arXiv:2302.06369v1 [math.AG] 13 Feb 2023

模空间的刚性与代数几何构造

谨以此文纪念陈省身 *

Benson Farb

2023年2月14日

摘要

本文提出两条指导性原理，由此引出若干关于代数几何中各种形式的模空间刚性的猜想（其中一些现已得到证明）。这些猜想涉及群论、拓扑学和全纯方面，因此也为几何群论和拓扑学中的自然问题提供了研究动机。

1 引言

本文旨在提出两条指导性原理，由此引出关于代数几何中各种形式的模空间刚性的若干猜想（其中一些现已得到证明）。这类猜想涉及群论、拓扑学和全纯方面，因此也为几何群论和拓扑学中的自然问题提供了研究动机。这些猜想沿袭了刚性定理（如 Margulis 超刚性）的思路；在某些情况下，也可以将其视为这类定理的代数几何解释。

本文中的所有代数簇均取定义在 $\mathbb{C}$ 上，尽管探讨任意域上的情形也会相当有趣。

由构造得到的模空间。代数几何最引人入胜之处之一，在于其精妙非凡的构造。这些构造往往可以重新诠释为模空间之间出人意料的态射。以下从众多例子中选取三个（更多例子见下文）：

1.（四次曲线的解消）对于每个 $n \geq 1$，令 Poly_n 表示首一、无平方因子、次数为 n 的多项式 $P \in \mathbb{C}[x]$ 所构成的空间。空间 Poly_n 通过记录 P 在 $\mathbb{C}^n$ 中的系数而嵌入 $\mathbb{C}^n$，成为一个超曲面的补集，即判别式多项式 $\Delta_n \in \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$ 的零点集 $Z(\Delta_n)$ 的补集。经典的“四次曲线的解消”构造（Ferrari，1545年）产生了拟射代数簇之间的满射态射

$$\mathrm{R} : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_3 \tag{1.1}$$

*本文基于我在2021年10月12日举行的陈省身110周年诞辰会议上所作的报告。感谢丘成桐教授和郑绍远教授邀请我作报告并撰写本文，也感谢 Dan Margalit 与我进行了有益的讨论。

其定义为：将具有根集$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$（各不相同）的四次多项式 $f \in \mathrm{Poly}_4$ 映射到具有不同[1]根的三次多项式 $\mathrm{R}(f) \in \mathrm{Poly}_3$

$$b_1 := \frac{(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)^2}{4}, \quad b_2 := \frac{(a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2}{4}, \quad b_3 := \frac{(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)^2}{4}$$

诱导映射 R_*：$\pi_1(\mathrm{Poly}_4) \to \pi_1(\mathrm{Poly}_3)$ 诱导出一个辫群满射

$$\mathrm{R}_* : B_4 \to B_3.$$

通过分解为到对称群 S_n 的满射 $B_n \to S_n$，映射 R 为例外满射 $S_4 \to S_3$ 的存在提供了一种解释。

2.（雅可比簇）雅可比构造从任意亏格为 $g \geq 1$ 的黎曼曲面 X 得到一个 g 维主极化阿贝尔簇

$$\mathrm{Jac}(X) := \Omega^1(X)^* / H_1(X; \mathbb{Z}),$$

其中 $\Omega^1(X)^*$ 是 X 上全纯1-形式空间的对偶，而嵌入 $H_1(X;\mathbb{Z}) \to \Omega^1(X)^*$ 由沿一个1-循环积分给出。此构造可整体化为周期映射

$$\mathrm{Jac} : \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g,$$

其中 $\mathcal{M}_g$ 是亏格为 g 的黎曼曲面的模空间，而 $\mathcal{A}_g$ 是 g 维主极化阿贝尔簇的模空间。

3.（拐点与扭点）固定 $d, n \geq 1$。是否存在一种选择方式，使得对每条光滑的 d 次平面曲线，都能选出 n 个互不相同的点组成的无序集合，并且这种选择随曲线代数地（甚至连续地）变化？更确切地说，设 $\mathcal{C}_d$ 是 $\mathbb{CP}^2$ 中光滑 d 次曲线的参数空间，并令

$$\mathcal{E}_{d,n} := \{(C, \{z_1, \ldots, z_n\}) : C \in \mathcal{C}_d, z_i \in C, z_i \neq z_j \text{ if } i \neq j\}.$$

投影 $\pi_{d,\ n}(C, \{z_1, \ldots, z_n\}) := C$ 诱导出一个纤维丛

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{UConf}_n(C) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{d,n} \\ & & \Big\downarrow \pi_{d,n} \\ & & \mathcal{C}_d \end{array} \tag{1.2}$$

其中，$\mathrm{UConf}_n(C)$ 表示 C 上由无序 n元组的不相同点构成的构形空间。我们要寻找 $\pi_{d,\ n}$ 的代数截面（分别地，连续截面）。值得注意的是，当 $d = 3$ 和 $n = 9k^2, k \geq 1$ 时，这样的代数截面确实存在，下面将对此作出说明。

任意一条（复）光滑三次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 恰好有九个拐点 $\mathcal{F}_C$。每个$z \in \mathcal{F}(C)$都唯一确定了 C 上的一个阿贝尔群结构，其单位元为 z。对于

[1]这里的奇妙之处在于，如果 $\{a_i\}$ 彼此不同，那么 $\{b_j\}$ 也彼此不同。

每个 $k \geq 1$，在这些群结构下的 k-挠点的并集 $\mathcal{F}_{9k^2}(C)$ 产生了 π_d的一个代数截面，$_n$:$\mathcal{E}_{d,\ n} \to \mathcal{C}_d$，其定义为

$$C \mapsto \mathcal{F}_{9k^2}(C).$$

因此，对于每个 $k \geq 1$，任意光滑三次多项式 $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ 都配备有一组 $9k^2$ 解，这些解取自其不可数多个解中的一部分（此处，C 是 f的零点集）！

我想在此介绍的原理预言，上述构造的三个映射中的每一个确实都是特殊的；在各种意义下，它们都是唯一的。例如，以全纯地（甚至连续地）变化的方式，将一个首一无平方因子多项式变为另一个次数更低的多项式，四次曲线的解消是唯一的非平凡方法（详情见§2）。另一个例子是以下结果，这是我在 [Fa] 中证明的。

定理 1.1（周期映射的全局刚性）。令 $g \geq 3$，并假设$h \leq g$。令 $F\colon \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_h$ 为复轨形之间的任意非常数全纯映射。则$h = g$ 和 $F = \mathrm{J}$。

关于这一结果及相关结果和问题的讨论，请参见§4。

两个指导原理。我想尝试将这样一种说法形式化：由代数几何构造产生的模空间之间的映射（以及某些丛的截面）是唯一的。这类构造通常从某种类型的簇出发，或许还附带一些额外数据，例如一组子簇，然后通过几何产生一个新的簇，也可能附带额外数据。这样的构造会诱导出一个态射，或更一般地说，一个有理映射

$$F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

其中，$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是该构造的输入/输出簇的模空间（或许附带各自的额外数据）。我们将模空间之间的这类映射称为构造映射。虽然这并非一个严格的数学定义，但借用最高法院大法官Potter Stewart的话来说：我一看就知道什么是构造映射。[2] 我们也将这一术语用于通过几何或算术构造的丛截面，例如式（1.2）中的截面。

构造映射是美妙的存在。它们的存在往往令人觉得不可思议。下面介绍一种形式化方式，说明这类构造何其特殊。

指导原则 1.2（构造映射具有刚性）。构造映射 $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 满足以下条件：

1. 群论刚性：任何非平凡表示 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{M}) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{N})$ 都共轭于 F_*。2. 拓扑刚性：任何同伦非平凡连续映射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 都同伦于 F。3. 全纯刚性：任何非常值全纯映射 $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 都等于 [3] F。

[2]斯图尔特的评论描述了他判定淫秽内容的标准：“我一看就知道。”[3]有时，我们希望允许在前复合（分别地，后复合）中使用定义域（分别地，陪域）的自同构，例如进行线性坐标变换。

4. 有理刚性：任何非常值有理映射 $f\colon M \to \mathcal{N}$ 都作为有理映射 [4] 等价于 F。

注记 1.3。

1. 如果 $\mathcal{N}$ 是非球面的，那么拓扑刚性与群论刚性等价。2. 可以将“全纯刚性”替换为“态射刚性”；两者通常等价（通过将全纯映射延拓到某些紧化，并应用乔定理）。3. 猜想 1.2 还有一些自然的变体和推广，例如关于 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 的所有有限覆盖之间的映射的版本，以及关于某些特殊无限覆盖（如托雷利空间）的版本。

以下是指导原则 1.2 的一个自然推广。

指导原则 1.4（刻画原则）。设 $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ 是自然的模空间族。那么任何非常值的全纯映射（分别为态射、有理映射等） $M_k \to \mathcal{N}_\ell$，若满足 $k \in I$、$\ell \in J$，则是可构造的。

根据以上例子，指导性原理预言：

1. 假设 $n > m > 2$。令 $F\colon \mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_m$ 为一个不通过判别式映射 $\Delta_n\colon \mathrm{Poly}_n \to \mathbb{C}^*$ 分解的非恒定全纯映射。那么 $(n, m) = (4, 3)$，并且 F （在定义域和值域上作仿射坐标变换后）是四次曲线的解消。2. 定理 1.1：令 $g \geq 3$，并假设 $h \leq g$。令 $F\colon \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_h$ 为任意一个复轨形之间的非恒定全纯映射。那么 $h = g$ 且 $F = \mathrm{J}$。3. 对于 $(d, n) = (3, 2)$，(1.2) 的任意代数截面都来自一种挠构造；也就是说，它是该构造的（若干种变体的）和——精确定义见 §3。

我曾基于这些指导性原理猜想了上述每一项结果，后来每一项都被证明成立；见 §2、§4 和 §3。支持指导性原理的全纯版本的一个普遍理由是，全纯映射往往——尽管有一些显著例外——在其同伦类中是唯一的。

我认为这类结果值得作为目标，原因有几个。首先，它们与莫斯托刚性、Margulis 超刚性以及其他此类刚性结果风格相同：在某个更大的同类对象中刻画一个数学对象。证明这类定理时，人们不得不更深入地理解该对象。其次，我认为，尝试证明这类刚性定理，是对优美的代数几何构造进行系统搜寻的一种方式。最后，正如我们在本文中试图说明的那样，尝试证明这些猜想会引出许多关于群论和拓扑学的有趣问题。

[4] 如果两个有理映射在定义域的一个扎里斯基开子集上相等，就称它们相等。另请参阅脚注 3。

一般证明方法。在许多情况下，证明一个构造性映射 $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是唯一的全纯映射 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，有一个共同的思路。当 $\mathcal{N}$ 是非球面时，思路如下：设 $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是非常值全纯映射。

步骤 1。证明群论刚性。（稍后再讨论相关思路。）
步骤 2。当 $\mathcal{N}$ 是非球面时，这已经意味着 f 要么是同伦平凡的，要么 f 具有拓扑刚性。

步骤 3。现在假设 f 是全纯的。如果 $\mathcal{N}$ 是非球面的，那么当它是同伦平凡的时，根据最大值原理，它通常是常值的。当 f 是非平凡同伦的时，可以尝试在 $\mathcal{N}$ 中找到足够的“负曲率”，以证明同伦类中全纯映射的唯一性。有一个例子并不具有实际的黎曼负曲率，但这种唯一性仍然成立：$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}_g$ 这一光滑的、亏格为 g 的射影曲线的模空间（见定理 4.3 及其后的讨论）。

注 1.5（轨形问题）。本文讨论的许多模空间都是（良好的）复轨形：它们是 X/Γ 单连通流形 X 关于群 Γ 的不连续适当作用所得的商，但这些作用不一定是自由的。复轨形之间的映射 $X/\Gamma \to Y/\Lambda$，就是关于同态 $\rho\colon \Gamma \to \Lambda$的等变映射 $X \to Y$。当某个群作用（例如 Γ 在 X上的作用）不是忠实的时，可以选择将 Γ 替换为 $\Gamma' := \Gamma/\ker(\rho)$，并要求其关于 Γ'作用是等变的。这个看似技术性的要点实际上可能会改变结论；参见 [Ser]。

论文提纲。在本文的其余部分，我们将介绍一些由指导原理所启发的问题、猜想和结果。我们将范围限定在四类问题／猜想上：关于多项式的问题（§2）；关于在超曲面上选点的问题（§3）；关于周期映射的问题（§4）；以及关于计数几何中构造的问题（§5）。当然，问题的选择带有偏向，其目的仅在于阐明这些指导原理。我希望能启发读者提出他们自己的刚性猜想，甚至有望得到一些定理。

2 多项式空间

构形空间及其之间的映射，为应用指导原理提供了大量有趣映射的实例。为设定记号，给定一个拓扑空间 X 和一个整数 $n \geq 0$，令

$$\mathrm{PConf}_n(X) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\}$$

表示由 X 中有序的 n 元组互不相同的点构成的构形空间。对称群 S_n 通过置换坐标作用于 X^n，并保持子空间 $\mathrm{PConf}_n(X)$ 不变。商空间

$$\mathrm{UConf}_n(X) := \mathrm{PConf}_n(X)/S_n$$

是 X中由无序的 n 元组互异点构成的构形空间。注意，当X 是代数簇时，$\mathrm{PConf}_n(X)$ 和 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 也都是代数簇。

簇 $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$ 与多项式的关系如下。对每个 $n \geq 1$，令 Poly_n 为由首一、无平方因子（即没有重根）的 n 次多项式 $P \in \mathbb{C}[x]$ 构成的空间。

判别式经典理论给出了一个多项式 $\Delta_n \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$，其性质是：多项式 $P(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$ 无平方因子，当且仅当 $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$。由此可得

$$\mathrm{Poly}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \Delta_n(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\} = \mathbb{C}^n - \{\Delta_n = 0\}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个超曲面补集。我们注意到，超曲面 $\{\Delta_n = 0\}$ 极其奇异且异常复杂：尽管 $\Delta_2(b, c) = b^2 - 4c$,

$$\Delta_3(b, c, d) = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18abc,$$

并且其复杂性随 n 急剧增加。代数基本定理表明，对于每个 $n \geq 1$，映射

$$\mathrm{Poly}_n \to \mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$$

由下式给出

$$P(Z) \mapsto \{\lambda : P(\lambda) = 0\}$$

是仿射簇的一个同构。

理解多项式的经典方法由 Tschirnhaus 于17世纪开创，旨在尝试将一般 n 次多项式的根的公式化简为低次数多项式的此类公式。最著名的例子是四次曲线的解消，它（如上所述——见 (1.1)）给出态射

$$\mathrm{R} : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_3. \tag{2.1}$$

很自然地可以证明，之所以没有发现其他这样的奇迹，是因为它们实际上并不存在。现在，如果考虑所有 n 次多项式的空间与 m 次多项式的空间之间的映射，那么每个空间都是仿射的，并且存在许多这样的代数映射。因此，自然要限制到无平方因子多项式的空间 Poly_n。

现在，“四次曲线的解消”映射 R 并非完全唯一。首先，对每个 $n \geq 1$，判别式给出一个全纯满射

$$\Delta_n : \mathrm{Poly}_n \to \mathbb{C}^*,$$

对于任意 $m \geq 1$，我们都可以将 Δ_n 与任意全纯映射 $\mathbb{C}^* \to \mathrm{Poly}_m$复合。当 $(n, m) = (4, 3)$ 时，我们还可以将 (2.1) 的映射 R乘以判别式的某个幂 $d \geq 0$，从而得到一个态射

$$\mathrm{R}_d : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_3$$

定义为

$$R_d(a_1, \ldots, a_n) := \Delta_n(a_1, \ldots, a_n)^d R(a_1, \ldots, a_n).$$

特别地 $R_0 = R$。注意，如果将 $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n)^d$ 替换为 $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n)$ 中任意一个 d 次多项式，那么根据代数基本定理，该多项式会在某个非零输入处取值为 0，因此相应的映射 R_d 就没有良好定义。除这些细微修改外，我猜想四次曲线的解消是唯一的，具体含义如下。

猜想 2.1（四次多项式的解析唯一）。设 m、$n \geq 3$，且设 $\Psi : \mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_m$ 是任意一个非常数全纯映射。假设 Ψ 不是常数，并且 Ψ 不通过判别式 $\Delta_n : \mathrm{Poly}_n \to \mathbb{C}^*$ 分解。若 $n \geq 4$，则 $(n, m) = (4, 3)$，并且在分别对 Poly_4 和 Poly_3，进行自同构的前复合与后复合之后[5]，必有 $\Psi = R_d$，其中 $d \geq 0$。

全纯映射 $\mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_m$ 的系统研究由 V. Lin 通过一系列论文开创（参见 [Li] 及其中所引的参考文献）。Lin 在 [Li] 的定理 3 中证明，猜想 2.1 在 Ψ 具有 $\Psi(\{z_i\}) \cap \{z_i\} = \emptyset$[6] 这种形式的特殊情形下成立；也就是说，$\Psi$ 只是“添加点”（Lin 称之为“分离”）。Chen-Kordek-Margalit 的近期工作 [CKM] 解决了猜想 2.1 中的“拓扑部分”，适用于 $5 \leq m \leq 2n$ 和 $(n, m) = (4, 3)$ 这两种情形；见下文。

猜想 2.1 的假设 $n \geq 4$ 是必要的，因为对于各种 m，存在许多全纯映射 $\mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_m$，如下所述。给定一个构形 $\lambda :\backsim \quad =\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 : \lambda_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \neq \lambda_j\}$，令 E_λ 为 $\mathbb{C}$ 在 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty\}$处的二重分歧覆盖，每个分歧指数均为 2。于是 E_λ 是一个复环面，并带有一个特殊点，即无穷远点；我们可以将其取作基点，从而赋予 E_λ 以椭圆曲线结构，其中该基点为单位元，而 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty\}$ 是其 2-扭点集合。映射

$$\Psi_k : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_{k^2-1}$$

定义为

$$\Psi_k(\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}) := \{\text{nonzero } k\text{-torsion points of } E_\lambda\}$$

是一个非常值全纯映射。注意，Ψ_k 对于 $k > 2$具有分离性。Trevor Hyde（个人通信）在分类所有满足 $m \geq 3$的全纯映射 $\mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_m$ 方面取得了进展。

我们可以提出一个更一般的问题：对于固定的 m、$n \geq 3$，将一个次数为 m的首一无平方因子多项式赋给一个次数为 n 的首一无平方因子多项式，有哪些连续变化（等价地，光滑变化）的方式（在同伦意义下）？作者和 D. Margalit 曾明确提出以下问题。

问题 2.2。分类所有映射 $\mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_{n+k}$ 的同伦类，其中 $n \geq 3$、$k \geq 0$任意。等价地，分类所有同态 $B_n \to B_{n+k}$，其中 B_m 表示由 m条辫股组成的辫群。

2.2 的第二部分与第一部分等价，因为 Poly_n 是一个 $K(B_n, 1)$ 空间，其中B_n 是 n 股辫组成的辫群。除了显然的包含映射 $B_n \to B_{n+k}$（其中$k \geq 1$）之外，至少对于 $k \geq n$，还存在许多有趣的同态 $B_n \to B_{n+k}$，例如通过辫缆绕构造、“剪切变换”以及这些构造的扭转得到。Chen-Kordek-Margalit 对 $n \geq 4$ 的所有同态 $B_n \to B_{n+k}$ 以及任意 $k \geq 1$ 给出了一个精确的分类猜想。然而，相应的光滑映射 $\mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_{n+k}$ 似乎并不同伦于全纯映射，不过这一问题仍未解决。这些映射在多项式层面上对应什么？Margalit 猜想中 $k \leq n$ 的情形由

[5]这些映射由 $\mathbb{C}$的一个仿射映射诱导，对应于线性变量替换。[6]这里，$\{z_i\}_{i=1}^n$ 表示 $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$ 中的一个点，我们将其视为 Poly_n。

L. Chen-Kordek-Margalit 在 [CKM] 的定理 1.1 中解决了。一个似乎触手可及的首要问题是：缆绕同态 $B_n \to B_{rn}, r \geq 2$ 是否对应于多项式上的某种代数过程？ [CKM] 的命题 7.6 对所有满射 $B_4 \to B_3$ 进行了分类；答案与猜想 2.1 相容，因为乘以 Δ_n^d 会在 π_1 上诱导出他们所称的“剪切变换”。

利用施瓦茨引理可以证明，若 $\Psi : \mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_m$ 是全纯映射，那么 $\Psi_* : B_n \to B_m$ 会将 B_n 中的每个“多重扭曲”映射为 B_m中的一个“多重扭曲”。与光滑的 Ψ相比，关于全纯 Ψ，寻找其他群论限制会很有意思。作为这种约束能发挥何种作用的一个基本示例，回顾簇同构 $\mathrm{Poly}_n \cong \mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$，并考虑对 $n \geq 2$ 而言的连续映射

$$\Phi_n : \mathrm{UConf}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{UConf}_{n+1}(\mathbb{C})$$

定义如下

$$\Phi_n(\{z_i\}) := \{z_i\} \cup \{\sum |z_i| + 1\}.$$

映射 Φ_n 不是全纯映射，而且我曾猜想，除了上文讨论的 $n = 3$ 情形外，它甚至不同伦于任何全纯映射。这个猜想由 Hyde 证明。

定理 2.3（Hyde）。存在态射 $\psi : \mathrm{UConf}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{UConf}_{n+1}(\mathbb{C})$，当且仅当$n = 3$。

人们或许希望，对于所有 $k \geq 1$，以 $\mathrm{UConf}_{n+k}(\mathbb{C})$ 为目标也能得到类似的定理。 .

带附加数据的多项式。作为一个更精细的问题，我们可以问：对于一个首一、无平方因子、次数为n 的多项式，以及它的若干根的集合，如何以光滑方式（分别地，全纯地）将其对应到一个首一、无平方因子、次数为 m 的多项式？用数学术语来说，给定任意子群 $H < S_n$，考虑中间覆盖

$$\mathrm{PConf}_n(\mathbb{C}) \to X_H \to \mathrm{Poly}_n$$

对应于 H。例如，当 $H = 1$ 时， $X_H = \mathrm{PConf}_n$ ；而当 $H = S_{n-1}$时，则

$$X_H = \{(P, \lambda) : P \in \mathrm{Poly}_n, P(\lambda) = 0\}.$$

问题 2.4（带附加数据的多项式）。固定 m、$n \geq 3$。设 $A < S_n$ 和 $B < S_m$为任意子群，并令 X_A （分别地， X_B）为对应于 A（分别地， B）的 Poly_n （分别地，Poly_n）的覆盖。对所有非常值全纯映射以及映射 $X_A \to X_B$ 的所有光滑同伦类进行分类。

问题 2.4 在 $A = B = 1$ 的情况下仍未解决。另一个有趣的情形是 $m = n$ 且 $A = 1$ 且 $B = S_n$，因此 $X_A = \mathrm{PConf}_n(\mathbb{C})$ 和 $X_B = \mathrm{Poly}_n$。这里有经典的韦达映射 $V_n : \mathrm{PConf}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Poly}_n$ ，它将一组 n 个互不相同的复数映射到以这些数为根的唯一首一 n 次多项式:

$$V_n(r_1, \ldots, r_n) := (-\sigma_1(r_1, \ldots, r_n), \sigma_2(r_1, \ldots, r_n), \ldots, (-1)^n \sigma_n(r_1, \ldots, r_n))$$

其中 σ_i 是初等对称多项式:

$$\begin{aligned}\sigma_1(r_1,\dots,r_n) &:= \textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i\\ \sigma_2(r_1,\dots,r_n) &:= \textstyle\sum_{1\le i<j\le n} r_i r_j\\ &\vdots\\ \sigma_n(r_1,\dots,r_n) &:= r_1 r_2 \cdots r_n.\end{aligned}$$

探讨这种将一个首一、次数为 n 的无平方因子多项式与一组 n 个互异复数相对应的方式是否唯一，似乎是一个基础问题。

猜想 2.5（韦达映射是唯一的）。固定 $n \ge 4$。设 $\Psi\colon \mathrm{PConf}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Poly}_n$ 是任意一个非恒定全纯映射。进一步假设 Ψ_* 不经过阿贝尔群分解。那么，除变量的线性变换（即定义域和值域上的仿射自同构）外，Ψ 就是韦达映射 V_n。

注意，连续映射 $\mathrm{PConf}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{PConf}_n(\mathbb{C})$ 有许多同伦类，等价地说，有许多同态 $P_n \to P_n$，其中 $P_n := \pi_1(\mathrm{PConf}_n(\mathbb{C}))$ 是 n 股上的纯辫群。它适合于一个正合列

$$1 \to P_n \to B_n \to S_n \to 1.$$

这类同态的一个例子是“忘掉某些辫股”的同态 $P_n \to P_{n-k}$，后接一个标准嵌入 $P_{n-k} \to P_n$。第一个同态由全纯映射诱导，而第二个同态几乎肯定不是（参见定理 2.3）。注意，$P_3 \cong F_2 \times \mathbb{Z}$ 满射到 F_2，因此可以构造许多同态

$$P_n \twoheadrightarrow P_3 \twoheadrightarrow F_2 \to P_n.$$

然而，可以论证这些同态中没有一个是由全纯映射诱导的。因此，猜想 2.5 依然成立。

3 在超曲面上选取点

固定 d、n、$N \ge 1$。令 $\mathcal{C}_{d,N}$ 为 $\mathbb{CP}^N$ 中光滑的、次数为 d 的超曲面的参数空间，并令

$$\mathcal{E}_{d,N,n} := \{(C, \{z_1,\dots,z_n\}) : C \in \mathcal{C}_{d,N}, z_i \in C, z_i \ne z_j \text{ if } i \ne j\}.$$

投影 $\pi_{d,n}(C, \{z_1,\dots,z_n\}) := C$ 诱导一个纤维丛

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{UConf}_n(C) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{d,N,n}\\ & & \big\downarrow \pi_{d,N,n}\\ & & \mathcal{C}_{d,N}\end{array} \tag{3.1}$$

其中 $\mathrm{UConf}_n(C)$ 表示 C 上由互不相同的点组成的无序 n元构形空间。注意，$\mathcal{E}_{d,N,1} \to \mathcal{C}_{d,N}$ 是 $\mathbb{P}^N$ 中的通用光滑 d 次超曲面；为简便起见，我们将其记作 $E_{d,N}$。(3.1) 中的丛的一个截面称为 $\mathcal{E}_{d,N} \to \mathcal{C}_{d,N}$ 的 n-多截面。

问题 3.1（点选取问题）。固定 d、N、$n \geq 1$。是否可能以全纯地（分别以连续地、代数地、有理地）变化的方式，在 $\mathbb{P}^N$ 中每个光滑 d 次超曲面上选取一个由互不相同的点组成的无序 n 元组?

换句话说：是否存在 $\mathcal{E}_{d,N} \to \mathcal{C}_{d,N}$ 的全纯（分别地，连续、代数、有理）n-多截面? 当这样的截面存在时，它是否唯一（分别地，在同伦意义下唯一）？

即使是问题 3.1 的 $n = 1$ 情形也尚无定论（据我所知）。这里提出第一个挑战:

猜想 3.2（无法选取一个点）。固定 $d \geq 3, N \geq 2$。$\mathcal{E}_{d,N} \to \mathcal{C}_{d,N}$ 不存在全纯截面，甚至不存在连续截面。

问题 3.1 的一个引人之处在于，有许多例子表明这样的截面确实存在。这些截面（至少全纯截面如此）似乎总是源自优美的代数几何和算术构造。试图回答问题 3.1 时，我们既在证明这些构造的唯一性（遵循指导性原理），也在着手系统地寻找其他尚未发现的代数几何和算术构造。

3.1 三次曲线的情形

众所周知，每条光滑三次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 恰有 9 个拐点；也就是说，这些点位于 C 上，且其切线与 C 的交点重数为 3。令 Flex(C) $\in$UConf$_9$($\mathbb{P}^2$) 表示 C的拐点集合。映射

$$\Psi_9 : \mathcal{C}_{3,2} \to \mathcal{E}_{3,2}$$

定义为

$$\Psi_9(C) := \mathrm{Flex}(C)$$

给出 $\mathcal{E}_{3,2} \to \mathcal{C}_{3,2}$ 的一个 9-多截面。由于 C 的拐点集合是 C 与其对应的 Hessian 曲线的交集（该曲线由定义 C的方程的 Hessian 行列式为零所确定），因此 Ψ_9 是一个代数的 9-多截面。现在，任取一点 $p \in$ Flex(C)，便赋予 C 阿贝尔群（椭圆曲线）的结构，其中 p 为单位元，而 Flex(C) 是 3- 挠点集合。因此， C 的 {3- 挠点 } 定义良好，且与在 Flex(C) 中选取的点无关。对于每个 $k \geq 1$，都有一个代数的 $9k$-多截面 Ψ_{9k^2} of $\mathcal{E}_{3,2} \to \mathcal{C}_{3,2}$，定义为

$$\Psi_{9k^2} := \{3k\text{-torsion points of } C\}.$$

此外（参见例如 [第]章），由 $3k$-挠点集合构成的代数多截面也不乏其例；这些点对任何 $j < k$ 都不是 $3j$-挠点，而且它们确实有几何解释。例如，在 C 上，总有且恰有 72 个点满足：一条不可约三次曲线与C 相交时，该点的重数为 9；这些点组成的集合，正是 C 上的 9-挠点中不是 3-挠点的那些点。我们还可以将这些挠构造取并集，从而产生新的代数多截面。Banerjee-Chen 将此类多截面统称为由挠点产生的多截面。正如 Chen 在 [第] 章的定理 1 中所指出的（归功于 Maclaurin、Cayley 和 Gattazzo）：

定理 3.3（光滑三次曲线的典范子集）。普遍三次平面曲线 $\mathcal{E}_{3,\ 2} \to \mathcal{C}_{3,\ 2}$ 当且仅当满足以下条件时，存在代数的 n-多截面

$$n = 9\sum_{m\in I} J_2(m) \tag{3.2}$$

其中 $J_2(m) = m^2\prod_{p\ prime,\ p|m}(1-p^{-2})$，而 I 是一个正整数集合。例如，当 $n = 9$时，27、36、72、81、99、108，.....。

因此，任意一条光滑三次平面曲线 C 都有一个典范的、随 C代数变化的108点集合！我觉得这很了不起，并猜想不存在其他此类构造，具体而言：

1. 任意代数的 n-多截面 $\mathcal{E}_{3,2} \to \mathcal{C}_{3,2}$ 都必定是由挠点产生的多截面。
2. 任意连续的 n-多截面 $\mathcal{E}_{3,2} \to \mathcal{C}_{3,2}$ 都必定同伦于由挠点产生的多截面；特别地，除非 n 具有 (3.2) 中给出的形式，否则不存在连续的 n- 多截面。

C. McMullen 证明了第一个猜想（见 [BC]的附录）。Chen[Ch] 和 Banerjee-Chen [BC] 证明了第二个猜想的许多情形，不过仍有许多情形尚未解决。作为他们成果的一个例子，我们提到：如果存在连续的 n-多截面，那么 $9|n$；不存在连续的18-多截面；并且任意连续的9-多截面都同伦于 Ψ_9。令人惊讶的是，他们发现了第二个猜想的反例：

定理 3.4（Banerjee-Chen [BC], 定理 1.8）。对于任意 $m \geq 4$，普适光滑三次平面曲线都有一个连通的 $_7$ 光滑 n-多截面 $n = 18J_2(m)$，它与任何由挠点产生的多截面都不同伦。

此类 n 最小的例子是 $n = 216$,432、864、1296、2160，.....。在 [BC] 中构造此类 n多截面并非几何构造。是否存在一种自然的几何构造来构造它们?

3.2 有理多重截面

与上述情形相反，普适光滑的次数为 d 的超曲面 $\mathcal{E}_{d,\ N} \to \mathcal{C}_{d,\ N}$ 有许多有趣的有理多截面；也就是说，这些多截面是有理映射。关键在于，它们仅在 $\mathcal{C}_{d,\ N}$ 的一个扎里斯基开集上有定义。以下是一些例子。

1. 普遍光滑四次曲线 $\mathcal{E}_{4,\ 2} \to \mathcal{C}_{4,\ 2}$ 有一个有理 56 多截面。证明：众所周知，每条光滑四次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 都有 28 条双切线——直线 $L \subset \mathbb{P}^2$在两个点与 C 相切（因此每个交点的重数均为 2）。这些双切线不一定彼此不同，但按重数计数。例如，费马四次曲线 $F := Z(x^4 + y^4 + z^4) \subset \mathbb{P}^2$ 有 12 条标准双切线，

[7]一个多截面 当配备有一个点的光滑平面三次曲线空间多截面是 连通的。

此外还有 16 个点，在这些点处，切线与 F 相交于一个重数为 4 的点，因此共有 40 个相切点。

光滑四次曲线具有一个重数为 4 的切点，这一条件是多项式条件，因此存在一个扎里斯基开集 $U \subset \mathcal{C}_{4,\ 2}$，使得其中每个$C \in U$ 都有 28 条互不相同的双切线，因而有 56 个切点。这给出了 $\mathcal{E}_{4,\ 2} \to \mathcal{C}_{4,\ 2}$ 的一个有理 56 多截面，其定义域为 U。

2. 一般的光滑 $d \geq 3$ 次平面曲线 C有 $3d(d-2)$ 个拐点，按适当重数计数；对于 $d > 3$，必须取扎里斯基开子集 $U \subsetneq \mathcal{C}_{d,2}$，使得其中每条曲线 $C \in U$ 都有 $3d(d-2)$ 个互不相同的拐点。这给出了 $\mathcal{E}_{d,\ 2} \to \mathcal{C}_{d,\ 2}$ 的一个有理 $3d(d-2)$ 多截面。光滑的 $d > 4$ 次平面曲线的双切线也有类似的情况。

3. 每个光滑三次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ 都包含 27 条互不相同的直线。光滑三次曲面的参数空间 $\mathcal{C}_{3,\ 3}$ 中存在一个扎里斯基开子集 U，其中这些直线的集合有 135 个交点。这给出了万有光滑三次曲面 $\mathcal{E}_{3,\ 3} \to \mathcal{C}_{3,\ 3}$的一个有理 135 截面。由于存在所谓的 Eckardt 点（此处三条直线相交），这个截面不是一个态射 $U \subsetneq \mathcal{C}_{3,3},$。

4. 下面是一个更平常的例子。固定 d、$r \geq 1$ 和 $N \geq 2$。对于每条光滑的、次数为 r 的曲线 $C \subset \mathbb{P}^N$，都有一个扎里斯基开集 $U_C \subset \mathcal{C}_{d,\ N}$，其中由那些与 C 相交于 dr 个点的 $\mathbb{P}^N$ 中次数为 d 的光滑超曲面组成。这给出了 $\mathcal{E}_{d,\ N} \to \mathcal{C}_{d,\ N}$ 的一个有理 dr- 多截面。

下面的想法似乎很自然，不过我不知道实现起来有多困难。

问题 3.5（有理多截面的分类问题）。对 $\mathcal{E}_{d,\ N} \to \mathcal{C}_{d,\ N}$ 的所有有理多截面进行分类。

4 周期映射

一种常见的经典构造是，将一个本质上非线性的簇与一个通过线性代数构造的簇联系起来，例如阿贝尔簇。这通常通过霍奇理论实现。本节首先讨论较为经典的（广义）雅可比簇，然后转向更一般的周期域。随后，我们将指出，人们或许希望通过应用指导性原理得到的唯一性结果，与半单李群中格的刚性结果密切相关。

4.1 雅可比簇

将一个簇以规范方式与另一个簇联系起来，最经典的方法是雅可比构造，其历史至少可以追溯到黎曼（甚至阿贝尔）。

例 4.1（雅可比簇）。许多周期映射都是雅可比簇。以下是一些例子；更多例子请参见 Debarre 的综述 [De]。

1. 引言中介绍的经典周期映射 $\mathrm{J}:\ \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g$。一种等价的表述方式，使用的记号更能体现接下来要讨论的内容：若 X 是具有霍奇分解 $H^1(X;\mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$ 的光滑曲线，那么

$$\mathrm{J}(X) := H^{0,1}(X)/H^1(X;\mathbb{Z}).$$

2. 令 $\mathcal{C}_{3,4}$ 为 $\mathbb{P}^4$ 中光滑三次超曲面的参数空间。若 $X \in \mathcal{C}_{3,4}$，则霍奇理论推出 $H^{1,2}(X) \cong \mathbb{C}^5$，并且

$$\mathrm{J}_{3,4}(X) := H^{1,2}(X)/H^3(X;\mathbb{Z})$$

是一个 5 维主极化阿贝尔簇。这给出了一个全纯映射

$$\mathrm{J}_{3,4} : \mathcal{C}_{3,4} \to \mathcal{A}_5$$

称为中间雅可比簇。

3. 设 $X \in \mathcal{M}_g$ 是一条光滑的、亏格为 g 的曲线。任意非零的 $\theta \in H^1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 都确定一个无分歧双覆盖 $p:\ Y \to X$，其甲板变换为 σ。注意，Y 是一条亏格为 $2g-1$ 的曲线。与 (X,θ) 相关联的普里姆簇 $\mathrm{Prym}(X,\theta)$ 定义为

$$\mathrm{Prym}(X,\theta) := \frac{J(X)}{p^*(J(X))}.$$

注意，$\mathrm{Prym}(X,\theta) \in \mathcal{A}_{g-1}$。令

$$\mathcal{R}_g := \{(X,\theta) : X \in \mathcal{M}_g \text{ and } 0 \neq \theta \in H^1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}/\sim$$

其中，若存在同构 $f:\ X_1 \to X_2$ 使得 $f^*\theta_2 = \theta_1$，则 $(X_1,\theta_1) \sim (X_2,\theta_2)$。那么 $\mathcal{R}_g$ 是一个准射影簇，并且映射

$$\mathrm{Prym} : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$$

是一个态射。

这样的构造启发了下面的问题。

问题 4.2（雅可比簇的唯一性）。给定一个 $\mathcal{M}$ 簇的模空间，是否存在一种非平凡的方式，将一个主极化阿贝尔簇全纯地（甚至连续地）随每个 $X \in \mathcal{M}$变化而与之对应？更准确地说，是否存在 $g \geq 1$和一个非常值的全纯映射（或非平凡的连续映射同伦类）$F:\ \mathcal{M} \to \mathcal{A}_g$？每个这样的同伦类是否都由一个全纯映射表示？如果是，这样的映射是否唯一？

指导性原理表明，例 4.1 中的经典构造应当是唯一的。我在 [Fa] 中证明，经典雅可比簇的情形确实如此。

定理 4.3（周期映射的全局刚性）。设 $g \geq 3$ 并假设$h \leq g$。设 $F:\mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_h$ 是复轨形之间的任意非常值全纯映射。则$h = g$ 和 $F = \mathrm{J}$。

与本文讨论的许多结果和问题一样，定理 4.3 的陈述实际上包含两个部分：

1.（拓扑刚性）如果 $g \geq 3$ 和 $h \leq g$ ，且 F： $\mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_h$ 是拓扑轨形之间任意一个连续映射，那么 F 要么是同伦平凡的，要么 $h = g$ 且 F 与经典周期映射 J 同伦。由于 $\mathcal{A}_g$ 是格 Sp($2g, \mathbb{Z}$)作用在一个非正曲率（因而可缩！）对称空间上的商，拓扑刚性归结为理解同态 Mod(S_g) $\to$ Sp($2g, \mathbb{Z}$)。Korkmaz 基本上已经完成了这项工作。

2.（全纯刚性）一般而言，除非像落在一个乘积中，否则全纯映射在其同伦类中通常是唯一的。当目标（例如 $\mathcal{A}_g$）是有界对称域的有限体积商时，Borel-Narasimhan 将同伦类中的这种唯一性归结为存在一个共同像点。找到这样的点可能需要复杂而艰难的论证。在 [Fa] 中，我运用所谓的“Wirtinger 挤压”实现了这一点：将凸性论证应用于 Wirtinger 型不等式，证明全纯映射的同伦在 $\mathcal{M}_g$ 中的每条曲线上都必须是代数变形。利用 Saito 判据，进而证明存在一条刚性曲线 C，从而提供所需的点（ C中的任意一点）。

我在 [Fa] 中猜想，Prym 构造也应当有这样的结果。C. Servan 最近在 [Ser]中证明了这一猜想

定理 4.4（Prym 构造的唯一性）。设 $g \geq 4$ 且设 Let $1 \leq h \leq g-1$。设 F： $\mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_h$ 是复轨形之间任意的非恒定全纯映射。则 $h = g-1$和 F =Prym。

为了证明定理 4.4 中拓扑刚性的部分，Servan 对所有同态进行了分类

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(S_g)}(\theta) \to \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z}),$$

其中 $0 \neq \theta \in H^1$（S_g； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）且 Stab$_{\mathrm{Mod}(S_g)}$（θ）是 θ 在 Mod（S_g）对 H^1（S_g； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）的自然作用下的稳定子。为此，他对所有同态进行了分类

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(S_{2g-1})}(\sigma) \to \mathrm{Sp}(2h, \mathbb{Z}).$$

这个问题以及许多类似问题，为群论和低维拓扑学提供了有趣的研究课题。

将上述内容进一步推广，自然会想到如何将一条曲线与另一条曲线关联起来，或将一个主极化阿贝尔簇（维数任意）与一条曲线关联起来。一个显而易见的构造如下：固定一个曲面的无分歧特征覆盖 p: $S_h \to S_g$。 S_g 上的任意复结构都可以通过 p 拉回为S_h上的复结构，从而诱导出一个全纯映射

$$p^* : \mathcal{M}_g \to \mathcal{M}_h$$

因此得到一个全纯映射 ψ: $\mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_h$，由 ψ: J $\circ p^*$ 给出。我们称这类映射为覆盖构造。请注意，我们需要选择一个特征覆盖，以避免作出任何选择，从而得到一个定义域为 $\mathcal{M}_g$ 的映射，而不是（例如）Prym簇的模空间$\mathcal{R}_g$。C. McMullen 向我提出了以下问题：

问题 4.5（由曲线构造曲线）。所有非常值全纯映射 $\mathcal{M}_g \to \mathcal{M}_h$ 和 $\mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_h$ 是否都来自覆盖构造?

S_g 的最小特征覆盖可能是（最好对此进行核查） S_g的模 2 同调覆盖；在这种情况下，$h = 2^{2g} - 1$。特别地，如果问题 4.5 的答案是“是”，那么任何满足 $h < 2^{2g} - 1$ 的全纯映射 $\mathcal{M}_g \to \mathcal{M}_h$ 都应为常值映射。这个方向上已知的最佳结果归功于 Antonakoudis-Aramayona-Souto[AAS], , 他们证明了当 $h \leq 2g - 2$时该结论成立。

对于分支覆盖，也可以进行类似的构造，并提出一个类似于问题 4.5 的问题；在这种情况下，必须考虑带标记点曲线的模空间。

4.2 其他周期映射与超刚性

许多周期映射取值于有界对称域的其他有限体积商。

例 4.6（光滑四次曲面的周期映射）。设 $X \subset \mathbb{P}^3$ 为一光滑四次曲面。任意此类X 的本原上同调的霍奇分解为

$$H^2(X;\mathbb{C})_{\text{prim}} = H^{0,2}(X) \oplus H^{1,1}(X)_{\text{prim}} \oplus H^{2,0}(X) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{19} \oplus \mathbb{C} \tag{4.1}$$

且 Q_X $(X;\mathbb{C})_{\text{prim}}$ 上的交形式 H^2 的符号为 (2, 19)。由此可知，霍奇分解 (4.1) 由 $H^2(X;\mathbb{C})_{\text{prim}}$ 中的直线 $H^{2,\,0}(X)$ 决定；也就是说，它由射影化 $\mathbb{P}(H^2(X;\mathbb{C})_{\text{prim}}) \cong \mathbb{P}^{20}$ 中的一个点决定。周期映射的取值落在有界对称定义域的商空间中

$$\{[\omega] \in \mathbb{P}^{20} : Q(\omega,\omega) = 0 \text{ and } Q(\omega,\bar{\omega} > 0\} \cong \mathrm{SO}(2,19)^0/\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(19)$$

该商空间是由余有限体积算术格 $\mathrm{Aut}(H^2(X;\,\mathbb{C})_{\text{prim}} \cap H^2(X;\,\mathbb{Z})\ Q_X)$ 作用得到的局部对称拟射影簇，我们将其记为 $M_{2,\,19}$。因此，周期映射是一个态射

$$\Psi : \mathcal{C}_{4,3} \to M_{2,19}$$

其中 $\mathcal{C}_{4,\,3}$ 是光滑四次曲面 $X \subset \mathbb{P}^3$ 的参数空间。

更一般地，周期映射的目标是复流形 N，它是一个纤维丛 $C \to N \to M$，其中 C 是紧齐性空间，而 M 是有限体积的局部对称（但不一定是厄米！）局部对称簇。周期映射由霍奇理论数据构造，这些数据是线性的，并且保持格上的对称双线性形式或辛形式（二者的例子我们上文都已见过）。无论哪种情况，周期映射的目标都是有限体积局部对称簇上的紧齐性空间纤维丛。这些称为周期域 [8]

自然会有人想知道，是否还存在其他线性数据——无论是否基于霍奇理论——可以附加到代数簇族上。

问题 4.7（周期映射的唯一性）。设 $\mathcal{M}$ 是光滑代数簇的模空间。 $\mathcal{M}$上的标准周期映射是否唯一? 更确切地说， $\mathcal{M} \to N$中有哪些非恒定全纯映射（分别有哪些非平凡的连续映射同伦类），其中 N 是一个周期定义域?

[8]有时，这个术语专指它们的万有覆盖。

在我看来，问题 4.7 与实半单李群中格的各种刚性定理密切相关；特别是，它可以被视为马古利斯超刚性定理的推广。超刚性定理指出，若 Γ 是实半单李群 G 中的不可约格，且该群具有有限中心、没有紧因子，并且秩$_{\mathbb{R}}(G) \geq 2$，那么 G 的任意线性表示要么是预紧的，要么在有限指数子群上延拓为 G的一个代数表示。注意，局部对称空间恰好是紧对称空间、平坦环面以及空间 $\Gamma\backslash G/K$的乘积，其中 G 是没有紧因子的半单李群， K 是 G的极大紧子群，而 Γ 是 G 中的格（即有限余体积离散子群）。

我认为，将超刚性解释为一种代数几何刚性会很有趣，也很有用。例如，对于“将一个主极化阿贝尔簇附加到另一个主极化阿贝尔簇上（它们的维数或许不同）有哪些方式？”这个问题，可以通过将超刚性应用于同态 $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}(2h,\mathbb{Z})$来得出答案吗？我们可以（也应该）将这一点推广到层结构。

再举一例，回想一下，库默尔构造以一个阿贝尔曲面 $A = \mathbb{C}^2/\Lambda \in \mathcal{A}_2$为输入，在其十六个 2-扭点 A 处进行 blow-up，并将该 blow-up 按由 $(z,w) \mapsto (-z,-w)$诱导的对合取商，从而得到一个 K3 曲面 $\mathrm{Kum}(A)$。映射 $A \mapsto \mathrm{Kum}(A)$诱导出一个模空间之间的全纯映射

$$\mathrm{Kum} : \mathcal{A}_2 \to M_{2,19}$$

其中 $M_{2,\ 19}$ 是上文定义的局部对称簇。我认为可以证明，在许多可能的构造中，库默尔构造是唯一的。要证明这一点，首先可以验证，超刚性和一些表示论蕴含，任意一个表示

$$\rho : \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{A}_2) \cong \mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z}) \to \mathrm{SO}(2,19)(\mathbb{R})^0$$

与标准的映射共轭，由 Kum 诱导。

5 通过计数几何构造映射

代数计数几何中的各种经典构造，都可以视为模空间间极为非平凡、甚至有时令人惊讶的态射。接下来，我们可以尝试从不同角度刻画这些态射。这里只举一个例子，并鼓励读者寻找其他例子。

回顾上文的记号，$\mathcal{C}_{d,\ N}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中光滑、次数为 d 的超曲面的参数空间。记 $\mathbb{G}(k,n) \cong \mathrm{Gr}(k+1,n+1)$ 为 $\mathbb{P}^n$ 中射影 k 平面的格拉斯曼流形。

凯莱-萨蒙定理指出，每个光滑三次曲面 $X \subset \mathbb{P}^3$ 都包含 27 条互不相同的直线。其背后的理论蕴含映射

$$\Psi : \mathcal{C}_{3,3} \to \mathrm{UConf}_{27}(\mathbb{G}(1,3)) \tag{5.1}$$

是拟射影簇之间的态射。类似地，每条光滑四次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 恰有 28 条双切线；也就是说，是与 C 相切且总重数为 4 的 $\mathbb{P}^2$ 直线（即在两个

[9]实际上，在这种情况下，超刚性归功于 Bass-Milnor-Serre。

重数为 2 的点或一个重数为 4 的点处）。这给出了一个拟射影簇之间的态射

$$\Phi : \mathcal{C}_{4,2} \to \mathrm{UConf}_{28}(\mathbb{G}(1,2)) \tag{5.2}$$

这些映射似乎非常有趣。根据贝祖定理，任意两个三次曲面在 $\mathbb{P}^3$ 中的交集都是次数至少为 9 的曲线，因此，无序的 27 条直线集合决定了该三次曲面；也就是说， Ψ 是单射。类似的论证表明， Φ 也是单射。这些指导原则表明，不存在其他方式，能将任意其他数量的直线构形关联到每个光滑三次曲面或四次曲线上。有人可能会尝试取出连接 27 条直线所有可能交点的全部直线，但这行不通，因为这个数量可能在$\mathcal{C}_{3,\ 3}$ 之间变化（参见上文提到的 Eckardt 点的存在性）。双切线也存在类似的问题。

猜想5.1（唯一性猜想）。设 r， $s \geq 1$。设 F: $\mathcal{C}_{3,\ 3} \to$ UConf$_r$(𝔾(1, 3))以及 $G : \mathcal{C}_{4,\ 2} \to$ UConf$_s$(𝔾(1, 2))为任意连续映射。

1. F 是同伦平凡的，除非 $r = 27$ 且 F 与 (5.1) 中的映射 Ψ 同伦。如果 F 是非常值全纯映射，则 $r = 27$ 且 $F = \Psi$。2. G 是同伦平凡的，除非 $s = 28$ 且 G 与 (5.2) 中的映射 Φ 同伦。如果 G 是非常值全纯映射，则 $s = 28$ 且 $G = \Phi$。

参考文献

[AAS] S. Antonakoudis、J. Aramayona 和 J. Souto，模空间之间的全纯映射，[BC] I. Banerjee 和 W. Chen，《在平面三次曲线上选点：刚性与柔性》，预印本，2021 年 3 月，arXiv:2101.03824。[Ch] W. Chen，《在平面三次曲线上选取互异点的障碍》，*Advances in Math* 340 2018 211 220 ( )，第 – 页。

[CKM] L. Chen、K. Kordek 和 D. Margalit，辫群之间的同态，arXiv:1910.00712（2019 年 10 月）。[De] O. Debarre，《周期与模空间》，载于 *Current Developments in Algebraic Geometry*，MSRI Publ.，第 59 卷，2011 年。[Fa] B. Farb，周期映射的全局刚性， *Journal of Alg. Geom.*，即将出版。[Li] V. Lin，《代数函数、构形空间、Teichm¨uller 空间与新的全纯组合不变量》， *Funct. Anal. and Its Applic.*，第 45 卷，第 3 期，第 204–224 页，2011 年。[Ser] C. A. Serv´an，关于 Prym 映射的唯一性，预印本，2022 年 7 月，arXiv:2207.01704。

芝加哥大学数学系 电子邮件：
bensonfarb@gmail.com