arXiv:2302.06297v2 [math.FA] 6 Dec 2023

基于弗雷德霍姆算子值函数对及函数模型的整函数向量值 de Branges 空间

SUBHANKAR MAHAPATRA 和 SANTANU SARKAR

摘要。本文研究了与算子值核函数相关的整函数向量值再生核希尔伯特空间（RKHS）$\mathcal{H}$。借助定义在 $\mathfrak{X}$ 上的一对弗雷德霍姆算子值整函数，构造了类似于 de Branges 矩阵的 de Branges 算子 $\mathfrak{E}=(E_-,E_+)$，其中 $\mathfrak{X}$ 是一个复可分希尔伯特空间。文中还讨论了这些 de Branges 算子的若干具体例子。基于 de Branges 算子 $\mathfrak{E}=(E_-,E_+)$ 新定义的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$，在某些特殊限制条件下得到了刻画。文中用再生核值域之间的酉算子，给出了关于自变量乘法的闭对称算子的所有自伴扩张的完整参数化和典范描述。本文还讨论了 de Branges 空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 的一个采样公式。文中研究了一类具有无限亏指数的整算子，并证明它们可以视为这类 de Branges 空间中特定子类的乘法算子。最后，简要讨论了完全非酉压缩算子的特征函数与 de Branges 空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 之间的联系。

目录

1. 引言 2 1.1. 论文结构 3 1.2. 符号 4 2. 算子值核与向量值再生核希尔伯特空间（RKHS）5 3. 向量值全纯函数空间 7 4. RKHS $\mathcal{H}(F)$ 的刻画与延拓 11 5. 基于成对 Fredholm 算子值整函数构造德布朗日空间 16 6. 若干例子 18

2020 年数学主题分类。46E22、47B32、47B25、47A53。关键词和短语。带算子值核的德布朗日空间、乘法算子、de Branges 算子、具有无限亏指数的对称算子、Fredholm 算子值全纯函数、整算子、采样公式。接收日期：2023 年 12 月 2 日。《数学分析与应用杂志》；doi：https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.128010。

7. $\mathcal{H}_\beta$ 与 $\mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 等距同构的条件 21 8. RKHS $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 的刻画 26 9. $\mathfrak{T}$ 与德布朗日空间之间的联系 28 10. 具有无限亏指数的整算子 33 11. 与压缩算子的特征函数之间的联系 38 参考文献 40

1. 引言

本文旨在为向量值整函数的 de Branges 理论建立一个一般框架，并阐明该理论与 M. G. Krein 关于一类具有无限亏指数的整算子的理论之间的联系。再生核希尔伯特空间（RKHS）的基础理论由许多作者共同发展起来（参见: [5], [9], [33], [36]）。研究发现，与算子值核函数相关联的向量值再生核希尔伯特空间理论自然地出现在概率论、随机过程、机器学习、统计学等诸多领域，是一个活跃的研究方向。例如，将机器学习理论与向量值 RKHS 理论联系起来的文章（ [34], [35]）颇具启发性。本文主要研究再生核为算子值整函数的 RKHS。全文中， $\mathfrak{X}$ 是一个复可分希尔伯特空间， $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$值整函数构成的 RKHS。对于任意 $\beta \in \mathbb{C}$，我们记

$$\mathcal{H}_\beta = \{g \in \mathcal{H} : g(\beta) = 0\}.$$

此外，我们所说的 $\mathcal{H}$ 上的乘法算子，是指由自变量定义的乘法算子。

1959 年，L. de Branges 借助三条公理，引入了整函数希尔伯特空间（$\mathbb{C}$ 值），这些空间实际上是再生核希尔伯特空间（见 [10]），如今称为 de Branges 空间。此后，de Branges 发表了多篇文章（例如见 [11], [12]），并将该理论发展为傅里叶分析的一种推广。他还将其理论扩展至向量值解析函数（见[13], [14], [15]）和向量值整函数（[17]）。随着时间推移，这一理论不断发展，并与数学分析的多个领域建立了联系，例如典范系统的谱理论、插值和采样。他早期的研究成果汇集于著作（[16]）中。关于 de Branges 空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 的理论也已发展成熟；这类空间由 $\mathbb{C}^p$ 值整函数构成，并基于一个 $p \times 2p$整矩阵值函数 $\mathfrak{E} = [E_- \; E_+]$，该函数称为 de Branges 矩阵。这一理论对于求解典范系统和狄拉克–克莱因系统微分方程的正问题与

逆问题至关重要。$\mathfrak{E}$ 的分量满足以下条件:

$$\det E_+(z) \not\equiv 0 \text{ and } F := E_+^{-1}E_- \text{ is a } p\times p \text{ inner matrix valued function.} \quad (1.1)$$

$\mathcal{B}(\mathfrak{E})$的再生核为

$$K_\xi^{\mathfrak{E}}(z) := \begin{cases} \frac{E_+(z)E_+(\xi)^* - E_-(z)E_-(\xi)^*}{\rho_\xi(z)} & \text{if } z \neq \overline{\xi} \\ \frac{E_+'(\overline{\xi})E_+(\xi)^* - E_-'(\overline{\xi})E_-(\xi)^*}{-2\pi i} & \text{if } z = \overline{\xi}, \end{cases} \quad (1.2)$$

它是一个 $p\times p$ 矩阵值整函数。符号 $\rho_\xi(z)$将在后文说明。关于这些具有矩阵值再生核的德布朗日空间的全面研究，见 [6], [7]。此外， $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$空间的一种刻画与书籍 [16], 中的问题50类似；该空间与具有亏指数(p,p)的整算子之间的联系，见 [21]。

M. G. Krein也研究了整函数希尔伯特空间，不过他采用的方法与de Branges不同。他引入了整算子的概念，并指出，在整函数希尔伯特空间中，乘法算子可作为具有任意有限且相等的亏指数，以及具有无限亏指数的整算子的算子模型（见： [30], [31]）。近期研究将具有(1,1)亏指数的整算子所对应的这些空间认定为 $\mathbb{C}$值整函数的德布朗日空间（见 [42]）；而对于具有(p,p)亏指数的整算子（p 为任意有限值），这些空间则被认定为 $\mathbb{C}^p$值整函数的德布朗日空间（见 [21]）。

我们的主要目标是阐明 de Branges 算子以及 de Branges 矩阵，即找到一对 $B(\mathfrak{X})$ 值整函数 $\mathfrak{E} = (E_-, E_+)$，使得 $\mathfrak{E}$ 的分量满足类似 (1.1) 的条件，且由 (1.2) 给出的核函数为正。本文的主旨是考察基于矩阵值再生核的 de Branges 空间理论向 $B(\mathfrak{X})$ 值再生核的过渡。我们将在 $\mathcal{H}$ 上考察的两个主要算子是以自变量 $\mathfrak{T}$ 为乘法算子、定义域为 $\mathcal{D} = \{g \in \mathcal{H} : \mathfrak{T}g \in \mathcal{H}\}$，以及定义如下的广义后向移位算子

$$(R_z g)(\xi) := \begin{cases} \frac{g(\xi)-g(z)}{\xi - z} & \text{if } \xi \neq z \\ g'(z) & \text{if } \xi = z \end{cases} \quad (1.3)$$

对每个 $\xi, z \in \mathbb{C}$ 均成立。探究 $\mathcal{H}, \mathcal{H}_\beta, \mathfrak{T}$ 与 R_β 之间的密切联系，也是本文的主要目标之一。

1.1. 论文结构。本文组织如下：前三节回顾构造 de Branges 算子的预备知识。尽管这些章节中的大多数结果已在矩阵情形的

文献中出现，为了保持研究脉络清晰，我们仍在算子情形下介绍所有重要结果。第 5 节完成了 de Branges 算子 $\mathfrak{E} = (E_-, E_+)$ 的主要构造。其中一项关键观察是将 $\mathfrak{E}$ 的分量 $E_\pm$ 视为弗雷德霍姆算子值整函数。解析弗雷德霍姆定理的一种特殊形式（见 [24]，[23]）已在定理 5.2 中提及，对我们的研究至关重要。关于算子值全纯函数的基础理论，参见 [28]，[3], [25]。第 6 节给出了若干 de Branges 算子的例子。书籍 [24] 中的一个弗雷德霍姆算子值全纯函数实例，为构造我们的例子提供了重要启发。第 7 节回顾了若干关联 $\mathcal{H}_\beta$、$\mathfrak{T}$ 和 R_β 的结果。此外，我们还讨论了 $\mathcal{H}_\beta$ 与 $\mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 等距同构的条件。第 8 节讨论新构造的德布朗日空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 的一种刻画，它对应于 de Branges 算子 $\mathfrak{E} = (E_-, E_+)$，其中 $E_+(\beta)$ 和 $E_-(\overline{\beta})$ 对某个 $\beta \in \mathbb{C}_+$ 都是自伴的。这一刻画是 [16] 中问题 50 和 [21] 中定理 7.1 的向量推广。

第 9 节在一般情形下，介绍了对称乘法算子 $\mathfrak{T}$ 的所有自伴扩张的完整参数化和规范描述。此外，还根据 $\mathfrak{T}$ 的自伴扩张的特征函数，给出了德布朗日空间的一个采样公式。第 10 节介绍了具有无限亏指数的整算子与德布朗日空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 之间的联系。主要讨论了一类特殊的具有无限亏指数的整算子，并证明它们可视为某类具有算子值再生核的德布朗日空间上的乘法算子。最后一节简要讨论了完全非酉压缩算子的特征函数与德布朗日空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 之间的联系。

1.2. 符号说明。本文将始终使用以下符号：
$\mathbb{C}$ 复平面； $\mathbb{C}_+$ （分别为 $\mathbb{C}_-$）上半平面（分别为下半平面）。 $\mathbb{D}$ 是开单位圆盘， $\mathbb{T}$ 是复平面上的单位圆。
$B(\mathfrak{X})$表示作用于 $\mathfrak{X}$上的所有有界线性算子的集合。
$\rho_\xi(z) = -2\pi i(z - \overline{\xi})$。
对于算子 A； A^* 表示伴随算子，记号 $A \succ 0$ 和 $A \succeq 0$分别表示 A 是正定和半正定的，而 $\sigma(A)$表示 A的谱。

点 $\beta \in \mathbb{C}$ 是 A 的正则型点，当且仅当存在 $d_\beta > 0$ 使得

$$||(A - \beta I)g|| \geq d_\beta ||g||$$

对于定义域中的每个 g， A。 $\pi(A)$表示 A的所有正则型点的集合。

$\ker A$ 表示 A 的核；$\operatorname{rng} A$ 表示 A 的值域，而 $\operatorname{rng} A$ 表示 $\overline{A}$ 的值域的闭包。
$\dot{+}$ （分别为 $\oplus$）表示两个子空间的直和（分别为正交直和），而 $\ominus$ 表示正交补。
若函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ 博赫纳可积，则称其可积；若满足以下条件，则称其平方可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||g(t)||^2 dt < \infty.$$

平方可积函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ 的傅里叶变换记为 $\hat{g}$，定义如下

$$\hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(s) ds.$$

2. 算子值核与向量值再生

KERNEL HILBERT SPACES (RKHS)

本节简要回顾有关向量值再生核希尔伯特空间的一些基本事实。由于我们的目标是研究向量值整函数的再生核希尔伯特空间，因此我们假设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathfrak{X}$ 值整函数的再生核希尔伯特空间，并据此陈述所有结果。详细而一般性的研究可参见 [38]。
设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$值整函数构成的希尔伯特空间。若存在定义在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$上的 $B(\mathfrak{X})$值函数 $K_\xi(z)$，满足以下两个条件，则称 $\mathcal{H}$ 为再生核希尔伯特空间：

(1) 对所有 $\xi \in \mathbb{C}$和 $u \in \mathfrak{X}$， $K_\xi u \in \mathcal{H}$。(2) 对所有 $f \in \mathcal{H}$、 $\xi \in \mathbb{C}$ 和 $u \in \mathfrak{X}$， $\langle f, K_\xi u\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(\xi)\ u\rangle_{\mathfrak{X}}$。

值于 $B(\mathfrak{X})$的函数 $K_\xi(z)$称为 $\mathcal{H}$的再生核（RK）。等价地，若对于所有 $\xi \in \mathbb{C}$，点求值

$$\delta_\xi : \mathcal{H} \to \mathfrak{X}, \quad f \mapsto f(\xi)$$

是有界的。函数 $L_\xi(z) = \delta_z \delta_\xi^*$ 满足再生核的两个条件。对于再生核希尔伯特空间，再生核是唯一的。在假设 $\mathcal{H}$ 有两个再生核 $K_\xi(z)$ 和 $G_\xi(z)$ 后进行的补充计算

$$\begin{aligned} ||K_\xi u - G_\xi u||_{\mathcal{H}}^2 &= \langle K_\xi u - G_\xi u, K_\xi u\rangle_{\mathcal{H}} - \langle K_\xi u - G_\xi u, G_\xi u\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle K_\xi(\xi)u - G_\xi(\xi)u, u\rangle_{\mathfrak{X}} - \langle K_\xi(\xi)u - G_\xi(\xi)u, u\rangle_{\mathfrak{X}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

用于验证我们的最后一个论断。因此， $B(\mathfrak{X})$ 值函数 $K_\xi(z) = \delta_z \delta_\xi^*$ 是 $\mathcal{H}$的再生核。显然，对于 $\xi, z \in \mathbb{C}$, $K_\xi(z)^* = K_z(\xi)$。在再生核希尔伯特空间中

$\mathcal{H}$ 函数序列在范数意义下收敛意味着逐点收敛，即若 $\{g_n\} \subseteq \mathcal{H}$ 在范数意义下收敛于 $g \in \mathcal{H}$，则对每个 $z \in \mathbb{C}$，$g_n(z) \to g(z)$。集合 $\{K_\xi u : \xi \in \mathbb{C}, u \in \mathfrak{X}\}$ 的线性张成在 $\mathcal{H}$中稠密。若存在可数集 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \subset \mathbb{C}$ 和 $\{u_1, u_2, \ldots\} \subset \mathfrak{X}$，使得 $\{K_{\xi_n} u_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{H}$的正交基，则称该再生核希尔伯特空间具有 Kramer 采样性质，这一性质将在第 9 节中出现。

再生核 $K_\xi(z)$是正的，其含义是，对于任意选取的 $n \in \mathbb{N}$、ξ_1、ξ_2、……、$\xi_n \in \mathbb{C}$ 以及 u_1、u_2、……、$u_n \in \mathfrak{X}$，以下结论均成立

$$\sum_{l,m=1}^{n} \left\langle K_{\xi_m}(\xi_l) u_m, u_l \right\rangle_{\mathfrak{X}} = \left\| \sum_{l=1}^{n} \delta^*_{\xi_l}(u_l) \right\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

显然，对于每个 $\xi \in \mathbb{C}$，$K_\xi(\xi) \succeq 0$。集合 $\{\xi \in \mathbb{C} : K_\xi(\xi)$可逆$\}$ 是 $\mathbb{C}$的一个开子集。最后一个断言的证明与 [21]中的引理2.4相同。若 $B(\mathfrak{X})$值函数 $K_\xi(z)$定义在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上，且它具有上述意义下的正性，则称其为正核。Moore定理的算子版本（定理6.12, [38]）保证，对于每个正核，都存在唯一的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。下一个引理给出了构造整函数再生核希尔伯特空间的判据。

引理 2.1. 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、取值于 $\mathfrak{X}$ 的函数所构成的再生核希尔伯特空间，其再生核为 $K_\xi(z)$。则 $\mathcal{H}$ 是取值于 $\mathfrak{X}$ 的整函数所构成的再生核希尔伯特空间，当且仅当对于所有 $\xi \in \mathbb{C}$，$K_\xi(z)$ 是 z 中的整函数，并且 $||K_\xi(\xi)||$ 在 $\mathbb{C}$ 的每个紧子集上有界。

证明. 证明类似于 [6] 中的引理5.6。 □

接下来，我们给出一个取值于 $\mathfrak{X}$ 的整函数所构成的再生核希尔伯特空间的例子，它是 Paley-Wiener空间的向量版本。

定义2.2. 若整函数 $g : \mathbb{C} \to \mathfrak{X}$ 被称为指数型至多为 a，如果对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个与 ξ 无关的常数 L，使得

$$||g(\xi)||_{\mathfrak{X}} \leq L\, e^{|\xi|(a+\epsilon)}.$$

若 $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ 是平方可积函数，在某个 $a > 0$ 下于紧区间 $[-a, a]$ 外为零，则 $\hat{}g$ 和 g 满足 Plancherel定理，并且 $\hat{}g$ 可以延拓为整函数

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} g(t) dt$$

其指数型至多为 a。这些结论可由该书的定理1.8.2和定理1.8.3得出 [3]。

例 2.3（向量值整函数的帕利-维纳空间）。对于 $a > 0$, $\mathfrak{X}$ 值整函数的集合

$$PW_a = \{\hat{g} : \ g\text{是平方可积的，且在区间 } [-a, a]\}\text{之外为零} \tag{2.1}$$

相对于内积构成一个希尔伯特空间

$$\langle \hat{g}, \hat{h} \rangle_{PW_a} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{g}(t), \hat{h}(t) \rangle_{\mathfrak{X}} dt. \tag{2.2}$$

此外，PW_a 是一个再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$K_{\xi}^{a}(z) = \frac{\sin(z - \overline{\xi})a}{\pi(z - \overline{\xi})} I_{\mathfrak{X}},$$

其中 $I_{\mathfrak{X}}$ ($\mathfrak{X}$) 是作用于 $\mathfrak{X}$ 上的恒等算子。由于对每个 $u \in \mathfrak{X}$ 和 $\xi \in \mathbb{C}$

$$K_{\xi}^{a}(z)u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} Q_{\xi}^{a}(t) dt,$$

其中 $Q_{\xi}^{a}(t)$ 是定义如下的平方可积函数

$$Q_{\xi}^{a}(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{i\overline{\xi}t} u & \textit{if } |t| \leq a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{2.3}$$

以及对于 $\hat{g} \in PW_a$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, K_{\xi}^{a} u \rangle_{PW_a} &= \langle \hat{g}, \widehat{Q_{\xi}^{a} u} \rangle_{PW_a} \quad [\because K_{\xi}^{a} u = \widehat{Q_{\xi}^{a} u}\,] \\ &= 2\pi \langle g, Q_{\xi}^{a} u \rangle_{L^2} \quad [\textit{ by Plancherel's theorem }] \\ &= 2\pi \int_{-a}^{a} \langle g(t), \frac{1}{2\pi} e^{i\overline{\xi}t} u \rangle_{\mathfrak{X}} dt \\ &= \left\langle \int_{-a}^{a} g(t) e^{-i\xi t} dt, u \right\rangle_{\mathfrak{X}} \\ &= \langle \hat{g}(\xi), u \rangle_{\mathfrak{X}}. \end{aligned}$$

3. 向量值全纯函数空间

本节回顾一些重要的向量值全纯函数空间。由于大多数结果众所周知，我们在此不再给出证明。关于这些空间的详细信息可参见 [41], [37]。如前所述，$\mathfrak{X}$ 是一个复可分希尔伯特空间，而 $B(\mathfrak{X})$ 是作用在 $\mathfrak{X}$ 上的有界线性算子代数。我们记

$$L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathfrak{X} \mid f \text{ is weakly measurable and } \int_{-\infty}^{\infty} ||f(t)||^2_{\mathfrak{X}} \, dt < \infty \right\},$$

$$H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+) := \left\{ f : \mathbb{C}_+ \to \mathfrak{X} \mid f \text{ is holomorphic and } \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} ||f(x+iy)||^2_{\mathfrak{X}} \, dx < \infty \right\}$$

and

$$H^{\infty}_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+) := \{f : \mathbb{C}_+ \to B(\mathfrak{X}) \mid f \text{ is bounded and holomorphic}\}.$$

众所周知:

(1) $L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 关于内积构成一个希尔伯特空间

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), g(t)\rangle_{\mathfrak{X}} dt$$

对所有 $f, g \in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 均成立。

(2) 上半平面 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 上的哈代空间关于内积构成一个希尔伯特空间

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f_0(x), g_0(x)\rangle_{\mathfrak{X}} dx$$

其中 $f_0, g_0 \in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 分别是 f 和 g 的边界函数,
它们将在下一个定理中提及。

(3) $H^{\infty}_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为

$$||F||_{\infty} = \sup_{y>0} ||F(x+iy)||_{B(\mathfrak{X})}$$

for all $F \in H^{\infty}_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+)$.

我们还记

$$\mathcal{S} = \left\{F \in H^{\infty}_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+) : ||F(z)|| \leq 1 \text{ for all } z \in \mathbb{C}_+\right\}.$$

下面两个定理分别给出了函数在 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 和 $H^{\infty}_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+)$ 中的边界行为。

定理 3.1. 设 $f \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$，则存在一个（唯一的）非切向边界极限 $f_0 \in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$，使得

$$f_0(x) = \lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处逐点成立。此外， f_0 满足以下恒等式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(t)}{t-z} dt \quad , y > 0 \tag{3.1}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(t)}{t-z} dt = 0 \quad , y < 0 \tag{3.2}$$

其中 $z = x + iy$。

反之，每个满足 (3.1) 和 (3.2) 的 $f_0 \in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 都对应一个函数 $f \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$，使得 f_0 是 f 的边界函数。

(3.1) 中的恒等式称为柯西积分公式。

定理 3.2. 若 $F \in H^{\infty}_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+)$，则对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$，存在 $F_0(x) \in B(\mathfrak{X})$，使得对于所有 $u \in \mathfrak{X}$

$$F(x+iy)u \to F_0(x)u \quad as\ y \downarrow 0$$

and

$$||F_0(x)|| = \lim_{y \downarrow 0} ||F(x+iy)||.$$

我们将 $\mathcal{S}^{in}$（分别地，$\mathcal{S}^{in}_*$）记为所有满足相应边界函数 $F(x) \in B(\mathfrak{X})$ 几乎处处为等距算子（分别地，余等距算子）的函数 $F \in \mathcal{S}$ 的集合。容易看出，定义在 $\mathbb{C}_+$ 上的 $B(\mathfrak{X})$ 值全纯函数 $F(z)$ 属于 $\mathcal{S}^{in}$（分别地，$\mathcal{S}^{in}_*$），当且仅当对所有 $z \in \mathbb{C}_+$，$I_{\mathfrak{X}} - F(z)^* F(z) \succeq 0$（分别地，$I_{\mathfrak{X}} - F(z)F(z)^* \succeq 0$），且在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处取等号。算子值函数 $F \in \mathcal{S}^{in}$（分别地，$\mathcal{S}^{in}_*$）称为内函数（分别地，$*$-内函数）。同时属于 $\mathcal{S}^{in}$ 和 $\mathcal{S}^{in}_*$ 的函数称为双侧内函数。

I众所周知，压缩算子 $A \in B(\mathfrak{X})$ 的特征函数，

$$C_A(z) = \left[-A + z(I - AA^*)^{\frac{1}{2}}(I - zA^*)^{-1}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}\right] \Big| \overline{\mathrm{rng}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}}$$

当且仅当 $A^{*n} \to 0$（分别为 $A^n \to 0$）随着 $n \to \infty$ 强收敛时，它是圆盘上的内函数（分别为 $*$-内函数）（见 [37]）。Henry Helson 在 [27]，从两方面研究了实直线上范数可微且满足以下微分方程的内函数 $F(z)$

$$F'(x) = i\,V(x)\,F(x),$$

其中 $V(x)$ 是取值于 $B(\mathfrak{X})$ 的范数连续函数，且对所有 $x \in \mathbb{R}$，$V(x) \succeq 0$ 并且是自伴的。此外，Stephen L. Campbell 研究了取值于 $B(\mathfrak{X})$ 的内函数（见 [18]），这类函数在闭单位圆盘上解析。若 $A \in B(\mathfrak{X})$ 的谱半径 $r(A) < 1$、$||A|| \leq 1$ 且 $AA^* \neq I_{\mathfrak{X}}$，则相应的波塔波夫内函数

$$V_A(z) = -A^* + z(I_{\mathfrak{X}} - A^*A)^{\frac{1}{2}}(I_{\mathfrak{X}} - zA)^{-1}(I_{\mathfrak{X}} - AA^*)^{\frac{1}{2}}$$

在闭单位圆盘上也解析。我们可以利用上半平面与圆盘之间的共形映射 $C(z) = \frac{z-i}{z+i}$，将圆盘上的内函数视为上半平面上的内函数。

我们将 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 表示为 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 中元素的所有非切向边界极限的集合。因此，根据 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$，我们可以将 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 视为 $L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 的闭子空间。如果考虑下半平面上的哈代空间，即 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_-)$，则类似定理 3.1 的结果同样成立。(3.2) 中的恒等式表明，$H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 的正交补可以与 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_-)$ 等同。

定理 3.3. 上半平面上的哈代空间 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 和下半平面上的哈代空间 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_-)$ 分别是定义在 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$ 上的 $\mathfrak{X}$ 值全纯函数的再生核希尔伯特空间。相应的再生核为

$$K_\xi(z) = \frac{I_{\mathfrak{X}}}{\rho_\xi(z)} \quad \xi, z \in \mathbb{C}_+ \tag{3.3}$$

and

$$K^{(-)}_\alpha(\lambda) = -\frac{I_{\mathfrak{X}}}{\rho_\alpha(\lambda)} \quad \alpha, \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{3.4}$$

证明。简单的计算表明，对于每个 $u \in \mathfrak{X}$ 和 $\xi \in \mathbb{C}_+$, $K_\xi u \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$。此外，由柯西积分公式，再生性质

$$\begin{aligned}\langle g, K_\xi u\rangle_{H_2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle g_0(x), \frac{1}{-2\pi i(x-\overline{\xi})} u \right\rangle_{\mathfrak{X}} dx \\ &= \left\langle \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0(x)}{x-\xi} dx, u \right\rangle_{\mathfrak{X}} \\ &= \langle g(\xi), u\rangle_{\mathfrak{X}}\end{aligned}$$

对任意 $g \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$, $\xi \in \mathbb{C}_+$ 和 $u \in \mathfrak{X}$均成立。类似地，$H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_-)$的情形也可以证明。□

假设 $F \in H^\infty_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+)$，且对所有 $z \in \mathbb{C}_+$都有 $||F(z)|| \le M$，则可定义算子 M_F: $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+) \to H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$，其定义为

$$(M_F g)(z) = F(z)g(z) \quad \text{for } g \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+). \tag{3.5}$$

下面的求值表明， M_F定义良好。对于 $g \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} ||F(x+iy)g(x+iy)||^2_{\mathfrak{X}} dx &\le \int_{-\infty}^{\infty} ||F(x+iy)||^2 ||g(x+iy)||^2_{\mathfrak{X}} dx \\ &\le M^2 \int_{-\infty}^{\infty} ||g(x+iy)||^2_{\mathfrak{X}} dx \\ &\le M^2 ||g||^2_{H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)}.\end{aligned}$$

命题 3.4. 若对某个 $F \in H^\infty_{B(\mathfrak{X})}(\mathbb{C}_+)$， M_F 由 (3.5) 定义，则以下蕴含关系成立：

(1) M_F是作用于 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 上的有界算子，且 $||M_F|| = ||F||_\infty$。

(2) 对所有 $u \in \mathfrak{X}$ 和 $\xi \in \mathbb{C}_+$， $M^*_F \frac{u}{\rho_\xi} = F(\xi)^* \frac{u}{\rho_\xi}$。

此外，若 $F \in \mathcal{S}$，则 M_F是压缩算子。

证明。由前面的计算可知， M_F和 $||M_F|| \le ||F||_\infty$有界。此外，简单应用柯西积分公式可得，对所有 u、 $v \in \mathfrak{X}$和 $\xi \in \mathbb{C}_+$，以下不等式成立

$$|\langle F(\xi)u, v\rangle_{\mathfrak{X}}| \le ||M_F||\, ||u||\, ||v||.$$

这意味着，对所有 $\xi \in \mathbb{C}_+$、 $||F(\xi)|| \leq ||M_F||$，均有此结论。因此，$||M_F|| = ||F||_\infty$。由于 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$的再生核为 $K_\xi(z) = \frac{I_{\mathfrak{X}}}{\rho_\xi(z)}$。为证明（2），只需证明对所有 u、 $v \in \mathfrak{X}$ 以及 ξ、 $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\langle M_F \frac{u}{\rho_\xi}, \frac{v}{\rho_z} \rangle_{H^2} = \langle \frac{u}{\rho_\xi}, F(z)^* \frac{v}{\rho_z} \rangle_{H^2},$$

这可通过使用柯西积分公式进行简单计算得到。如果$F \in \mathcal{S}$，那么由（1）可知 M_F是一个压缩算子。□

鉴于前述命题，对于任意 $F \in \mathcal{S}$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l,m=1}^{n} \left\langle \frac{I_{\mathfrak{X}} - F(z_l)F(z_m)^*}{\rho_{z_m}(z_l)} u_m, u_l \right\rangle_{\mathfrak{X}} \geq 0 \tag{3.6}$$

对于 u_1、 u_2、.....、 $u_n \in \mathfrak{X}$ 以及 z_1、 z_2、.....、 $z_n \in \mathbb{C}_+$的每一种选择。因此，B（$\mathfrak{X}$）值函数

$$\Gamma_\xi(z) = \frac{I_{\mathfrak{X}} - F(z)F(\xi)^*}{\rho_\xi(z)}$$

是 $\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+$上的一个正核，我们将相应的、唯一的以$\mathfrak{X}$为值且定义在 $\mathbb{C}_+$ 上的全纯函数再生核希尔伯特空间记为 $\mathcal{H}$（F）。

4. 再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$（F）的刻画与扩张

本节回顾文献 [16], 中提及的空间 $\mathcal{H}(F)$ 的一种类似刻画，并将 $\mathcal{H}(F)$ 扩展为定义在可能大于 $\mathbb{C}_+$ 的定义域上的 $\mathfrak{X}$ 值全纯函数构成的再生核希尔伯特空间。我们将 $\mathcal{P}$ 记为从 $L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 到 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 的正交投影，并将 $\mathcal{Q} = I_{L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})} - \mathcal{P}$。对于 $F \in \mathcal{S}$ 和 $f \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$，记

$$\nu(f) = \sup \left\{ ||f + M_F(g)||^2_{H^2} - ||g||^2_{H^2} : g \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+) \right\}.$$

定理 4.1. 对于 $F \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{H}(F) = \left\{ f \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+) : \nu(f) < \infty \right\} \text{ and } ||f||^2_{\mathcal{H}(F)} = \nu(f).$$

此外，若 $F \in \mathcal{S}^{in}$，则

$$\mathcal{H}(F) = H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+) \ominus rng M_F \text{ and } ||f||^2_{\mathcal{H}(F)} = ||f||^2_{H^2}.$$

证明。证明见文献 [20] 中的定理 2.2 及其第二个推论。 □

I根据定理 3.2，对于每个 $F \in \mathcal{S}$ 和 $b \in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$，由下式定义的函数

$$x \mapsto F_0(x)b(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}$$

属于 $L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$，其中 F_0 是 F的非切向边界极限。我们将此函数记为 Fb。

引理 4.2. 设 $F \in \mathcal{S}$, $b \in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R}) \ominus H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 和 $f \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$ 满足$f_0 = -\mathcal{P}Fb$ 是相应的非切向边界极限。那么对于所有 $g \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$

$$||f + M_F(g)||^2 - ||g||^2 \leq ||b||^2 - ||\mathcal{Q}Fb||^2,$$

当且仅当 $F \in \mathcal{S}^{in}$ 时取等号。

证明。由于 f 和 $M_F(g)$ 都属于 $H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$,

$$||f + M_F(g)||_{H^2} = ||f_0 + Fg_0||_{L^2},$$

其中 g_0 是 g 的非切向边界极限。现在,

$$|| - \mathcal{P}Fb + Fg_0||^2_{L^2} = ||\mathcal{Q}Fb + F(g_0 - b)||^2_{L^2} = -||\mathcal{Q}Fb||^2_{L^2} + ||F(g_0 - b)||^2_{L^2}$$

由于 $\langle \mathcal{Q}Fb、\ Fg_0\rangle_{L^2} = 0$ 和 $\langle \mathcal{Q}Fb、\ Fb\rangle_{L^2} = ||\mathcal{Q}Fb||^2_{L^2}$。因此，引理可由以下事实得出:

$$||F(g_0 - b)||^2_{L^2} \leq \text{ or } = ||g_0||^2_{L^2} + ||b||^2_{L^2}$$

取决于 F 属于 $\mathcal{S}$ 还是 $\mathcal{S}^{in}$。 □

下一个定理受 [20] (定理 2.3) 启发，其中我们将矩阵值核替换为算子值核。由于这些结果对本文其余部分至关重要，我们对证明作了适当修改后将其列出。

定理 4.3。若 $F \in \mathcal{S}$，则对于 $n \in \mathbb{N}, z, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}_+$ 和 $u, u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathfrak{X}$ 的任意选择，以下蕴含关系成立:

(1) $(R_zF)u \in \mathcal{H}(F)$。 (2) $||\sum_{l=1}^n (R_{z_l}F)^{u_l}||^2_{\mathcal{H}(F)} \leq 4\pi^2 \sum_{l,m=1}^n \left\langle {}^{I_{\mathfrak{X}} - F}_{(z_m)^* F} {}_{(z_l)\rho_{z_m}(z_l)}{}^{u_l}, u_m \right\rangle_{\mathfrak{X}}$，当 $F \in \mathcal{S}^{in}$ 时取等号。(3) $\mathcal{H}(F)$ 在所有 $z \in \mathbb{C}_+$ 下对 R_z 不变。(4) 对所有 $z \in \mathbb{C}_+$， R_z 是 $\mathcal{H}(F)$ 上的有界算子；并且对所有 $g \in \mathcal{H}(F)R_z$，满足以下断言

$$||R_z g||^2 \leq \frac{Im(\langle R_z g, g\rangle) - \pi||g(z)||^2}{Im(z)}. \tag{4.1}$$

证明。考虑

$$b = \sum_{l=1}^n \frac{u_l}{\xi - z_l}.$$

显然，$b \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_-)$。因此，其非切向边界函数 b （记作）属于$L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R}) \ominus H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$。现在

$$(R_zF)(\xi)u = \frac{F(\xi)u - F(z)u}{\xi - z}$$

在 $\mathbb{C}_+$中是解析的，且其非切向边界函数（R_zF）(t)u 属于$H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$，因为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(R_zF)(t)u}{t-\alpha}dt=0$$

对所有 $\alpha\in\mathbb{C}_-$。由于 $F(t)b(t)\in L^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ 且

$$F(t)b(t)=\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{F(t)u_l-F(z_l)u_l}{t-z_l}\right)+\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{F(z_l)u_l}{t-z_l}\right),$$

then

$$\sum_{l=1}^{n}(R_{z_l}F)u_l=\mathcal{P}Fb$$

and

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{F(z_l)u_l}{t-z_l}=\mathcal{Q}Fb.$$

现在应用前述引理，对于所有 $g\in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)$，有

$$||\sum_{l=1}^{n}(R_{z_l}F)u_l+M_F(g)||^2-||g||^2\le||b||^2-||\mathcal{Q}Fb||^2. \tag{4.2}$$

因此，结合定理 4.1，(1) 由 (4.2) 得出。
利用柯西积分公式进行简单计算可得

$$||b||^2-||\mathcal{Q}Fb||^2=4\pi^2\sum_{l,m=1}^{n}\left\langle\frac{I_{\mathfrak{X}}-F(z_m)^*F(z_l)}{\rho_{z_m}(z_l)}u_l,u_m\right\rangle_{\mathfrak{X}}. \tag{4.3}$$

因此，(2) 由 (4.2) 与 $g\equiv0$ 及 (4.3) 得出。
由于对每个 $z\in\mathbb{C}_+$， R_z 都是线性的，且 $\mathcal{H}(F)$ 是一个再生核希尔伯特空间，要证明 (3) 和 (4)，只需证明对于 $u\in\mathfrak{X}$ 和 $\alpha\in\mathbb{C}_+$ 的任意取值， $\Gamma_\alpha u$ 都成立。由于

$$R_z\Gamma_\alpha(\xi)u=\frac{2\pi i}{\rho_\alpha(z)}\Gamma_\alpha(\xi)u-\frac{1}{\rho_\alpha(z)}(R_zF)(\xi)F(\alpha)^*u \tag{4.4}$$

并且 (4.4) 右端的两项都属于 $\mathcal{H}(F)$。因此， $R_z\Gamma_\alpha u\in\mathcal{H}(F)$ 和 $\Gamma_\alpha u$ 满足 (4.1)。□

假设 $F\in\mathcal{S}$ 是双侧内函数，并考虑 $\mathfrak{A}_F^-=\{z\in\mathbb{C}_-:F(\overline{z})$ 在 $\}$ 上可逆。由于 F 在某一点可逆意味着它在该点的某个开邻域内可逆，因此 $\mathfrak{A}_F^-$ 是 $\mathbb{C}_-$ 的一个开子集。现在我们可以通过以下公式将 F 扩展为定义在 $\mathfrak{A}_F^-$ 上的 $B(\mathfrak{X})$ 值全纯函数

$$F(z)=\{F(\overline{z})^*\}^{-1}\quad\text{for } z\in\mathfrak{A}_F^-. \tag{4.5}$$

此外，对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}$

$$F(x)=\lim_{y\downarrow0}F(x+iy)=\lim_{y\downarrow0}F(x-iy).$$

现在，对于函数 $F \in \mathcal{S}$ 和双侧内函数，我们将 $\mathfrak{F}$ 记作 F 的延拓，并将 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$（包含 $\mathbb{C}_+ \cup \mathfrak{A}_F^-$）记作 $\mathfrak{F}$ 的全纯域。
有了上述 $\mathfrak{F}$ 的延拓 F之后，我们可以将 $\mathcal{H}(F)$ 视为定义在 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 上的取值于 $\mathfrak{X}$ 的全纯函数所构成的再生核希尔伯特空间，并将其记为 $\mathcal{H}(\mathfrak{F})$。下面的引理对 $\mathcal{H}(\mathfrak{F})$ 给出了更多细节。

引理 4.4. 若 $F \in \mathcal{S}$ 是双侧内函数，且 $\mathfrak{F}$ 是按照 (4.5) 中定义的 F 的相应延拓，则由下式定义的核函数 $K_\xi^{\mathfrak{F}}(z)$

$$K_\xi^{\mathfrak{F}}(z) := \begin{cases} \frac{I_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{F}(z)\mathfrak{F}(\xi)^*}{\rho_\xi(z)} & \text{if } z \neq \overline{\xi} \\ \frac{\mathfrak{F}'(\overline{\xi})\mathfrak{F}(\xi)^*}{2\pi i} & \text{if } z = \overline{\xi} \end{cases} \tag{4.6}$$

在 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \times \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 上是正的。

证明。为了证明 $K_\xi^{\mathfrak{F}}(z)$ 是正的，我们需要证明，对于 $n \in \mathbb{N}$、z_1、z_2、.....、$z_n \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 和 u_1、u_2、.....、$u_n \in \mathfrak{X}$ 的任意取值，

$$\sum_{l,m=1}^{n} \left\langle K_{z_m}^{\mathfrak{F}}(z_l)u_m, u_l \right\rangle_{\mathfrak{X}} \geq 0. \tag{4.7}$$

这里我们只证明一些点属于 $\mathbb{C}_+ \cap \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 而另一些点属于 $\mathbb{C}_- \cap \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 的情形。其余情形可由此推出。不妨设 z_1、z_2、.....、$z_i \in \mathbb{C}_+ \cap \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 以及 ξ_1、ξ_2、.....、$\xi_j \in \mathbb{C}_- \cap \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$，其中 $i + j = n$ 且对每个 $k = 1 = 1, 2, ..., j$，均有 $\xi_k = z_{i+k}$。此外，我们还假设对于所有 $k = 1 = 1, 2, ..., j$，都有 $v_k = u_{i+k}$。

由于 $\mathfrak{F}(\overline{\xi})\mathfrak{F}(\xi)^* = I_{\mathfrak{X}}$，因此对于 $z \neq \overline{\xi}$，以下结论成立

$$\begin{aligned} K_\xi^{\mathfrak{F}}(z) &= \frac{I_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{F}(z)\mathfrak{F}(\xi)^*}{\rho_\xi(z)} \\ &= \frac{\{\mathfrak{F}(\overline{\xi}) - \mathfrak{F}(z)\}\mathfrak{F}(\xi)^*}{-2\pi i(z - \overline{\xi})} \\ &= \frac{1}{2\pi i}(R_{\overline{\xi}}\mathfrak{F})(z)\mathfrak{F}(\xi)^* \end{aligned} \tag{4.8}$$

and

$$K_\xi^{\mathfrak{F}}(z)^* = \frac{1}{2\pi i}(R_{\overline{z}}\mathfrak{F})(\xi)\mathfrak{F}(z)^*. \tag{4.9}$$

现在，我们将（4.7）中的和分为四部分，并利用（4.8）和（4.9）对其进行化简。第一部分为

$$\sum_{l,m=1}^{i} \langle K_{z_l}^{\mathfrak{F}}(z_m)u_l, u_m \rangle_{\mathfrak{X}}. \tag{4.10}$$

第二部分为

$$\sum_{t=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}\langle K_{z_l}^{\mathfrak{F}}(\xi_t)u_l,v_t\rangle_{\mathfrak{X}}=\sum_{t=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}\langle u_l,\frac{1}{2\pi i}(R_{\overline{\xi_t}}\mathfrak{F})(z_l)\mathfrak{F}(\xi_t)^*v_t\rangle_{\mathfrak{X}}$$
$$=\sum_{t=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}\langle u_l,(R_{\overline{\xi_t}}\mathfrak{F})(z_l)x_t\rangle_{\mathfrak{X}},\tag{4.11}$$

其中，对所有 $t=1$，2，.....，j，有 $x_t=\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{F}(\xi_t)^*v_t$。

第三部分为

$$\sum_{m=1}^{j}\sum_{s=1}^{i}\langle K_{\xi_m}^{\mathfrak{F}}(z_s)v_m,u_s\rangle_{\mathfrak{X}}=\sum_{m=1}^{j}\sum_{s=1}^{i}\langle\frac{1}{2\pi i}(R_{\overline{\xi_m}}\mathfrak{F})(z_s)\mathfrak{F}(\xi_m)^*v_m,u_s\rangle_{\mathfrak{X}}$$
$$=\sum_{m=1}^{j}\sum_{s=1}^{i}\langle(R_{\overline{\xi_m}}\mathfrak{F})(z_s)x_m,u_s\rangle_{\mathfrak{X}}.\tag{4.12}$$

第四部分为

$$\sum_{t,m=1}^{j}\langle K_{\xi_m}^{\mathfrak{F}}(\xi_t)v_m,v_t\rangle_{\mathfrak{X}}=\sum_{t,m=1}^{j}\langle\frac{I_{\mathfrak{X}}-\mathfrak{F}(\xi_t)\mathfrak{F}(\xi_m)^*}{\rho_{\xi_m}(\xi_t)}v_m,v_t\rangle_{\mathfrak{X}}$$
$$=\sum_{t,m=1}^{j}\langle\frac{\mathfrak{F}(\xi_t)\{\mathfrak{F}(\overline{\xi_t})^*\mathfrak{F}(\overline{\xi_m})-I_{\mathfrak{X}}\}\mathfrak{F}(\xi_m)^*}{-2\pi i(\xi_t-\overline{\xi_m})}v_m,v_t\rangle_{\mathfrak{X}}$$
$$=\sum_{t,m=1}^{j}\langle\frac{\{\mathfrak{F}(\overline{\xi_t})^*\mathfrak{F}(\overline{\xi_m})-I_{\mathfrak{X}}\}\mathfrak{F}(\xi_m)^*}{-2\pi i(\xi_t-\overline{\xi_m})}v_m,\mathfrak{F}(\xi_t)^*v_t\rangle_{\mathfrak{X}}$$
$$=4\pi^2\sum_{t,m=1}^{j}\langle\frac{I_{\mathfrak{X}}-\mathfrak{F}(\overline{\xi_t})^*\mathfrak{F}(\overline{\xi_m})}{\rho_{\overline{\xi_t}}(\overline{\xi_m})}x_m,x_t\rangle_{\mathfrak{X}}.\tag{4.13}$$

根据定理 4.3，我们有

$$\sum_{t,m=1}^{j}\langle K_{\xi_m}^{\mathfrak{F}}(\xi_t)v_m,v_t\rangle_{\mathfrak{X}}\geq||\sum_{m=1}^{j}(R_{\overline{\xi_m}}\mathfrak{F})x_m||^2.\tag{4.14}$$

因此，上述计算保证了

$$\sum_{l,m=1}^{n}\left\langle K_{z_m}^{\mathfrak{F}}(z_l)u_m,u_l\right\rangle_{\mathfrak{X}}\geq||\sum_{l=1}^{i}K_{z_l}^{\mathfrak{F}}u_l+\sum_{m=1}^{j}(R_{\overline{\xi_m}}\mathfrak{F})x_m||^2\geq 0.$$

证明至此完成。 □

由于对每个 $\xi\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$， $K_{\xi}^{\mathfrak{F}}(\xi)$ 都是有界的，因此每个 $f\in\mathcal{H}(\mathfrak{F})$ 都是在 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 上的 $\mathfrak{X}$ 值全纯函数。

5. 基于成对弗雷德霍姆算子值整函数构造德布朗日空间

本节包含我们的一些主要结果。我们的目标是构造引言中提到的 de Branges 算子 $\mathfrak{E} = (E_-, E_+)$，以及相应的 de Branges 矩阵。我们将在这里看到，弗雷德霍姆算子值全纯函数将发挥重要作用。特别是，显然 de Branges 算子 $\mathfrak{E}$ 的分量 $E_\pm$ 应当是具有某些附加性质的 Fredholm 算子值整函数，从而使该理论与现有的基于 de Branges 矩阵的德布朗日空间理论相兼容。我们先来看一些关于弗雷德霍姆算子和弗雷德霍姆算子值全纯函数的基本结果。若算子 $A \in B(\mathfrak{X})$ 满足以下条件，则称其为弗雷德霍姆算子：

(1) $\dim(\ker(A)) < \infty$。
(2) rng(A) 在 $\mathfrak{X}$ 中是闭的。
(3) $\dim(\ker(A^*)) < \infty$。

我们将 $B(\mathfrak{X})$中所有弗雷德霍姆算子的集合记为 $\Phi(\mathfrak{X})$。对于每个$A \in \Phi(\mathfrak{X})$，相应的弗雷德霍姆指标定义为

$$\text{ind}(A) = \dim(\ker(A)) - \dim(\ker(A^*)).$$

引理 5.1. 若 $A, B \in B(\mathfrak{X})$，则以下断言成立

(1) $A \in \Phi(\mathfrak{X}) \iff A^* \in \Phi(\mathfrak{X})$。(2) 若 $A, B \in \Phi($
$\mathfrak{X})$，则其复合 $AB \in \Phi(\mathfrak{X})$。

关于弗雷德霍姆算子的更多细节，参见 [29]。下一个定理是解析弗雷德霍姆定理的一种特殊形式，可见（定理 3.3，[23], [24]）及其中的参考文献。

定理 5.2. 假设 $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{C}$ 是开且连通的，且 $F: \mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$是解析的，并且对所有 $z \in \mathfrak{A}$, $F(z), \in \Phi(\mathfrak{X})$。那么以下两个断言必有一个成立

(1) 对任意 $z \in \mathfrak{A}$, $F(z)^{-1} \notin B(\mathfrak{X})$。(2) 对所有 $z \in \mathfrak{A}$，可能除去一个离散集 D, $F(z)^{-1} \in \Phi(\mathfrak{X})$。此外，函数 $F(.)^{-1}$ 在 $\mathfrak{A} \setminus D$ 上全纯，在 $\mathfrak{A}$上亚纯。

现在我们可以开始构造具有算子值再生核的新再生核希尔伯特空间。设 E_+、 $E_-: \mathbb{C} \to B(\mathfrak{X})$ 是两个整函数，使得对于所有 $z \in \mathbb{C}$，都有 $E_+(z)$ $E_-(z) \in \Phi(\mathfrak{X})$。此外，假设 E_+ 和 E_- 都至少在一点处可逆，并且

$$F := E_+^{-1} E_- \in \mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}_*^{in}.$$

由于 E_+ 和 E_- 至少在一点处可逆，根据前述定理，我们可以找到 $\mathbb{C}$ 的两个离散子集 D_1 和 D_2，使得对于每个 $z \in \mathbb{C} \setminus D_1$， E_+ 都可逆；对于每个 $z \in \mathbb{C} \setminus D_2$， E_- 都可逆。此外， $F \in \mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}^{in}_*$ 意味着对于每个 $z \in \mathbb{C}_+$

$$E_+(z)E_+(z)^* - E_-(z)E_-(z)^* \succeq 0$$

且对每个 $z \in \mathbb{R}$

$$E_+(z)E_+(\overline{z})^* - E_-(z)E_-(\overline{z})^* = 0,$$

它可以延拓为

$$E_+(z)E_+(\overline{z})^* - E_-(z)E_-(\overline{z})^* = 0 \quad \text{for every } z \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

我们称这对算子值函数为

$$\mathfrak{E}(z) = (E_-(z), E_+(z)) \quad \text{for every } z \in \mathbb{C} \tag{5.2}$$

de Branges 算子。现在，对于相应的 de Branges 算子 $\mathfrak{E}(z)$，我们定义核

$$K^{\mathfrak{E}}_{\xi}(z) := \begin{cases} \frac{E_+(z)E_+(\xi)^* - E_-(z)E_-(\xi)^*}{\rho_{\xi}(z)} & \text{if } z \neq \overline{\xi} \\ \frac{E'_+(\overline{\xi})E_+(\xi)^* - E'_-(\overline{\xi})E_-(\xi)^*}{-2\pi i} & \text{if } z = \overline{\xi} \end{cases} \tag{5.3}$$

在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上。

现在我们打算证明，在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上，(5.3) 中定义的核是正的。这里我们遵循上一节提到的延拓过程。我们将 F 的延拓函数记为 $\mathfrak{F}$，将延拓后的定义域记为 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$。注意到 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密。此外，对于所有 ξ， $z \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$

$$K^{\mathfrak{E}}_{\xi}(z) = E_+(z)K^{\mathfrak{F}}_{\xi}(z)E_+(\xi)^* \tag{5.4}$$

成立，这可借助 (5.1) 得到证明。由于 $K^{\mathfrak{F}}_{\xi}(z)$ 在 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \times \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 上是正的，且 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密，因此 $K^{\mathfrak{E}}_{\xi}(z)$ 在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上是正的。由此，我们可以得到一个与正定核 $K^{\mathfrak{E}}_{\xi}(z)$ 对应的唯一的 $\mathfrak{X}$ 值整函数再生核希尔伯特空间。我们将此再生核希尔伯特空间记为 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$，并根据再生核的结构称其为 de Branges 空间。特别地，在 de Branges 空间 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 中，若对某个 $\beta \in \mathbb{C}_+$， $E_+(\beta)$ 和 $E_-(\overline{\beta})$ 是自伴的，则将该空间记为 $\mathcal{B}_{\beta}(\mathfrak{E})$。关于空间 $\mathcal{B}_{\beta}(\mathfrak{E})$ 的刻画可参见第 8 节。

注 5.3. 如果 $X \in B(\mathfrak{X})$ 是任意弗雷德霍姆算子且 $XX^* = I$，那么这对算子

$$\mathfrak{E}^X(z) = (E_-(z)X, E_+(z)X) \quad \textit{for every } z \in \mathbb{C}$$

又是一个 de Branges 算子，且 $\mathcal{B}(\mathfrak{E}) = B(\mathfrak{E}^X)$。

注 5.4. 已知，对于定义在定义域 $\mathfrak{A}$ 上的弗雷德霍姆算子值全纯函数 $F(z)$，由下式定义的指标函数

$$z \mapsto indF(z) \quad for\ all\ z \in \mathfrak{A}$$

是一个取整数值的连续函数。因此，对于 de Branges 算子 $\mathfrak{E}(z) = (E_-(z)\ E_+(z))$，存在一对整数。容易观察到，对于 de Branges 算子，这对整数总是 (0, 0)。

下面的定理给出了 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 与哈代空间之间的联系。

定理 5.5. 如果 $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 是如上所定义的、关于 de Branges 算子 $\mathfrak{E}(z) = (E_-(z)\ E_+(z))$ 的德布朗日空间，对每个 $z \in \mathbb{C}$ 均成立。那么

$$\mathcal{B}(\mathfrak{E}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathfrak{X} \mid f\ is\ entire,\ E_+^{-1} f \in H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+)\ and\ E_-^{-1} f \in (H^2_{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}_+))^{\perp}\}. \tag{5.5}$$

此外，关于内积

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{B}(\mathfrak{E})} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_+^{-1} f(x), E_+^{-1} g(x)\rangle_{\mathfrak{X}}\, dx, \tag{5.6}$$

$\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 是一个再生核希尔伯特空间，其再生核由 (5.3) 给出。

证明。证明见 [7] 中的定理 3.10。 □

6. 若干例子

本节将介绍上一节中构造的德布朗日空间的若干例子。

例 6.1。设 $E_+(z) = e^{-iza} I_{\mathfrak{X}}$ and $E_-(z) = e^{iza} I_{\mathfrak{X}}$ for some $a > 0$。那么，相应的德布朗日空间实际上就是例 2.3 中提到的向量值 Paley-Wiener 空间。

下一个例子受到 [24]（第 XI 章，第 2 节和第 8 节）中的一个弗雷德霍姆算子值全纯函数的启发。这里我们简要介绍这个弗雷德霍姆算子值全纯函数。我们将 $L_2([s,t])$ 记为 $[s,t]$ 上所有复值平方可积函数的集合。考虑边值问题

$$\begin{cases} g'(\mu) = P\ g(\mu) + h(\mu),\ s \le \mu \le t \\ Q_1\ g(s) + Q_2\ g(t) = u, \end{cases} \tag{6.1}$$

其中，$h \in L_2^n([s,t])$、$u \in \mathbb{C}^n$ 是已知的，P、Q_1、Q_2 是 $n \times n$ 矩阵。任务是在 $G = (W_2^1([s,t]))^n$ 中求解，其中

$$W_2^1([s,t]) = \{g \in L_2([s,t]) : g \text{ is absolutely continuous}, g' \in L_2([s,t])\} \tag{6.2}$$

是 $[s,t]$上的一阶索伯列夫空间。(6.1)的算子形式为

$$Ag := \begin{bmatrix} g' - P\ g \\ Q_1\ g(s) + Q_2\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

在 [24], 中，已证明 $A:\ G \to L_2^n([s,t]) \oplus \mathbb{C}^n$ 是一个指标为零的弗雷德霍姆算子。

假设 $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{C}$ 是开且连通的。设 $P(z)$、$Q_1(z)$ 和 $Q_2(z)$ 是定义在 $\mathcal{G}$ 上的 $n \times n$矩阵值全纯函数。下面的边值问题导出一个弗雷德霍姆算子值全纯函数

$$\begin{cases} g'(\mu) = P(z)\ g(\mu) + h(\mu),\ s \le \mu \le t \\ Q_1(z)\ g(s) + Q_2(z)\ g(t) = u, \end{cases} \tag{6.4}$$

设 $A(z):\ G \to L_2^n([s,t]) \oplus \mathbb{C}^n$，则对应的参数为 $z \in \mathcal{G}$ 的算子具有如下形式

$$A(z)g := \begin{bmatrix} g' - P(z)\ g \\ Q_1(z)\ g(s) + Q_2(z)\ g(t) \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

$A(.)$ 是定义在 $\mathcal{G}$ 上的弗雷德霍姆算子值全纯函数，在每一点的指标均为零。(6.4) 中考虑的边值问题称为边界特征值问题。关于这类问题的详细内容可见 [32]。

例 6.2. 保持上述讨论中的所有记号不变，我们考虑 $\mathcal{G} = \mathbb{C}$ 和

$$E_+(z)g := \begin{bmatrix} g' - P_+(z)\ g \\ Q_1^+(z)\ g(s) + Q_2^+(z)\ g(t) \end{bmatrix}$$

事实上，存在 $z_+ \in \mathbb{C}$ 使得

$$Q_1^+(z_+) = I_n \quad \textit{and} \quad Q_2^+(z_+) = 0_n,$$

其中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵，0_n 是 $n \times n$ 零矩阵。此外，考虑

$$E_-(z)g := \begin{bmatrix} g' - P_-(z)\ g \\ Q_1^-(z)\ g(s) + Q_2^-(z)\ g(t) \end{bmatrix}$$

事实上，存在 $z_- \in \mathbb{C}$ 使得

$$Q_1^-(z_-) = I_n \quad \textit{and} \quad Q_2^-(z_-) = 0_n.$$

现在很容易看出，$E_+(z_+)\ E_-(z_-): G \to L_2^n([s,t]) \oplus \mathbb{C}^n$ 二者均可逆，相应的逆算子为

$$E_+(z_+)^{-1} \begin{pmatrix} g \\ v \end{pmatrix}(\mu) = e^{(\mu-s)P_+(z_+)}v + \int_s^\mu e^{(\mu-x)P_+(z_+)}g(x)\ dx$$

and

$$E_-(z_-)^{-1}\begin{pmatrix} g \\ v \end{pmatrix}(\mu) = e^{(\mu-s)P_-(z_-)}v + \int_s^\mu e^{(\mu-x)P_-(z_-)}g(x)\,dx$$

其中 $g \in L_2^n([s,t])$ 且 $v \in \mathbb{C}^n$。现在，在这一点上，若算子值函数 $B($ $G)$- val- ued $F := E_+^{-1}E_-$ 属于 $\mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}_*^{in}$，则这对算子值函数

$$\mathfrak{E}(z) = (E_-(z), E_+(z)) \quad \textit{for every } z \in \mathbb{C}$$

将表示一个 de Branges 算子。

我们借助线性算子铅笔构造下一个例子。关于线性算子铅笔的更多内容可见 [24], [32]。设 $A, B \in B(\mathfrak{X})$，则线性算子铅笔

$$S(z) = A - zB$$

是一个 $B(\mathfrak{X})$ 值整函数。现在假设对于某个 $z_0 \in \mathbb{C}$， $S(z_0)$ 可逆，则我们可以将 $S(z)$ 表示为

$$S(z) = A - zB = (z_0 - z)(A - z_0B)\left[(z_0 - z)^{-1}I + (A - z_0B)^{-1}B\right]. \quad (6.6)$$

现在，在可逆条件之外，如果我们选取 $A \in B(\mathfrak{X})$，且 B 是紧算子，那么由 (6.6) 可知， $S(z)$ 是一个指标为零的 Fredholm 算子值整函数。

例 6.3。设 $E_+(z) = A - zB$，且 $E_-(z) = C - zD$，其中 $A, C \in B(\mathfrak{X})$ 和 B, D 是紧算子。此外， E_+ 和 E_- 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一点可逆。若对所有 $z \in \mathbb{C}$ 和 $E_+(.)^{-1} \in \mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}_*^{in}$，都有 $E_-^*(z)E_-(z) = I$，则这对算子值函数

$$\mathfrak{E}(z) = (E_-(z), E_+(z)) \quad \textit{for every } z \in \mathbb{C}$$

将表示一个 de Branges 算子。

下面的例子涉及算子值函数的微分方程组。

例 6.4。考虑下面的初值问题

$$\frac{dF_r(z)}{dr} = izF_r(z)j_H + F_r(z)Q(r) \quad 0 \le r \le a, z \in \mathbb{C} \quad (6.7)$$

其初始条件（以矩阵形式给出）为

$$F_0(z) = [I_H \quad I_H], \quad (6.8)$$

其中， H 是一个复可分希尔伯特空间，

$$F_r(z) = [E_-^r(z) \quad E_+^r(z)] : H \oplus H \to H$$

and

$$j_H = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & -I_H \end{bmatrix}.$$

Also

$$Q(r) = \begin{bmatrix} 0 & q(r) \\ q(r)^* & 0 \end{bmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H,$$

其中， $q(r)$ 是 $[0,a]$ 上取值于 $B(H)$ 的连续函数。假设（6.7）的解 $F_r(z)$ 具有如下性质：对于所有 $0 \le r \le a$， $E_-^r(z)$ 和 $E_+^r(z)$ 都是 Fredholm 算子值整函数。现在，对于每个 $\xi \in \mathbb{C}$，不难证明

$$\frac{d}{ds}\{F_s(z) j_H F_s(\xi)^*\} = i(z-\overline{\xi}) F_s(z) F_s(\xi)^*. \tag{6.9}$$

注意到 $F_0(z) j_H F_0(\xi)^* = 0$。现在对（6.9）的两边从 0 积分到 r，得到

$$F_r(z) j_H F_r(\xi)^* = i(z-\overline{\xi}) \int_0^r F_s(z) F_s(\xi)^* ds. \tag{6.10}$$

现在，如果我们在（6.10）中使用 $F_r(z)$ 的矩阵形式，就得到

$$\frac{E_+^r(z) E_+^r(\xi)^* - E_-^r(z) E_-^r(\xi)^*}{\rho_\xi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^r F_s(z) F_s(\xi)^* ds. \tag{6.11}$$

现在，如果对于 $\xi \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ 有 $\int_0^r F_s(\xi) F_s(\xi)^* ds \succ 0$，并且存在 $\xi_0 \in \mathbb{C}_+$ 使得 $\int_0^r F_s(\xi_0) F_s(\xi_0)^* ds$， $\int_0^r F_s(\overline{\xi_0}) F_s(\overline{\xi_0})^* ds$ 二者均可逆，且 $E_-^r(\overline{\xi_0})$、$E_+^r(\xi_0)$ 二者均为自伴的，那么算子值函数对 $\mathfrak{E}^r(z) = (E_-^r(z) \;\; E_+^r(z))$ 将对所有 $r \in [0,a]$ 表示 de Branges 算子。

关于上一个例子的清晰解释，请参见定理 8.2 的逆向部分。

注 6.5. 上一个例子中出现的微分方程组已在文献中得到广泛研究。例如，参见 [2]，其中所研究的函数为标量值和矩阵值函数。

7. $\mathcal{H}_\beta$ 与 $\mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 等距同构的条件

本节中，我们考虑一个由 $\mathfrak{X}$ 值整函数构成的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，其再生核为 $K_\xi(z)$，且对于某个 $\beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{H}_\beta = \{g \in \mathcal{H} : g(\beta) = 0\}.$$

显然， $\mathcal{H}_\beta$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，因此也是一个再生核希尔伯特空间。我们的主要目标是找到一个条件，使得对于某个 $\beta \in \mathbb{C}_+$， $\mathcal{H}_\beta$ 与 $\mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 等距同构。回顾一下， $\mathfrak{T}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的乘法算子，其中乘法是对自变量进行的，其定义域为 $\mathcal{D}$；该算子也是闭算子。具有闭值域的有界线性算子的 Moore-Penrose 逆的概念

将在本节中用到，相关细节可见 [39]。本节的一些结果可见 [8], ，其中算子 $K_\beta(\beta)$是可逆的。

引理 7.1. 假设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$值整函数构成、再生核为 $K_\xi(z)$的再生核希尔伯特空间，并假设对于某个 $\beta \in \mathbb{C}$， $K_\beta(\beta)$具有闭值域。那么以下断言成立：

(1) $\mathcal{H}_\beta$ 的再生核可表示为

$$K_\xi^\beta(z) = K_\xi(z) - K_\beta(z)K_\beta(\beta)^\dagger K_\xi(\beta), \tag{7.1}$$

其中 $K_\beta(\beta)^\dagger$ 是算子 $K_\beta(\beta)$的 Moore-Penrose 逆。

(2) 如果 Π_β 是 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}_\beta^\perp$的正交投影，那么

$$\Pi_\beta(g) = K_\beta K_\beta(\beta)^\dagger g(\beta) \quad \textit{for all } g \in \mathcal{H} \tag{7.2}$$

and

$$\mathcal{H}_\beta^\perp = \{K_\beta u : u \in \mathfrak{X}\} = \{K_\beta K_\beta(\beta)^\dagger v : v \in \mathfrak{X}\}. \tag{7.3}$$

(3) 以下等价条件成立：

$$R_\beta \mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H} \textit{ if and only if } R_\beta \mathcal{H}_\beta = \mathcal{D}. \tag{7.4}$$

（4）$\mathrm{rng} K_\beta(\beta) = \mathrm{rng}(\delta_\beta)$。

此外，如果 $K_\beta(\beta)$ 是可逆的，则在 (7.1) 和 (7.2) 中， $K_\beta(\beta)^\dagger$ 可以替换为 $K_\beta(\beta)^{-1}$ 。

证明。证明的详细内容参见 [21] 中的引理 2.6。 □

引理 7.2。在引理 7.1 的设定下，如果 (7.4) 中的等价条件也成立，则以下蕴含关系成立：

(1) $R_\beta \in B(\mathcal{H}_\beta, \mathcal{H})$。（2）
$\mathcal{H}_\beta = \mathrm{rng}(\mathfrak{T} - \beta I)$，并且

$$rng(\mathfrak{T} - \beta I)^\perp = \{K_\beta u : u \in \mathfrak{X}\} = \{K_\beta K_\beta(\beta)^\dagger u : u \in \mathfrak{X}\}. \tag{7.5}$$

（3）如果 $K_\beta(\beta) \succ 0$，则存在一个酉算子 T_β，将 $\mathrm{rng}(\mathfrak{T} - \beta I)^\perp$ 映射到 $\mathrm{rng} K_\beta(\beta)$。

证明。显然， R_β 是线性的。为验证 (1)，我们先证明 R_β 是闭算子，其余论证由闭图像定理即可得出。设 $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}_\beta$ 满足 $g_n \to g$ ，且当 $n \to \infty$时 $R_\beta g_n \to h$ 。由于再生核希尔伯特空间范数收敛蕴含逐点收敛，因此 $g \in \mathcal{H}_\beta$ 。此外，对于$\xi \neq \beta$,

$$\frac{g(\xi) - g(\beta)}{\xi - \beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(\xi) - g_n(\beta)}{\xi - \beta} = \lim_{n\to\infty} R_\beta g_n(\xi) = h(\xi).$$

因此，对于所有 $\xi \in \mathbb{C}$，都有 $h(\xi) = R_\beta g(\xi)$，因为 h 和 $R_\beta g$ 都是整函数。这说明算子 R_β 是闭的。
对于每个 $g \in \mathcal{H}_\beta$,

$$(\mathfrak{T} - \beta I) R_\beta g = g, \tag{7.6}$$

对于 $\xi \neq \beta$，以下结论成立

$$(\mathfrak{T} - \beta I) R_\beta g(\xi) = \xi \left[\frac{g(\xi) - g(\beta)}{\xi - \beta}\right] - \beta \left[\frac{g(\xi) - g(\beta)}{\xi - \beta}\right] = g(\xi).$$

这意味着

$$\text{rng}(\mathfrak{T} - \beta I) = \{(\mathfrak{T} - \beta I)g : g \in \mathcal{D}\} = \{(\mathfrak{T} - \beta I)R_\beta f : f \in \mathcal{H}_\beta\} = \mathcal{H}_\beta. \tag{7.7}$$

因此，（2）的第一个断言成立。此外，由前面的引理可直接得到（7.5）。

由于 $K_\beta(\beta) \succ 0$ 且具有闭值域，$\text{rng} K_\beta(\beta) = \text{rng} K_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}$ （见 [22]）。现在，鉴于 (7.5)，我们考虑映射 $T_\beta : \text{rng}(\mathfrak{T} - \beta I)^\perp \to \text{rng} K_\beta(\beta)$，定义如下

$$T_\beta(K_\beta u) = K_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}} u \quad \text{for all } u \in \mathfrak{X}. \tag{7.8}$$

显然，T_β 是线性且双射的，并且对任意 $u \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} ||K_\beta u||^2_{\mathcal{H}} = \langle K_\beta u, K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle K_\beta(\beta)u, u\rangle_{\mathfrak{X}} \\ &= \langle K_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}} u, K_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}} u\rangle_{\mathfrak{X}} \\ &= ||K_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}} u||^2_{\mathfrak{X}}. \end{aligned}$$

因此，T_β 是酉算子。 □

引理 7.3. 除引理 7.2 的设定外，若假设 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，则对所有 $u \in \mathfrak{X}$，$K_\beta u$ 都是 $\mathfrak{T}^*$ 对应于特征值 $\overline{\beta}$ 的特征函数。此外，若假设 $\mathfrak{T}$ 对称，则对某个 $u \in \mathfrak{X}$，下列等价条件成立

$$\rho_\beta K_\beta u \in \mathcal{H} \textit{ iff } K_\beta u = 0. \tag{7.9}$$

证明. 设 $g \in \mathcal{D}$ 和 $u \in \mathfrak{X}$，则

$$\langle \mathfrak{T} g, K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}} = \langle (\mathfrak{T} g)(\beta), u\rangle_{\mathfrak{X}} = \langle \beta g(\beta), u\rangle_{\mathfrak{X}} = \langle g(\beta), \overline{\beta} u\rangle_{\mathfrak{X}} = \langle g, \overline{\beta} K_\beta u\rangle_{\mathfrak{X}}.$$

因此，对所有 $g \in \mathcal{D}$，$\langle \mathfrak{T} g、\ K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}} = \langle g、\ \overline{\beta} K_\beta u\rangle_{\mathfrak{X}}$，这就证明了第一个断言。

为了证明（7.9）中的等价条件，只需证明对于某些$u \in \mathfrak{X}$，$\rho_\beta K_\beta u \in \mathcal{H}$ 蕴含 $K_\beta u = 0$，因为反方向显而易见。现在，$\rho_\beta K_\beta u \in \mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 且 $R_{\overline{\beta}} \rho_\beta K_\beta u = -2\pi i K_\beta u \in \mathcal{H}$，这意味着 $K_\beta u \in \mathcal{D}$。令$g \in \mathcal{D}$ 且 $g = R_\beta h$，其中某个 $h \in \mathcal{H}_\beta$，并注意到

$$\rho_\beta K_\beta u = -2\pi i (\mathfrak{T} - \overline{\beta} I) K_\beta u. \tag{7.10}$$

于是，

$$\begin{aligned}\langle g, \rho_\beta K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}} &= 2\pi i\langle g, (\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= 2\pi i\langle (\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h, K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= 2\pi i\langle h, K_\beta u\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= 2\pi i\langle h(\beta), u\rangle_{\mathfrak{X}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

因此， $\rho_\beta K_\beta u \perp \mathcal{D}$。现在，由于对 $\mathcal{D}$ 的附加稠密性条件，显然 $\rho_\beta K_\beta u = 0$。于是 $\rho_\beta K_\beta u \in \mathcal{H} \Rightarrow K_\beta u = 0$。□

下一个引理根据 $\mathfrak{T}$ 的对称条件，从而刻画 de Branges 在[16] 中提到的条件之一。

引理 7.4。设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$ 值整函数构成的非零再生核希尔伯特空间，其再生核为 $K_\xi(z)$。若对某个 $\beta \in \mathbb{C}_+$， $K_\beta(\beta)\, K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 具有闭值域，且 $R_\beta\mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H}$，$R_{\overline{\beta}}\mathcal{H}_{\overline{\beta}} \subseteq\mathcal{H}$。则

$$(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta : \mathcal{H}_\beta \to \mathcal{H}_{\overline{\beta}} \tag{7.11}$$

是等距同构，当且仅当算子 $\mathfrak{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 上是对称的。
特别地，如果 $K_\beta(\beta)$ 和 $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 是可逆的，那么上述等价关系也成立。

证明。注意到

$$(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta(\mathfrak{T}-\beta I)R_{\overline{\beta}} = I_{\mathcal{H}_{\overline{\beta}}} \text{ and } (\mathfrak{T}-\beta I)R_{\overline{\beta}}(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta = I_{\mathcal{H}_\beta}. \tag{7.12}$$

现在，为了证明该引理，我们只需证明：$(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta$ 满足保范性质，当且仅当 $\mathfrak{T}$ 是对称的，即对于所有 $g \in \mathcal{H}_\beta$

$$||(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta g||_{\mathcal{H}} = ||g||_{\mathcal{H}} \tag{7.13}$$

当且仅当 $\mathfrak{T}$ 是对称的。根据 (7.6) 并利用极化恒等式，很容易看出 (7.13) 成立当且仅当

$$\langle(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta g, (\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}} = \langle g, h\rangle_{\mathcal{H}} \tag{7.14}$$

对任意 g、$h \in \mathcal{H}_\beta$ 均成立。此外，对任意 g、$h \in \mathcal{H}_\beta$，以下求值

$$\begin{aligned}
&\langle(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta g,(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=\langle g,h\rangle_{\mathcal{H}}\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&\langle\{(\mathfrak{T}-\beta I)+(\beta-\overline{\beta})I\}R_\beta g,\{(\mathfrak{T}-\beta I)+(\beta-\overline{\beta})I\}R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=\langle g,h\rangle_{\mathcal{H}}\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&\langle(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}+\langle(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta g,(\beta-\overline{\beta})R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}\\
&+\langle(\beta-\overline{\beta})R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}+\langle(\beta-\overline{\beta})R_\beta g,(\beta-\overline{\beta})R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=\langle g,h\rangle_{\mathcal{H}}\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&(\overline{\beta}-\beta)[\langle(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}\\
&\qquad\qquad+(\beta-\overline{\beta})\langle R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}]=0
\end{aligned}$$

当且仅当.....时，（7.14）成立

$$\langle(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}+(\beta-\overline{\beta})\langle R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=0. \quad (7.15)$$

同样，对于每个 g、$h \in \mathcal{H}_\beta$，当且仅当.....时，（7.15）成立

$$\langle\mathfrak{T}R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=\langle R_\beta g,\mathfrak{T}R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}. \quad (7.16)$$

以下求值

$$\begin{aligned}
&\langle(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}+(\beta-\overline{\beta})\langle R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=0\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&\langle\{(\mathfrak{T}-\beta I)+(\beta-\overline{\beta})I\}R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=0\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&\langle(\mathfrak{T}-\overline{\beta}I)R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,(\mathfrak{T}-\beta I)R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=0\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&\langle\mathfrak{T}\,R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\overline{\beta}\langle R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,\mathfrak{T}\,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}+\overline{\beta}\langle R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=0\\
&\qquad\qquad\Updownarrow\\
&\langle\mathfrak{T}\,R_\beta g,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}-\langle R_\beta g,\mathfrak{T}\,R_\beta h\rangle_{\mathcal{H}}=0
\end{aligned}$$

证明了上述等价条件。由于 $R_\beta\mathcal{H}_\beta=\mathcal{D}$，引理的第一部分得证。当 $K_\beta(\beta)$ 和 $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 可逆时，情形也可类似证明。□

8. 再生核希尔伯特空间 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 的刻画

本节讨论 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 的一种刻画。de Branges 最初为标量值整函数的再生核希尔伯特空间给出了这种刻画（见 [16]）。对于具有 $p \times p$ 整函数矩阵值再生核的再生核希尔伯特空间，这种刻画可见 [21]。我们的观察是在更一般的情形下进行的，其中再生核是算子值函数。

引理 8.1. 设 $\mathcal{H} = \mathcal{B}(\mathfrak{E})$ 是一个基于 de Branges 算子 $\mathfrak{E}(z) = (E_-(z) \; E_+(z))$ 的再生核希尔伯特空间，如第 5 节所述。那么 $R_\beta \mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H}$ 当

(1) $\beta \in \overline{\mathbb{C}_+}$ 且 $E_+(\beta)$ 是可逆算子。(2)
$\beta \in \overline{\mathbb{C}_-}$ 且 $E_-(\beta)$ 是可逆算子。

证明。证明类似于 [21] 中的引理 6.4。 □

定理 8.2. 设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$ 值整函数构成的再生核希尔伯特空间，其具有 $B(\mathfrak{X})$ 值再生核 $K_\xi(z)$，并设 $\beta \in \mathbb{C}_+$ 使得

$$K_\beta(z), K_{\overline{\beta}}(z) \in \Phi(\mathfrak{X}) \quad \textit{for all } z \in \mathbb{C} \tag{8.1}$$

and

$$K_\beta(\beta), K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta}) \textit{ are invertible}. \tag{8.2}$$

那么，再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 与德布朗日空间 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 相同，当且仅当

$$R_\beta \mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H}, \quad R_{\overline{\beta}} \mathcal{H}_{\overline{\beta}} \subseteq \mathcal{H} \tag{8.3}$$

and

$$(\mathfrak{T} - \overline{\beta} I) R_\beta : \mathcal{H}_\beta \to \mathcal{H}_{\overline{\beta}} \tag{8.4}$$

是等距同构。

证明。除了少数例外，证明与 [21] 中的定理 7.1 类似。因此，这里我们大多避免类似的求值。由于 $K_\beta(\beta)$ 和 $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 可逆，根据引理 7.1，$\mathcal{H}_\beta$ 和 $\mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 的再生核分别为

$$K_\xi^\beta(z) = K_\xi(z) - K_\beta(z) K_\beta(\beta)^{-1} K_\xi(\beta) \tag{8.5}$$

and

$$K_\xi^{\overline{\beta}}(z) = K_\xi(z) - K_{\overline{\beta}}(z) K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})^{-1} K_\xi(\overline{\beta}) \tag{8.6}$$

此外，对于任意 $g \in \mathcal{H}_\beta$ 和 $z \neq \beta$

$$((\mathfrak{T} - \overline{\beta} I) R_\beta g)(z) = \frac{z - \overline{\beta}}{z - \beta} g(z). \tag{8.7}$$

首先，假设 $\mathcal{H}$ 满足（8.3）和（8.4）中的约束条件。于是

$$\frac{z - \overline{\beta}}{z - \beta} K_\xi^\beta(z) = \frac{\overline{\xi} - \overline{\beta}}{\overline{\xi} - \beta} K_\xi^{\overline{\beta}}(z). \tag{8.8}$$

现在考虑

$$E_+(z) = \rho_\beta(z)\rho_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}}K_\beta(z)K_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}} \tag{8.9}$$

and

$$E_-(z) = -\rho_{\overline{\beta}}(z)\rho_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}}K_{\overline{\beta}}(z)K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})^{-\frac{1}{2}}. \tag{8.10}$$

那么根据 (8.1)， $E_+(z)$、 $E_-(z)$ 是整函数，并且对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都属于 $\Phi(\mathfrak{X})$。此外， $E_+(\beta) = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}K_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}$，且 $E_-(\overline{\beta}) = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})^{\frac{1}{2}}$。因此， $E_+(\beta)$ 和 $E_-(\overline{\beta})$ 均为可逆且自伴的。此外，对于 $z \neq \overline{\xi}$

$$K_\xi(z) = \frac{E_+(z)E_+(\xi)^* - E_-(z)E_-(\xi)^*}{\rho_\xi(z)}. \tag{8.11}$$

因此，

$$E_+(\xi)E_+(\xi)^* - E_-(\xi)E_-(\xi)^* = \rho_\xi(\xi)K_\xi(\xi) \succeq 0$$

对于 $\xi \in \mathbb{C}_+$ 和

$$E_+(\xi)E_+(\xi)^* - E_-(\xi)E_-(\xi)^* = 0 \tag{8.12}$$

对于 $\xi \in \mathbb{R}$。因此， $E_+^{-1}E_- \in \mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}_*^{in}$，且相应的算子值函数对 $\mathfrak{E}(z) = (E_-(z) \ E_+(z))$ 是一个 de Branges 算子。由于空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 的再生核相同， $\mathcal{H} = \mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$。

反过来，假设 $\mathcal{H} = \mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 以及 (8.1)、(8.2) 均成立。(8.2) 中的约束给出

$$E_+(\beta)E_+(\beta)^* \succ E_-(\beta)E_-(\beta)^* \text{ and } E_-(\overline{\beta})E_-(\overline{\beta})^* \succ E_+(\overline{\beta})E_+(\overline{\beta})^*. \tag{8.13}$$

这意味着 $E_+(\beta)^*$ 和 $E_-(\beta)^*$ 都是单射。此外，根据 [19], 中的定理 1，我们有

$$\text{rng}E_-(\beta) \subseteq \text{rng}E_+(\beta) \text{ and } \text{rng}E_+(\overline{\beta}) \subseteq \text{rng}E_-(\overline{\beta}).$$

由于 $K_\beta(\beta)$ 和 $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 都是可逆的， $E_+(\beta)$ 和 $E_-(\overline{\beta})$ 都是满射。因此， $E_+(\beta)$ 和 $E_-(\overline{\beta})$ 都是可逆的。现在，根据前面的引理，我们有

$$R_\beta\mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H} \text{ and } R_{\overline{\beta}}\mathcal{H}_{\overline{\beta}} \subseteq \mathcal{H}.$$

此时，如果我们证明算子 $(\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta$满足范数保持条件，那么证明的其余部分便可由引理 7.4 得出。假设 $g \in \mathcal{H}_\beta$，则 $(\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta g \in \mathcal{H}_{\overline{\beta}}$ 并且

$$\begin{aligned}
||(\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta g||^2_{\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})} &= \int_{-\infty}^{\infty} ||\frac{x-\overline{\beta}}{x-\beta}(E_+^{-1}g)(x)||^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ||(E_+^{-1}g)(x)||^2 dx \\
&= ||g||^2_{\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})}.
\end{aligned}$$

□

9. $\mathfrak{T}$与德布朗日空间之间的联系

本节中，我们将描述 $\mathfrak{T}$ 在任意定义域 $\mathcal{D}$下的自伴扩张的参数化及其规范描述，并以酉算子V: rng $K_\beta(\beta)$ $\to$ rng $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$作为参数。然后，借助这些自伴扩张，我们将看到德布朗日空间 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$具有 Kramer 采样性质。关于乘法算子的自伴扩张的详细信息可见 [1], [4]。在由整 $p \times 1$ 值向量函数组成的再生核希尔伯特空间框架下，本文[21], 给出了算子 $\mathfrak{T}$ 在非稠密定义域 $\mathcal{D}$ 下的自伴扩张的参数化及其规范描述，其中参数为 $p \times p$ 酉矩阵。

定理 9.1. 假设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{x}$值整函数构成的再生核希尔伯特空间，其再生核 $K_\xi(z)$至少含有一个非零向量；算子 $\mathfrak{T}$ 在其定义域 $\mathcal{D}$ 上是对称的，且对于某个 $\beta \in \mathbb{C}_+$

- $K_\beta(\beta)$具有闭值域， $K_\beta(\beta) \succ 0$和 $R_\beta \mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H}$
- $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$具有闭值域，$K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta}) \succ 0$和$R_{\overline{\beta}} \mathcal{H}_{\overline{\beta}} \subseteq \mathcal{H}$。

那么存在一个酉算子 $V:$ rng$K_\beta(\beta)$ $\to$ rng$K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$，使得以下蕴含关系成立：

(1) 以下和式

$$\{(T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1} V)u : u \in rng K_\beta(\beta)\} + \mathcal{D} \tag{9.1}$$

是直和，其中 T_β 如引理 7.2 所述。

(2) 定义的算子 $\mathfrak{T}_V$

$$\mathfrak{T}_V(g + T_\beta^{-1}u + T_{\overline{\beta}}^{-1}Vu) = \mathfrak{T}g + \overline{\beta} T_\beta^{-1}u + \beta T_{\overline{\beta}}^{-1}Vu \tag{9.2}$$

其定义域如 (9.1) 中所述，是 $\mathfrak{T}$ 的一个自伴扩张，而族

$\{\mathfrak{T}_V:$ V是从 rng$K_\beta(\beta)$ 到 rng$K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 的酉算子，满足 (1)$\}$

是 $\mathfrak{T}$的全部自伴扩张。

此外，若 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{H}$中稠密，则任何酉算子V: rng$K_\beta(\beta)$ $\to$rng$K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 都满足 (9.1)。

证明。由于这是 [21] 中定理 5.3 的显然推广，且证明技巧也类似，因此我们略去证明。本文 [44] 将有助于证明。□

注 9.2. 若在定理 9.1 的条件下，假设 $K_\beta(\beta)$ 和 $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 可逆，则定理中提到的酉算子属于 $B(\mathfrak{X})$,

且 $\mathfrak{T}_V$ 的定义域具有以下形式

$$\{(T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V)u : u \in \mathfrak{X}\} \dotplus \mathcal{D}. \tag{9.3}$$

此外，算子 T_β 的值域将为 $\mathfrak{X}$，其逆算子具有如下形式

$$T_\beta^{-1} = K_\beta K_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}}. \tag{9.4}$$

定理 9.3. 假设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$值整函数构成的再生核希尔伯特空间，其 $B(\mathfrak{X})$值再生核 $K_\xi(z)$至少含有一个非零向量，并设 $\beta \in \mathbb{C}_+$ 满足

(1) 对所有 $z \in \mathbb{C}$， $K_\beta(z)\, K_{\overline{\beta}}(z) \in \Phi(\mathfrak{X})$，且 $K_\beta(\beta)$、$K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$均可逆。

(2) $R_\beta \mathcal{H}_\beta \subseteq \mathcal{H}$ 和$R_{\overline{\beta}}\mathcal{H}_{\overline{\beta}} \subseteq \mathcal{H}$。

(3) $\mathfrak{T}$： $\mathcal{D} \to \mathcal{H}$ 是对称的。

则 $\mathcal{H} = \mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$，其中 $E_+(z)$ 和 $E_-(z)$ 分别如 (8.9) 和 (8.10) 所述。此外，若对于某个 $\mu \in \mathbb{R}$

(4) $K_\mu(\mu) \succ 0$ *and* $E_+(\mu)$, $E_-(\mu)$ *are selfadjoint.*

则以下蕴含关系成立:

(5) $R_\mu \mathcal{H}_\mu \subseteq \mathcal{H}$, $K_\mu(\mu)$ 可逆，且算子

$$V_\mu = (E_-(\mu))^{-1}E_+(\mu) = E_-(\mu)^*(E_+(\mu)^*)^{-1} \textit{ is unitary}. \tag{9.5}$$

(6) V_μ 确定了 $\mathfrak{T}$ 的一个自伴扩张 $\mathfrak{T}_{V_\mu}$。

(7) $\{K_\mu u\colon u \in \mathfrak{X}\}$ 是对应于 $\mathfrak{T}_{V_\mu}$ 的特征值 μ 的特征子空间 .

证明。在前三个假设下，由定理 8.2 可得 $\mathcal{H} = \mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$。现在对于 $\mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$E_+(\mu)E_+(\mu)^* - E_-(\mu)E_-(\mu)^* = 0 \tag{9.6}$$

and

$$E'_+(\mu)E_+(\mu)^* - E'_-(\mu)E_-(\mu)^* = -2\pi i\, K_\mu^{\mathfrak{E}}(\mu). \tag{9.7}$$

鉴于 (9.6) 和 (9.7)，我们有 $E_+(\mu)^*$、 $E_-(\mu)^*$ 均为单射。由于$E_+(\mu)$ $E_-(\mu)$ $\in \Phi(\mathfrak{X})$，且为自伴算子，因此二者均可逆。由此，根据引理 8.1 可得 $R_\mu \mathcal{H}_\mu \subseteq \mathcal{H}$ ，而由 (9.6) 可知 V_μ 为酉算子。此外， $R_\mu \in B(\mathcal{H}_\mu, \mathcal{H})$ 和 $\mu \in \pi(\mathfrak{T})$。这意味着 $K_\mu(\mu)$ 可逆。

由于 V_μ 是 $\mathfrak{X}$上的酉算子，要证明 $\mathfrak{T}_{V_\mu}$ 是 $\mathfrak{T}$的自伴扩张,

只需证明 V_μ 满足 (9.3)。现在，对于 $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_\beta^{-1}(z) &= K_\beta(z)K_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\rho_\beta(z)\rho_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}}K_\beta(z)K_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}}}{\rho_\beta(z)\rho_\beta(\beta)^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}\,\frac{E_+(z)}{\rho_\beta(z)} \qquad (9.8) \\ &= \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{E_+(z)}{\rho_\mu(z)} + \frac{\overline{\beta}-\mu}{z-\mu}\frac{E_+(z)}{\rho_\beta(z)}\right]. \qquad (9.9) \end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned} T_{\overline{\beta}}^{-1}(z) &= -\rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}\,\frac{E_-(z)}{\rho_{\overline{\beta}}(z)} \qquad (9.10) \\ &= -\rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{E_-(z)}{\rho_\mu(z)} + \frac{\beta-\mu}{z-\mu}\frac{E_-(z)}{\rho_{\overline{\beta}}(z)}\right]. \qquad (9.11) \end{aligned}$$

对于任意 $V \in B(\mathfrak{X})$，我们采用以下记号

$$\chi_\xi^V(z) = (\overline{\beta}-\xi)T_\beta^{-1}(z) + (\beta-\xi)T_{\overline{\beta}}^{-1}(z)V. \qquad (9.12)$$

特别是，

$$\chi_\mu^{V_\mu} = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}\left[(\overline{\beta}-\mu)\frac{E_+}{\rho_\beta} - (\beta-\mu)\frac{E_-}{\rho_{\overline{\beta}}}\right] \qquad (9.13)$$

以及 $\chi_\mu^{V_\mu}(\mu) = 0$。因此$\mathcal{D} = \{R_\mu\chi_\mu^{V_\mu}u : \ u \in \mathfrak{X}\}$。
现在，根据上述讨论，我们有

$$T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V_\mu = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{E_+ - E_-V_\mu}{\rho_\mu}\right] + R_\mu\chi_\mu^{V_\mu}. \qquad (9.14)$$

现在将 (9.14) 从右侧乘以 $E_+(\mu)^*$，得到

$$(T_\beta^{-1}(z) + T_{\overline{\beta}}^{-1}(z)V_\mu)E_+(\mu)^* = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}}K_\mu^{\mathfrak{E}}(z) + (R_\mu\chi_\mu^{V_\mu})(z)E_+(\mu)^*. \qquad (9.15)$$

现在，若对于某个 $u \in \mathfrak{X}$，$(T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V_\mu)E_+(\mu)^*u \in \mathcal{D}$，则上述恒等式给出$\rho_\mu K_\mu^{\mathfrak{E}}u \in \mathcal{H}$。由于 $K_\mu(\mu) \succ 0$，这意味着 $u = 0$。因此 (2) 成立，且 $\mathfrak{T}_{V_\mu}$ 是 $\mathfrak{T}$的自伴扩张。
由 (9.15) 可知， $K_\mu^{\mathfrak{E}}u$ 属于 $\mathfrak{T}_{V_\mu}$ 的定义域，并且

$$(T_{V_\mu} - \mu I)K_\mu^{\mathfrak{E}}u = 0$$

对所有 $u \in \mathfrak{X}$均成立。因此，由于 $K_\mu(\mu)$ 可逆，(3) 成立。 □

定理 9.4. 假设 $\mathcal{H}$ 是一个由 $\mathfrak{X}$ 值整函数构成的再生核希尔伯特空间，其再生核为 $K_\xi(z)$，并且至少有一个非零向量满足 (8.1)、(8.2)；又假设 $\{K_{\mu_i}u_i\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正交基，其中 μ_1、μ_2、$\ldots \in \mathbb{R}$ 以及 u_1、u_2、$\ldots \in \mathfrak{X}$。那么

(1) $\mathfrak{T}$： $\mathcal{D} \to \mathcal{H}$ 是对称的。

(2) $\mathcal{H} = \mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$。

此外，如果 $V \in B(\mathfrak{X})$ 是满足 (9.3) 的酉算子，且 $K_\mu(\mu) \succ 0$ 和$E_+(\mu)$ $E_-(\mu)$ 都是自伴的，那么

(3) $\mu \in \mathbb{R}$ 是 $\mathfrak{T}_V$的特征值，当且仅当

$$\{E_+(\mu) - E_-(\mu)V\}u = 0 \tag{9.16}$$

以及相应的特征函数

$$g = \lambda K_\mu^{\mathfrak{E}}(E_+(\mu)^*)^{-1}u \tag{9.17}$$

对于某个非零的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 $u \in \mathfrak{X}$。此外，特征值 μ 的几何重数是可数无穷的。

(4) 如果 $E_+(\mu) - E_-(\mu)V$可逆，则 $(\mathfrak{T}_V - \mu I)$ 是闭算子，且$\mu \notin \sigma(\mathfrak{T}_V)$。

(5) 如果对于所有 $z \in \mathbb{C}$， $E_+(z) - E_-(z)V \in \Phi(\mathfrak{X})$，并且至少在一点可逆，那么 $\mathfrak{T}_V$具有一个离散特征值集。

证明。(1)、(2)将由定理 8.2 和引理 7.4 推出，只要我们证明算子 $(\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta : \mathcal{H}_\beta \to \mathcal{H}_{\overline{\beta}}$的保范性质。设 $g \in \mathcal{H}_\beta$，则

$$\begin{aligned}
||(\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta g||_{\mathcal{H}}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle (\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta g, \frac{K_{\mu_i}u_i}{||K_{\mu_i}u_i||_{\mathcal{H}}}\rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle ((\mathfrak{T} - \overline{\beta}I)R_\beta g)(\mu_i), \frac{u_i}{||K_{\mu_i}u_i||_{\mathcal{H}}}\rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\frac{\mu_i - \overline{\beta}}{\mu_i - \beta}|^2 \, |\langle g, \frac{K_{\mu_i}u_i}{||K_{\mu_i}u_i||_{\mathcal{H}}}\rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, \frac{K_{\mu_i}u_i}{||K_{\mu_i}u_i||_{\mathcal{H}}}\rangle|^2 = ||g||_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

现在设 V 是满足 (9.3) 的酉算子， $K_\mu(\mu) \succ 0$，且 $E_+(\mu)$、 $E_-(\mu)$ 均为自伴算子，则 $R_\mu\mathcal{H}_\mu = \mathcal{D}$。设 $\mu \in \mathbb{R}$ 是 $\mathfrak{T}_V$ 的一个特征值。则存在非零向量 $g = h + (T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V)u$，属于 $\mathfrak{T}_V$ 的定义域，其中 $h \in \mathcal{D}$ 且 $u \in \mathfrak{X}$。因此，对所有 $z \in \mathbb{C}$

$$((\mathfrak{T}_V - \mu I)g)(z) = (z - \mu)h(z) + \chi_\mu^V(z)u = 0, \tag{9.18}$$

由此可得 $\chi_\mu^V(\mu)u = 0, h(z) = -(R_\mu\chi_\mu^V)(z)u$ 以及 $u \neq 0$。这意味着 $R_\mu\chi_\mu^V u \in \mathcal{D}$ 并且

$$g(z) = -(R_\mu\chi_\mu^V)(z)u + (T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V)u.$$

Th通过利用 $\chi_\mu^V(\mu)u = 0$, g 可表示为以下形式这一事实，得到

$$g(z) = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{E_+(z) - E_-(z)V}{\rho_\mu(z)} u \right]. \tag{9.19}$$

还可以证明

$$\chi_\mu^V(\mu)u = 0 \iff (E_+(\mu) - E_-(\mu)V)u = 0. \tag{9.20}$$

由于 $E_+(\mu)$ 和 $E_-(\mu)$ 均可逆，因此我们有

$$(E_+(\mu) - E_-(\mu)V)u = 0 \iff Vu = E_-(\mu)^*(E_+(\mu)^*)^{-1}u. \tag{9.21}$$

这就得到

$$g(z) = \rho_\mu(\mu)^{\frac{1}{2}} K_\mu^{\mathfrak{E}}(z)(E_+(\mu)^*)^{-1}u.$$

为证明 (3) 的逆命题部分，我们首先注意到，若对某些 $u \neq 0$, $\{E_+(\mu) - E_-(\mu)V\}u = 0$ 和 $g = \lambda K_\mu^{\mathfrak{E}}(E_+(\mu)^*)^{-1}u$，则 $Vu = V_\mu u$ 和 $\chi_\mu^V u = \chi_\mu^{V_\mu} u$。这意味着

$$g = \rho_\beta(\beta)^{\frac{1}{2}} K_\mu^{\mathfrak{E}}(E_+(\mu)^*)^{-1}u = -R_\mu \chi_\mu^V u + (T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V)u$$

属于 $\mathfrak{T}_V$ 的定义域，且

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}_V - \mu I)g &= -\mathfrak{T}(R_\mu \chi_\mu^V u) + (\overline{\beta} T_\beta^{-1} + \beta T_{\overline{\beta}}^{-1}V)u + \mu R_\mu \chi_\mu^V u - \mu(T_\beta^{-1} + T_{\overline{\beta}}^{-1}V)u \\ &= \{-\chi_\mu^V + (\overline{\beta} - \mu)T_\beta^{-1} + (\beta - \mu)T_{\overline{\beta}}^{-1}V\}u = 0.\end{aligned}$$

因此，(3) 成立。
现在假设 $E_+(\mu) - E_-(\mu)V$ 可逆。由于 $\mathfrak{T}_V$ 是自伴的，算子 $(\mathfrak{T}_V - \mu I)$ 是闭的。为验证 $\mu \notin \sigma(\mathfrak{T}_V)$，我们需要证明 $(\mathfrak{T}_V - \mu I)^{-1}$ 存在且有界。(3) 表明，$(\mathfrak{T}_V - \mu I)$ 在 $\mathfrak{T}_V$ 的定义域上是单射的。由于 $\mathfrak{T}_V$ 是自伴的且 $\mu \in \mathbb{R}$，$\operatorname{rng}(\mathfrak{T}_V - \mu I)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。此外，还可以证明 $(\mathfrak{T}_V - \mu I)$ 是满射（类似的证明见 [21] 中的定理 8.5）。现在，其余论证可由闭图像定理得出。(5) 由 (3) 和定理 5.2 得出。□

下面的定理表明，在某些特殊条件下，德布朗日空间 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 具有 Kramer 采样性质。

定理 9.5. 假设 $\mathcal{H}$ 是一个 $\mathfrak{X}$值整函数的再生核希尔伯特空间，其再生核为 $K_\xi(z)$，并且至少存在一个非零向量使得(8.1)、(8.2)成立，同时假设算子$\mathfrak{T}: \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ 是对称的。那么，再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 就是德布朗日空间$\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$。

此外，如果对所有 $z \in \mathbb{R}$， $K_\beta(z)$ $K_{\overline{\beta}}(z)$ 都可逆，并且存在满足 (9.3) 的酉算子 $V \in B(\mathfrak{X})$，使得对所有 $z \in \mathbb{C}$， $E_+(z) - E_-(z)V \in \Phi(\mathfrak{X})$，且至少在一点处可逆，那么 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 具有 Kramer 采样性质。

证明. $\mathcal{H} = \mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 可由定理 8.2 得出。设 $V \in B(\mathfrak{X})$ 是满足陈述中所有条件的酉算子。那么我们可以得到 $\mathfrak{T}$ 的一个自伴扩张 $\mathfrak{T}_V$，且谱 $\sigma(\mathfrak{T}_V) \subseteq \mathbb{R}$。现在对于某个 $\mu \in \mathbb{R}$，如果 $E_+(\mu) - E_-(\mu)V$ 可逆，那么由前面的定理可知，$\mu \notin \sigma(\mathfrak{T}_V)$。由此可得

$$\sigma(\mathfrak{T}_V) = \{\mu \in \mathbb{R} : E_+(\mu) - E_-(\mu)V \text{ is not invertible}\},$$

这恰好是 $\mathfrak{T}_V$ 的所有特征值的集合。此外，$\sigma(\mathfrak{T}_V)$ 是一个离散集。由于对于所有 $z \in \mathbb{R}$，$K_\beta(z)\, K_{\overline{\beta}}(z)$ 都可逆，因此 $E_+(z)\ E_-(z)$ 在此处也都可逆。因此，特征函数具有 $g = K_\mu^{\mathfrak{E}} u$ 的形式，且特征子空间有可数无穷多个。由于 $\mathfrak{T}_V$ 是自伴的，对应于不同特征值的任意两个特征函数都正交；而对于对应于同一特征值的特征函数，可以使用 Gram-Schmidt 正交化过程使其正交。此外，由于 $\mathfrak{T}_V$ 是自伴的，谱定理表明，特征函数的集合在 $\mathcal{H}$ 中是完备的。证明完毕。□

10. 具有无限亏指数的整算子

本节重新探讨一个关于具有无限亏指数的整算子的函数模型问题。M. G. Krein 引入并主要研究了这类整算子，并将其与 $\mathbb{C}$ 上解析函数希尔伯特空间中的乘法算子联系起来。在奠基性论文 [31], 中，他证明，具有任意有限相等亏指数（p，p）的整算子，可以视为 $\mathbb{C}^p$ 值整函数希尔伯特空间中的乘法算子。后来，在本文 [21], 中指出，这个希尔伯特空间是一个具有 $p \times p$ 矩阵值再生核的 de Branges 空间。Krein 还研究了具有无限亏指数的整算子（见 [30]），并在此处提及了它们与 $\mathfrak{X}$ 值整函数希尔伯特空间中乘法算子的类似联系 [26]（附录 I）。

由于我们已在第 5 节构造了 $\mathfrak{X}$ 值整函数的 de Branges 空间，因此自然会提出这样一个问题：这些新构造的 de Branges 空间能否视为具有无限亏指数的整算子的函数模型？设 Y 是 $\mathfrak{X}$ 的一个无限维闭子空间。设 E 是定义在 $\mathfrak{X}$ 上的稠密定义闭单纯对称算子，且具有无限亏指数。我们将 $\rho_Y(E)$ 记为 E 的所有 Y 正则点的集合，其定义如下：

$$\rho_Y(E) := \{\xi \in \mathbb{C} : \mathfrak{M}_\xi = \operatorname{rng}(E - \xi I) = \overline{\mathfrak{M}_\xi} \text{ and } \mathfrak{X} = \mathfrak{M}_\xi \dotplus Y\}. \tag{10.1}$$

已知 $\rho_Y(E)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个开子集，并且每个 $\xi \in \rho_Y(E)$ 也是 E 的正则型点。由 (10.1) 可知，对于每个 $\xi \in \rho_Y(E)$,

都存在投影算子 $P_Y(\xi)$，即对于每个 $f \in \mathfrak{X}$，都存在唯一的 $g \in \mathcal{D}(E)$，它是 E 的定义域，使得

$$f = (E - \xi I)g + P_Y(\xi)f.$$

此外，对于每个固定的 $f \in \mathfrak{X}$，我们可以考虑一个从 $\rho_Y(E)$ 到 Y 的映射，由 $\xi \mapsto P_Y(\xi)f$ 定义。我们将这些 Y 值函数记为 f_Y，对每个 $f \in \mathfrak{X}$，其定义为 $f_Y(\xi) = P_Y(\xi)f$；另外，假设 $\mathcal{H} := \{f_Y : f \in \mathfrak{X}\}$。设 $\xi \in \rho_Y(E)$，则

$$\text{rng}P_Y(\xi) = Y \quad \text{and} \quad \text{ker}P_Y(\xi) = \text{rng}(E - \xi I).$$

由于投影算子 $P_Y(\xi)$ 的值域和核都是 $\mathfrak{X}$ 的闭子空间，因此对所有 $\xi \in \rho_Y(E)$，$P_Y(\xi)$ 都是有界的。于是，

$$\text{rng}P_Y(\xi)^* = \mathfrak{X} \ominus \text{rng}(E - \xi I) \quad \text{and} \quad \text{ker}P_Y(\xi)^* = Y^{\perp}.$$

此外，对于每个 $\xi \in \rho_Y(E)$，我们可以定义算子 $\mathcal{T}_Y(\xi) \in B(\mathfrak{X})$，其定义如下：

$$\mathcal{T}_Y(\xi) := (E - \xi I)^{-1}(I - P_Y(\xi)).$$

现在，根据 Krein 对整算子的定义，若 $\rho_Y(E) = \mathbb{C}$，且函数 f_Y 是整函数，则 E 是一个整算子。这意味着 $P_Y(\xi)$ 和 $\mathcal{T}_Y(\xi)$ 都是 $B(\mathfrak{X})$ 值整函数。关于这两个函数的更多性质可见 [26]。

引理 10.1. 对于任意 $\xi \in \rho_Y(E)$，投影算子 $P_Y(\xi)$ 在 $\mathfrak{M}_\xi^{\perp}$ 上的限制是可逆的，即算子 $P_Y(\xi)|_{\mathfrak{M}_\xi^{\perp}} : \mathfrak{M}_\xi^{\perp} \to Y$ 是可逆的。

证明. 假设 $f,g \in \mathfrak{M}_\xi^{\perp} = \mathfrak{X} \ominus \text{rng}(E - \xi I)$ 满足

$$P_Y(\xi)f = P_Y(\xi)g = h \text{ (say)}.$$

那么存在 $f_1, g_1 \in \mathfrak{M}_\xi$，使得 $f = f_1 + h$ 且 $g = g_1 + h$。由于 $f_1 - g_1 \in \mathfrak{M}_\xi$ 且 $f - g \in \mathfrak{M}_\xi^{\perp}$，$P_Y(\xi)|_{\mathfrak{M}_\xi^{\perp}}$是单射。
现在，对于任意 $f \in Y$，我们有唯一的和 $f = g + h$，其中 $g \in \mathfrak{M}_\xi$ 且 $h \in \mathfrak{M}_\xi^{\perp}$。这意味着 $P_Y(\xi)|_{\mathfrak{M}_\xi^{\perp}}$是满射。□

由于 E 是单纯的，映射 $\Psi : \mathfrak{X} \to \mathcal{H}$ 由 $f \mapsto f_Y$ 定义，且是单射。因此，$\mathcal{H}$ 关于逐点加法和数乘构成一个向量空间。考虑 $\mathcal{H}$ 中定义的内积

$$\langle f_Y, g_Y \rangle_{\mathcal{H}} := \langle f, g \rangle_{\mathfrak{X}} \quad \text{for all } f, g \in \mathfrak{X}.$$

显然，关于上述内积，$\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 Ψ是一个酉算子。

设 $f \in \mathcal{D}(E)$和 $g \in \mathfrak{X}$ 满足 $g = Ef$。对于每个 $\xi \in \mathbb{C}$，都存在唯一的$f'_\xi \in \mathcal{D}(E)$，使得

$$f = (E - \xi I)f'_\xi + f_Y(\xi).$$

这给出

$$\begin{aligned} g = Ef &= (E - \xi I)f + \xi f \\ &= (E - \xi I)f + \xi\{(E - \xi I)f'_\xi + f_Y(\xi)\} \\ &= (E - \xi I)(f + \xi f'_\xi) + \xi f_Y(\xi). \end{aligned}$$

由（10.1）可容易看出，对所有 $\xi \in \mathbb{C}$， $g_Y(\xi) = \xi f_Y(\xi)$。因此， $\mathfrak{X}$ 上的算子 E 与 $\mathcal{H}$上的乘法算子酉等价。现在，对任意 $\xi \in \mathbb{C}$ 和 $f_Y \in \mathcal{H}$，我们有

$$||f_Y(\xi)||_Y = ||P_Y(\xi)f||_Y \leq ||P_Y(\xi)||\,||f||_{\mathfrak{X}} = ||P_Y(\xi)||\,||f_Y||_{\mathcal{H}}.$$

由于对所有 $\xi \in \mathbb{C}$，投影算子 $P_Y(\xi)$ 都有界， $\mathcal{H}$ 中的点求值线性映射也有界。这意味着 $\mathcal{H}$ 是一个再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$K_\xi(z) = \delta_z\delta_\xi^* \quad \text{for all } \xi, z \in \mathbb{C}.$$

现在，我们来考察算子 δ_z 的值域和核：对任意 $z \in \mathbb{C}$， $\mathcal{H} \to Y$。设 $f_Y \in \mathcal{H}$ 满足：对于 $f \in \mathfrak{X}$， $\Psi(f) = f_Y$。那么

$$\delta_z(f_Y) = f_Y(z) = P_Y(z)f.$$

因此，

$$\text{rng}\delta_z = \text{rng}P_Y(z) = Y \text{ and } \ker\delta_z = \{f_Y = \Psi(f) : f \in \text{rng}(E - zI)\}. \quad (10.2)$$

这意味着

$$\ker\delta_z^* = \{0\} \text{ and } \text{rng}\delta_z^* = \{f_Y = \Psi(f) : f \in \mathfrak{X} \ominus \text{rng}(E - zI)\}. \quad (10.3)$$

此时，我们还回顾一些关于广义 Cayley 变换的事实。设 E' 是 $\mathfrak{X}$ 内整算子 E 的一个自伴扩张。那么广义 Cayley 变换定义为

$$I + (\xi - z)(E' - \xi I)^{-1} = (E' - zI)(E' - \xi I)^{-1} \quad \text{对所有 } \xi,\ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(E')。(10.4)$$

众所周知，广义 Cayley 变换

$$I + (\xi - z)(E' - \xi I)^{-1} : \mathfrak{M}_z^\perp \to \mathfrak{M}_{\bar{\xi}}^\perp \quad (10.5)$$

对所有 $\xi, z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(E')$ 均为双射。关于广义 Cayley 变换的更多详情，请参见 [26] （第 1 章第 2 节）。以下引理也摘自 [26], , 它将为我们最后要讨论的问题提供必要的动机。

引理 10.2. 假设对于整算子 E，对所有 $\xi \in \mathbb{C}$， $\mathfrak{R}_\xi = (E - \xi I)^{-1}$。那么，对于任意两个数 $\xi, z \in \mathbb{C}$，算子

$$I + (\xi - z)\mathfrak{R}_\xi : \mathfrak{M}_\xi \to \mathfrak{M}_z \tag{10.6}$$

是双射。

证明。设 $f \in \mathfrak{M}_\xi$，则存在 $g \in \mathcal{D}(E)$，使得 $f = (E - \xi I)g$。现在

$$\begin{aligned}[I + (\xi - z)\mathfrak{R}_\xi]f &= [I + (\xi - z)\mathfrak{R}_\xi](E - \xi I)g \\ &= (E - \xi I)g + (\xi - z)g \\ &= (E - zI)g \in \mathfrak{M}_z.\end{aligned}$$

由于每个 $\xi \in \mathbb{C}$ 都是 E的正则型点，算子 $(E - \xi I)$ 是单射，这意味着对于每个 $\xi, z \in \mathbb{C}$，算子 $I + (\xi - z)\mathfrak{R}_\xi$ 也是单射。算子 $I + (\xi - z)\mathfrak{R}_\xi$ 也是满射，因为对于任意满足 $g = (E - zI)g'$的 $g \in \mathfrak{M}_z$，其中 $g' \in \mathcal{D}(E)$，元素 $f = (E - \xi I)g' \in \mathfrak{M}_\xi$ 是 g的原像。□

回顾一下，对于 $z \in \mathbb{C}$， R_z 是广义后移算子。设$f \in \mathfrak{X}$，则对于任意 $\xi, z \in \mathbb{C}$，存在 $f'_\xi, f'_z \in \mathcal{D}(E)$，使得

$$f = (E - \xi I)f'_\xi + f_Y(\xi) = (E - zI)f'_z + f_Y(z).$$

现在经过简单计算可得

$$f'_z = (E - \xi I)\frac{f'_\xi - f'_z}{\xi - z} + \frac{f_Y(\xi) - f_Y(z)}{\xi - z}.$$

这意味着对于所有 $z \in \mathbb{C}$， $\mathcal{H}$ 在 R_z 下保持不变。
由于算子 E 在 $\mathfrak{X}$ 上是对称的，且与 $\mathcal{H}$ 上的乘法算子酉等价，因此乘法算子在 $\mathcal{H}$ 上也对称。最后，我们将本节讨论的所有结果总结为一个定理，该定理也将用于回答有关具有无限亏指数的整算子的函数模型这一问题。

定理10.3. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个复可分希尔伯特空间， E 是一个具有无限亏指数的整算子，并产生如 (10.1) 所述的 $\mathfrak{X}$ 的直和分解。此外，假设至少对于一个 $\beta \in \mathbb{C}_+$，以下条件成立：

(1) 对所有 $\xi \in \mathbb{C}_-$，$\mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{M}_\xi^\perp$ 的维数均有限；对所有 $\xi \in \mathbb{C}_+$，$\mathfrak{M}_{\overline{\beta}} \cap \mathfrak{M}_\xi^\perp$ 的维数均有限。

那么， E 与德布朗日空间 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 中的稠定乘法算子酉等价。对于所有 $z \in \mathbb{C}$，空间 $\mathcal{B}_\beta(\mathfrak{E})$ 也在广义后移算子 R_z 下保持不变。

证明。我们首先考察 $\mathfrak{X}$ 的若干相关闭子空间的交。根据 [43], 中的引理 2.1, 我们有

$$\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{M}_\xi^\perp = \{0\} \quad \forall\, z,\, \xi : \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, \xi > 0. \tag{10.7}$$

此外，以下直和分解

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{M}_z \dot{+} \mathfrak{M}_\xi^\perp \quad \forall\, z,\, \xi : \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, \xi > 0$$

˜成立。现在，由于任意 $a \in \mathbb{R}$ 都是 E 算子 E_a 的正则型点,

$$\mathcal{D}(\tilde{E}_a) = \mathcal{D}(E) \dot{+} \mathfrak{M}_a^\perp,\ \tilde{E}_a(f_E + \phi_a) = Ef_E + a\,\phi_a,\ f_E \in \mathcal{D}(E),\ \phi_a \in \mathfrak{M}_a^\perp$$

˜是自伴的（见 [43]）。因此，每个 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 都是 E_a的正则点。这意味着, 对于任意 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 和 $f \in \mathfrak{X}$，存在唯一的 $f_E \in \mathcal{D}$（E）以及 $\phi_a \in \mathfrak{M}_a^\perp$，使得

$$f = (\tilde{E}_a - zI)(f_E + \phi_a) = (E - zI)f_E + (a - z)\phi_a.$$

由此得到以下直和分解

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{M}_z \dot{+} \mathfrak{M}_a^\perp \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ and } \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

因此，交

$$\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{M}_a^\perp = \{0\} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ and } \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{10.8}$$

Also

$$\mathfrak{M}_a \cap \mathfrak{M}_z^\perp = \{0\} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ and } \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{10.9}$$

由于 $f \in \mathfrak{M}_a \cap \mathfrak{M}_z^\perp$蕴含 $f \perp \mathfrak{M}_a^\perp$和 $f \perp \mathfrak{M}_z$。因此 $f \perp (\mathfrak{M}_z \dot{+} \mathfrak{M}_a^\perp) = \mathfrak{X}$, 这蕴含 $f = 0$。还可以证明，直和分解

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{M}_a \dot{+} \mathfrak{M}_z^\perp \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ and } \forall\, a \in \mathbb{R}$$

成立。现在假设 E' 是 E 在 $\mathfrak{X}$中的自伴扩张，则由 (10.5) 和引理 10.2 可得

$$I + (\beta - \xi)(E' - \beta I)^{-1} : \mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{M}_{\overline{\xi}}^\perp \to \mathfrak{M}_\xi \cap \mathfrak{M}_{\overline{\beta}}^\perp$$

and

$$I + (\overline{\beta} - \xi)(E' - \overline{\beta} I)^{-1} : \mathfrak{M}_{\overline{\beta}} \cap \mathfrak{M}_{\overline{\xi}}^\perp \to \mathfrak{M}_\xi \cap \mathfrak{M}_{\overline{\beta}}^\perp$$

对所有 $\xi \in \mathbb{C} \setminus \sigma(E')$ 都是双射。这些观察结合条件 (1) 表明，对于所有 $\xi \in \mathbb{C}$，子空间 $\mathfrak{M}_\xi \cap \mathfrak{M}_{\overline{\beta}}^\perp$、 $\mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{M}_{\overline{\xi}}^\perp$、 $\mathfrak{M}_\xi \cap \mathfrak{M}_{\overline{\beta}}^\perp$ 和 $\mathfrak{M}_{\overline{\beta}} \cap \mathfrak{M}_\xi^\perp$都是有限维的。

现在，由于 $K_\beta(\xi) = \delta_\xi \delta_\beta^*$，我们有

$$\dim(\ker \delta_\xi \delta_\beta^*) = \dim(\ker \delta_\beta^*) + \dim(\ker \delta_\xi \cap \mathrm{rng}\delta_\beta^*).$$

由 (10.2) 和 (10.3)，对于任意 $\xi \in \mathbb{C}$，我们有

$\dim(\ker K_\beta(\xi)) = \dim(\mathfrak{M}_\xi \cap \mathfrak{M}_{\overline{\beta}}^\perp)$，且 $\dim(\ker K_\beta(\xi)^*) = \dim(\mathfrak{M}_\beta \cap \mathfrak{M}_{\overline{\xi}}^\perp)$。

因此，上述观察表明，对于所有 $\xi \in \mathbb{C}$， $K_{\beta}(\xi) \in \Phi(Y)$。类似地，也可以观察到，对于所有 $\xi \in \mathbb{C}$，$K_{\overline{\beta}}(\xi) \in \Phi(Y)$。此外，引理 10.1 表明， $K_{\beta}(\beta)$ 和 $K_{\overline{\beta}}(\overline{\beta})$ 均为可逆的。证明的其余部分依据本节前面的讨论，并结合定理 8.2 和引理 7.4 得出。□

11. 与压缩算子的特征函数的联系

本节中，我们利用完全非酉压缩算子（cnu）的特征函数，构造 $\mathfrak{X}$ 值解析函数的再生核希尔伯特空间。基本思路是考虑那些特征函数在 $\mathbb{D}$ 上为内函数且可逆的完全非酉压缩算子。随后借助共形映射 C，将这些内函数考虑在上半平面上，并运用第 4 节中提到的相同技术构造再生核希尔伯特空间。本节讨论了两种情况，将分别加以阐述。本节使用的大多数标准结果和记号可见 [37]。

设 $A \in B(\mathfrak{X})$ 是一个完全非酉压缩算子。回顾一下， A 的特征函数定义为

$$C_A(z) = \left[-A + z(I - AA^*)^{\frac{1}{2}}(I - zA^*)^{-1}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}\right] \Big| \overline{\operatorname{rng}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}}$$

它是 $\mathfrak{D}_A = \operatorname{rng}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\mathfrak{D}_{A^*} = \operatorname{rng}(I - AA^*)^{\frac{1}{2}}$ 之间的有界线性算子。

第一种情形：假设 $A \in C_{\cdot 0}$ 与酉算子相似，且谱 $\sigma(A)$ 是 $\mathbb{T}$ 的真子集。非幺正压缩算子的存在性，尤其是具有紧谱的情形，可参见 [40]。现在，特征函数 $C_A(z)$ 在开单位圆盘上有界可逆，且是内函数（参见 [37] 中的定理 4.5）。此外，对于单位圆上除 $\sigma(A)$ 外的每个 z， $C_A(z)$ 都是酉算子。

正如我们在第 3 节提到的，我们可以考虑 $C_A(z) \in \mathcal{S}$。此外，对于所有 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathfrak{S}$， $C_A(x)$ 都是酉算子，其中 $\mathfrak{S}$ 是 $\sigma(A)$ 在共形映射 C 下的原像。现在，我们可以将 $C_A(z)$ 延拓到下半平面，方法如下：

$$C_A(z) = \{C_A(\overline{z})^*\}^{-1} \quad \text{for } z \in \mathbb{C}_-.$$

我们将延拓后的函数记为 $\mathfrak{C}_A(z)$。因此，我们可以基于 $\mathfrak{C}_A(z)$ 构造一个再生核希尔伯特空间，与引理 4.4 中提到的空间相似。

第二种情形：设 $A \in C_0$ 是一个单细胞算子，其标量倍数等于极小函数 $m_A(z)$。已知这类算子的极小函数

是奇异内函数（参见：命题 7.3， [37]）。因此，根据 [37]中的定理 5.1， $C_A(z)$对所有 $z \in \mathbb{D}$ 均可逆。此外，$\sigma(A)$的谱仅由 $\mathbb{T}$中的一个点组成，并且不失一般性，我们可以假设 $\sigma(A) = \{1\}$。因此，利用共形映射 C，我们可以得到一个 $\mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}^{in}_*$中的算子值函数 $\chi_A(z)$（记作）。此外，对所有 $x \in \mathbb{R}$， $\chi_A(x)$都是酉的。现在，与第一种情形类似，我们可以将 $\chi_A(z)$扩展为算子值整函数，并构造一个由 $\mathfrak{X}$值整函数组成的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}(\chi_A)$。

基于完全非酉压缩算子的整函数德布朗日空间：设 A 是第二种情形中的完全非酉压缩算子，且 E_+ 是满足以下条件的弗雷德霍姆算子值整函数：对于所有 $z \in \mathbb{C}$， $E_+(z) \in B(\mathfrak{D}_{A^*}, \mathfrak{D}_A)$。此外，$E_+(z)$ 至少在一点处可逆。现在考虑

$$E_-(z) = E_+(z)\chi_A(z) \quad \text{for all } z \in \mathbb{C}.$$

因此， E_- 是弗雷德霍姆算子值整函数，对于所有 $z \in \mathbb{C}$， $E_-(z) \in B(\mathfrak{D}_A, \mathfrak{D}_A)$，并且 $E_-(z)$ 至少在一点处可逆。此外

$$E_+^{-1}E_- = \chi_A \in \mathcal{S}^{in} \cap \mathcal{S}^{in}_*.$$

在当前语境下应理解类 $\mathcal{S}^{in}$ 和 $\mathcal{S}^{in}_*$。因此，对于每个 $z \in \mathbb{C}$，算子值函数对 $(E_-(z)\ E_+(z))$ 将表示一个 de Branges 算子。

致谢：作者感谢匿名审稿人指出本文早期版本中定理10.3的一个错误，并提出了若干有用的建议，这些建议最终促成了本文的改进版本。

作者还要感谢 Harry Dym 教授认真审阅本文的早期版本并提出改进建议。

第一作者的研究得到印度政府大学拨款委员会（UGC）奖学金（编号：DEC18-424729）的资助。第二作者的研究得到 DST-INSPIRE 教师研究基金（DST/INSPIRE/04/2016/000808）和 SERB 基金（SRG/2020/001908，日期为2020年10月26日）的资助。

参考文献

[1] N. I. Akhiezer、I. M. Glazman，《希尔伯特空间上线性算子理论》，两卷合订为一册。多佛出版社，纽约，（1993）。[2] D. Alpay、I. Gohberg、M. A. Kaashoek、L. Lerer、A. L. Sakhnovich，《有限区间上的克莱因系统与典范系统：原点处具有跳跃间断的加速子及连续势》，积分方程与算子理论 68（2010），第1期，115–150。[3] W. Arendt、C. J. K. Batty、M. Hieber、F. Neubrander，《向量值拉普拉斯变换与柯西问题》，Birkh$\ddot{a}$user（2011）。[4] Y. Arlinskii、S. Belyi、E. Tsekanovskii，《赫格洛茨-涅万林纳函数的保守实现》，算子理论：进展与应用，第217卷，Birkh$\ddot{a}$user/Springer Basel AG，巴塞尔，（2011）。[5] N. Aronszajn，《再生核理论》，美国数学会汇刊，第68卷，337–404，（1950）。[6] D. Arov、H. Dym，J–《压缩矩阵值函数及相关主题》。剑桥大学出版社，英格兰剑桥，2008。[7] D. Arov、H. Dym，《多变量预测、德布朗日空间及相关的延拓与逆问题》，Birkh$\ddot{a}$user，巴塞尔（2018）。[8] D. Arov、H. Dym，《希尔伯特空间中算子的函数模型及其多值扩张》。积分方程与算子理论 92，39（2020）。[9] S. Bergman，《平面与空间调和函数按正交函数展开》，数学年刊，第86卷，（1922）。[10] L. de Branges，《一些整函数希尔伯特空间》，美国数学会会刊，第10卷（1959），第840–846页。[11] L. de Branges，《一些整函数希尔伯特空间》，美国数学会汇刊，第96卷（1960），第259–295页。[12] L. de Branges，《一些整函数希尔伯特空间》，美国数学会通报，第67卷（1961），第129–134页。[13] L. de Branges，《一些解析函数希尔伯特空间，I》，美国数学会汇刊 106（1963），445–468。[14] L. de Branges，《一些解析函数希尔伯特空间，II》，数学分析与应用杂志 11（1965），44–72。[15] L. de Branges，《一些解析函数希尔伯特空间，III》，数学分析与应用杂志 12（1965），149–186。[16] L. de Branges，《整函数希尔伯特空间》，普伦蒂斯-霍尔公司，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，（1968）。[17] L. de Branges、J. Rovnyak，《量子散射理论中的典范模型》，载于《量子力学中的微扰理论及其应用》，C. Wilcox 编，威利出版社，纽约（1966）。[18] S. L. Campbell，《在闭圆盘上解析的算子值内函数》，太平洋数学杂志，41（1972），57–62。[19] R. G. Douglas，《希尔伯特空间上算子的主化、因子分解与值域包含》，美国数学会会刊 17（1966），413–415。[20] H. Dym，《J-压缩矩阵函数、再生核希尔伯特空间与插值》，CBMS 区域会议丛书，数学第71卷（1989）。

[21] H. Dym、S.Sarkar，亏指数为 (p,p) 的乘法算子，以及整向量值函数再生核希尔伯特空间中的采样公式，《J. Funct. Anal.》273（2017），3671–3718。[22] P. A. Fillmore、J. P. Williams，关于算子值域，《Advances in Math.》7（1971），254–281。[23] F. Gesztesy、H. Holden、R. Nichols，关于解析算子值函数的因子分解与特征值重数问题。《积分方程与算子理论》82，61–94（2015）。[24] I. Gohberg、S. Goldberg、M. A. Kaashoek，《线性算子类》第1卷，《算子理论：进展与应用》，Birkh$\ddot{a}$user，巴塞尔（1990）。[25] I. Gohberg、J. Leiterer，《单变量全纯算子函数及其应用》，《算子理论：进展与应用》，第192卷。Birkh$\ddot{a}$user，巴塞尔（2009）。[26] M. L. Gorbachuk、V. I. Gorbachuk，《M. G. Krein关于整算子的讲义》，Birkhauser，波士顿（1997）。[27] H. Helson，内函数的微分方程，《Studia Math.》35（1970），311–321。[28] E. Hille、R. S. Phillips，《泛函分析与半群》，美国数学学会，普罗维登斯（1957）。[29] T. Kato，《线性算子微扰理论》，Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约（1966）。[30] M. G. Krein、Sh. N. Saakyan，厄米算子预解式理论的一些新结果，《苏联科学院消息·数学系列》169（1966），第6期，1269–1272。[31] M. G. Krein，亏指数为¨(m,m)的厄米算子表示理论的基本方面，《Ukra$\dot{i}$n. Mat. Zh.》3-66（1949），英文译本见：《Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2》97（1971），75–143。[32] R. Mennicken、M. M$\ddot{o}$ller，《非自伴边界特征值问题》，Elsevier，阿姆斯特丹（2003）。[33] J. Mercer，正定型与负定型函数及其与积分方程理论的联系，《Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A》第209卷，415–446（1909）。[34] C. A. Micchelli、M. Pontil，关于向量值函数学习，《Neural Computation》17，177–204页（2005）。[35] C. A. Micchelli、M. Pontil，多任务学习的核，《神经信息处理系统第18届会议论文集》（2005）。[36] E. H. Moore，《一般分析》第2部分，第1卷（1939）。[37] B. Sz.-Nagy、C. Foias、H. Bercovici、L. K$\acute{e}$rchy，《希尔伯特空间上算子的调和分析》，第2版，修订增补版，Universitext，Springer，纽约（2010）。[38] V. Paulsen、M. Raghupathi，《再生核希尔伯特空间理论导论》（剑桥高级数学研究丛书）。剑桥：剑桥大学出版社（2016），doi:10.1017/CBO9781316219232[39] S. Qiao、G. Wang、Y. Wei，《广义逆：理论与计算》，科学出版社：北京；美国纽约州纽约（2004）。[40] M. Radjabalipour，关于算子的正规性，《Indiana Univ. Math. J.》23（1974），623–630。[41] M. Rosenblum、J. Rovnyak，《Hardy类与算子理论》，牛津大学出版社，纽约（1985）。[42] L. O. Silva、J. H. Toloza，德布朗日空间与Krein整算子理论，载于：《算子理论》（含51幅图和2张表，共2卷），549–580页。Springer，巴塞尔（2015）。

[43] A. V. Shtraus，关于对称算子的延拓与特征函数，《苏联科学院消息·数学系列》32(1)，186–207（1968）。英文译本见《苏联数学消息》2，181–203（1968）（俄文）。[44] A.V. Straus，非稠密定义对称算子的延拓与广义预解式（俄文），《Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.》34（1970），175–202。数学系，罗帕尔印度理工学院，印度140001。电子邮箱：subhankar.19maz0001@iitrpr.ac.in，subhankarmahapatra95@gma

il.com

印度罗帕尔印度理工学院数学系，邮编 140001，印度。电子邮箱：santanu@iitrpr.ac.in，santanu87@gmail.com。