Khalimsky 圆的拓扑复杂度

RYUSEI YOSHISE

ABSTRACT. 我们确定了一系列与圆 S^1弱同伦等价的有限空间的拓扑复杂度，并给出了一个满足不等式 tc(X) <cat($X\times X$) 的有限空间 X。这回答了 K. Tanaka 在 [Tan18] 中提出的关于有限空间拓扑复杂度的两个猜想。

arXiv:2302.06380v1 [math.AT] 13 Feb 2023

拓扑复杂度最初由 M. Farber 在 [Far03] 中引入，作为一种与机器人运动规划问题相关的数值同伦不变量。它吸引了许多作者的研究，例如 Mark Grant、Jesus Gonz´alez、Don Davis、Lucil Vandembroucq、Alexander Dranishnikov、Norio Iwase 等。近年来，许多作者为离散空间或有限空间定义了不同版本的拓扑复杂度。例如，K. Tanaka 引入了组合复杂度 [Tan18], ，D. Fern´andez-Ternero、E. Mac´ías-Virg´os、E. Minuz 和 J. A. Vilches [FTMVMV18] 引入了离散拓扑复杂度，而 J. Gonz´alez [Gon18] 引入了单纯复形复杂度。

空间的拓扑复杂度 X 定义如下：对于空间 X，令 PX 为 X上的路径空间，更准确地说，是从单位区间 $[0,1]$ 到 X的所有连续映射的集合，并赋予投影 π： $PX \to X\times X$，其定义为 $\pi(\gamma) = (\gamma(0)\ \gamma 1))$。空间 X 的拓扑复杂度 tc(X) 是满足以下条件的最小数目 $m \geq 0$： $X\times X$可被$m+1$个开子集覆盖，并且在每个开子集上都有到 π的截面，即截面范畴的（参见 James[Jam95]）。令 π_0： $LX \to X$ 为 π 对 $\{*\}\times X \approx X$的限制。于是我们得到一个类似但更经典的不变量，称为 L-S 类别 cat X；它是满足以下条件的最小数目 $m \geq 0$: X可被 $m+1$ 个开子集覆盖，并且在这些开子集上都有到 π_0的截面。由于 LX是可缩的，覆盖中的每个开集在 X中都是可缩的，换言之，它们是范畴的。于是，以下不等式是众所周知的:

$$\operatorname{cat}(X) \leq \operatorname{tc}(X) \leq \operatorname{cat}(X\times X) \leq (\operatorname{cat}(X)+1)^2 - 1.$$

日期：2023年2月14日。2010 数学主题分类。主要分类：55M30，次要分类：06A07、54H30、55P10。关键词和短语。有限空间，拓扑复杂度，数字拓扑。1

在本文中，我们考察有限空间的拓扑复杂度和 L-S 类别，尽管它完全由组合结构决定。

对于 $n \geq 2$，我们将 $\mathbb{S}^1_n$ 称为具有 $2n$ 个点的 Khalimsky 圆：

$$\mathbb{S}^1_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}; b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\},$$

其拓扑由开子基 $\{a_i, b_i, a_{i+1}\}$ 决定，其中 i 遍历 $\mathbb{Z}/n$。于是，$\mathcal{K}(\mathbb{S}^1_n)$ 是一个圆复形，具有 n 个零胞腔和 n 个一胞腔。我们注意到，$\mathbb{S}^1_n$ 与拓扑圆 S^1 弱同伦等价；更确切地说，存在一个从 $S^1 = |\mathcal{K}(\mathbb{S}^1_n)|$ 到 $\mathbb{S}^1_n$ 的弱同伦等价。因此，Khalimsky 圆是观察实现的拓扑复杂度与有限空间的拓扑复杂度之间差异的良好例子。

最近，Tanaka 在 [Tan18], 中证明了 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_2) = \mathrm{cat}(\mathbb{S}^1_2 \times \mathbb{S}^1_2) = 3$，以及 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_3) = \mathrm{cat}(\mathbb{S}^1_3 \times \mathbb{S}^1_3) = 2$；而我们知道，对于拓扑圆 S^1，$\mathrm{tc}(S^1) = 1$ 且 $\mathrm{cat}(S^1 \times S^1) = 2$。更近来，S. Kandola 在 [Kan19] 中证明了，对于 $n \geqq 3$ 中的所有对象，$\mathrm{cat}(\mathbb{S}^1_n \times \mathbb{S}^1_n) = 2$。在 [Tan18], 中，K. Tanaka 提出了关于有限空间的拓扑复杂度的两个猜想。

猜想 0.1. *(1)* [Tan18，猜想 4.16] 对任意 $= 2$， $k \geq 1$，拓扑复杂度 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_{2^k})$.

(2) [Tan18，猜想 3.11] 存在一个有限空间 X，满足 拓扑复杂度(X) $<$ LS 范畴$(X \times X)$.

本文旨在回答上述问题。更确切地说，我们通过给出以下结果，对问题 (1) 给出否定回答，对问题 (2) 给出肯定回答。

定理 0.2. *Khalimsky* 圆的组合复杂度 $\mathbb{S}^1_n$ 如下：

$$\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_n) = \begin{cases} 3, & n = 2, \\ 2, & n = 3, 4, \\ 1, & n \geq 5. \end{cases}$$

1. Finite T_0-spaces

有限空间有一个有限的 T_0 子空间作为其强形变收缩（例如，参见 J. A. Barmak[Bar11，注 1.3。2] ）。因此，从同伦论的观点来看，有限空间与有限 T_0 空间并无区别。除非另有说明，以下我们均在有限 T_0 空间范畴及其间的连续映射中工作。

首先，P. Alexandroff 在 [Ale41] 中指出，有限 T_0-空间与有限偏序集之间存在一一对应：对于给定的有限 T_0-空间 X，其拓扑为一族开集 $\mathcal{O}$，我们定义关系 $\prec_{\mathcal{O}}$ 如下：对于 $x,\ y \in X$,

$$x \prec_{\mathcal{O}} y \overset{\text{def}}{\iff} \text{for any } U \in \mathcal{O},\ y \in U \text{ implies } x \in U.$$

那么 $\prec_{\mathcal{O}}$ 就在 X 上赋予了偏序集结构，因为 $\mathcal{O}$ 是一个 T_0-拓扑。反过来，对于具有偏序集结构 $\prec$ 的有限偏序集 P，我们在 P 上定义拓扑 $\mathcal{O}_{\prec}$：对于 $V \subset P$,

$$V \in \mathcal{O}_{\prec} \overset{\text{def}}{\iff} x \in V \text{ iff } x \prec y \text{ for some } y \in V.$$

那么， $\mathcal{O}_{\prec}$ 是 P上的一个 T_0拓扑。因此，有限 T_0空间是一个有限偏序集，反之亦然。这意味着，有限空间的同伦理论性质可以用组合方式描述。

其次，C. McCord 在 [McC00]中展示了有限偏序集与有限抽象单纯复形（简称 asc）之间的紧密联系：对于有限偏序集 P，我们得到一个序复形$\mathcal{K}(P)$，使得 $\sigma \in \mathcal{K}(P) \iff \sigma$是 P的一个全序子集。反过来，对于有限单纯复形 K，我们得到一个有限偏序集 $\chi(K) = (K, \prec)$，使得 $\tau \prec \sigma \iff \tau \subset \sigma$。我们注意到， $\mathcal{K}(\chi(K))$无非就是 K的重心细分。

在 [McC00], McCord 中进一步得到，对于有限 T_0空间 X （事实上是一个偏序集），存在从 $|\mathcal{K}(X)|$ 到 X的弱同伦等价；此外，对于有限单纯复形 K，存在一个弱同伦等价 $|K| \to \chi(K)$。但遗憾的是，这并不意味着 tc($|\mathcal{K}(X)|$) = tc(X)，也不意味着 LS 范畴($|\mathcal{K}(X)|$) = LS 范畴 (X)。例如，我们有 tc(S^1) $= 1 \neq 3 =$tc($\mathbb{S}^1_2$)，且 LS 范畴 ($S^1 \times S^1$) $= 2 \neq 3 =$LS 范畴($\mathbb{S}^1_2 \times \mathbb{S}^1_2$)。

即使对于有限 T_0-空间之间的映射 $f, g: X \to Y$，我们也采用通常的同伦记号，即 $f \simeq g$ 当且仅当存在一个连续映射 $H: X \times I \to Y$ 使得$H(x, 0) = f(x)$ 且 $H(x, 1) = g(x)$。在这种情况下，我们照常称 f和 g同伦。

定理 1.1 (Stong). 设 $f, g: X \to Y$ 是有限 T_0-空间之间的两个映射。那么， $f \simeq g$当且仅当存在一个映射序列 $f_0, f_1, \ldots, f_n$ 使得

$$f = f_0 \prec f_1 \succ f_2 \prec \cdots f_n = g.$$

定理 1.2 (McCord). 设 $f, g: X \to Y$ 是有限 T_0-空间之间的两个同伦映射。那么，两个映射 $|\mathcal{K}(f)|, |\mathcal{K}(g)|: |\mathcal{K}(X)| \to |\mathcal{K}(Y)|$ 是同伦的。

第三，设 X 是一个有限的 T_0-空间，它自然构成一个偏序集。记为

$$[a, b]_X = \{x \in X | a \prec x \prec b\}, \quad [a, -]_X = \{x \in X | a \prec x\} \text{ and } [-, b]_X = \{x \in X | x \prec b\}.$$

若不会造成混淆，我们将 $[a, b] = [a, b]_X$、 $[a, -] = [a, -]_X$和 $[-, b] = [-, b]_X$简记为。

按照 [Bar11], 的说法，如果 $[x, -] \setminus \{x\}$ 有一个最小元，我们就称点 $x \in X$ 为上节拍点；对偶地，如果 $[-, x] \setminus \{x\}$ 有一个最大元，则称点 $x \in X$ 为下节拍点。上节拍点或下节拍点统称为节拍点。

注意 t，若 x 是 X 的节拍点，则 $X \setminus \{x\}$ 是 X 的强形变收缩 .

定义 1.3。 如果一个有限 T_0空间没有拍点，则称其为极小的。有限空间 X 的核是 X的强形变收缩，并且是一个极小的有限 T_0空间。

Stong 对有限空间给出了以下结果。

定理 1.4。 极小有限空间之间的同伦等价是一个同胚。特别地，有限空间的核在同胚意义下是唯一的，并且两个有限空间同伦等价，当且仅当它们的核同胚。

如果 x 是一个拍点，我们称存在一个从 X 到 $X \setminus \{x\}$的初等强塌缩，并记为 $X \searrow\!\!\!\searrow^{e} X \setminus \{x\}$；或者称存在一个从 $X \setminus \{x\}$ 到X 的初等强扩张，并记为 $X \setminus \{x\} \nearrow\!\!\!\nearrow_{e} X$。强塌缩 $X \searrow\!\!\!\searrow Y$ 或强扩张 $Y \nearrow\!\!\!\nearrow X$ 是从 X 开始、以 Y结束的一系列初等塌缩。根据定义，我们有以下定理。

定理 1.5。 设 $A \subset X$。当且仅当 A 是X的强形变收缩时， $X \searrow\!\!\!\searrow A$ 。

对于有限空间 X的开覆盖 $\mathcal{U}$，如果对于$\mathcal{U}$中的每个开集 U，都存在 X 中的某些极大元 m_0、 m_1、.....、 m_l，使得

$$U = \bigcup_i [-, m_i]_X.$$

定理 1.6。 设 X 是拓扑复杂度为$\mathrm{tc}(X) = k$的有限空间。则存在一个由 $k+1$ 个截面范畴化开子集组成的 $X \times X$ 主开覆盖。

证明。 对于有限拓扑空间 Y的子集族 $\mathcal{V}$，定义

$$\mathcal{V}_M = \{V_M \mid V \in \mathcal{V}\},$$

其中 $V_M = \bigcup_{m \in M(Y) \cap V} [-, m]$。我们指出，若 V 是开集，则 V_M 是 V 的子集。因此，对于 Y 的任意开覆盖 $\mathcal{O}$， $\mathcal{O}_M$ 也是 Y 的一个开覆盖，并且是 $\mathcal{O}$ 的细分。在我们的情形中，由于拓扑复杂度$(X) = k$，我们有 $X \times X$ 的一个开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1 \ldots, V_k\}$。因此，对于有限空间 X， $\mathcal{U} = \mathcal{V}_M$ 给出了我们所需的 $X \times X$ 的开覆盖。□

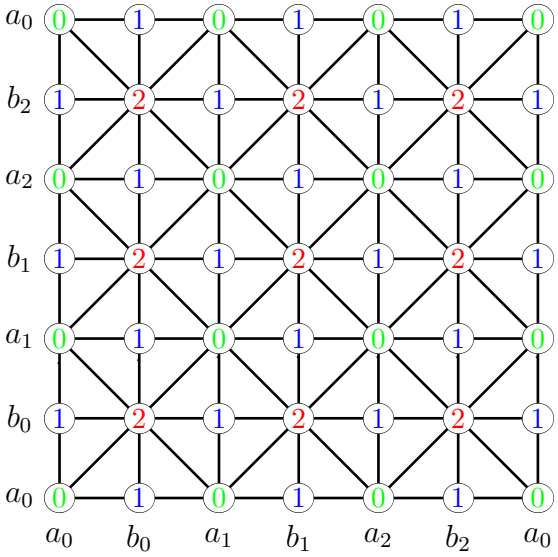


FIGURE 1. $\mathbb{S}^1_k \times \mathbb{S}^1_k$的偏序集结构

2. THE PROOF OF $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_k) = 1$, $k \geq 5$

下面的定理是证明拓扑复杂度$(\mathbb{S}^1_k) = 1$, $k \geq 5$ 的关键，并将在附录中证明。

定理2.1. 给定两个不同的映射 $f, g: \mathbb{S}^1_m \to \mathbb{S}^1_n$, f， g 是同伦的，当且仅当存在某个 d 使得度 $f =$度 $g = d$ $|d| < m/n$。

这立即推出以下定理。

定理2.2. 拓扑复杂度$(\mathbb{S}^1_k) = 1, \quad k \geq 5.$

证明。 令 $k \geq 5$。只需证明 TC$(\mathbb{S}^1_k) \leq 1$，因为我们知道 $1 =$拓扑复杂度$(|\mathbb{S}^1_k|) \leq$ 拓扑复杂度$(\mathbb{S}^1_k)$。从现在起，我们将 $\mathbb{S}^1_k$ 中的元素 a_i 和 b_i 分别记作整数 $2i{+}1$ 和 $2i{+}2$。首先，我们引入一个开集 $U \subset \mathbb{S}^1_k \times \mathbb{S}^1_k$。

$$U = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

其中 A_i' 定义如下。

$$A_0 = \{1,2,\ldots,2k{-}1\}\times\{1,2,3\}$$
$$A_1 = \{m,m{+}1,m{+}2\}\times\{3,4,\ldots,2k{-}1\}$$
$$A_2 = \{m{+}2,m{+}3,\ldots,2k,1\}\times\{2k{-}3,2k{-}2,2k{-}1\}$$
$$A_3 = \{1,2,\ldots,m{-}2\}\times\{5,6,\ldots,2k{-}1\}$$
$$A_4 = \{1,2,3\}\times\{2k{-}1,2k,1\}$$

其中 $m = \begin{cases} k, & k:\text{奇数} \\ k{+}1, & k:\text{偶数}。 \end{cases}$

令 V为 $\mathbb{S}^1_k\times\mathbb{S}^1_k\setminus U$的最小开邻域。我们通过证明 $\pi_1|_U \simeq \pi_2|_U$ 和 $\pi_1|_V \simeq \pi_2|_V$来完成证明。

其次，对每个非负整数 $i \le 2k{-}m{-}3$，我们定义一个连续映射 $f_i\colon U\to U$，其定义如下:

$$f_i(x,y) = \begin{cases} (k_i,y), & (x,y)\in A_0\cap\{(x,y)\mid k_i\le x\}\subset U, \\ (l_i,y), & (x,y)\in A_3\cap\{(x,y)\mid \max\{3,l_i\}\le x\}\subset U, \\ (x,y), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $k_i = 2k{-}1{-}i$, $l_i = m{-}2{-}i$，使得若 $(k_i,\ y)$，则 $\in A_0\subset U$；若 $(x,\ y)$，则 $\in A_0$；若 $(l_i,\ y)$，则 $\in A_3\subset U$；若 $(x,\ y)$，则 $\in A_3$。由于 A_0 和 A_3 不相交，因此 f_i 定义良好。

于是我们可以很容易地看出 $f_i\prec f_{i+1}$ 或 $f_i\succ f_{i+1}$，从而得到 $f_i\simeq f_{i+1}$。因此，我们有$1_U = f_0\simeq f_{2k-m-3}$，进而得到 $U_1 = f_{2k-m-3}(U)$ 是 U的变形收缩。由于 $k\ge 5$，我们有 $m{+}2\le k{+}3\le 2k{-}1$ 和 $3\le k\le m$，并且可以很容易地看出以下等式。

$$C_1 = A'_0\cup A_1\cup A_2\cup A'_3\cup A_4\cup A_5$$

其中，$A'_0\subset A_0$ 和 $A'_3\subset A_3$ 定义如下。

$$A'_0 = \{1,2,\ldots,m{+}2\}\times\{1,2,3\}\subset A_0$$
$$A'_3 = \{1,2,3\}\times\{5,6,\ldots,2k{-}1\}\subset A_3.$$

第三，对于每个非负整数 $0\le i\le 2k{-}8$，我们定义连续映射 $g_i\colon C_1\to C_1$，如下所示:

$$g_i(x,y) = \begin{cases} (x,5{+}i), & (x,y)\in A'_3\cap\{(x,y)\mid y\le 5{+}i\}\subset C_1, \\ (x,y), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $(x,5{+}i)\in A'_3\subset C_1$，只要 $(x,y)\in A'_3$，g_i就是良定义的。

那么我们很容易看出 $g_i \simeq g_{i+1}$。因此我们有 $1_{C_1} = g_0 \simeq g_{2k-8}$，从而得到 $C_2 = g_{2k-8}(C_1)$ 是 U_1 的变形收缩。

由于 $k \geq 5$，我们有 $5 \leq 2k-3$，并且很容易得到以下等式。

$$C_2 = A_0' \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3'' \cup A_4 \cup A_5$$

其中， $A_3'' \subset A_3'$ 如下给出。

$$A_3'' = \{1,2,3\} \times \{2k-3, 2k-2, 2k-1\}$$

第四，我们定义连续映射 $h_0 : C_2 \to C_2$，如下:

$$h_0(x,y) = \begin{cases} (x+1,y), & (x,y) \in A^{\rightarrow}, \\ (x-1,y), & (x,y) \in A^{\leftarrow}, \\ (x,y+1), & (x,y) \in A^{\uparrow}, \\ (x,y-1), & (x,y) \in A^{\downarrow}, \\ (x-1,y+1), & (x,y) \in A^{\nwarrow}, \\ (x+1,y-1), & (x,y) \in A^{\searrow}, \\ (x,y), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，集合 $A^{\rightarrow}$， $A^{\leftarrow}$， $A^{\uparrow}$， $A^{\downarrow}$， $A^{\nwarrow}$， $A^{\searrow}$ 定义如下:

$$A^{\rightarrow} := (\{1\} \times \{1,2,2k\}) \cup (\{m\} \times \{4,5,\ldots,2k-2\}),$$

$$A^{\leftarrow} := (\{3\} \times \{2k-1,2k\}) \cup (\{m+2\} \times \{2,3,\ldots,m+1\}),$$

$$A^{\uparrow} := (\{4,5,\ldots,m+1\} \times \{1\}) \cup (\{1,2\} \times \{2k-3\}) \cup (\{m+3,m+4,\ldots,2k\} \times \{2k-3\}),$$

$$A^{\downarrow} := (\{2,3,\ldots,m-1\} \times \{3\}) \cup (\{m+1,m+2,\ldots,2k\} \times \{2k-1\}),$$

$$A^{\nwarrow} := \{(m+2,1),(3,m+2)\},$$

$$A^{\searrow} := \{(1,3),(m,2k-1)\}.$$

那么我们很容易看出 $1_{U_2} \simeq h_0$，因此得到 $C_3 = h_0(C_2)$ 是 C_2 的变形收缩。

最后，我们定义连续映射 $h_1 :\ C_3 \to C_3$，如下所示

$$h_1(x,y) = \begin{cases} (1,2k-1), & (x,y) = (1,2k-2),(2,2k-2),(2,2k-1), \\ (3,1), & (x,y) = (2,1),(2,2),(3,2), \\ (m,3), & (x,y) = (m,2),(m+1,2),(m+1,3), \\ (m+2,m+2), & (x,y) = (m+1,m+2),(m+1,m+3),(m+2,m+3), \\ (x,y) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

然后我们很容易看出 $1_{C_3} \simeq h_1$，因此得到 $C = h_1(C_2)$ 是 C_3 的变形收缩，其中 C 可描述如下。

$$\begin{aligned} C =& \{(a, a-2) \mid a = 3, 4\} \cup \{(b, 2) \mid b = 4, \dots, m-1\} \\ & \cup \{(c, c+3-m) \mid c = m-1, m, m+1\} \cup \{(m+1, d) \mid d = 4, \dots, m+1\} \\ & \cup \{(e, e) \mid e = m+1, m+2, m+3\} \cup \{(f, m+3) \mid f = m+3, \dots, 2k\} \\ & \cup \{(g, g+2k-2) \mid g = 1, 2\}. \end{aligned}$$

因此，上述论证表明，C 是 U的变形收缩 .

由于 $\deg(\pi_1|_C) = \deg(\pi_2|_C) = 1$且 $U' \approx \mathbb{S}^1_{2k+m+2}$，根据定理2.1，我们可以继续得到 $\pi_1|_C \simeq \pi_2|_C$。对 V 进行类似论证可推得 $\pi_1|_V \simeq \pi_2|_V$，从而得到 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_k) = 1$。

下面的图 2 展示了第一幅图中的开集 U 如何在 $k = 6$ 的情况下变形为最后一幅图中的核 C，作为一个收缩。□

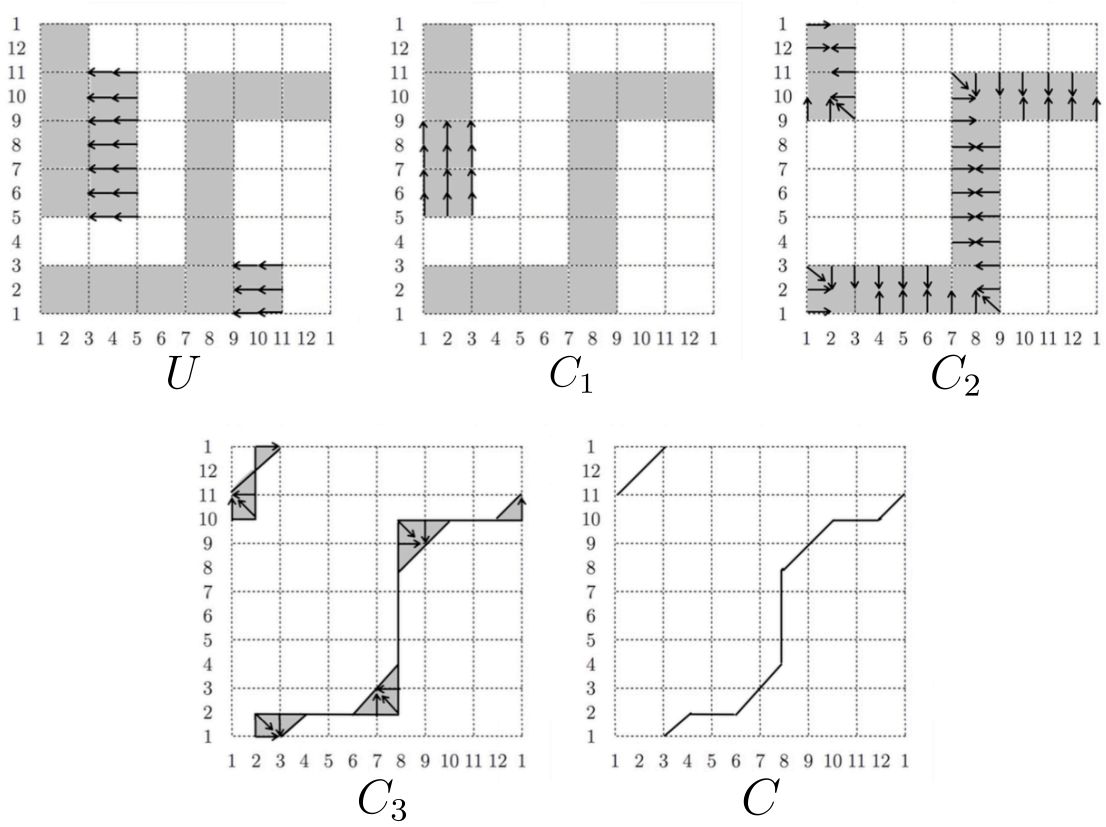


FIGURE 2.

3. The proof of $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4) = 2$

为了证明拓扑复杂度$(\mathbb{S}^1_4) = 2$，我们使用一个 Khalimsky 环面 $\mathbb{S}^1_4 \times \mathbb{S}^1_4$ 的正方形图形，其中$|\mathcal{K}(\mathbb{S}^1_4 \times \mathbb{S}^1_4)| \approx S^1 \times S^1$，并将其分解为一组小正方形。

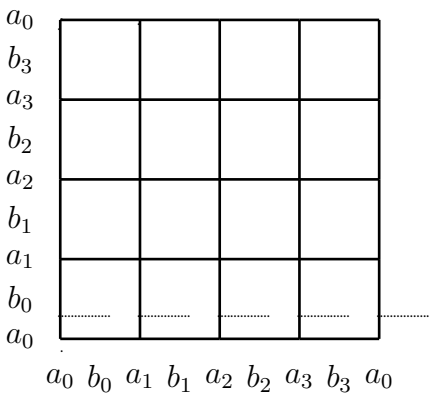
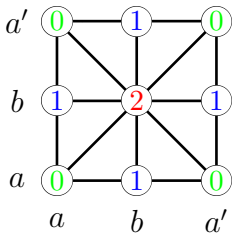


Figure 2. 方形分解

在这个方形图形中，每个小方格表示 $\mathbb{S}^1_4 \times \mathbb{S}^1_4$ 中的以下开集：



那么，$\mathbb{S}^1_4 \times \mathbb{S}^1_4$ 的主开覆盖（由 n-开子集构成）与 C 图 2 中所有小正方形上的 n 着色一一对应。因此，我们必须考虑 C 上的着色，其中 C 上的 n 着色可以视为映射 χ：$C \to \mathbb{Z}/n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$。

命题 3.1. 如果 $|\chi^{-1}(i)|$ 包含一整条水平线或一整条垂直线，那么 $\chi^{-1}(i)$不是截面范畴的。

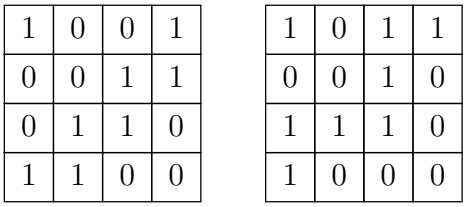
证明。 当 $|\chi^{-1}(i)|$ 包含一条水平线时，我们有 $\chi^{-1}(i)$ 的子空间 V，它与该直线相对应，而 V 对某个元素 $a \in \mathbb{S}^1_4$ 表示为以下集合：

$$V = \{(x, a) \mid x \in \mathbb{S}^1_4\}.$$

因此 $V \approx \mathbb{S}^1_4$，$\deg \pi_1|_V = 1$ 且 $\deg \pi_2|_V = 0$。如果我们假设 $\chi^{-1}(i)$ 是截面范畴的，那么 $\pi_1|_{\chi^{-1}(i)} \simeq \pi_2|_{\chi^{-1}(i)}$。由于 $V \subset \chi^{-1}(i)$，我们得到 $\pi_1|_V \simeq \pi_2|_V$，从而根据定理2.1，$\deg \pi_1|_V = \deg \pi_2|_V$，这就产生了矛盾。当 $|\chi^{-1}(i)|$ 包含一条垂直线时，类似的论证也会导出矛盾。□

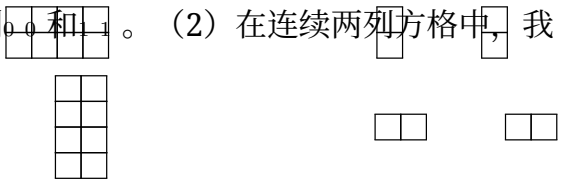
因此，我们称着色 $\chi : C \to \mathbb{Z}/n$ 为简单着色，若对于所有 $i \in \mathbb{Z}/n$，$|\chi^{-1}(i)|$ 既不包含水平线，也不包含垂直线。

命题 3.2。 除同构外，只有两种简单着色。

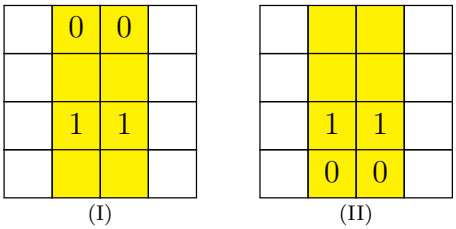


证明。 根据对着色 χ 的假设，我们有

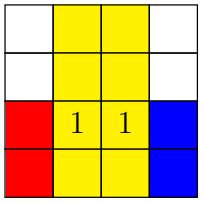
（1）在连续两行方格中，我们必须找到 0 0 和 1 1 。（2）在连续两列方格中，我们必须找到 0 0 和 1 1 。



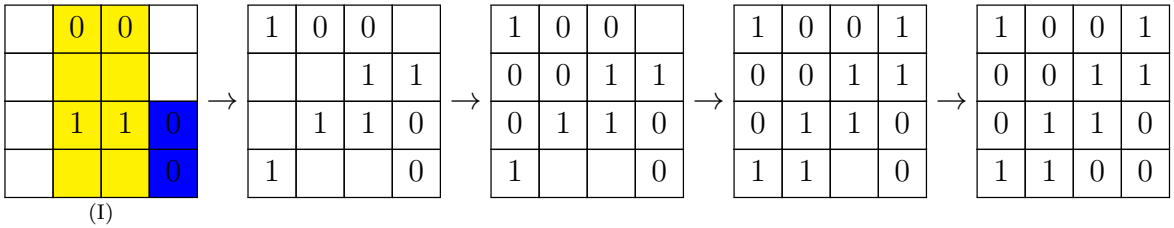
在上面的（2）中，只有两种情况。0 0 和 1 1 相连或不相连。聚焦于中间两列，我们不失一般性地考虑以下两种图案。

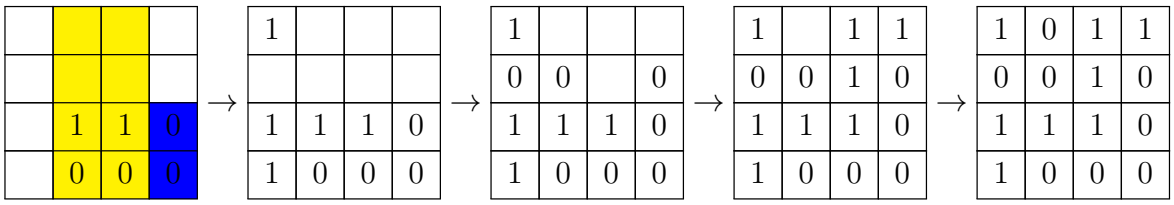


Ig忽略上部，无论是红色部分还是蓝色部分，在两种情况下都必须是0 0 。



不失一般性，我们假设蓝色部分为 0 0 。利用条件 (1) 和 (2)，其余部分在情形 (I) 和 (II) 中可如下填充。





这就完成了命题的证明。 □

定理 3.3. 拓扑复杂度$(\mathbb{S}^1_4) = 2$.

证明。 由于 $1 = \mathrm{tc}(S^1) \leq \mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4) \leq \mathrm{LS}$ 范畴$(\mathbb{S}^1_4 \times \mathbb{S}^1_4) = 2$, 因此只需证明 $1 < \mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4)$, 其中我们知道 $1 \leq \mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4) \leq 2$。假设 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4) = 1$, 则会导致矛盾。若 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4) = 1$, 则存在一个关于 $\mathbb{S}^1_4 \times \mathbb{S}^1_4$ 的开覆盖 $\{U_1, U_2\}$, 使得 $\pi_1|_{U_i} \simeq \pi_2|_{U_i}$; 根据命题 3.1, 其中的 U_i 不应包含整条水平线或整条垂直线。因此, 它们必同构于命题 3.2 中的 (I) 或 (II)。在任一情形下, U_0 或 U_1 必须包含一个非平凡的 Khalimsky 圆 $\mathbb{S} \approx \mathbb{S}^1_4$, 且该圆不在对角线上。然后根据拓扑复杂度的定义, 有 $\pi_1|_{\mathbb{S}} \simeq \pi_2|_{\mathbb{S}}$。因此, 根据命题 2.1, $\pi_1|_{\mathbb{S}} = \pi_2|_{\mathbb{S}}$, 这与 $\mathbb{S}$ 不在对角线上相矛盾。于是 $1 < \mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4)$ 且 $\mathrm{tc}(\mathbb{S}^1_4) = 2$。□

Appendix A. Homotopy classification of maps between Khalimsky Circles

我们先在本附录中引入一条 Khalimsky 直线, 记作 $\mathbb{Z}$。Khalimsky 直线 $\mathbb{Z}$ 是整数集 $\mathbb{Z}$, 其拓扑由开基 $\{\{2k,\ 2k+1,\ 2k\} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 生成。对于两个整数 k 和 l, 我们用 $[k, l]$ 表示 $\mathbb{Z}$的子空间$\{z \in \mathbb{Z} \mid k \leqq z \leqq l\}$。

众所周知, Khalimsky 直线是一个 Alexandroff 空间, 而 Alexandroff 空间具有自然序; 事实上, 它与一个偏序集一一对应, 就像有限拓扑空间一样。因此, Alexandroff 空间的拓扑性质可以用偏序集来描述。

具体而言, 我们在 Khalimsky 直线上使用如下关系 $\prec$: 对于 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ 满足 $|a-b| \leq 1$,

$$a \prec b \overset{\text{def}}{\iff} a = b \text{ or } a \text{ is even.}$$

不过, 我们要记住, $\mathbb{Z}$ 上的关系“$\leq$”采用通常意义上的“大于或等于”。

命题 A.1. 函数 $f\colon [k,l]\to\mathbb{Z}$ 连续，当且仅当它是一个保序映射 $f\colon([k,l],\prec)\to(\mathbb{Z},\prec)$。

证明。这是因为 $f|\colon [k,l]\to f([k,l])$ 连续当且仅当 $f|$ 保序。 □

对于任意两个连续函数 f，g；$[k,l]\to\mathbb{Z}$，若满足 $f(k)=g(k)$ 且 $f(l)=g(l)$，若它们相对于两端 k 和 l 同伦，我们记作 $f\sim g$。对于 Alexandroff 空间 A 和 $a\in\mathbb{Z}$，我们用 $\varepsilon_a\colon A\to\mathbb{Z}$ 表示在 a 处的常值函数。从现在起，$f\colon [k,l]\to\mathbb{Z}$ 表示一个连续函数。

命题 A.2. 若 $f\colon [k,l]\to\mathbb{Z}$ 满足 $f(k)=f(l)=a$，则 $f\sim\varepsilon_a$。

证明。由于 $f([k,l])$ 在 $\mathbb{Z}$ 中可缩至 $f(k)=f(l)$，因此我们有 $f\sim\varepsilon_{f(k)}$。 □

由上述命题，利用对 f 的极大点个数进行归纳法，我们得到以下推论。

推论 A.3. 对于函数 $f\colon [k,l]\to\mathbb{Z}$，存在一个单调函数 g，使得 $f\sim g$。

定义 A.4. 对于满足 $g(k)\le g(l)$ 且 $\mathrm{ht}(k)=\mathrm{ht}(g(k))$ 的连续函数 g，我们可以通过以下公式定义连续函数 $h_g\colon [k,l]\to\mathbb{Z}$：

$$h_g(z)=\begin{cases} z+g(k)-k, & z+g(k)-k\le g(l),\\ g(l), & z+g(k)-k\ge g(l).\end{cases}$$

根据定理 A.1，我们很容易证明 h_g 是连续的。

命题 A.5. 如果 $f\colon [k,l]\to\mathbb{Z}$ 满足 $f(k)\le f(l)$ 且 $\mathrm{ht}(k)=\mathrm{ht}(f(k))$，则可得$f\sim h_f$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $k=0$和 f 是满足 $f(0)=0$ 的单调递增函数，这由推论 A.3 得出。令 $f_0=f$。根据定义，f_0 是连续的单调递增函数，因此我们有 $f_0(z+1)\in\{f_0(z)\ f_0(z)+1\}$。令 $k_0:=\min\{z\in[k,l]\mid f_0(z+1)=z\}$ 和 $l_0:=\max\{z\in[k,l]\mid f_0(z)=k_0\}$。于是我们有 $f_0|_{[0,k_0]}=h_f|_{[0,k_0]}$ 以及 $k_0\le f_0(l)$。当 $k_0=f_0(l)$ 时，$f_0=h_f$，证明完毕。因此我们假设 $k_0<f_0(l)$。于是有 $f_0(l_0+1)=k_0+1$。令 $f_1, g_1\colon [0,l]\to\mathbb{Z}$ 如下：

$$f_1(z)=\begin{cases} k_0, & z=k_0,\\ k_0+1, & z\in[k_0+1,l_0+1],\\ f_0(z), & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$g_1(z)=\begin{cases}k_0, & z\in[k_0,l_0+1] \text{ and } \mathrm{ht}(k_0)=\mathrm{ht}(z),\\ k_0+1, & z\in[k_0,l_0+1] \text{ and } \mathrm{ht}(k_0)\neq\mathrm{ht}(z),\\ f_0(z), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是我们有 $f_0\prec g_1\succ f_1$ 或 $f_0\succ g_1\prec f_1$。无论哪种情况，我们都得到 $f_0\sim f_1$。令$k_1:=\min\{z\in[k,l]\mid f_1(z+1)=z\}$ 和 $l_1:=\max\{z\in[k,l]\mid f_1(z)=k_1\}$。于是我们得到 $k_1=k_0+1$。如果 $k_1=f(l)$，那么 $f_0\sim f_1=h_f$，证明完毕。如果 $k_1<f(l)$，我们可以继续上述过程，得到函数序列 $f_1,f_2,\dots,f_n$，其中 $n\le l-k$ 足够大，使得 $k_n=f(l)$ 且 $f=f_0\sim f_1\sim\cdots\sim f_n=h_f$。□

对于 $m\ge 2$，商空间 $\mathbb{Z}/2m=\{0,1,\dots,\overline{2m-1}\}$ 与 Khalimsky 圆 $\mathbb{S}^1_m$同胚。此外，我们有如下命题。

引理 A.6. 对于 $m\ge 2$ 以及连续映射 $f\colon[k,l]\to\mathbb{Z}/2m$，存在 f的一个提升 $\tilde f$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\{k\} & \xrightarrow{\varepsilon_a} & \mathbb{Z}\\ \downarrow & \overset{\exists!\,\tilde f}{\nearrow} & \downarrow q\\ [k,l] & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/2m\end{array}$$

证明。我们通过归纳法定义满足 $q\circ\tilde f=f$ 的 $\tilde f$，如下所示：

(1) $\tilde f(k)=a$，
以及 (2) 对于 $z\in\mathbb{Z}$,

$$\tilde f(z+1)=\begin{cases}\tilde f(z)+1, & f(z+1)=f(z)+\overline{1},\\ \tilde f(z), & f(z+1)=f(z),\\ \tilde f(z)-1, & f(z+1)=f(z)-\overline{1}.\end{cases}$$

我们有 $q\circ\tilde f(k)=q(a)=q\circ\varepsilon_a(k)=f(k)$，并且如果 $q\circ\tilde f(z)=f(z)$，那么由于 $\tilde f$的定义，$q\circ\tilde f(z+1)=f(z+1)$。由归纳法可知，$\tilde f$是 f的一个提升。

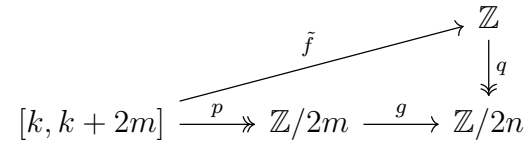
接下来，我们将证明 $\tilde f$ 的连续性。假设 $\tilde f$ 在 $[k,l]$的子集$[k,a]$ 上保序。当 $a\prec a+1$时，a 为偶数。由于 $\tilde f$ 保序，我们有$\tilde f(a)\prec\tilde f(a+1)$。因此，$\tilde f(a+1)=\tilde f(a)$，或者 $\tilde f(a+1)=\tilde f(a)\pm 1$且 $\tilde f(a)$ 为偶数。如果 $\tilde f(a+1)=\tilde f(a)$，那么 $\tilde f(a+1)=\tilde f(a)$。如果 $\tilde f(a+1)=\tilde f(a)\pm 1$，$\tilde f(a+1)=\tilde f(a)\pm\overline{1}$ 且 $\tilde f(a+1)$ 为偶数。因此，$\tilde f(a)\prec\tilde f(a+1)$。当 $a\succ a+1$时，同理可得 $\tilde f(a)\succ\tilde f(a+1)$。由归纳法，$\tilde f$保序，即 $\tilde f$ 连续。

最后，我们将证明 $\tilde f$ 的唯一性。设 $\tilde g$ 是交换图中的另一个提升。我们有 $\tilde f(k)=\tilde g(k)$。假设 $\tilde f|_{[k,a]}=\tilde g|_{[k,a]}$。我们有 $\tilde f(a)=\tilde g(a)$。$|\tilde f(a)-\tilde f(a+1)|\le 1$

且 $|\tilde{g}(a)-\tilde{g}(a+1)| \leq 1$，因此 $|f(a+1)-\tilde{g}(a+1)| \leq 2$。于是 $f(a+1) = g(a+1)$，因为 $q\circ f = f = \tilde{g}$ 且 $m \geq 2$。由归纳法可得 $f = \tilde{g}$。□

Fro根据上述引理，通过以下构造，我们得到如下推论 $\tilde{f}$.

推论 A.7。设 m、$n \geq 2$。假设下图是交换的：



那么，$\deg g = \{f(l) - f(k)\}/2n$。

命题 A.8。如果 $f\colon \mathbb{Z}/2m \to \mathbb{Z}/2n$ 满足 $|\deg f| < m/n$，那么它同伦于一个连续函数 $g\colon \mathbb{Z}/2m \to \mathbb{Z}/2n$，满足 $g(0) = f(0) + 1$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $f(0) = k$ 且 $\deg f \geq 0$。

首先，我们考虑 $\mathrm{ht}(0) = \mathrm{ht}(k)$ 的情形，或者等价地，考虑 k 为偶数的情形。

根据引理 A.6，存在一个 $f\colon [0, 2m] \to \mathbb{Z}$，它是满足 $f(0) = k$ 的 $f \circ q$ 的提升。于是，根据推论 A.7，我们有 $f(k) \leq f(l)$，并且根据命题 A.5，有 $f \sim h_{\tilde{f}}$。对于由 $h(z) = q \circ h_{\tilde{f}}(z)$ 定义的映射 $h\colon \mathbb{Z}/2m \to \mathbb{Z}/2n$，由于 $f \sim h_{\tilde{f}}$，我们得到 $f \simeq h$。根据假设，我们有 $|\deg h| = |\deg f| < m/n$，并且 $h(2m-2) = h(\overline{2m-1}) = h(\overline{0}) = k$。令 $f_1, f_2\colon \mathbb{Z}/2m \to \mathbb{Z}/2n$ 如下：

$$f_1(\overline{z}) = \begin{cases} h(\overline{z}), & \overline{z} \neq \overline{2m-1}, \\ \overline{k} + \overline{1}, & \overline{z} = \overline{2m-1}. \end{cases}$$

$$f_2(\overline{z}) = \begin{cases} f_1(\overline{z}), & \overline{z} \neq \overline{0}, \\ \overline{k} + \overline{1}, & \overline{z} = \overline{0}. \end{cases}$$

在这种情况下，我们有 $f_2 \simeq h$，因为 $h \succ f_1 \prec f_2$。因此，我们得到 $f \simeq h \simeq f_2$，从而得到 $f_2(0) = k + 1 = f(0) + 1$。

其次，我们考虑 $\mathrm{ht}(0) \neq \mathrm{ht}(k)$ 的情形，或者等价地，考虑 k 为奇数的情形。此时我们有 $\mathrm{ht}(2m-1) = \mathrm{ht}(k)$，且 $f(2m-1) = f(0) = k$，因为 k 为奇数。

在这种情况下，存在一个从 $f \circ q\colon [2m-1, 4m-1] \to \mathbb{Z}/2n$ 到 $[2m-1, 4m-1] \to \mathbb{Z}$ 的提升 f，满足 $f(2m-1) = k$，且满足 $f \sim h_{\tilde{f}}$。那么，对于一个映射 $h\colon \mathbb{Z}/2m \to \mathbb{Z}/2n$，由 $h(z) = q \circ h_{\tilde{f}}(z)$ 定义，我们得到 $f \simeq h$，因为 $f \sim h_{\tilde{f}}$。

最后，我们得到 $h(0) = k + 1 = f(0) + 1$，由此完成了该命题的证明。□

定理 A.9. 设 $f, g : \mathbb{Z}/2m \to \mathbb{Z}/2n$ 是两个不同的连续函数。当且仅当 度 $f =$度 g且 $|$度 $f| < m/n$时， $f \sim g$ 。

证明。 只需证明“若”部分。因此，假设 deg $f =$deg g且 $|$deg $f| < m/n$。必要时，通过反转 Khalimsky 圆的定向，不失一般性，可假设 $0 \leq$ deg $f =$deg $g < m/n$。令 $k = f(0)$。

不失一般性，根据命题A.8，我们可以假设 $f(0) = g(0)$ 且 ht$(0) =$ ht(k)。由引理 A.6，存在 $f \circ p$的一个提升 $\tilde{f}$以及 $g \circ p$的一个提升 $\tilde{g}$，它们满足 $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = k$。根据推论A.7， $\tilde{f}(2m) = \tilde{g}(2m) = k + 2n \cdot$deg f。因此， $f \sim h_{\tilde{f}} = h_{\tilde{g}} \sim \tilde{g}$根据命题 A.5，所以 $f \simeq g$。

□

References

[Ale41] Paul Alexandroff. 一般组合拓扑学. 美国数学会汇刊, 49:41–105, 1941.[Bar11] Jonathan A. Barmak. 有限拓扑空间的代数拓扑及其应用, 数学讲义第 2032 卷. Springer, Heidelberg, 2011.[Far03] Michael Farber. 运动规划的拓扑复杂性. 离散与计算几何, 29(2):211– 221, 2003.[FTMVMV18] D. Fern´andez-Ternero, E. Mac´ıas-Virg´os, E. Minuz, and J. A. Vilches. 离散拓扑复杂度. 美国数学会会刊, 146(10):4535–4548, 2018.[Gon18] Jes´us Gonz´alez. 单纯复形复杂度：机器人学中的分片线性运动规划. 纽约数学杂志, 24:279–292, 2018.[Jam95] I. M. James. Lusternik–Schnirelmann范畴. 载于代数拓扑手册，第 1293– 1310 页. North-Holland, Amsterdam, 1995.[Kan19] Shelley Burrows Kandola. 数字图像空间的拓扑复杂度. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2019. 博士论文——明尼苏达大学.[McC00] Christopher McCord. 吸引子全局动力学的单纯模型. 微分方程杂志, 167(2):316–356, 2000.[Tan18] Kohei Tanaka. 有限空间拓扑复杂度的组合描述. 代数与几何拓扑, 18(2):779–796, 2018.

电子邮件地址：yoshise.ryusei.597@s.kyushu-u.ac.jp

Joint Graduate School of Mathematics for Innovation, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan