.2.6 和 12.1.20]。然而，与命题 4.1 不同，[14, 推论 4.7] 的证明使用了谱序列论证。

鉴于命题 4.1，我们主要关注以下问题。

问题 4.5. 设 M 和 N 是非零的 R-模。假设 $\mathrm{id}_R(N) < \infty$。若对所有 $i \geqslant 0$，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(M,N))$ 都有限，那么 $\mathrm{pd}_R(M)$ 是否有限?

当 N 是极大 Cohen–Macaulay 且 $\mathrm{id}_R(N) < \infty$ 时，对于某个 $r \geqslant 1$，有 $N \cong \omega^r$，参见例如 [5, 3.3.28]。因此，根据命题 4.1，若 N 是极大 Cohen–Macaulay，则问题 4.5 有肯定答案。在以下定理中，我们证明当 $\operatorname{depth}(N) = \dim(R) - 1$ 时，这个问题也有肯定答案。

定理4.6. 设 M 和 N 是非零的 R-模。假设 $\mathrm{id}_R(N) < \infty$ 且 $\operatorname{depth}(N) \geqslant \dim(R) - 1$。若对所有 $i \geqslant 0$，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(M,N))$ 都有限，则 $\mathrm{pd}_R(M)$ 有限。

证明。设对所有 $i \geqslant 0$，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Ext}^i_R(M,N)) < \infty$。如命题 4.1 的证明所示，我们可以假设 M 是极大 Cohen–Macaulay。于是，根据 Ischebeck 的一个结果（参见 [5, 3.1.24]），对所有 $i \neq 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$。我们考虑 3.6 中针对 $L = k$ 讨论的谱序列。由此可知，谱序列 ${}^vE^{p,q}_2(\mathbb{X}) = \mathrm{Ext}^p_R(k, \mathrm{Ext}^q_R(M,N))$ 在第 $q = 0$ 条线上退化。因此，$\mathbb{X}$ 的全复形的上同调群为

$$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) \cong {}^vE_2^{n,0}(\mathbb{X}) = \operatorname{Ext}^n_R(k, \operatorname{Hom}_R(M,N)) \text{ for all } n, \tag{4.2}$$

例如，参见 [30, 5.2.7]。令 $d := \dim(R)$。由于 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的内射维数有限，$\mathrm{id}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = d$，因此

$$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) = 0 \text{ for all } n > d. \tag{4.3}$$

另一方面，由于对每个 p，$\mathrm{Tor}^R_p(k,M)$ 都是一个自由 k-模，且 $\operatorname{depth}(N) \geqslant d-1$，因此另一个谱序列至多有两行非零行，即 $q = d-1$和 $q = d$，也就是说，

$${}^hE_2^{p,q}(\mathbb{Y}) = \operatorname{Ext}^q_R\left(\operatorname{Tor}^R_p(k,M), N\right) = 0 \text{ for all } q \neq d-1, d. \tag{4.4}$$

注意，${}^hE^{p,\ q}_{2}$ 中的微分由 ${}^hd^{p,\ q}_{2}$ 给出：${}^hE^{p,\ q}_{2} \longrightarrow {}^hE^{p-1,\ q+2}_{2}$。因此，由 (4.4) 可得 ${}^hE^{p,\ q}_{\infty}(\mathbb{Y}) = {}^hE^{p,\ q}_{2}(\mathbb{Y})$。因此存在一个短正合列：

$$0 \longrightarrow {}^hE_2^{d+1,d}(\mathbb{Y}) \longrightarrow H^{2d+1}(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y})) \longrightarrow {}^hE_2^{d+2,d-1}(\mathbb{Y}) \longrightarrow 0, \tag{4.5}$$

例如，见 [27, 10。29]。由于 $H^{2d+1}(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y})) \cong H^{2d+1}(\mathrm{Tot}(\mathbb{X})) = 0$（由 (4.3) 得），因此

$${}^hE_2^{d+1,d}(\mathbb{Y}) = \mathrm{Ext}_R^d\left(\mathrm{Tor}_{d+1}^R(k,M),N\right) = 0,$$

这意味着 $\mathrm{Tor}_{d+1}^R(k,M) = 0$（见 [5, 3.1.24]）。因此 $\mathrm{pd}_R(M)$ 是有限的。 □

作为定理4.6的一个应用，我们得到 Gorenstein 局部环的以下刻画，其依据是某些模的内射维数。

推论 4.7。假设存在一个非零的 R-模 M，其深度为 $\geqslant \dim(R) - 1$，并且 M、$\mathrm{Hom}_R(M,M)$ 以及 $\mathrm{Ext}^1_R(M,M)$ 的内射维数均有限。那么，M 具有有限投射维数，且 R 是 Gorenstein 的。

证明。根据注 4.2，对于所有 $i > 1$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,M) = 0$。因此，由定理4.6可知，$\mathrm{pd}_R(M)$ 是有限的。于是，M 的投射维数和内射维数均有限。因此，根据定理 1.2.(2)，R 是 Gorenstein 的。□

注记 4.8. 在 [21], 中，给出了一些判据，用于根据某些 Ext 的消失以及 Hom 的内射维数来判断一个模是否为自由模，以及一个局部环是否为 Gorenstein 环。除了其中一些部分肯定的答案之外，在 [21, 问题 2.18] 中还提出了这样一个问题：如果存在一个非零 R-模M，使得 $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ 具有有限内射维数，那么 R 是否为 Gorenstein 环。推论 4.7 为这一问题提供了另一个部分肯定的答案。

鉴于推论 4.7，可以提出这样的问题：对于所有 $0 \leqslant i \leqslant$，若 M和 $\mathrm{Ext}^i_R(M,M)$ 具有有限内射维数，且 $\dim(R) - \mathrm{depth}(M)$，是否能推出 M 具有有限投射维数? 这等价于以下问题。

问题 4.9. 设 M 为一个非零 R-模，使得对于所有满足 $0 \leqslant i \leqslant \dim(R) - \mathrm{depth}(M)$ 的情形，M和 $\mathrm{Ext}^i_R(M,M)$ 的内射维数都是有限的。R是 Gorenstein 环吗?

注意到，当 $\dim(R) - \mathrm{depth}(M) \leqslant 1$ 时，问题 4.9 有肯定答案，如推论 4.7 所示。

5. Symmetry in vanishing of Ext and Tate cohomology

本节中，我们将采用以下设置。

设置 5.1. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d、具有典范模 ω 的 CM 局部环。设 M 和 N 是 R-模。令 $M^+ := \mathrm{Ext}^{d-\dim(M)}_R(M,\omega)$。

在设置 5.1 下，我们证明关于 Ext 和 Tor 消失的以下结果。这大大加强了 Huneke-Jorgensen [23, 定理 2.1], 的一项结果；该结果是在 R 为 Gorenstein 局部环，且 M、N 为 MCM R-模的条件下证明的。

定理 5.2. 设 M 和 N 是 CM R-模。则以下条件等价：
(1) 对所有 $i \gg 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(M,N^+) = 0$。
(2) 对所有 $i \gg 0$，$\mathrm{Ext}^i_R(N,M^+) = 0$。
(3) 对所有 $i \gg 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(M,N) = 0$。

证明。定理中的等价性由引理 5.4以及以下事实得到：对所有 i，$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$。□

以下是众所周知的事实，用于证明引理 5.4。

命题 5.3. 设 M 是维数为 t的 Cohen–Macaulay R-模。那么
(1) 对所有 $i \neq d-t$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,\omega) = 0$。(2) 模 $M^+ = \mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,\omega)$也是维数为 t的 Cohen–Macaulay 模，且 $M^{++} \cong M$。(3) 若 x是 M-正则元，则 x也是 M^+-正则元。此外，

$$(M/xM)^+ \cong M^+/xM^+.$$

证明。断言 (1) 和 (2) 参见 [5, 3.3.10] 。若 x 是 M-正则元，则 M/xM是维数为 $t-1$的 Cohen–Macaulay 模。因此，由 (1)，正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$ 给出另一个正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,\omega) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,\omega) \to \mathrm{Ext}_R^{d-(t-1)}(M/xM,\omega) \to 0,$$

因此（3）得证。 □

引理 5.4. 设 L 和 M 为 R-模，其中 M 为 Cohen–Macaulay。则

$$\mathrm{Ext}_R^i(L,M^+) = 0 \text{ for all } i \gg 0 \iff \mathrm{Tor}_i^R(L,M) = 0 \text{ for all } i \gg 0.$$

证明。我们对 $t := \dim(M)$ 进行归纳法。在基础情形中，假设 $t = 0$。考虑 3.6 中针对 $N = \omega$讨论的谱序列。根据 5.3.(1)，对于所有 $q \neq d$，$\mathrm{Ext}_R^q(M,\omega) = 0$。因此，谱序列 ${}^vE^{p,q}_2(\mathbb{X}) = \mathrm{Ext}_R^p(L, \mathrm{Ext}_R^q(M,\omega))$ 在第 $q = d$ 行退化。因此，对于所有 n，$\mathbb{X}$ 的全复形的上同调群为

$$H^n(\mathrm{Tot}(\mathbb{X})) \cong {}^vE_2^{n-d,d}(\mathbb{X}) = \mathrm{Ext}_R^{n-d}(L, \mathrm{Ext}_R^d(M,\omega)) = \mathrm{Ext}_R^{n-d}(L,M^+) \tag{5.1}$$

例如参见 [30, 5.2.7]。由于 $\dim(M) = 0$，对于每个 p，$\mathrm{Tor}_p^R(L,M)$ 都具有有限长度，因此另一个谱序列也在第 $q = d$ 行退化，即

$${}^hE_2^{p,q}(\mathbb{Y}) = \mathrm{Ext}_R^q\left(\mathrm{Tor}_p^R(L,M),\omega\right) = 0 \text{ for all } q \neq d. \tag{5.2}$$

因此，$\mathbb{Y}$ 的全复形的上同调群为

$$H^n(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y})) = {}^hE_2^{n-d,d}(\mathbb{Y}) = \mathrm{Ext}_R^d\left(\mathrm{Tor}_{n-d}^R(L,M),\omega\right) \text{ for all } n. \tag{5.3}$$

由于对于所有 n，$H^n(\mathrm{Tot}(\mathbb{X})) \cong H^n(\mathrm{Tot}(\mathbb{Y}))$，由 (5.1) 和 (5.3) 可得

对于所有 $i \gg 0 \iff$，$\mathrm{Ext}_R^i(L,M^+) = 0$；对于所有 $i \gg 0$.，$\mathrm{Ext}_R^d\left(\mathrm{Tor}_i^R(L,M)\ \omega\right) = 0$

$$\overset{(\dagger)}{\iff} \mathrm{Tor}_i^R(L,M) = 0 \text{ for all } i \gg 0,$$

其中，(†)由命题 5.3.(2)得到。基础情形得证。

对于归纳步骤，假设 $t \geqslant 1$。于是存在一个 M-正则元素 x。根据命题 5.3.(3)，x也是 M^+-正则的，并且 $(M/xM)^+ \cong M^+/xM^+$。对短正合列 $0 \to M^+ \xrightarrow{x} M^+ \longrightarrow (M/xM)^+ \to 0$施加 $\mathrm{Hom}_R(L,-)$，可得到一个 Ext 模的长正合序列。因此，根据中山引理，可以推出

$$\mathrm{Ext}_R^i(L,M^+) = 0 \text{ for all } i \gg 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(L,(M/xM)^+) = 0 \text{ for all } i \gg 0. \tag{5.4}$$

类似地，将 $L \otimes_R (-)$ 应用于短正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$，可得到 Tor 模的长正合序列，这意味着

$$\mathrm{Tor}_i^R(L,M) = 0 \text{ for all } i \gg 0 \iff \mathrm{Tor}_i^R(L,M/xM) = 0 \text{ for all } i \gg 0. \tag{5.5}$$

由于 M/xM 是维数为 $t-1$ 的 Cohen–Macaulay，依据归纳假设，

(5.6) $\operatorname{Ext}^i_R(L,(M/xM)^+) = 0$对所有 $i \gg 0 \Leftrightarrow \operatorname{Tor}^R_i(L,M/xM) = 0$对所有 $i \gg 0$.

因此，所需的等价关系由 (5.4)、(5.5) 和 (5.6) 得出。 □

在证明 Tate 上同调消失的对称性结果之前，我们先回顾一下 Tate（上）同调的概念；它们通过使用模的完全分解来定义。

5.5. R-模 M 的完全分解定义为由投射 R-模组成的复形 T，满足以下条件：(i) 对所有 $n \in \mathbb{Z}$，同调群 $H_n(T) = 0$ 且上同调群 $H^n(\operatorname{Hom}_R(T,R)) = 0$；(ii) 对某个 M 的投射分解 P 和某个整数 r，有 $T_{\geqslant r} = P_{\geqslant r}$。众所周知，$M$有完全分解当且仅当 G-维数$_R(M) < \infty$ （由 [3]证明）；而且，如果 M有完全分解，则任意两个这样的分解都同伦等价，参见例如 [9, (2.4)]。如果 M 有完全分解，且 N 是 R-模，那么对所有 $i \in \mathbb{Z}$，M 和 N 的 Tate（上）同调定义如下：

$$\widehat{\operatorname{Ext}}^i_R(M,N) := H^i(\operatorname{Hom}_R(T,N)) \text{ and } \widehat{\operatorname{Tor}}^R_i(M,N) := H_i(T \otimes_R N)$$

在本节余下部分，我们采用以下设定。

设定 5.6. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的 Gorenstein 局部环。设 L, M 和N是 R-模。注意，$M^+ = \operatorname{Ext}^{d-\dim(M)}_R(M,R)$。

下面的引理给出了 Tate 上同调群消失与 Tate 同调消失之间的关系。

引理 5.7. 在设定 5.6 的条件下，假设 M 是 Cohen–Macaulay 的。则

$$\widehat{\operatorname{Ext}}^i_R(L,M^+) = 0 \text{ for all } i \ll 0 \iff \widehat{\operatorname{Tor}}^R_i(L,M) = 0 \text{ for all } i \ll 0.$$

证明. 此处我们同样对 $t := \dim(M)$ 使用归纳法。首先假设 $t = 0$。设$\mathbb{T}_L$ 是 L 的完全分解，$\mathbb{I}_R$ 是 R 的极小内射分解。我们考虑 3.6 中所述的、针对 $N = R$ 的谱序列，并将$\mathbb{P}_L$ 替换为 $\mathbb{T}_L$。根据命题 5.3.(1)，对所有 $q \neq d$，均有 $\operatorname{Ext}^q_R(M,R) = 0$。因此，谱序列 ${}^vE^{p,q}_2(\mathbb{X}) = \widehat{\operatorname{Ext}}^p_R(L,\operatorname{Ext}^q_R(M,R))$ 在第 $q = d$ 行退化。因此，对所有 n，$\mathbb{X}$ 的全复形的上同调群为

$$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) \cong {}^vE^{n-d,d}_2(\mathbb{X}) = \widehat{\operatorname{Ext}}^{n-d}_R\big(L,\operatorname{Ext}^d_R(M,R)\big) = \widehat{\operatorname{Ext}}^{n-d}_R(L,M^+) \tag{5.7}$$

例如，参见 [30, 5.2.7]。由于 $\dim(M) = 0$，对于每个 p，$\widehat{\operatorname{Tor}}^R_p(L,M)$ 都具有有限长度，因此另一个谱序列也在第 $q = d$ 行退化，即

$${}^hE^{p,q}_2(\mathbb{Y}) = \operatorname{Ext}^q_R\left(\widehat{\operatorname{Tor}}^R_p(L,M),R\right) = 0 \text{ for all } q \neq d. \tag{5.8}$$

因此，$\mathbb{Y}$ 的全复形的上同调群为

$$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{Y})) = {}^hE^{n-d,d}_2(\mathbb{Y}) = \operatorname{Ext}^d_R\left(\widehat{\operatorname{Tor}}^R_{n-d}(L,M),R\right) \text{ for all } n. \tag{5.9}$$

由于对所有 n，$H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{X})) \cong H^n(\operatorname{Tot}(\mathbb{Y}))$，由 (5.7) 和 (5.9) 可得

$$\begin{aligned}\widehat{\operatorname{Ext}}^i_R(L,M^+) = 0 \text{ for all } i \ll 0 &\iff \operatorname{Ext}^d_R\left(\widehat{\operatorname{Tor}}^R_i(L,M),R\right) = 0 \text{ for all } i \ll 0.\\ &\iff \widehat{\operatorname{Tor}}^R_i(L,M) = 0 \text{ for all } i \ll 0 \text{ [by 5.3.(2)]}.\end{aligned}$$

至此，基础情形得证。

在归纳步骤中，假设 $t \geqslant 1$。存在一个 M-正则元 x。根据 5.3.(3)，x 也是 M^+-正则的，并且 $(M/xM)^+ \cong M^+/xM^+$。对于正合列$0 \to M^+ \xrightarrow{x} M^+ \longrightarrow (M/xM)^+ \to 0$，存在一个双向的 Tate 同调长正合序列：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(L, M^+) \xrightarrow{x} \widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(L, M^+) \longrightarrow \widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(L, (M/xM)^+) \\ \longrightarrow \widehat{\operatorname{Ext}}_R^{i+1}(L, M^+) \longrightarrow \cdots .\end{aligned}$$

由此，根据中山引理可得

$$\widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(L, M^+) = 0 \text{ for all } i \ll 0 \iff \widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(L, (M/xM)^+) = 0 \text{ for all } i \ll 0. \tag{5.10}$$

正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$ 导出一个 Tate 同调长正合序列：

$$\cdots \to \widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(L, M) \xrightarrow{x} \widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(L, M) \longrightarrow \widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(L, M/xM) \longrightarrow \widehat{\operatorname{Tor}}_{i-1}^R(L, M) \to \cdots$$

同样，根据中山引理可得

$$\widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(L, M) = 0 \text{ for all } i \ll 0 \iff \widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(L, M/xM) = 0 \text{ for all } i \ll 0. \tag{5.11}$$

由于 M/xM 是维数为 $t-1$ 的 Cohen–Macaulay 环，根据归纳假设，

$$\widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(L, (M/xM)^+) = 0 \text{ 对所有 } i \ll 0 \Leftrightarrow \widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(L, M/xM) = 0 \text{ 对所有 } i \ll 0. \tag{5.12}$$

结合 (5.10)、(5.11) 和 (5.12)，即可得到所需的等价关系。 □

作为引理 5.7 的推论，我们得到了关于 Tate 上同调群消失对称性的所需结果。

定理 5.8. 除设定 5.6 外，设 M 和 N 为 Cohen–Macaulay R-模。则以下条件等价：

(1) $\widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(M, N^+) = 0$ 对所有 $i \ll 0$ 均成立。(2) $\widehat{\operatorname{Ext}}_R^i(N, M^+) = 0$ 对所有 $i \ll 0$ 均成立。(3) $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(M, N) = 0$ 对所有 $i \ll 0$ 均成立。

证明。已知对于所有 i，$\widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(M, N) \cong \widehat{\operatorname{Tor}}_i^R(N, M)$，这是由 [24, Thm. 3], 得出的；另见 [8, Thm. 3.7]。因此，定理由引理 5.7 得出。□

声明

伦理批准：本文工作为原创，且未提交至其他任何地方发表。

利益冲突：所有作者均不存在任何利益冲突。

作者贡献：两位作者在以下各项工作中贡献相同：调查、方法论、撰写文章和审阅。

资助：Ghosh 获得了印度政府科学技术部科学与工程研究委员会初创研究基金的资助，项目编号为 SRG/2020/000597。

数据和材料的可用性：本文没有相关数据。

References

[1] M. Auslander 和 M. Bridger, *Stable module theory*, 美国数学会回忆录 94（1969）。1, 4, 5[2] L.L. Avramov 和 R-O. Buchweitz, *Support varieties and cohomology over complete intersections* **142** 2000 285 318 , 《数学发明》（），–。3
[3] *Absolute* L. L. Avramov 和 A. Martsinkovsky, , *relative and Tate cohomology of mod-* ,, 伦敦数学会会刊（），–。*ules of finite Gorenstein dimension* **85** 2002 393 440 5, 7, 12[4] M. P. Brodmann 和 R. Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geo-metric applications*, 剑桥高等数学研究丛书 136, 第二版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2013。9[5] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog, 10, 11 *Cohen-Macaulay rings*, 剑桥高等数学研究丛书, 第39卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993。2, 5, 8, 9, [6] Olgur Celikbas 和 Sean Sather-Wagstaff, *Testing for the Gorenstein property*, 《数学集刊》 **67** 2016 555 568 1, 2, 4 （）–。L.W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, 数学讲义 1747, 施普林[7] 格出版社, 柏林, 2000。1, 2, 4[8] L.W. Christensen 和 D.A. Jorgensen, *Tate (co)homology via pinched complexes*, 美国数学会汇刊 **366** 2014 667 689 13 （），–。J. Cornick 和 P.H. Kropholler, [9] *On complete resolutions*, 《拓扑学及其应用》78（1997），235–250。12[10] K. Divaani-Aazar、F.M.A. Mashhad 和 M. Tousi, *of finite Gorenstein homological dimensions* **42** 2014 1630 1643 , 《代数通讯》 2（），–。[11] K. Divaani-Aazar、F.M.A. Mashhad、E. Tavanfar 和 M. Tousi, *On the new intersection theorem for totally reflexive modules* **71** 2020 369 381 , 《数学集刊》（），–。2
[12] Jorgensen, David A.; Leuschke, Graham J., *On the growth of the Betti sequence of the canonical module* **256** 2007 647 659 , 《数学杂志》 4（），–。[13] D. Jorgensen, L.M. Sega, *Nonvanishing cohomology and classes of Gorenstein rings*, 《数学进展》188（2004），470–490。3[14] Thiago Fiel 和 Rafael Holanda, *modules* 2112 09724 9 , *Bass and Betti numbers of a module and its deflected* arXiv：。。[15] D. Jorgensen, L.M. Sega, *Asymmetric complete resolutions and vanishing of Ext over Gorenstein rings* 2005 3459 3477 , 《国际数学研究通知》（），–。3
[16] *On the μ^i in a minimal injective resolution* Foxby, H.B., , 《斯堪的纳维亚数学杂志》29（1971），175– 186 8, 9 。Foxby, H.B., *Quasi-perfect modules over Cohen-Macaulay rings*, 《数学通讯》66（1975），103–110。5[18] H.-B. Foxby, [17] *Isomorphisms between complexes with applications to the homological theory of modules* **40** 1977 1, 5 19 , 《斯堪的纳维亚数学杂志》 2（），第–期。[19] D. Ghosh、A. Gupta 和 T. J. Puthenpurakal, *Characterizations of regular local rings via syzygy modules of the residue field* **10** 2018 327 337 , 《交换 2代数杂志》（），–。[20] *Homological dimensions of Burch ideals* D. Ghosh 和 A. Saha, *submodules and quo-,tients* 2212 07418 1 , arXiv：。。[21] D. Ghosh 和 R. Takahashi, *Auslander-Reiten conjecture and finite injective dimension of Hom* 2109 00692 , 《京都数学杂志》（即将出 10版），arXiv：。。[22] *G-dimension and generalized perfect ideals* Golod, E. S., , 《代数几何及其应用》，斯捷克洛夫数学研究所论文集 **165** 1984 62 66 5 （），–。[23] Huneke, Craig 和 Jorgensen, David A., *Symmetry in the vanishing of Ext over Gorenstein rings* **93** 2003 161 184 , 《斯堪的纳维亚数学杂志》 3, 10（），–。[24] *Absolute Gorenstein* A. Iacob, ,, *and Tate torsion modules*, 《代数通讯》35（2007），1589–1606。13[25] C. Peskine, L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications a* , , 高等科学研究所数学出 *la demonstration de conjectures de M. Auslander H. Bass et A. Grothendieck* 版物, 第 42, 1973 47 119 2 号（），–。P. Roberts, , 《巴黎科学院报告》[26] 304（1987），177–180。2 *Le théorème d'intersection*

[27] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 第二版, Universitext, Springer, 纽约, 2009 10 。R. Takahashi,

[28] *Some characterizations of Gorenstein local rings in terms of G-dimension*, Acta Math. Hungar. **104** 2004 315 322 2, 8 ( ), – 。R. Takahashi,

[29] *Syzygy modules with semidualizing or G-projective summands*, J. Algebra **295** 2006 179 194 1 ( ), – 。

[30] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1994。6, 7, 9, 11, 12

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, West Bengal - 721302, India*Email address*: dipankar@maths.iitkgp.ac.in, dipug23@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai 400076, India
Email address: tputhen@math.iitb.ac.in