arXiv:2302.06379v2 [math.CO] 2 Apr 2023

托勒密关系及其相关内容

Anna Felikson

谨以此文献给如今本该年满70岁的 *Andrei Zelevinsky*

1 序言：托勒密定理

我们从一个自托勒密（克劳狄乌斯·托勒密，公元2世纪）以来便为人所知的定理开始。他曾利用该定理编制弦表，以便将其应用于天文学。定理表述如下：

给定一个欧几里得圆内接四边形 $ABCD$，则有 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$。

当 $ABCD$ 为矩形时，托勒密定理转化为毕达哥拉斯定理。

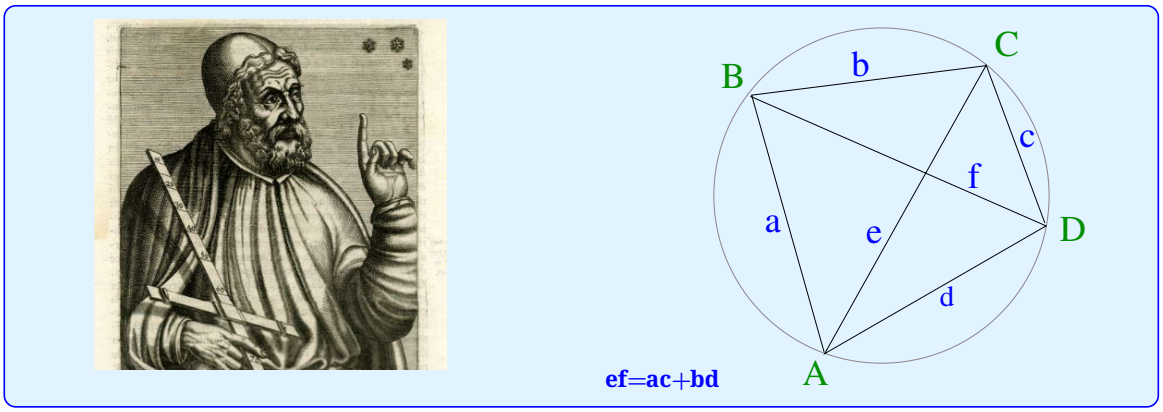


图1：托勒密（左）与托勒密定理（右）。左图：安德烈·泰维为《杰出人物真实肖像与生平》所作的作者不详插图，1584年。© 大英博物馆理事会。

近几十年来，与托勒密定理中的恒等式相似的恒等式开始在许多领域中不断出现，这与 Fomin 和 Zelevinsky 自2000年起引入并研究的簇代数概念有关 [FZ1、FZ2]。在这篇简短的文章中，我们将尝试描述这个庞大而丰富的动物园中的几种动物。

2 Pl¨ucker 关系

考虑实 n 维空间中二维子空间的格拉斯曼流形 $Gr_{2,n} = \{V \mid V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = 2\}$。二维子空间 $V \subset \mathbb{R}^n$ 可以由两个 n 维向量 $(a_{i1}, \dots, a_{in})$，$i = 1, 2$ 张成该子空间来描述，也就是说，它可以由一个秩为 2 的 $2 \times n$ 矩阵描述。记 $p_{ij} = det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$ 为 $Gr_{2,n}$ 上的普吕克坐标。由这些行列式（视为同时缩放等价）组成的集合完全确定了该子空间 V，因此它为 $Gr_{2,n}$ 提供坐标。容易证明，p_{ij} 满足普吕克关系 $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{jk}p_{ki}$，其中 $i < j < k < l$。

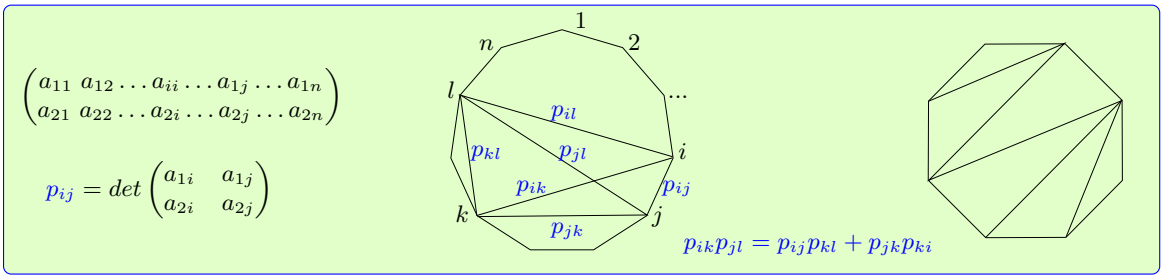


图2：Pl¨ucker 坐标、Pl¨ucker 关系和一个三角剖分。

现在，设 $1,\ldots,n$ 为正 n 边形的顶点（见图 2）。将 p_{ij} 赋给连接 n 边形顶点 i 和 j 的对角线。此时，普吕克关系的形式将与上文的托勒密关系完全相同。

要指定 $Gr_{2,n}$ 中的一个点，需要多少个 Pl¨ucker 坐标？Pl¨ucker 关系表明，并不需要全部 p_{ij}。更确切地说，给定该 n 边形的一个三角剖分（见图 2 右侧），与三角剖分中的对角线及多边形的边相关联的 Pl¨ucker 坐标，足以通过多次应用 Pl¨ucker 关系计算出所有其他 Pl¨ucker 坐标。

3 康威-考克斯特 Frieze模式

一个带状图模式 是如图 3 所示的由正整数构成的网格，共有 $n+2$ 行，首行和末行均由 1 组成，并且每个小菱形菱形规则中的任意四个数字都满足以下规则： $ad-bc=1$。

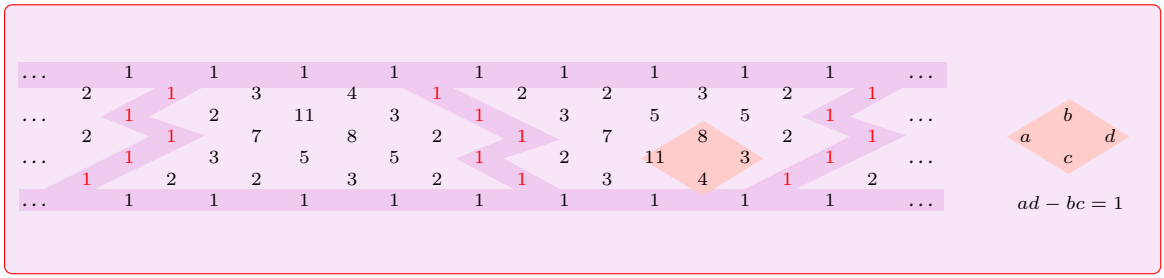


图 3：一幅突出显示了菱形和 1 的之字形排列的带状图。

康威和考克斯特 [CC1, CC2] 证明了，每个带状图模式都是周期性的。此外，如果从两行边界上的 1 和一条连接它们的由 1 组成的之字形开始，就总能利用菱形规则逐个重建各项，从而构造出带状图模式。这样构造出的带状图总是周期性的，周期为 $n+3$，且只由正整数构成。

现在，我们将一个 $(n+3)$ 边形的对角线与带状图模式中的各项对应起来（见图 4）：多边形的边界边对应于带状图的首行和末行中的各项；沿带状图向右移动，对应于多边形的顺时针旋转；而带状图中菱形的相邻项，则对应于具有一个公共顶点、另一个顶点相差一个位置的对角线。这样一来，一条由 1 组成的之字形就对应于给多边形某个三角剖分中的对角线赋值为 1（而每个三角剖分都对应一组项，利用菱形规则即可求出带状图的其余各项）。

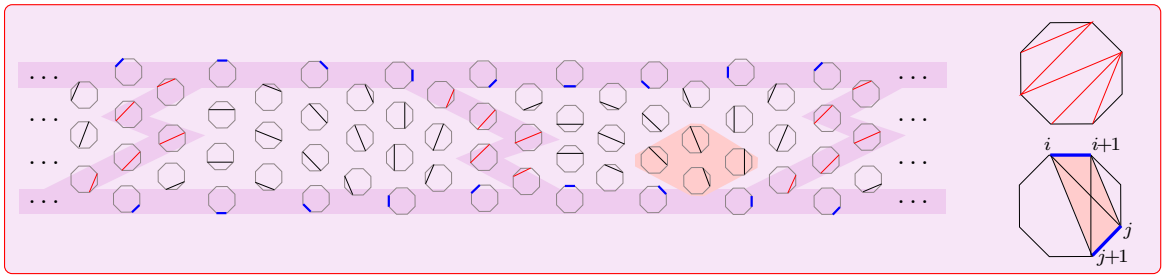


图 4：带状图中的数值与多边形的对角线。

请注意，带状图中的菱形对应于多边形中的四条对角线。更准确地说，将多边形的顶点按顺时针方向标记为 1，2，3，.....，n，便得到四边形的对角线i、$i+1$、j、$j+1$。因此，假设带状图中的数值对应于相应的对角线，我们就会发现，菱形规则恰好呈现出托勒密恒等式的形式（前提是将 1 赋给多边形的边界边）。

如果存在一个圆内接三角剖分欧几里得多边形，其所有边的长度均为 1，且三角剖分中的所有对角线长度也均为 1，那么带状图中的各项就能表示该多边形所有对角线的欧几里得长度。然而，不存在边长为 1 且三角剖分中对角线长度也为 1 的欧几里得多边形。幸运的是，我们可以考虑理想双曲多边形，而不必考虑欧几里得多边形，从而解决这个问题。

4 双曲托勒密与三角剖分曲面

回顾一下，双曲平面的上半平面模型 $\mathbb{H}^2$ 是集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$，其度量由 $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ 给出。在这个模型中，测地线由垂直于实轴的射线和半圆表示。应用映射 $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$，可以将上半平面模型变换为单位圆盘中的庞加莱圆盘模型。更多详情请参见例如 [S] 。

设 $A, B \in \partial\mathbb{H}^2$ 是双曲平面边界上的两个点。它们之间的双曲距离是无限的，但无穷性集中在 $\partial\mathbb{H}^2$ 附近，可以通过如下方式使用 horocycles 加以处理（*horocycle* 是圆心趋近于 $\partial\mathbb{H}^2$ 时圆的极限；在 $\mathbb{H}^2$ 的上半平面模型中，以 ∞ 为中心的 horocycle 表示为一条水平线，以其他点为中心的 horocycles 表示为与 $\partial\mathbb{H}^2$ 相切的圆）。选取分别以 A 和 B 为中心的 horocycles h_A 和 h_B（上半平面模型和圆盘模型中的图示见图 5）。设 l_{AB} 为 horocycles h_A 和 h_B 之间的带符号距离（当两个 horocycles 相切时，l_{AB} 为零；当它们彼此相交时，l_{AB} 为负）。记 $\lambda_{AB} = e^{l_{AB}/2}$ 为 AB 的 λ长度 。

$\mathbb{H}^2$ 中的一个理想多边形是指所有顶点都位于 $\partial\mathbb{H}^2$的多边形。给定一个理想四边形 $ABCD$，并为每个顶点选取一条 horocycle，可以证明$ABCD$ 的 λ长度满足托勒密恒等式 [Pen]:

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{CD} + \lambda_{BC} \cdot \lambda_{DA} = \lambda_{AC} \cdot \lambda_{BD}.$$

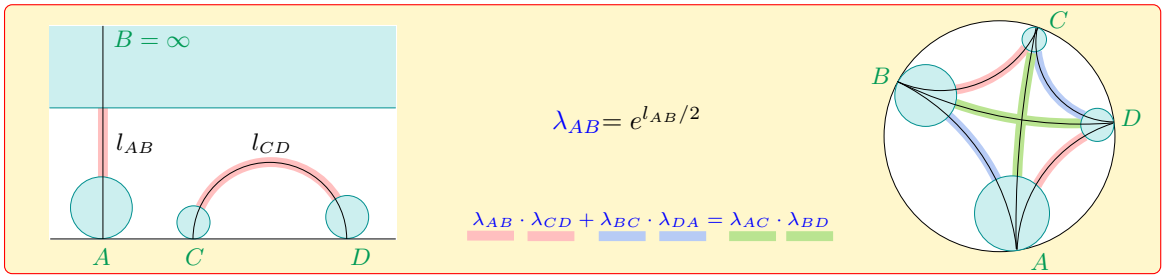


图 5：λ长度：通过 horocycles 消去无穷远

容易证明，给定 a，b，$c > 0$，可以构造一个理想双曲三角形（在等距变换意义下唯一），并在其顶点处选取 horocycles，使得 $a = \lambda_{BC}$，$b = \lambda_{AC}$，$c = \lambda_{AB}$。此外，可以沿着具有相同 λ长度的边将三角形拼接起来。因此，给定一个三角剖分多边形，并为其边及三角剖分中的对角线赋予正数，就可以构造一个理想双曲多边形，并在其顶点处指定 horocycles，使得每条对角线所赋的数值都与对应的 λ长度一致。特别地，这意味着上述每个 Frieze模式都可以用一个双曲多边形来表示。

类似地，给定一个三角剖分曲面 S，并为三角剖分中的弧指定一组正数，就可以定义唯一的双曲结构（以及三角剖分所有顶点处唯一确定的 horocycles），使得指定的数与相应弧的 λ长度一致。换句话说，S 的三角剖分中各弧的 λ长度为该曲面的带标记 Teichmüller 空间提供坐标。

5 个来自曲面的 Frieze图

设 (S, M) 是一个带有一组标记点 M 的曲面 S。我们假设可以对其进行三角剖分S，使每个三角形的顶点都是标记点。令 E 为 (S, M) 上的弧集。可以按以下方式，将带状图的定义从多边形推广到一般的带标记曲面。

来自 (S, M) 的一个带状图 φ 是一个映射 $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$，它为每条弧 $\gamma \in E$ 指定一个实数 $\varphi(\gamma)$，并且曲面上的每个四边形都满足托勒密关系。一个带状图 φ 是

- 如果所有数值 $\varphi(\gamma)$ 都是正的，则为正的；
- 如果所有数值 $\varphi(\gamma)$ 都是整数，则为整数的；
- 如果存在 (S, M) 的一个三角剖分 T，使得对于所有 $\gamma \in T$，$\varphi(\gamma) = 1$，则为幺正的 。

问题： 给定一个带标记曲面 (S, M)，是否每个来自 (S, M) 的正整数镶嵌都是幺正的?

当 S 是一个具有 n 个边界点的圆盘（即多边形）时，Conway-Coxeter 定理 [CC1, CC2] 给出了肯定的答案。因此，可以预期一般情形下也是如此。然而， [FP] 证明，对于带标记多边形（ D 型的带状图），答案是否定的。后来，人们对环带 [GS] 和裤子曲面 [CGFT] 得到了肯定的答案。除此之外，据我们所知，关于来自曲面的正整数镶嵌是否具有酉性的这个问题仍未解决。

6 赋格：簇代数

上文出现的所有例子都可以描述为簇代数的不同体现。我们将简要介绍簇代数的基本思想，并通过一个来自曲面的簇代数例子加以说明。

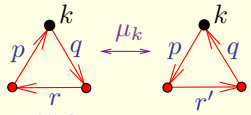
6.1 箭图、种子、簇.....

箭图变异。 我们从一个箭图 Q开始，也就是一个具有有限个顶点的有向图，顶点标记为 1、.....、 n，并且有 $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ 条从顶点 i 指向顶点 j 的箭头。我们假设箭图中不含环（ $b_{ii} = 0$ ），也不含二循环（此处， p 条从 i 指向 j 的箭头视为 $-p$ 条从 j 指向 i 的箭头，因此 $b_{ij} = -b_{ji}$ ）。当 $b_{ij} = 1$ 时，我们省略箭图中相应箭头上的标记。

接下来，我们将选取箭图的一个顶点 k ，并定义对 Q 的变异 μ_k ，将 Q 变为$Q' = \mu_k(Q)$ 。它只在顶点 k 附近的一个小范围内与 Q 不同，在远离 k的地方则与 Q 一致。 μ_k 对 Q 的作用可以分为两步来解释：

(1) 反转所有箭头
与顶点 k相连的;

(2) 对于每条满足 $p,\ q > 0$
的路径 $i \xrightarrow{p} k \xrightarrow{q} j$，应用:

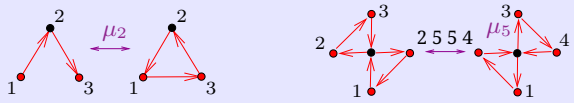


其中 $r + r' = pq$

这对应于以下公式

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{if } i = k \text{ or } j = k \\ b_{ij} + \frac{1}{2}(|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 1。
箭图变异。



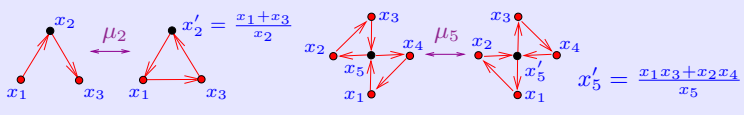
种子变异。 一个种子是一个有序对 $(Q,\ \mathbf{u})$，其中 Q 是一个箭图，而 $\mathbf{u} = (u_1,\ .....,\ u_n)$ 是一个由代数无关有理函数组成的 n 元组 $u_i(x_1,\ .....,\ x_n)$，这些函数以变量 x_i 为变量。函数 u_i 与 Q的顶点 v_i 相关联。在初始种子中，我们假设 $u_i = x_i$。

沿方向 k 的变异 μ_k 会将种子 $(Q,\ \mathbf{u})$ 变为 $(Q',\ \mathbf{u}')$，其中 $Q' = \mu_k(Q)$ 是通过上述箭图变异得到的，而$\mathbf{u}' = (u'_1,\ .....,\ u'_n)$，其中对所有 $i \neq k$， $u'_i = u_i$ 并且

$$u'_k = \frac{\prod\limits_{i \to k} u_i^{b_{ik}} + \prod\limits_{j \leftarrow k} u_j^{b_{kj}}}{u_k},$$

其中，乘积是对所有满足以下条件的顶点 i 取的：存在一条指向该顶点的箭头 $i \to k$ （分别为一条从该顶点指出的箭头 $j \leftarrow k$），其权重为正数 $b_{ik} > 0$ （分别为 $b_{kj} > 0$）。上述关系称为交换关系。注意，变异是一个对合，即 $\mu_k(\mu_k(Q,\ \mathbf{u})) = (Q,\ \mathbf{u})$。

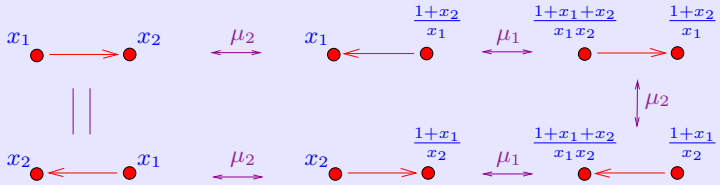
例 2。
种子变异。



通过反复进行种子变异，从 $x_1, \ldots, x_n$ 得到的函数 $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ 称为簇变量。一个种子中包含的簇变量集合称为一个簇。设 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ 是变量 x_i、 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的有理函数域。簇代数 $\mathcal{A}(Q)$ 是由所有簇变量生成的 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ 的 $\mathbb{Q}$-子代数。

例3。
类型为 A_2：5 个种子，5 个簇变量

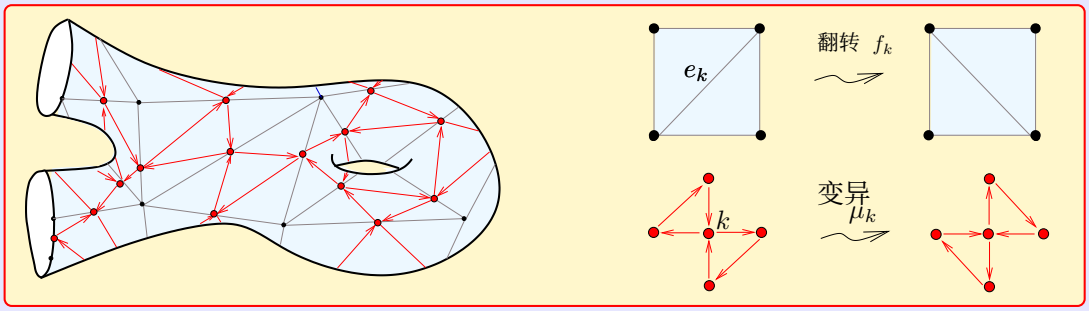
（经过 5 次变异后的种子与初始种子相同，只差顶点的一个排列）



Laurent现象（[FZ1]）： 在簇代数中，每个簇变量 $u_i(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 都是关于 $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 的 Laurent 多项式，即 $u = P_{(x_1,\ldots,x_n)}/Q(x_1,\ldots,x_n)$，其中 $Q(x_1, \ldots\ldots, x_n) = x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$是一个单项式。

6.2 簇代数的例子

例4（来自三角剖分曲面的簇代数）。给定一个三角剖分曲面，可以如下图所示构造一个箭图。这里箭图的每个顶点 i 都对应三角剖分中的一条弧 e_i。容易验证，箭图的变异 μ_i 对应于三角剖分中相应边 e_i 的翻转。



对于一个三角剖分曲面，箭图中与 Q 相邻的部分 k（因此定义了变异 μ_k）如例 2 所示，而 交换关系 变为

$$u_k' = \frac{u_i u_j + u_l u_m}{u_k},$$

这与托勒密关系（或 Pl¨ucker 关系）相同。

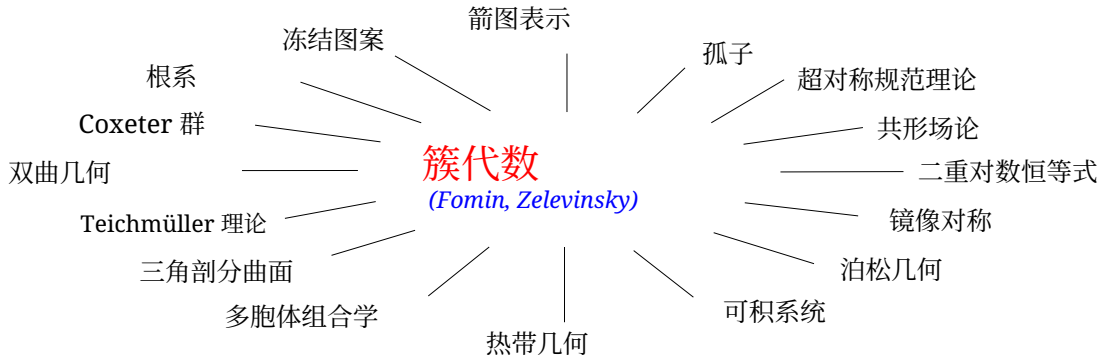
给定一个三角剖分曲面以及赋给三角剖分中各弧的初始值 $x_1, \ldots\ldots, x_n$，可以构造一个唯一的双曲曲面，并在顶点周围选取 horocycles，使得 x_i 与相应弧的 λ长度一致。对初始种子进行一系列迭代变异，对应于对三角剖分依次进行一系列翻转；作为 $\{x_i\}$ 的函数的簇变量将与相应弧的 λ长度一致，而簇则对应于一个三角剖分中各弧的 λ长度集合。参见 [FST] 和 [FT]。

例5。（来自格拉斯曼流形 $G_{2,n}$ 的簇代数）。给定一个 n边形 P及其三角剖分T，可以像例4中那样讲述同样的故事。由该三角剖分构造一个箭图 Q： Q 的顶点对应于 P的对角线和边。与连接顶点 i 和 j 的对角线相关联的簇变量，现在被确定为 Pl¨ucker 坐标 p_{ij}。交换关系的形式为 $p_{jl} = \frac{p_{ij}p_{kl}+p_{jk}p_{ki}}{p_{ik}}$，并且可以被确定为 Pl¨ucker 关系。我们在 $G_{2,n}$ 上的有理函数环中得到一个簇代数，其中簇对应于与某个三角剖分中的对角线相关联的 Pl¨ucker 坐标集合。

例6。 （Frieze图与簇范畴）簇范畴由 [BMRRT] 引入，用于对簇代数作范畴化解释。对于一个与三角剖分多边形相关联的簇代数（采用良好的三角剖分），簇范畴可以表示为一个带状图，其中每个条目都被一个在 kQ 上的有限生成模所替代（这里 Q 是与该三角剖分对应的箭图，而 k 是一个代数闭域）。簇代数与相应的簇范畴之间存在紧密联系；特别是，许多关于簇代数的结果都是借助簇范畴建立的。参见 [MG] 对 Frieze图的综述，以及 [Pr] 中关于通向簇范畴的桥梁。

6.3 结论

托勒密定理与近期的簇代数理论有着密切联系。自 Fomin 和 Zelevinsky 引入簇代数以来，簇代数与数学及数学物理中的众多领域建立了联系，并得到广泛应用。这包括（但不限于！）以下内容：



相关链接 与簇代数相关的资料汇集于由 Sergey Fomin 可以从 [W], [M] 和 [FR] 开始阅读。

注记 1. 另一系列与托勒密关系相关的结果源于托勒密不等式，该不等式指出，对于欧几里得平面中的任意四边形 $ABCD$，$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$。具有这一性质的度量空间称为托勒密空间。度量空间是 CAT(0) 空间，当且仅当它是托勒密空间且布塞曼凸，参见 [FLS]。

7 回到托勒密：无字证明

基于各种思路（相似变换、反演、三角不等式等），已有许多关于托勒密定理和托勒密不等式的证明。最后，我们给出一个“无字证明”（见 [DH]，并由 cut-the-knot 门户推广开来）。

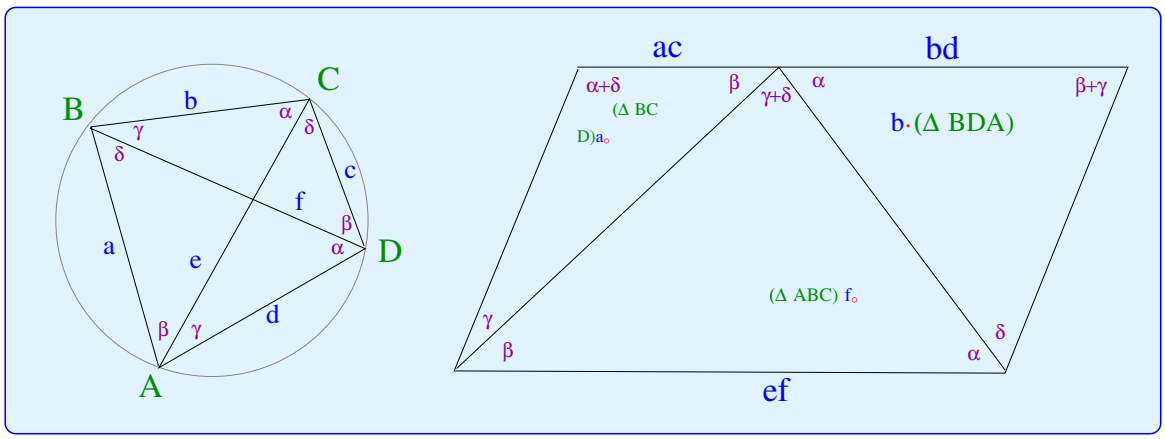


图 6：托勒密定理：ef=ac+bd

致谢。 作者感谢谢尔盖·塔巴奇尼科夫的鼓励；感谢帕维尔·图马尔金、GilBor 和叶夫根尼·斯米尔诺夫的热心讨论，以及他们对本文早期版本提出的宝贵建议；还要感谢 Ilke C¸anak¸cı 耐心讲解簇、freizes 与簇范畴之间的联系。

参考文献

[BMRRT] A. Buan、B. Marsh、M. Reineke、I. Reiten、G. Todorov，《倾斜理论与簇组合学》，Adv. Math., 204, n.2 (2006) 572–618。arXiv:math/0402054[CGFT] I. C¸anak¸cı、A. Felikson、A. Garcia-Elsener、P. Tumarkin，《裤子曲面镶边》，S´eminaire Lotharingien de Combinatoire 86B: 32. (2022)。arXiv:2111.13135[CC1] J. Conway、H. S. M. Coxeter，《三角剖分多边形与Frieze模式》，Math. Gaz., 57, n.400, (1973), 87–94。[CC2] J. Conway、H. S. M. Coxeter，《三角剖分多边形与Frieze模式》，Math. Gaz., 57, n.401, (1973), 175–183。[DH] W. Derrick、J. Herstein，《无字证明：托勒密定理》，The College Mathe- matics Journal, v.43, n.5 (2012), 386。[Fel] A. Felikson，《托勒密关系及其相关内容：资源》，https://www.maths.dur.ac.uk/ users/anna.felikson/Projects/Ptolemy-res.html（网页）。[FLS] T. Foertsch、A. Lytchak、V. Schroeder，《非正曲率与托勒密不等式》，Int. Math. Res. Notices (2007), 1–15。arXiv:0705.1042[F] S. Fomin，簇代数门户，http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin/cluster. html[FR] S. Fomin、N. Reading，《根系与广义结合多胞体》，Geometric Combinatorics (Park City, UT, 2003), IAS/Park City Math. Ser., 14, pp. 63–131. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007。arXiv:math/0505518[FST] S. Fomin、M. Shapiro、D. Thurston，《簇代数与三角剖分曲面。第一部分：簇复形》，Acta Math. 201 (2008), 83–146。arXiv:math/0608367[FT] S. Fomin、D. Thurston，《簇代数与三角剖分曲面。第二部分：λ长度》，Mem. Amer. Math. Soc. 255 (2018), no. 1223, v+97。arXiv:1210.5569[FZ1] S. Fomin 和 A. Zelevinsky，《簇代数 I：基础》，J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497–529。arXiv:math/0104151[FZ2] S. Fomin 和 A. Zelevinsky，《簇代数 II：有限型分类》，Invent. Math. 154 (2003), 1, 63–121。arXiv:math/0208229[FP] B. Fontain、P. Plamondon，《D_n型带状图的计数》，J. Alg. Comb. 44.2 (2016), 433–445。arXiv:1409.3698[GS] E. Gunawan、R. Schiffler，《镶边向量与酉镶边》，J. Comb, 11, n.4 (2020), 681–703。arXiv:1806.00940[M] B. R. Marsh，《簇代数讲义》，Zurich lectures in Advanced Mathematics。European Mathematical Society，2014。[MG] S. Morier-Genoud，《考克斯特镶边图案：处于代数、几何与组合学交汇点》，Bull. Lond. Math. Soc., 47, n.6 (2015), 895–938。arXiv:1503.05049[Pen] R. Penner，《带穿孔曲面的装饰Teichm ¨uller空间》，Comm. Math. Phys. 113, n.2 (1987), 299–339。[Pr] M. Pressland，《从Frieze模式到簇范畴》，将发表于《代数与表示论的现代趋势》，London Mathematical Society Lecture Notes，Cambridge University Press，由 David Jordan、Nadia Mazza 和 Sibylle Schroll 编辑，arXiv:2010.14302。[S] C. Series，《双曲几何》，讲义，Warwick，2013。[W] L. Williams，《簇代数：简介》，Bull. Amer. Math. Soc. 51 (2014) n1, 1–26。arXiv:1212.6263。