arXiv:2302.06385v1 [math.NA] 13 Feb 2023

用于能量稳定任意拉格朗日-欧拉方法的线法框架 *

TOMAS LUNDQUIST†，ARNAUD MALAN‡，和 JAN NORDSTR ¨OM§

摘要。我们提出一种基于半有界空间算子的新框架，用于分析和离散化移动和变形区域上的初边值问题。这项工作将现有的适定问题和能量稳定离散框架从静止区域扩展到一般情形，包括任意网格运动。具体而言，我们证明，在物理坐标系中导出的能量估计，等价于相对于静止参考域的半有界性。导出这一结果的连续分析基于对物质时间导数进行斜对称分裂，因此依赖于分部积分的性质。在此基础上，我们构建了用于半离散化的仿能量稳定任意拉格朗日-欧拉框架，其依据是以符合离散分部求和的方式近似物质时间导数。得益于半有界性，可以采用线法，使用标准显式或隐式时间积分格式推进系统的时间演化。与相应的静止区域问题一样，可采用同类稳定性论证，无需考虑离散几何守恒等附加性质。此外，我们还证明，新框架能够自动实现离散几何守恒，即精确保持自由流。不过，我们强调，这并非稳定性的必要条件。

关键词。动网格、能量稳定性、自由流保持、分部求和

数学主题分类代码。65M12，65M20

1. 引言。半离散近似，即时间变量保持连续的近似，广泛用于偏微分方程（PDE）数值方法的设计与稳定性分析。这种将空间近似与时间近似分离的方法通常称为线法。对于定义在静止区域上的一般线性偏微分方程问题，可通过半有界空间算子的概念，将解的 L_2 能量估计与适定性联系起来 [17, 20]。对于半离散近似，系统矩阵具有类似性质，因此可以采用标准时间积分方法（例如 A–稳定的隐式龙格-库塔方法或条件稳定的显式龙格-库塔方法），并通过线法实现稳定求解。

对于显式时间推进，稳定时间步长的选择传统上要么依赖反复试验，要么依赖简化的谱分析，即使半离散矩阵不可对角化也是如此。对于空间中的任意半有界算子，只有范围较窄的一类格式能够在形式上保持其相关的能量稳定性 [22, 36, 38]。然而，这类稳定性结果往往伴随着严格的时间步长限制。所谓的强稳定保持格式 [37, 15]也可能满足严格的能量界限，但这依赖于足够强的耗散，使前向欧拉格式具有压缩性。无论采用哪种具体方法，使用线法时，通常都会以某种方式——直接或间接地——试图利用底层的

*提交至 SIAM 数值分析杂志的预印本。

†瑞典林雪平大学数学系计算数学方向¨（tomas.lundquist@liu.se）。

‡开普敦大学机械工程系工业计算流体力学研究组，南非私人邮政信箱 X3（arnaud.malan@uct.ac.za）。§瑞典林雪平大学数学系，邮政编码 SE-581 83，林雪平；以及约翰内斯堡大学数学与应用数学系，南非奥克兰公园 2006，邮政信箱 524（jan.nordstrom@liu.se）。

连续问题的半有界性。尽管存在上述局限，半离散框架便捷而有效，因此数十年来，线法一直是数值求解偏微分方程问题最常用的方法。

对于定义在运动和变形的空间域上的偏微分方程问题，情况则截然不同。此类区域上的 L_2 范数具有时间依赖性，这意味着在欧拉（物理）坐标系中推导出的能量估计，不再显而易见地对应于空间算子的半有界性。因此，即使对相应的静止区域问题，线法的简单应用能够保证稳定性，也未必能保证此类问题的稳定性。人们已开发出多种数值求解运动区域上偏微分方程问题的方法，通常将其归为任意拉格朗日-欧拉（ALE）方法，其含义是计算参考系可以任意移动，以跟随网格节点的运动。相较于静止区域方法，ALE 方法的稳定性理论总体上发展得较不充分。此外，即使在已有形式化稳定性证明的情况下，也只有经过谨慎选择的隐式时间推进方法（例如 [12, 11, 13, 5, 3] 中的低阶单步法或多步法），或 [7, 6, 29, 19, 39, 29, 19] 中的高阶时空离散，才适用。

本文提出一种新的线法框架，用于分析和数值求解移动和变形区域上的偏微分方程问题。基于对物质导数进行斜对称分裂，我们证明，在物理坐标系中导出的能量估计，等价于在静止参考域上定义的空间算子的半有界性。不过，引入静止参考域仅是出于分析目的。实际应用中，无需显式了解相关的映射函数或度量项。用于数值求解的半离散框架同样保证，在半离散层面导出的能量估计与有界的系统矩阵谱等价（对于线性问题）。由此可采用线法方法，搭配标准时间积分方法。

因此，我们的方法不再要求满足离散几何守恒，即全离散格式随时间精确保留常数自由流解。这一性质常被视为稳定和/或精确 ALE 方法的一般先决条件，参见例如文献 [10] 中的综述。相反，我们通过使用节点分部求和（SBP）算子对物质时间导数的分裂形式进行离散，从而满足雷诺输运定理的半离散版本。尽管在我们的框架中，稳定性并不依赖于此，我们最后证明，应用一般时间推进格式后，仍可自动实现离散几何守恒（即上述意义上的自由流保持）。

本文其余部分安排如下。第2节旨在说明两者之间的等价性：一方面是在物理空间中推导出的能量估计，另一方面是相对于静止参考域的半有界性。第3节中，我们构建了一个用于稳定性分析的拟态半离散框架，并逐步遵循第2节中的连续分析。接下来，我们在第4节中展示自由流保持这一有时值得追求（但对稳定性并非必不可少）的额外性质。第5节中，我们通过数值实验验证所提出的线法方法的稳定性和精度，最后在第6节中总结全文。

2. 连续框架。为便于记号表达，我们考虑一个定义在 p 维空间中的标量初边值问题，其一般形式为

$$\begin{aligned} u_t &= D(u,x,t)u + F(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t_0 < t < T \\ B(u,x,t)u &= g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t_0 < t < T \\ u(x,t_0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T$ 是物理坐标向量，u_t 表示因变量 $u = u(x,t)$ 的时间偏导数，D 和 B 分别表示微分算子（通常是非线性的）和边界算子。此外，F 和 g 分别表示与解无关的强迫项和边界数据。在本文余下部分，我们假设问题 (2.1) 是适定的，其解 u 属于函数空间 $\mathcal{U}$，该空间包含能量方法所要求的具有足够正则性的函数。具体而言，为此我们定义 $\mathcal{U}$为所有满足以下条件的函数 ϕ 的集合：ϕ_t、$\nabla\phi$ 和 $D\phi$ 存在，且在计算域的闭包（即 $[t_0,T]\times\Omega \cup \partial\Omega$）上连续，其中 ∇ 表示空间梯度算子。

本文中，我们将频繁使用内积记号表示 Ω 上的体积分和曲面积分。给定两个在 Ω 和 $\partial\Omega$ 上均可积的函数 L_2 和 ϕ，我们记作

$$\big(\phi,\psi\big)_\Omega = \int_\Omega \phi\psi \, dV, \quad \big(\phi,\psi\big)_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \phi\psi \, dS. \tag{2.2}$$

利用能量方法分析偏微分方程问题时，分部积分（IBP）是不可或缺的工具。令 $n = (n_1, n_2, \ldots, n_p)^T$ 表示 Ω 的外向单位法向量。单个坐标方向上的分部积分公式为

$$\big(\phi,\psi_{x_i}\big)_\Omega = -\big(\phi_{x_i},\psi\big)_\Omega + \big(\phi, n_i\psi\big)_{\partial\Omega}, \tag{2.3}$$

其中 ϕ 和 ψ 为连续可微函数，ϕ_{x_i} 和 ψ_{x_i} 表示沿 x_i方向的偏导数。

2.1. 半有界性：静止区域情形。据我们所知，此前尚未有人在动网格背景下研究半有界性，因此我们先回顾这一经典偏微分方程概念在通常应用方式下的情形，即式（2.1）中的静止区域 Ω。在这种情况下，能量方法的一种标准应用始于以下核心观察：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_\Omega^2 = \big(u,u_t\big)_\Omega, \tag{2.4}$$

仅仅是由于乘积法则。对于线性适定性（以及随后离散情形下的稳定性），我们只需考虑零数据的情形，$F=0$、$g=0$。这自然引出了以下定义。

Definition 2.1. 对于 (2.1) 中的静止区域 Ω，我们称空间算子（即 D 与 B 的组合）是（极大）半有界的，如果对于所有满足 $B\phi = 0$ 的 $\phi \in \mathcal{U}$，估计式

$$\big(\phi, D\phi\big)_\Omega \le \alpha\|\phi\|_\Omega^2 \tag{2.5}$$

对某个与 ϕ 无关的常数 α 成立。此外，如果 $\alpha \le 0$，那么我们称该算子为严格半有界。

注 2.2. 最大半有界指的是使用最少数量的边界条件来得到界 (2.5) 的情况。最大半有界性可用于证明线性化问题是适定的，更多细节参见 [20, 34] 。在本文余下部分，我们将始终假设不存在过度指定；为简化记号，我们将这类问题统称为半有界问题。

Note that (2.5) inserted into (2.4) yields, for $F = g = 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_\Omega^2 \leq \alpha\|u\|_\Omega^2. \tag{2.6}$$

因此，对于静止区域，根据定义 2.1，解的能量估计与算子的半有界性之间存在直接对应关系。

对于类型为 $\boldsymbol{U}_t = \mathcal{M}\boldsymbol{U}$ 的半离散近似，注意到一个类似于 s（2.5）的性质可由矩阵估计给出

$$\mathcal{H}\mathcal{M} + \mathcal{M}^T\mathcal{H} - 2\alpha\mathcal{H} \leq 0, \tag{2.7}$$

从而得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{U}\|_\mathcal{H}^2 \leq \alpha\|\boldsymbol{U}\|_\mathcal{H}^2, \tag{2.8}$$

其中，$\mathcal{H} = \mathcal{H}^T$ 是定义离散等价形式的正定矩阵，L_2 内积为 $(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi})_\mathcal{H} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathcal{H}\boldsymbol{\Psi}$。特别地，如果 $\alpha \leq 0$（即严格半有界），则条件（2.7）意味着 $\mathcal{M}$ 的谱被限制在左半平面内，从而可以稳定地应用标准时间积分方法。

如果区域不是静止的，即 $\Omega = \Omega(t)$，那么 (2.4) 不再成立，因此半有界性 (2.5) 与 (2.6) 形式的能量估计之间不再存在直接对应关系。半离散情形也类似，$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ 会破坏 (2.7) 与 (2.8) 之间的直接对应关系。换言之，使用线法时，半离散稳定性与全离散稳定性之间不再有明确的联系。因此，我们的主要目标是针对区域运动的一般情形 $\Omega = \Omega(t)$，重新建立能量估计与半有界性概念之间的直接联系。经过半离散化后，这种方法将构造出满足 (2.7) 的格式，从而能够稳定地应用线法（仍假设 $\alpha \leq 0$）。

2.2. 区域运动。接下来，考虑 (2.1) 中的一般情形 $\Omega = \Omega(t)$，即区域边界 $\partial\Omega$ 随时间任意运动。为简单起见，我们假设该运动作为已知数据给定，因此独立于解 u。在随 Ω 一同运动的网格上对 (2.1) 进行数值求解时，研究移动网格节点参考系中的解，而非原始物理坐标系中的解 x，是很自然的。为此，我们形式化地引入一个参考坐标系，其中网格节点保持静止。用这些新坐标表示时，我们将空间区域记作 $\hat{x} \in \hat{\Omega}$，其中参考区域 $\hat{\Omega}$ 在时间上保持静止。

我们对网格运动不施加任何限制，除非要求其满足非退化性：假设存在一个双射且足够光滑的坐标映射 $x = x(\hat{x}, t)$, $\hat{x} = \hat{x}(x, t)$。进一步假设计算域为

有限个互不重叠的块或单元的并集，我们要求该映射在全局上连续，并且在每个此类子域的闭包上二阶连续可微。此时，物理域 Ω 随时间的演化可由分片光滑坐标速度 $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_p)^T$ 描述，其定义为

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x,t) =: \frac{\partial}{\partial t} x_i(\hat{x}(x,t),t). \tag{2.9}$$

(2.9) 中的函数 $\dot{x}_i(x,t)$ 此后将假定为描述网格运动的已知数据，而无需明确了解底层映射函数 $x = x(\hat{x},t)$、$\hat{x} = \hat{x}(x,t)$ 或它们的任何空间导数（度量项）。

注 2.3。在 ALE 公式中，通常采用初始域作为 $\hat{}$ 参考，即 $\Omega = \Omega(t_0)$ 且 $x(\hat{x},t_0) = \hat{x}$ [4]。虽然总是可以作出这种选择，但这并非必要。例如，若使用曲线坐标来描述 Ω，则采用这一已知变换 $\hat{}$ 可能更为方便，并据此利用单位超立方体，在每个计算子域上分片定义 Ω。

2.3. 物质时间导数。请注意，任意参考区域 Ω 是本文唯一明确考虑的静止区域，因此 $\hat{}$ 无需区分 Ω 与连续介质力学中粒子运动的另一种拉格朗日（物质）描述。为避免歧义，我们将参考坐标系中求得的所有时间导数（即沿移动网格节点求得的时间导数）称为物质时间导数。

就参考坐标 $\hat{x}$ 而言，一般函数 ϕ 的所谓物质（或全）时间导数 $d\phi/dt$ 可通过应用链式法则得到，即有

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\phi(x(\hat{x},t),t) = \phi_t + \dot{x}^T\big(\nabla\phi\big), \tag{2.10}$$

其中，$\dot{x}$ 定义于（2.9）中，而 $\phi_t = \partial\phi(x,t)/\partial t$ 与之前一样表示相对于物理坐标 x 的时间偏导数。通过在（2.1）中用 du/dt 代替 u_t，网格运动因此可视为在偏微分方程中引入了一个额外的空间项。

我们首先考虑将（2.10）中的空间项分解为对称部分和斜对称部分，即 [30]。应用乘积法则，可得

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi_t + D_m\phi - \frac{1}{2}\big(\nabla\cdot\dot{x}\big)\phi, \tag{2.11}$$

其中，算子 D_m 定义为

$$D_m\phi = \frac{1}{2}\Big[\dot{x}^T\big(\nabla\phi\big) + \nabla\cdot\big(\dot{x}\phi\big)\Big]. \tag{2.12}$$

根据偏导数公式（2.3），结合的分部积分性质

$$\big(\phi, D_m\psi\big)_\Omega = -\big(D_m\phi,\psi\big)_\Omega + \big(\phi, \big(n^T\dot{x}\big)\psi\big)_{\partial\Omega} \tag{2.13}$$

现证明如下，表明在 Ω 的内部，D_m 是一个斜对称算子。

散度 $\nabla\cdot\dot{x}$ 可能为正也可能为负，具体取决于局部体积是在增大还是减小，因此 (2.11) 中的最后一项构成了一个符号不定的源项。对 (2.1) 进行朴素的半离散化，会包含来自网格运动的同一符号不定项，从而导致即使是 A–稳定的时间积分方法也会失效。为了解决这一问题，我们的目标是建立能量稳定性与半有界性这两个概念之间的一般联系；据我们所知，此前这方面的研究仅针对静止区域。

注 2.4。对于体积保持（等容）运动这一特殊情形，包含 $\nabla\cdot\dot{x}$ 的源项始终为零，因此这种情况的分析和离散化要容易得多，见 [25]。

2.4. 变量代换。根据多元微积分中的逆函数定理，要使网格运动非退化（即为双射），只需正向映射函数 $x=x(\hat{x},t)$ 的雅可比行列式严格为正，

$$J(x,t)=\det\left(\frac{\partial x}{\partial\hat{x}}\right)>0. \tag{2.14}$$

事实上，对 $x(\hat{x},t)$ 的光滑性假设还意味着，J 必须有一致的上下界。该函数 J 将在接下来对一般情形 $\Omega=\Omega(t)$ 的 (2.1) 分析中发挥核心作用。回想一下，我们将坐标速度向量 $\dot{x}(x,t)$ 视为问题的已知数据，而不假定显式了解雅可比矩阵 $\partial x/\partial\hat{x}$ 本身。因此，值得注意的是，(2.14) 中的 J 可通过初值问题直接与 $\dot{x}$ 联系起来

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt}&=\big(\nabla\cdot\dot{x}\big)J,\qquad x\in\Omega(t),\quad t\geq t_0\\ J(x,t_0)&=J_0(x)>0,\quad x\in\Omega(t).\end{aligned} \tag{2.15}$$

换言之，局部体积的变化速率与坐标速度向量的散度成正比。该结果的证明可参见例如 [16], 第 77 页。

接下来，我们证明，(2.15) 中的函数 J 可用于消除在物质导数分裂 (2.11) 中先前确定的不定源项。对于定义在 $\Omega(t)$ 上的一般函数 ϕ，考虑通过以下变量代换在参考区域 Ω 上定义的相应函数 $\hat{\phi}$：

$$\hat{\phi}(\hat{x},t)=\sqrt{J(x(\hat{x},t),t)}\phi(x(\hat{x},t),t). \tag{2.16}$$

由此可得

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt}=\sqrt{J}\frac{d\phi}{dt}+\frac{d\sqrt{J}}{dt}\phi.$$

此外，由于 $J>0$，我们可以将 (2.15) 改写为等价形式

$$\frac{d\sqrt{J}}{dt}=\frac{1}{2}\big(\nabla\cdot\dot{x}\big)\sqrt{J}.$$

再代入 (2.11)，由此得到

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt}=\sqrt{J}\Big[\phi_t+D_m\phi-\frac{1}{2}\big(\nabla\cdot\dot{x}\big)\phi\Big]+\frac{1}{2}\big(\nabla\cdot\dot{x}\big)\sqrt{J}\phi.$$

注意，同一个不定源项 $\frac{1}{2}(\nabla \cdot \dot{x})\sqrt{J}\phi$ 现在以相反的符号出现在上式右侧的两个位置，因此相互抵消。我们已经证明

LEMMA 2.5. 设区域 $\Omega(t)$ 受到由 (2.9) 中的分片光滑坐标速度函数 $\dot{x}$ 描述的非退化 (2.14) 运动。对于 Ω 上的任意可微函数 ϕ，相应的函数 $\hat{\phi} = \sqrt{J}\phi$（定义于 $\hat{\Omega}$ 上，见 (2.16)）满足

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \sqrt{J}\big(\phi_t + D_m\phi\big), \tag{2.17}$$

其中，D_m 是 (2.12) 中定义的斜对称算子，且 $J > 0$ 满足 (2.15).

回到原始模型问题 (2.1)，现在采用变量代换 (2.16) 和 $\phi = u$，并利用引理 2.5，可得

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \sqrt{J}\big(Du + F + D_m u\big).$$

因此，以静止参考域 $\hat{\Omega}$ 表述，问题 (2.1) 可以 e 等价地写为

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} &= \hat{D}(\hat{u},\hat{x},t)\hat{u} + \sqrt{J}F(x(\hat{x},t),t), \quad \hat{x}\in\hat{\Omega}, \quad t_0 < t < T \\ \hat{B}(\hat{u},\hat{x},t)\hat{u} &= g(x(\hat{x},t),t) \qquad\qquad\qquad\quad \hat{x}\in\partial\hat{\Omega}, \quad t_0 < t < T \\ \hat{u}(\hat{x},t_0) &= \sqrt{J}u_0(x(\hat{x},t),t), \qquad\qquad\quad \hat{x}\in\hat{\Omega}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中

$$\hat{D} = \sqrt{J}\big(D + D_m\big)\sqrt{J}^{-1}, \quad \hat{B} = B\sqrt{J}^{-1}.$$

此外，若满足 $u \in \mathcal{U}$，则 (2.18) 中的解 $\hat{u}$ 属于空间 $\hat{\mathcal{U}}$，该空间由 (2.16) 中所有满足 $\phi \in \mathcal{U}$ 的 ϕ 组成。请注意，由于只假设 $\hat{}$ 坐标映射的光滑性在分片上成立，因此 $\mathcal{U}$ 中的函数在块边界或单元边界处可能局部不连续。不过，对于所有 $\hat{u} \in \mathcal{U}$，算子 $\hat{D}$ 仍然是良定义的。接下来，我们将证明，关于移动区域 $\Omega(t)$ 的 (2.6) 型能量估计等价于 D 在 Ω 上的半有界性 (2.5)。为此，我们还需要雷诺输运定理。

2.5. 雷诺输运定理。为对 (2.1) 应用能量方法，可以利用著名的雷诺输运定理（例如参见 [21]），得到 $\Omega = \Omega(t)$ 情形下与 (2.4) 类似的性质。为了之后表述这一结果的半离散类比，我们在下文给出连续雷诺输运定理的一个简单证明（据我们所知，这是一个新颖的证明），该证明基于引理 2.5。此推导将在之后为第3.5节中的离散分析提供指导。对于两个函数 ϕ 和 ψ，首先注意到，按照 (2.16) 定义 $\hat{\phi} = \sqrt{J}\phi$ 和 $\hat{\psi} = \sqrt{J}\psi$ 后，恒等式

$$\big(\phi,\psi\big)_{\Omega} = \big(\phi, J\psi\big)_{\hat{\Omega}} = \big(\hat{\phi},\hat{\psi}\big)_{\hat{\Omega}} \tag{2.19}$$

$\hat{}$成立。由于 Ω 在时间上是静止的，因此我们可以将 Ω 上一般内积的时间导数写为

$$\frac{d}{dt}\big(\phi,\psi\big)_{\Omega} = \frac{d}{dt}\big(\hat{\phi},\hat{\psi}\big)_{\hat{\Omega}} = \Big(\frac{d\hat{\phi}}{dt},\hat{\psi}\Big)_{\hat{\Omega}} + \Big(\hat{\phi},\frac{d\hat{\psi}}{dt}\Big)_{\hat{\Omega}}.$$

现在代入引理 2.5 中的 (2.17)，上式右侧的第一项变为

$$\Big(\frac{d\hat{\phi}}{dt},\hat{\psi}\Big)_{\hat{\Omega}}=\Big(\sqrt{J}\phi_t,\hat{\psi}\Big)_{\hat{\Omega}}+\Big(\sqrt{J}D_m\phi,\hat{\psi}\Big)_{\hat{\Omega}}=\Big(\phi_t,\psi\Big)_{\Omega}+\Big(D_m\phi,\psi\Big)_{\Omega},$$

当然，第二项也可以用类似的方式表示。由此以及分部积分性质 (2.13)，可得雷诺输运定理

$$\frac{d}{dt}(\phi,\psi)_{\Omega}=(\phi_t,\psi)_{\Omega}+(\phi,\psi_t)_{\Omega}+\big(\phi,(n^T\dot{x})\psi\big)_{\partial\Omega} \tag{2.20}$$

接下来，我们将利用该定理对 (2.1) 中偏微分方程问题的原始表述应用能量方法。

2.6. 能量方法。将 $\phi=\psi=u$ 代入雷诺输运定理 (2.20)，得到

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\Omega}=2\big(u,u_t\big)_{\Omega}+\big(u,\big(n^T\dot{x}\big)u\big)_{\partial\Omega}, \tag{2.21}$$

这对应于静止区域情形下的 (2.4)。现在将 (2.1) 中的偏微分方程代入 (2.21)，得到

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\Omega}=2\big(u,Du\big)_{\Omega}+2\big(u,F\big)_{\Omega}+\big(u,\big(n^T\dot{x}\big)u\big)_{\partial\Omega}.$$

为了在零数据情形 $F=g=0$下得到与之前 (2.6) 中相同类型的能量估计， D 和 B 的组合显然必须满足以下性质：对于所有满足 $B\phi=0$的函数 $\phi\in\mathcal{U}$，估计式

$$\big(\phi,D\phi\big)_{\Omega}+\frac{1}{2}\big(\phi,\big(n^T\dot{x}\big)\phi\big)_{\partial\Omega}\leq\alpha\|\phi\|^2_{\Omega} \tag{2.22}$$

必须成立。注意，这立即推出了情形$F=g=0$下的能量估计 (2.6)。因此，我们通常假设，可以将包含边界条件的偏微分方程模型设计成使得 (2.22) 成立。然而，由于$n^T\dot{x}$ 可能为正也可能为负，按照定义 2.1，(2.22) 并不能表明空间算子相对于 α 是半有界的。正如前文所述，半有界性（尤其是具有 $\alpha\leq 0$时）是采用线法进行稳定时间积分所必需的性质。因此，目前形式下的估计 (2.22) 不足以实现这一目的。现在我们可以陈述本文的第一个主要结果。

PROPOSITION 2.6. 对于移动区域 Ω(*t*)，以下两个陈述等价：

1. 对所有满足 $B\phi=0$ 的 $\phi\in\mathcal{U}$，能量估计 (2.22) 均成立。2. (2.18) 中的空间算子满足半有界性

$$\big(\hat{\phi},\hat{D}\hat{\phi}\big)_{\hat{\Omega}}\leq\alpha\|\hat{\phi}\|^2_{\hat{\Omega}} \tag{2.23}$$

对于所有满足 $B\phi=0$ 的 $\phi\in\mathcal{U}$。

ˆ 证明。首先注意，对于任意按（2.16）定义的 ϕ ，条件 $B\phi=0$ 等价于 $B\phi=0$。此外，根据（2.18）中 D 的定义，我们有

$$\big(\hat{\phi},\hat{D}\hat{\phi}\big)_{\hat{\Omega}}=\big(\sqrt{J}\phi,\sqrt{J}\big(D\phi+D_m\phi\big)\big)_{\hat{\Omega}}=\big(\phi,D\phi+D_m\phi\big)_{\Omega}.$$

应用分部积分性质（2.13），进一步可得

$$\big(\hat{\phi}, \hat{D}\hat{\phi}\big)_{\hat{\Omega}} = \big(\phi, D\phi\big)_{\Omega} + \frac{1}{2}\big(\phi, \big(n^T \dot{x}\big)\phi\big)_{\partial\Omega}.$$

由此我们证明了 (2.22) 和 (2.23) 的左端相同。由于根据 (2.19)，右端也相同，因此这两个条件确实等价。

□

鉴于这一结果，针对任何特定偏微分方程问题的能量分析，都可以直接基于物理空间中的原始表述 (2.1) 进行。推导出形如 (2.22) 的估计后，等价的参考域表述 (2.18) 的半有界性便可由命题 2.6 自动得出。对于半离散近似，回顾一下，(2.7) 所给出的半有界性对应性质意味着矩阵谱被限制在左半平面内，前提是 $\alpha \leq 0$。因此，第3节中介绍的半离散任意拉格朗日–欧拉框架的主要目标，是在离散能量估计与矩阵条件 (2.7) 之间建立类似的等价关系。

2.7. 关于边界条件设计与提升算子的说明。为了简化边界条件的设计与分析，从而得到形式为 (2.22) 的估计，可以采用所谓的提升算子技术 [33, 2] 。这种方法还有一个好处：它为之后在半离散格式中实现稳定的边界条件提供了直接途径。

因此，考虑通过罚项表述，将 (2.1) 中的边界条件直接纳入偏微分方程右端：

$$\begin{aligned} u_t &= Du + L_\delta(Bu - g) + F, \quad x \in \Omega(t), \quad t_0 < t < T \\ u(x, t_0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{2.24}$$

这里所谓的提升算子 L_δ 是相对于某个算子 δ 定义的，使得对于任意 ϕ, ψ，均有

$$\big(\phi, L_\delta \psi\big)_{\Omega} = \big(\delta\phi, \psi\big)_{\partial\Omega}. \tag{2.25}$$

注意，(2.24) 中乘以 L_δ 的项在此仅为分析之目的而添加；只要边界条件成立且等式满足，该附加项的值便为零。现在直接对 (2.24) 应用能量方法（取零数据$g = 0$, $F = 0$），可得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{\Omega}^2 = \mathcal{E}(D, B, u),$$

其中，函数 $\mathcal{E}$ 定义为

$$\mathcal{E}(D, B, \phi) = \big(\phi, D\phi\big)_{\Omega} + \frac{1}{2}\big(\phi, \big(n^T \dot{x}\big)\phi\big)_{\partial\Omega} + \big(\delta\phi, B\phi\big)_{\partial\Omega}. \tag{2.26}$$

特别要注意的是，如果我们代入 $B\phi = 0$，那么 $\mathcal{E}(D, B, \phi)$ 将恰好化为（2.22）的左端。因此，如果存在一个算子 δ 使得

$$\mathcal{E}(D, B, \phi) \leq \alpha\|\phi\|_{\Omega}^2 \tag{2.27}$$

对所有 $\phi \in \mathcal{U}$ 都成立，那么这显然是 (2.22) 对所有满足 $B\phi = 0$ 的 $\phi \in \mathcal{U}$ 都成立的充分条件。将微分算子 D 和边界算子 B 合并为一个表达式后，与原始强条件 (2.22) 相比，弱条件 (2.27) 在实际应用中更易于求值。

2.7.1. 示例。为通过一个示例说明如何建设性地利用弱条件 (2.27) 进行边界条件设计，我们考虑定义在半直线上的常系数对流扩散问题，其形式如下：

$$\begin{aligned} u_t &= \epsilon u_{xx} - a u_x, \quad && x < x_e(t), \quad t > 0 \\ Bu &= g(t), && x = x_e(t), \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), && x < x_e(t), \end{aligned}$$

其中，边界条件的类型将由算子B的选择决定。对于这个偏微分方程问题，(2.26) 中的 $\mathcal{E}$ 变为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int^{x_e} \phi(\epsilon\phi_{xx} - a\phi_x)dx + \Big[\big(\delta\phi\big)\big(B\phi\big) + \frac{1}{2}\dot{x}_e\phi^2\Big]_{x=x_e} \\ &= -\epsilon\|\phi_x\|^2 + \Big[\big(\delta\phi\big)\big(B\phi\big) + \epsilon\phi\phi_x + \frac{1}{2}\big(\dot{x}_e - a\big)\phi^2\Big]_{x=x_e}, \end{aligned}$$

并且我们回顾一下， δ 是一个尚待指定的算子。

例如，通过施加狄利克雷边界条件 $u = g(t)$ 于 $x = x_e$，我们可以指定

$$B = 1, \quad \delta = \frac{1}{2}(a - \dot{x}_e) - \epsilon\partial_x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\epsilon\|\phi_x\|^2,$$

从而满足带有 $\alpha = 0$ 的 (2.27)。回想一下，这是使带有 $B\phi = 0$ 的 (2.22) 成立的充分条件。因此，命题 2.6 得出结论：对于相同的值 $\alpha = 0$，(2.23) 也成立，即我们得到严格半有界性。或者，通过施加特征边界条件 $\frac{1}{2}\big(a - \dot{x}_e - |a - \dot{x}_e|\big)u - \epsilon\phi_x = g(t)$，我们可以设定

$$B = \frac{1}{2}\big(a - \dot{x}_e - |a - \dot{x}_e|\big) - \epsilon\partial_x, \quad \delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\epsilon\|\phi_x\|^2 - \frac{1}{2}|a - \dot{x}_e|\phi(x_e,t)^2,$$

从而得出与上述狄利克雷条件相同的结论。

此外，注意在纯对流的情形下，即 $\epsilon = 0$，上述特征边界算子 B 仅在 $\dot{x}_e - a$对 $\mathcal{E}$产生正贡献时才非零，也就是说，此时 x_e 表示流入边界。这表明式 (2.18) 中相应的算子是最大半有界的，因此该问题是适定的，参见注 2.2。

3. 半离散框架。回顾一下，连续分析中的引理 2.5 的结论是由基于速度的雅可比行列式 J 定义 (2.15) 推得的。此外，第 2.5 节中雷诺输运定理的证明还依赖于分部积分 (2.3) 的应用。为了仿照针对半离散近似推导命题 2.6 的分析，我们需要重点关注这两个性质。因此，对于所有离散地满足 (2.3) 和 (2.15) 的数值格式，半离散分析都将以相同的方式进行。

对于离散化，我们考虑一个包含 n_V 个节点、表示 Ω 的体网格，其中一部分节点同时定义了一个大小为 n_S 、表示 ∂Ω 的表面网格。我们还定义了一个从前者网格到后者网格的限制算子 E 。也就是说，若 Φ 是某个向量量从所有节点限制到仅表面节点后的结果，则我们将这种关系表示为

$$\Phi = E\mathbf{\Phi},$$

其中 E 是一个 $n_S \times n_V$ 矩阵，每一行仅包含一个非零元素（其值为 1）。一般而言，我们采用下划线记法来表示将带下划线的向量沿对角线排列后得到的对角矩阵。也就是说，对于维数分别为 n_V 和 n_S 的向量 $\mathbf{\Phi}$ 和 Φ，我们常使用如下记法

$$\underline{\mathbf{\Phi}} =: \mathrm{Diag}(\mathbf{\Phi}), \quad \underline{\Phi} =: \mathrm{Diag}(\Phi).$$

对于一组维度相容的任意向量 $\mathbf{\Phi}$、 $\mathbf{\Psi}$、 Φ 和 Ψ，我们考虑与连续分析中的（2.2）相对应的以下离散内积定义

$$\big(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^{n_V} \mathbf{\Phi}_j \mathbf{\Psi}_j \mathcal{P}_j = \mathbf{\Phi}^T \underline{\mathcal{P}} \mathbf{\Psi}, \quad \big(\Phi, \Psi\big)_{P} = \sum_{i=1}^{n_S} \Phi_j \Psi_j P_j, = \Phi^T \underline{P} \Psi, \tag{3.1}$$

其中， $\mathcal{P} =（\mathcal{P}_1、 \mathcal{P}_2、...、 \mathcal{P}_{n_V}）^T$和 $P =（P_1、 P_2、...、 P_{n_S}）^T$分别表示体网格和表面网格的两组求积权重。

3.1. 空间中的 SBP 偏导算子。由于我们的目标是模拟连续分析，首先需要构造 IBP 的离散等价形式，称为分部求和（SBP）。因此，我们考虑一组线性算子 $\mathcal{D}_{x_i}$，用于在网格节点上近似$\frac{\partial}{\partial x_i}$，并满足以下与（2.3）相对应的 SBP 性质

$$\big(\mathbf{\Phi}, \mathcal{D}_{x_i} \mathbf{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} = -\big(\mathcal{D}_{x_i} \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} + \big(\Phi, \underline{N}_i \Psi\big)_{P}, \tag{3.2}$$

其中 $\Phi = E\mathbf{\Phi}$、 $\Psi = E\mathbf{\Psi}$，且 N_i 包含法向量分量 n_i 在表面节点上的值（精确值或近似值）。请注意，我们不对允许的数值解所属的函数空间作任何假设。相反，（3.2）应对大小为 n_V的任意向量 $\mathbf{\Phi}$、 $\mathbf{\Psi}$ 成立。

事实上，通过设计，可以使各种节点数值格式满足 (3.2) 这类性质，这些格式既适用于非结构化网格，也适用于结构化曲线网格。式 (3.2) 中出现的特定求积 $\mathcal{P}$ 和 P 通常由具体格式唯一确定。例如，有限体积情形下的节点控制体和表面积 [32], 、同位谱元算子的高斯–洛巴托求积权重 [8, 14], ，以及高阶有限差分算子的格雷戈里求积 [18, 23]。对于曲线域上的结构化方法，近期有两篇论文致力于将 SBP 算子形式体系扩展至物理坐标系（而非参考坐标系） [1, 24]。此外，通过将数值界面处理纳入全局算子定义本身，可以将一般的 SBP 性质 (3.2) 扩展至多块、多元和混合网格的组合 [27]。

分部求和关系式 (3.2) 所要求的形式矩阵结构可表示为

$$\mathcal{D}_{x_i} = \underline{\mathcal{P}}^{-1} \mathcal{Q}_{x_i}, \quad \mathcal{Q}_{x_i} + \mathcal{Q}_{x_i}^T = E^T \underline{P} \underline{N}_i E. \tag{3.3}$$

换言之，每个偏导数算子 $\mathcal{D}_{x_i}$ 都具有一种内在的近似反对称结构。正如对 $\mathcal{P}$ 已经指出的那样， Q_{x_i} 中的具体数值由特定的数值格式决定。

注 3.1。以下半离散分析要求 $\underline{\mathcal{P}}$（3.3）中的矩阵为对角矩阵。因此，除非采用配置法/质量集总，否则遗憾的是无法将其直接推广到标准有限元方法。

3.2. 时间偏导数近似。在动网格上，因变量当然必须随网格节点的运动而变化。因此，半离散情形中的任何时间导数，在连续情形下自然都对应于物质时间导数。然而，由于偏微分方程问题（2.1）是用时间偏导数 u_t （对应于原始物理坐标系）表述的，我们需要将该项与数值解向量 $\boldsymbol{U}(t)$ 的时间导数 $d\boldsymbol{U}/dt$ 联系起来。为此，我们在空间上使用一组 SBP 算子（3.3），对物质导数定义（2.11）的分裂形式进行离散。由此得到以下定义。

DEFINITION 3.2. 考虑一个向量函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，其在动网格节点上逼近 $\phi \in \mathcal{U}$，并令 $d\boldsymbol{\Phi}/dt$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}$的时间导数。于是，我们定义离散时间偏导数 $\boldsymbol{\Phi}_t$，其逼近 ϕ_t 为

$$\boldsymbol{\Phi}_t =: \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt} - \big(\mathcal{D}_m - \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big)\boldsymbol{\Phi}, \tag{3.4}$$

其中，我们采用一组分部求和（SBP）(3.3) 偏导数算子来定义

$$\mathcal{D}_m = \frac{1}{2}\Big(\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_1\mathcal{D}_{x_1} + \ldots + \underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_p\mathcal{D}_{x_p} + \mathcal{D}_{x_1}\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_1 + \ldots + \mathcal{D}_{x_p}\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_p\Big), \tag{3.5}$$

̇，其逼近 (2.12) 中的连续算子 D_m，其中向量 $\boldsymbol{X}_i$ 包含̈的 $\dot{x}_i$节点值。最后，(3.4) 中的复合符号 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X}$ 表示一个向量，其中包含连续量 $\nabla\cdot\dot{x}$的精确值或近似值。请注意，(3.4) 和 (3.5) 中的下划线记法将这些符号的含义从向量修改为相应的对角矩阵。

由于 $\underline{\mathcal{P}}$、 $\dot{\boldsymbol{X}}_i$以及 $E^T\underline{P}\underline{N}_iE$均为对角矩阵（因而可交换），将 (3.5) 左乘 $\underline{\mathcal{P}}$ 并加上转置项，再利用 (3.3)，可得

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_m + \mathcal{D}_m^T\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\Big(&\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_1E^T\underline{P}\underline{N}_1E + \underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_E^T\underline{P}\underline{N}_2E + \ldots + \underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_pE^T\underline{P}\underline{N}_pE + \\ &E^T\underline{P}\underline{N}_1E\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_1 + E^T\underline{P}\underline{N}_2E\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_2 + \ldots + E^T\underline{P}\underline{N}_pE\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_p\Big) \\ = \Big(&\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_1E^T\underline{P}\underline{N}_1E + \underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_2E^T\underline{P}\underline{N}_2E + \ldots + \underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_pE^T\underline{P}\underline{N}_pE\Big).\end{aligned}$$

注意，上述每一项 $\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_iE^T\underline{P}\underline{N}_iE$ 仅在对应表面节点的对角位置上非零。因此，从左侧乘以 E^TE （即一个在表面节点处取常数值 1 的对角矩阵）不会改变该表达式的值。因此，我们可以写成

$$\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_iE^T\underline{P}\underline{N}_iE = E^T\big(E\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_iE^T\underline{P}\underline{N}_i\big)E = E^T\underline{\dot{X}}_i\underline{P}\underline{N}_iE = E^T\underline{P}\underline{N}_i\underline{\dot{X}}_iE,$$

其中，$\underline{\dot{X}}_i = E\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_iE^T$ 是将 $\underline{\dot{\boldsymbol{X}}}_i$ 限制到表面节点上的限制。因此，(3.5) 中的算子 $\mathcal{D}_m$ 满足组合求和分部性质

$$\mathcal{D}_m = \underline{\mathcal{P}}^{-1}\mathcal{Q}_m, \quad \mathcal{Q}_m + \mathcal{Q}_m^T = E^T\underline{P}\big(\underline{N^T\dot{X}}\big)E, \tag{3.6}$$

其中

$$\underline{N^T\dot{X}} =: \underline{N_1}\underline{\dot{X}_1} + \underline{N_2}\underline{\dot{X}_2} + \ldots + \underline{N_p}\underline{\dot{X}_p},$$

注意，(3.6) 得到了同一性质的内积形式

$$\big(\mathbf{\Phi}, \mathcal{D}_m \mathbf{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} = -\big(\mathcal{D}_m \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} + \big(\Phi, \big(\underline{N^T \dot{X}}\big)\Psi\big)_P,$$

即（2.13）的精确类比。

3.3. 半离散格式。为了以清晰明了的方式施加（2.1）中的边界条件，我们以提升算子形式（2.24）为离散化的基础。不过，我们强调，这一选择不应被视为当前半离散框架的必要特征——也可以考虑其他施加边界条件的方式。

因此，我们考虑满足以下一般同步近似项（SAT） [9] 格式的（2.1）半离散近似

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_t &= \mathcal{D}(\boldsymbol{U}, t)\boldsymbol{U} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}}\big[\mathcal{B}(\boldsymbol{U}, t)\boldsymbol{U} - G(t)\big] + \boldsymbol{F}(t), \quad t \geq t_0 \\ \boldsymbol{U}(t_0) &= \boldsymbol{U}_0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

该格式对应于连续形式（2.24），其中 $\boldsymbol{U}_t$ 是由（3.4）定义的 $\boldsymbol{U}$ 的时间偏导数近似。与连续情形不同，我们不对（3.7）中允许的数值解的函数空间作任何先验假设。因此，我们采用一般差分方法的观点，允许 $\boldsymbol{U}$ 为任意一个大小为 n_V 的向量。在（3.7）中，我们还定义了离散提升算子 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}}$，其形式如下:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}} = \underline{\mathcal{P}}^{-1} \boldsymbol{\delta}^T \underline{P},$$

其中， $\boldsymbol{\delta}$ 是近似算子 δ的 $n_S \times n_V$矩阵。注意，离散提升算子的这一定义意味着，对于维数分别为 n_V和 n_S 的任意两个向量 $\mathbf{\Phi}$ 和 Ψ ，

$$\big(\mathbf{\Phi}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}} \Psi\big)_{\mathcal{P}} = \big(\boldsymbol{\delta}\mathbf{\Phi}, \Psi\big)_P, \tag{3.8}$$

从而仿照了（2.25）。

注 3.3。关于第 2.7.1 节中讨论的示例边界条件，基于$\delta = \frac{1}{2}\left(a - \dot{x}_e\right) - \epsilon\partial_x$（狄利克雷情形）的提升算子可以使用 $\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2}\left(a - \dot{x}_e\right) E - \epsilon E \mathcal{D}_x$进行近似，而 $\delta = 1$对应于 $\boldsymbol{\delta} = E$。

为便于今后参考，（3.7）中的完整系统矩阵为

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}} \mathcal{B}, \tag{3.9}$$

将微分算子与边界算子合并为一个算子。

ˆ 3.4. 参考求积。关于静止参考域 Ωˆ，我们假设体积求积 $\mathcal{P}$ 可以分解为 $\mathcal{P}\left(t\right) = \mathcal{J}\left(t\right)\mathcal{P}$，其中ˆ$\mathcal{P}$ 是一个具有恒定参考求积权重的向量，而离散雅可比$\mathcal{J}\left(t\right) > 0$ 满足初值问题

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dt} &= \big(\underline{\boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}}\big)\mathcal{J}, \quad t \geq t_0 \\ \mathcal{J}(t_0) &= \mathcal{J}_0 > 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

˙对应于连续情形中的 (2.15)。这里，我们将 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{X}$ 定义为先前在 (3.4) 中使用的同一精确量或近似量。

˙请注意，如果 $\mathcal{J}$ 和 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X}$ 都分别包含 J 和 $\nabla\cdot\dot{x}$ 的精确节点值，那么 (3.10) 显然可直接由 (2.15) 得出。然而，如果其中任一项包含近似值，则需要更加谨慎。关于曲线坐标这一重要特例的深入讨论，请参见附录 A。

注 3.4. 与连续情形一样，即使不显式知道随时间变化的坐标映射，我们也总能利用 (3.10) 以构造性方式定义函数 $\mathcal{J}(t)$。特别是，我们可以指定初始向量 $\mathcal{J}_0$ 在各处均取常数值 1，这对应于选择 ˆΩ = Ω(t_0)，参见注 2.3。

如此建立的半离散框架既模仿了分部积分 (2.3) 的基本性质，也模仿了 (2.15)，现在我们可以从引理 2.5 开始，逐步模仿连续分析。

LEMMA 3.5. 对于任意维数为 n_V 的可微函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，相应变量 $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{\Phi}$ 的时间导数满足

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\Phi}}}{dt} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\big(\boldsymbol{\Phi}_t + \mathcal{D}_m\boldsymbol{\Phi}\big), \tag{3.11}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_t$ 在 (3.5) 中定义，且 $\mathcal{J}(t) > 0$ 满足 (3.10) 中的辅助初值问题组。

证明。该结果的证明与引理 2.5 的证明类似。对 ˆ $\boldsymbol{\Phi} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{\Phi}$ 求时间导数，首先得到

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\Phi}}}{dt} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt} + \underline{\frac{d\sqrt{\mathcal{J}}}{dt}}\boldsymbol{\Phi}. \tag{3.12}$$

此外，由于 $\mathcal{J} > 0$，我们可以将 (3.10) 改写为

$$\frac{d\sqrt{\mathcal{J}}}{dt} = \frac{1}{2}\big(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big)\sqrt{\mathcal{J}}. \tag{3.13}$$

将 (3.4) 和 (3.13) 代入 (3.12) 后，得到

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\Phi}}}{dt} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\Big[\boldsymbol{\Phi}_t + \big(\mathcal{D}_m - \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big)\boldsymbol{\Phi}\Big] + \frac{1}{2}\big(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big)\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{\Phi},$$

即 (3.11) 得证。 □

就半离散格式 (3.7) 而言，利用引理 3.5 对 $\hat{\boldsymbol{U}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{U}$ 作变量代换后，便得到等价问题

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\boldsymbol{U}}}{dt} &= \hat{\mathcal{D}}(\hat{\boldsymbol{U}},t)\hat{\boldsymbol{U}} + \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}}\Big[\hat{\mathcal{B}}(\hat{\boldsymbol{U}},t)\hat{\boldsymbol{U}} - G(t)\Big] + \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{F}(t), \quad t \geq t_0\\ \hat{\boldsymbol{U}}(t_0) &= \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{U}_0,\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中

$$\hat{\mathcal{D}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\big(\mathcal{D} + \mathcal{D}_m\big)\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}, \quad \hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}.$$

与相应的连续形式（2.18）一样，（3.14）中没有出现不定源项。

（3.14）中的完整系统矩阵为

$$\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{D}} + \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}}\hat{\mathcal{B}}. \tag{3.15}$$

在将命题 2.6 推广到半离散情形之前，我们还需要雷诺输运定理的离散版本。

3.5. 半离散雷诺输运定理。与连续分析中的 (2.19) 类似，对于任意两个向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$，代入 $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{\Phi}$和 $\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{\Psi}$ 可直接得到恒等式

$$\big(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} = \big(\boldsymbol{\Phi}, \underline{\mathcal{J}}\boldsymbol{\Psi}\big)_{\hat{\mathcal{P}}} = \big(\hat{\boldsymbol{\Phi}}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\big)_{\hat{\mathcal{P}}}.$$

由于 $\mathcal{P}$ 中的求积权重为常数，我们可以将该内积的时间导数写为

$$\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt}\big(\hat{\boldsymbol{\Phi}}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\big)_{\hat{\mathcal{P}}} = \Big(\frac{d\hat{\boldsymbol{\Phi}}}{dt}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\Big)_{\hat{\mathcal{P}}} + \Big(\hat{\boldsymbol{\Phi}}, \frac{d\hat{\boldsymbol{\Psi}}}{dt}\Big)_{\hat{\mathcal{P}}}.$$

利用引理 3.5，我们还可以将右侧的第一项写为

$$\Big(\frac{d\hat{\boldsymbol{\Phi}}}{dt}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\Big)_{\hat{\mathcal{P}}} = \Big(\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{\Phi}_t, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\Big)_{\hat{\mathcal{P}}} + \Big(\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\mathcal{D}_m\boldsymbol{\Phi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}\Big)_{\hat{\mathcal{P}}} = \Big(\boldsymbol{\Phi}_t, \boldsymbol{\Psi}\Big)_{\mathcal{P}} + \Big(\mathcal{D}_m\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}\Big)_{\mathcal{P}},$$

第二项当然也可以类似地写出。最后，应用 SBP 性质 (3.6)，我们证明了半离散雷诺输运定理

$$\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}\big)_{\mathcal{P}} = \Big(\boldsymbol{\Phi}_t, \boldsymbol{\Psi}\Big)_{\mathcal{P}} + \Big(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_t\Big)_{\mathcal{P}} + \big(\boldsymbol{\Phi}, \big(\underline{N^T\dot{X}}\big)\boldsymbol{\Psi}\big)_{P}, \tag{3.16}$$

这与连续情形中的 (2.20) 完全对应。

3.6. 能量方法。雷诺输运定理 (3.16) 与 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{U}$ 直接得到与连续性质 (2.21) 相对应的

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{U}\|^2_{\mathcal{P}} = 2\big(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_t\big)_{\mathcal{P}} + \big(U, \big(\underline{N^T\dot{X}}\big)U\big)_{P}, \tag{3.17}$$

其中，$U = E\boldsymbol{U}$ 是限制在表面节点上的解向量。将半离散方程 (3.7) 代入 (3.17)，并利用提升算子性质 (3.8)，进一步得到

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{U}\|^2_{\mathcal{P}} = 2\big(\boldsymbol{U}, \mathcal{D}\boldsymbol{U}\big)_{\mathcal{P}} + 2\big(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{U}, \mathcal{B}\boldsymbol{U} - G\big)_{P} + 2\big(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}\big)_{\mathcal{P}} + \big(U, \big(\underline{N^T\dot{X}}\big)U\big)_{P}.$$

因此，为了保证 $\boldsymbol{F} = G = 0$满足 (2.8) 类型的能量估计，条件

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathcal{D}, \mathcal{B}, \boldsymbol{\Phi}) \le \alpha\|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{\mathcal{P}}, \tag{3.18}$$

必须对所有大小为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的向量成立，其中

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathcal{D}, \mathcal{B}, \boldsymbol{\Phi}) = \big(\boldsymbol{\Phi}, \mathcal{D}\boldsymbol{\Phi}\big)_{\mathcal{P}} + \big(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Phi}, \mathcal{B}\boldsymbol{\Phi}\big)_{P} + \frac{1}{2}\big(\Phi, \big(\underline{N^T\dot{X}}\big)\Phi\big)_{P}, \tag{3.19}$$

其中 $\Phi = E\boldsymbol{\Phi}$。注意，(3.18) 与连续分析中的弱条件 (2.27) 类似，足以保证强条件 (2.22)。

注意，我们也可以将 (3.18) 表示为矩阵形式：

$$\underline{\mathcal{P}}\mathcal{M} + \mathcal{M}^T\underline{\mathcal{P}} + E^T\underline{P}\underline{N^T\dot{X}}\,E - \alpha\underline{\mathcal{P}} \le 0, \tag{3.20}$$

其中， $\mathcal{M}$ 是问题（3.9）中的系统矩阵。因此，我们一般假设可以通过适当设计方案，使（3.20）成立。现在我们可以陈述半离散分析的主要结果，该结果将（3.20）与形式为（2.7）的半有界性结果联系起来。

PROPOSITION 3.6. 条件（3.20）等价于（3.15）中的系统矩阵 $\hat{}\,\mathcal{M}$ 满足

$$\underline{\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathcal{M}} + \hat{\mathcal{M}}^T\underline{\hat{\mathcal{P}}} - \alpha\underline{\hat{\mathcal{P}}} \le 0, \tag{3.21}$$

从而保证当 $\alpha \le 0$ 时，矩阵谱的实部非正。

证明。首先，根据（3.14）中 $\hat{}\,\mathcal{D}$ 的定义，可写为

$$\underline{\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathcal{M}} = \underline{\hat{\mathcal{P}}\sqrt{\mathcal{J}}}\big(\mathcal{D} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\delta}}\mathcal{B} + \mathcal{D}_m\big)\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}\underline{\mathcal{P}}\big(\mathcal{M} + \mathcal{D}_m\big)\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}.$$

将转置相加并使用分部求和（3.6），可得

$$\underline{\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathcal{M}} + \hat{\mathcal{M}}^T\underline{\hat{\mathcal{P}}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}\Big[\underline{\mathcal{P}}\mathcal{M} + \mathcal{M}^T\underline{\mathcal{P}} + E^T\underline{P}\underline{N^T\dot{X}}\,E\Big]\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}.$$

因此，(3.21) 的整个左端可以写成如下形式，因为 $\mathcal{P} = \underline{\mathcal{J}}\,\hat{}\,\mathcal{P}$,

$$\underline{\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathcal{M}} + \hat{\mathcal{M}}^T\underline{\hat{\mathcal{P}}} - \alpha\underline{\hat{\mathcal{P}}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}\Big[\underline{\mathcal{P}}\mathcal{M} + \mathcal{M}^T\underline{\mathcal{P}} + E^T\underline{P}\underline{N^T\dot{X}}\,E - \alpha\underline{\mathcal{P}}\Big]\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}.$$

最后，由于 $\underline{\sqrt{\mathcal{J}}}^{-1}$ 是一个对角线上包含严格正值的对角矩阵，这表明性质 (3.20) 和 (3.21) 确实等价。 □

由于标准时间积分方法要求半离散矩阵谱的实部非正才能保证稳定性，因此命题 3.6 的结果对于采用线法求解网格任意运动情况下的一般偏微分方程问题至关重要；如果能够证明 $\alpha \le 0$ 满足形式为 (3.20) 的能量估计，那么就可以使用标准方法（例如 $A-$ 稳定的隐式方法或条件稳定的显式方法）稳定地向前推进 (3.14)。

4. 自由流保持。

本节考察自由流保持这一通常还希望具备的附加性质（根据命题 3.6，该性质并非必要）。我们将看到，利用上述 ALE 框架，可以通过构造保证半离散解和全离散解都具有这一性质。

4.1. 半离散情形。

首先，我们要求（3.7）中的空间近似项在空间和时间上均与常数解 u_∞ 相容，前提是初始数据、边界数据和源项数据选取恰当。因此，我们作出如下假设：对于任意实数 u_∞，均有

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{U}_\infty, t)\boldsymbol{U}_\infty = 0, \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{U}_\infty, t)\boldsymbol{U}_\infty = G, \quad \boldsymbol{F}(t) = 0, \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{U}_\infty = u_\infty\mathbb{1}$，而 $\mathbb{1}$ 是一个每个分量均为常数 1 的向量。对于常系数问题，条件 (4.1) 中的第一个条件可直接由空间中使用相容算子推出，见下文 (4.3)。注意，在右端代入 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_\infty$ 后，这会得到 (3.7) 中的 $\boldsymbol{U}_t = 0$。

接下来，回顾第3节的半离散框架，其中同一个向量 $\boldsymbol{\nabla \cdot X}$ 既用于根据 (3.4) 定义 $\boldsymbol{U}_t$，也用于辅助雅可比方程 (3.10)。根据命题 3.6，要保证稳定性，$\nabla \cdot \dot{x}$ 取精确值还是近似值并不重要。然而，对于自由流保持而言，这一点至关重要。具体来说，我们考虑采用与此前在 (3.5) 中计算 $\mathcal{D}_m$ 时相同的一组分部求和算子所得到的近似，即定义

$$\boldsymbol{\nabla \cdot \dot{X}} = \mathcal{D}_{x_1} \dot{\boldsymbol{X}}_1 + \mathcal{D}_{x_2} \dot{\boldsymbol{X}}_2 + \ldots + \mathcal{D}_{x_p} \dot{\boldsymbol{X}}_p. \tag{4.2}$$

最后，我们考虑采用上述相容的偏导数近似，即假设

$$\mathcal{D}_{x_i} \mathbb{1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.3}$$

如 A.1 所示，对于使用曲线坐标的高阶求和分部算子，此类相容性条件可以通过构造来满足。然而，如 [25], 所述，当计算块或单元之间存在弯曲的非共点界面时，要满足这些条件并非易事（但仍有可能）。现在我们可以证明

PROPOSITION 4.1. 考虑在式 (3.5) 和式 (4.2) 中使用同一组偏导数算子 $\mathcal{D}_{x_i}$，并进一步假设相容性条件 (4.1) 和 (4.3) 成立。则半离散格式 (3.7)，亦即等价的 (3.14)，保持自由流。

证明。设在某一时刻 t_1，式 (3.7) 的解为常向量 $\boldsymbol{U}(t_1) = \mathbb{1}$。若 (4.2) 和 (4.3) 均成立，则根据式 (3.5) 中 $\mathcal{D}_m$ 的定义，有

$$\mathcal{D}_m \mathbb{1} = \frac{1}{2}\big(\mathcal{D}_{x_1} \dot{\boldsymbol{X}}_1 + \mathcal{D}_{x_2} \dot{\boldsymbol{X}}_2 + \ldots\big) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla \cdot \dot{X}}.$$

因此，通过将 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_\infty$ 代入（3.4）的右端，$t = t_1$ 处 $\boldsymbol{U}$ 的时间导数变为

$$\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}(t_1) = \boldsymbol{U}_t(t_1) + \big(\mathcal{D}_m - \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\nabla \cdot \dot{X}}}\big)\boldsymbol{U}_\infty = \boldsymbol{U}_t(t_1) + \big(\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla \cdot \dot{X}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla \cdot \dot{X}}\big) u_\infty = \boldsymbol{U}_t(t_1).$$

如上文所述，将（4.1）代入带有 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_\infty$ 的格式（3.7）后，即可得到 $\boldsymbol{U}_t$（t_1）。 ∎

4.2. 全离散近似。当时间变量保持连续时，格式（3.7）和（3.14）是等价的。然而，在时间上推进系统时，即使采用相同的时间积分方法和相同的时间步长，通常也会得到两个不同的数值解。由于只要满足 $\alpha \leq 0$，就可以利用命题 3.6 推断（3.14）的时间稳定性，因此该公式最适合进行时间积分。为了在全离散意义下实现自由流保持，我们因而需要验证：命题 4.1 的结论是否能够推广到通过采用任意时间步长在时间上推进（3.14）所得的解。为此，先前的一些工作曾考虑过一种方法，即使用相同的时间积分格式同时更新格式和度量雅可比行列式，参见例如 [35, 28, 3, 7, 6]。下面我们将基于平方根关系（3.14），对这一方法作适当修改。

就新的自变量 $\hat{\boldsymbol{U}} = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\boldsymbol{U}$ 而言，常数解 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_\infty$ 当然等价于 $\hat{\boldsymbol{U}} = u_\infty \sqrt{\mathcal{J}}$。为了保持自由流保持性质

在向前推进时间求解 (3.14) 后，我们还需要使全离散解满足 $\hat{\boldsymbol{U}} = u_\infty\sqrt{\mathcal{J}}$。因此，将 (3.13) 与 (3.14) 一起视为半耦合系统

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{\mathcal{J}}}{dt} &= \frac{1}{2}(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}})\sqrt{\mathcal{J}} \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{U}}}{dt} &= RHS(\sqrt{\mathcal{J}},\boldsymbol{U},t), \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中我们引入简记

$$RHS(\sqrt{\mathcal{J}},\boldsymbol{U},t) = \underline{\sqrt{\mathcal{J}}}\Big[\mathcal{D}_m\boldsymbol{U} + \mathcal{D}(\boldsymbol{U},t)\boldsymbol{U} + \mathcal{L}\big[\mathcal{B}(\boldsymbol{U},t)\boldsymbol{U} - G(t)\big] + \boldsymbol{F}(t)\Big].$$

注意

$$RHS(\sqrt{\mathcal{J}},\boldsymbol{U}_\infty,t) = \frac{1}{2}(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}})u_\infty\sqrt{\mathcal{J}}, \tag{4.5}$$

遵循与命题 4.1 相同的一致性假设。因此，从常数解 $\boldsymbol{U}(t_1) = \boldsymbol{U}_\infty$ 出发，(4.4) 中第二个方程的右端恰好化简为第一个方程的右端，仅缩放了 u_∞。只要对两个方程采用相同的时间积分格式，我们便可自动得到所有后续离散时间步的 $\hat{\boldsymbol{U}} = u_\infty\sqrt{\mathcal{J}}$。

为了更明确地说明这一结果，下面针对采用一般的 $s-$ 阶显式 Runge-Kutta 时间推进格式这一特殊情形，给出自由流保持性的完整证明。

PROPOSITION 4.2. 考虑使用一般的 $s-$ 阶显式 Runge-Kutta 时间推进格式对系统 (4.4) 进行时间推进，即我们应用

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{J}^{n+1}} &= \sqrt{\mathcal{J}^n} + \Delta t\sum_{k=1}^{s}\frac{b_k}{2}\big(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big(t_n + c_k\Delta t\big)\big)\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k} \\ \underline{\sqrt{\mathcal{J}^{n+1}}}\boldsymbol{U}^{n+1} &= \underline{\sqrt{\mathcal{J}^n}}\boldsymbol{U}^n + \Delta t\sum_{k=1}^{s} b_k RHS\big(\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k},\bar{\boldsymbol{U}}^k,t_n + c_k\Delta t\big), \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中，阶段值 $\bar{\mathcal{J}}^k$ 和 $\bar{\boldsymbol{U}}^k$ 定义为

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k} &= \sqrt{\mathcal{J}^n} + \Delta t\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{a_{k\nu}}{2}\big(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big(t_n + c_\nu\Delta t\big)\big)\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^\nu} \\ \underline{\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k}}\bar{\boldsymbol{U}}^k &= \underline{\sqrt{\mathcal{J}^n}}\boldsymbol{U}^n + \Delta t\sum_{\nu=1}^{k-1} a_{k\nu} RHS\big(\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^\nu},\bar{\boldsymbol{U}}^\nu,t_n + c_\nu\Delta t\big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

若满足命题 4.1 的前提，则该时间推进格式具有自由流保持性。

证明。从常数解 $\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{U}_\infty = u_\infty\mathbb{1}$ 出发，我们需要证明这自动意味着 $\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}_\infty$，并将通过对阶段索引 k 使用归纳法来完成。因此，对于 (4.7) 中的 $k = 1$， $\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{U}_\infty$ 可得

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\mathcal{J}}^1} &= \sqrt{\mathcal{J}^n}, \\ \underline{\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^1}}\bar{\boldsymbol{U}}^1 &= \underline{\sqrt{\mathcal{J}^n}}\boldsymbol{U}^n = u_\infty\sqrt{\mathcal{J}^n} = u_\infty\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^1}, \end{aligned}$$

从而证明了 $\bar{\boldsymbol{U}}^1 = \boldsymbol{U}_\infty$。

接下来，我们假设对 $\nu = 1, \ldots, k-1$， $\bar{\boldsymbol{U}}^\nu = \boldsymbol{U}_\infty$成立，其中 k是介于 1 和 s之间的某个数。于是利用 (4.5)，(4.7) 中的第二个方程变为

$$\underline{\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k}}\bar{\boldsymbol{U}}^k = u_\infty\sqrt{\mathcal{J}^n} + \Delta t\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{a_{k\nu}}{2}\big(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big(t_n + c_\nu\Delta t\big)\big)u_\infty\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^\nu} = u_\infty\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k},$$

其中在最后一步中，我们使用了 (4.7) 中的第一个方程。

由此我们证明了，对 $\nu = 1, ..., k-1$， $\bar{\boldsymbol{U}}^\nu = \boldsymbol{U}_\infty$蕴含 $\bar{\boldsymbol{U}}^k = \boldsymbol{U}_\infty$；根据归纳法可知，对于所有阶段 $k = 1, \ldots, s$， $\bar{\boldsymbol{U}}^k = \boldsymbol{U}_\infty$均成立。将这一结果代入龙格–库塔格式 (4.6) 的第二行，得到

$$\underline{\sqrt{\mathcal{J}^{n+1}}}\boldsymbol{U}^{n+1} = u_\infty\sqrt{\mathcal{J}^n} + \Delta t\sum_{k=1}^{s}\frac{b_k}{2}\big(\underline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}}}\big(t_n + c_k\Delta t\big)\big)u_\infty\sqrt{\bar{\mathcal{J}}^k} = u_\infty\sqrt{\mathcal{J}^{n+1}},$$

也就是说，我们已经证明了 $\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}_\infty$。 □

5. 数值实验。本节通过一个数值实验验证所提出的线法 ALE 技术的稳定性和精度。作为模型，考虑一维标量对流扩散方程，其左边界 $x_s(t)$ 上施加特征入流条件，右边界 $x_e(t)$ 上施加狄利克雷条件，

$$\begin{aligned} u_t &= \epsilon u_{xx} - u_x + F(x,t), && x_s(t) < x < x_e(t), && t > 0 \\ \epsilon u_x - (1-\dot{x}_s)u &= g_s(t), && x = x_s(t), && t > 0 \\ u &= 0 && x = x_e(t) && t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), && x_s < x < x_e. \end{aligned} \tag{5.1}$$

为简便起见，假设 $\dot{x}_s(t) \le 1$ 成立，从而左边界始终保持为流入边界。关于(5.1)中出现的两类边界条件的能量分析，另见第2节2.7.1。最后，通过指定如下数据，我们施加时间周期制造解 $u = u_{\mathrm{MMS}} = (1 + A\sin(x-t))(1 - e^{(x-x_e)/\epsilon})$，其中 $A = 0.1$，

$$\begin{aligned} F &= A\epsilon\sin(x-t) + \Big[\frac{\dot{x}_e}{\epsilon}(1 + A\sin(x-t)) + 2A\cos(x-t) - A\epsilon\sin(x-t)\Big]e^{\frac{x-x_e}{\epsilon}} \\ g_s &= -(1 + A\sin(x_s - t)) + \big[A\epsilon\cos(x_s - t) + \dot{x}_s(1 + A\sin(x_s - t))\big](1 - e^{(x_s - x_e)/\epsilon}) \\ u_0 &= (1 + A\sin(x))(1 - e^{(x - x_e(0))/\epsilon}), \end{aligned}$$

对于数值实验，我们指定 $\epsilon = 0.1\pi$ 并将移动区域边界设为 $x_s = -\pi + \sin(t)$、$x_e = \pi - \sin(t)$。此外，将区域划分为两个块，分别由 $[x_s, x_e] = [x_s, x_m] \cup [x_m, x_e]$ 给出，其中 $x_m = x_e - \pi/3$。换言之，我们在区域最右侧插入宽度为 $\pi/3$ 的边界层网格，并使其作刚体运动。请注意，两个块中刚体运动与非刚体运动的组合会导致块间界面处的网格速度局部不光滑。两个块的网格间距之比在 $t = 0$处为 5。图 1 展示了移动分块网格，以及模型问题在边界层中使用 8 个网格间距时的精确解。此外，我们在块内部采用四阶精度的有限差分模板，并辅以

二阶精度的 SBP 边界闭合，表格中的数值见 [17] 。最后，我们按照 [31, 27] 施加 SAT 界面条件，以便在整个空间区域上构造一个封装式 SBP 算子。

在离散情形下，一维空间中的 SBP 性质 (3.3) 可简化为$\mathcal{D}_x = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}_x$，其中

$$\mathcal{Q}_x + \mathcal{Q}_x^T = -E_s^T E_s + E_e^T E_e \quad E_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_e = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

根据 (2.7.1) 中的连续分析，我们将 (3.7) 中的离散算子定义为

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{D}_x^2 - \mathcal{D}_x, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \epsilon E_s \mathcal{D}_x - (1 - \dot{x}_s) E_s \\ E_e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} E_s \\ -\epsilon E_e \mathcal{D}_x + \frac{1}{2}(1 - \dot{x}_e) E_e \end{pmatrix},$$

为简便起见，我们在此两次应用一阶导数算子来近似二阶导数。为了限制由此产生的高波数误差，我们在每个时间步之后应用能量稳定的高阶数值滤波器 [26] 。在 (3.19) 中，上述算子给出

$$\big(\mathbf{\Phi}, \mathcal{D}\mathbf{\Phi}\big)_{\mathcal{P}} = -\epsilon \|\mathcal{D}_x \mathbf{\Phi}\|_{\mathcal{P}}^2 - \epsilon \Phi_s \Phi_{sx} + \frac{1}{2}\Phi_s^2 + \epsilon \Phi_e \Phi_{ex} - \frac{1}{2}\Phi_e^2,$$

其中 $\Phi_s = E_s \mathbf{\Phi}$、 $\Phi_e = E_e \mathbf{\Phi}$、 $\Phi_{xs} = E_s \mathcal{D}_x \mathbf{\Phi}$、 $\Phi_{xe} = E_e \mathcal{D}_x \mathbf{\Phi}$，以及

$$\big(\boldsymbol{\delta}\mathbf{\Phi}, \mathcal{B}\mathbf{\Phi}\big)_P = \Phi_s \big[\epsilon \Phi_{xs} - (1 - \dot{x}_s)\Phi_s\big] + \big[-\epsilon \Phi_{xe} + \frac{1}{2}(1 - \dot{x}_e)\Phi_e\big]\Phi_e.$$

(3.19) 中的完整表达式因此为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathbf{\Phi}) = & -\epsilon \|\mathcal{D}_x \mathbf{\Phi}\|_{\mathcal{P}}^2 - \epsilon \Phi_s \Phi_{sx} - \frac{1}{2}(\dot{x}_s - 1)\Phi_s^2 + \Phi_s \big[\epsilon \Phi_{xs} - (1 - \dot{x}_s)\Phi_s\big] \\ & + \epsilon \Phi_e \Phi_{ex} + \frac{1}{2}(\dot{x}_e - 1)\Phi_e^2 + \big[-\epsilon \Phi_{xe} + \frac{1}{2}(1 - \dot{x}_e)\Phi_e\big]\Phi_e \\ = & -\epsilon \|\mathcal{D}_x \mathbf{\Phi}\|_{\mathcal{P}}^2 - \frac{1}{2}(1 - \dot{x}_s)\Phi_s^2 \leq 0, \end{aligned}$$

对所有向量 $\mathbf{\Phi}$，这表明半离散格式 (3.7) 是能量稳定的。

对于时间离散化，我们采用经典的四阶显式龙格－库塔格式，时间步长取为 $\Delta t = 0.5 \Delta x_{\min}^2 / \epsilon$。为说明离散几何守恒并非必要条件，我们在格式 (3.14) 中使用 $\sqrt{J}$ 的精确值，而不是在时间上求解耦合系统 (4.4)。作为比较，我们还考虑静止区域情形 $x_s = -\pi$， $x_e = \pi$ 在 (5.1) 中采用与 $t = 0$ 的移动区域情形相同的分块网格，以及相同的制造的精确解。在 $t = 2\pi$ 处得到的绝对误差水平绘于图 2 中，其中边界层网格采用 $N = 32$ 网格间距。表 1 还比较了移动区域情形与静止区域情形之间的收敛率。两种情形下的收敛率都接近 3，绝对误差水平略有差异。因此，该实验结果表明，就数值效率而言，所提出的线法在移动区域及其等价的静止区域应用之间具有可比性。

6. 结论。我们建立了一个基于半有界算子的框架，用于分析和离散化区域与网格任意运动下的初边值问题。该框架既可用于分析

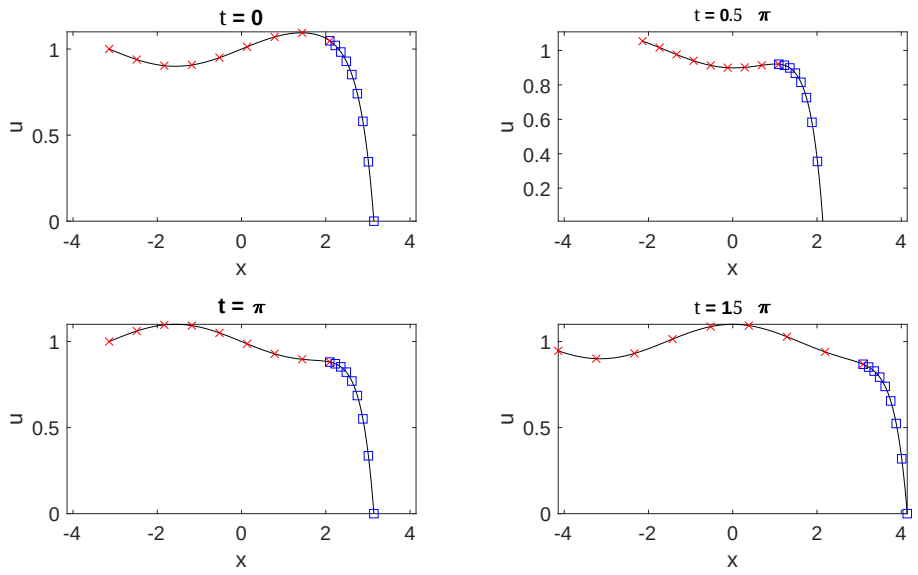


FIG. 1. *Exact solution on the two subdomains during one periodic cycle. The ratio of grid spacings between the left and right domain is given by* 5 *at* $t = 0$.

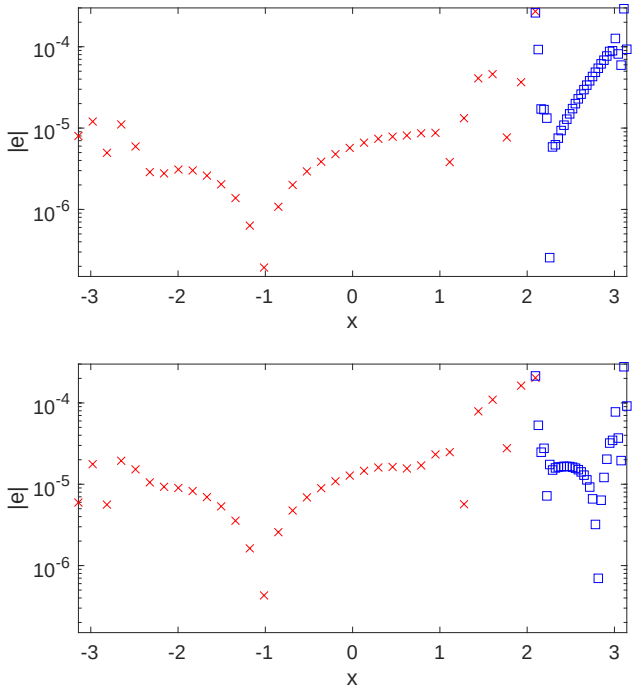


FIG. 2. *Absolute error levels for the stationary (above) and moving (below) domain case at* $t = 2\pi$.

连续问题的线性适定性，也可用于构造能量稳定半离散化。具体而言，我们证明，任何能量稳—

	静止		移动	
N	$\log_{10}(\|e\|_\infty)$	p	$\log_{10}(\|e\|_\infty)$	p
8	-1.8639	-	-2.0192	-
16	-2.6741	2.69	-2.7303	2.36
32	-3.5329	2.85	-3.5558	2.74
64	-4.3916	2.85	-4.4243	2.89
128	-5.2678	2.91	-5.3045	2.92

TABLE 1
Convergence in L_∞ norm at $t = 2\pi$ with N the number of spacings in the boundary layer grid.

相对于物理坐标系推导的估计与静止参考域上的半有界性相关。由于只需通过恰当设置并运用分部积分即可证明主要的连续结果，因此可以基于离散分部求和，在高度抽象的层面上构建半离散框架，从而使其适用于多种不同类型的数值离散方法。

通过这一进展，可以稳定地对定义在移动区域上的初边值问题分别进行空间和时间离散，即采用标准的线法方法。这并不要求组合后的时空离散满足离散几何守恒（自由流保持）。最后，我们还展示了如有需要，可以在半离散层面以及全离散解中实现自由流保持。不过，我们强调，无论是实现高阶精度还是保证稳定性，这都不是严格必要的。通过一项数值实验，验证了这种新线法框架即使在不满足离散几何守恒的情况下，仍具备稳定性和高效性。

附录 A. 曲线坐标。这里我们更详细地讨论一种特殊情形：对于每个时间t，运动域坐标 $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \Omega$ 可由从单位超立方体 $\hat{\Omega} = [0,1]^p$出发的光滑双射映射 $x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ 表示。只要 $\hat{\Omega}$ 上存在离散求积公式 $\hat{\mathcal{P}}$，我们就总能像之前一样，利用 $\hat{\mathcal{P}}(t) = \mathcal{J}(t)\mathcal{P}$，为 Ω 定义相应的求积，其中 $\mathcal{J}$ 包含雅可比行列式的节点值，这些值可以是精确的，也可以是近似的。

请注意，$\underline{\mathcal{J}}^{-1}\frac{d\mathcal{J}}{dt}$ 可被视为关于 $\mathcal{J}$ 的值的一个特例，在二维情况下，其精确表达式为

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1},$$

因此，自然的做法是将这些连续值直接代入 $\mathcal{J}$，或者，也可以在 Ω 上应用离散偏导数算子来定义

$$\mathcal{J} = \big(\mathcal{D}_{\xi_1}\underline{\boldsymbol{X}_1}\big)\big(\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_2\big) - \big(\mathcal{D}_{\xi_2}\underline{\boldsymbol{X}_1}\big)\big(\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_2\big). \tag{A.1}$$

采用这种选择后，离散变量 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}} = \underline{\mathcal{J}}^{-1}\frac{d\mathcal{J}}{dt}$变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{X}} = \underline{\mathcal{J}}^{-1}\Big[&\big(\mathcal{D}_{\xi_1}\underline{\dot{\boldsymbol{X}}_1}\big)\big(\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_2\big) + \big(\mathcal{D}_{\xi_1}\underline{\boldsymbol{X}_1}\big)\big(\mathcal{D}_{\xi_2}\dot{\boldsymbol{X}}_2\big)\\ &-\big(\mathcal{D}_{\xi_2}\underline{\dot{\boldsymbol{X}}_1}\big)\big(\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_2\big) - \big(\mathcal{D}_{\xi_2}\underline{\boldsymbol{X}_1}\big)\big(\mathcal{D}_{\xi_1}\dot{\boldsymbol{X}}_2\big)\Big],\end{aligned} \tag{A.2}$$

其中，我们在右侧代入了 (A.1) 右侧的时间导数。

反过来，我们也可以先指定 $\nabla \cdot \boldsymbol{X}$ 的值，例如像 (4.2) 中那样应用一组物理空间 SBP 算子，然后利用关系式 (3.10) 反向定义 $\mathcal{J}$。

A.1. 自由流保持。为简洁起见，再次以二维坐标为例，只有当 $\mathcal{D}_{\xi_1}$ 和 $\mathcal{D}_{\xi_2}$ 是关于参考域求积 $\mathcal{P}$ 的 SBP 算子 (3.3) 时，才能定义关于 Ω 中物理坐标的 SBP 算子，

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{x_1} =& \frac{1}{2}\underline{\mathcal{J}}^{-1}\Big[\mathcal{D}_{\xi_1}\big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_2}\big) + \big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_2}\big)\mathcal{D}_{\xi_1} - \mathcal{D}_{\xi_2}\big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_2}\big) - \big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_2}\big)\mathcal{D}_{\xi_2}\Big]\\ \mathcal{D}_{x_2} =& \frac{1}{2}\underline{\mathcal{J}}^{-1}\Big[\mathcal{D}_{\xi_2}\big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_1}\big) + \big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_1}\big)\mathcal{D}_{\xi_2} - \mathcal{D}_{\xi_1}\big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_1}\big) - \big(\underline{\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_1}\big)\mathcal{D}_{\xi_1}\Big],\end{aligned}$$

更多详情另见 [24, 1]。现在假设 $\mathcal{D}_{\xi_1}$ 和 $\mathcal{D}_{\xi_2}$ 是相容的，即

$$\mathcal{D}_{\xi_1}\mathbb{1} = 0, \quad \mathcal{D}_{\xi_2}\mathbb{1} = 0,$$

并进一步假设 $\mathcal{D}_{\xi_1}$ 和 $\mathcal{D}_{\xi_2}$ 可交换，即 $\mathcal{D}_{\xi_1}\mathcal{D}_{\xi_2} = \mathcal{D}_{\xi_2}\mathcal{D}_{\xi_1}$。值得注意的是，如果这些算子具有张量（克罗内克）积结构，即 $\mathcal{D}_{\xi_1} = D_{\xi_1} \otimes I_{\xi_2}$、$\mathcal{D}_{\xi_2} = I_{\xi_1} \otimes D_{\xi_2}$，则自动满足这一可交换性质。根据相容性和可交换性这两个假设，我们可以写出

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{x_1}\mathbb{1} =& \frac{1}{2}\underline{\mathcal{J}}^{-1}\Big[\mathcal{D}_{\xi_1}\big(\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_2\big) - \mathcal{D}_{\xi_2}\big(\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_2\big)\Big] = 0\\ \mathcal{D}_{x_2}\mathbb{1} =& \frac{1}{2}\underline{\mathcal{J}}^{-1}\Big[\mathcal{D}_{\xi_2}\big(\mathcal{D}_{\xi_1}\boldsymbol{X}_1\big) - \mathcal{D}_{\xi_1}\big(\mathcal{D}_{\xi_2}\boldsymbol{X}_1\big)\Big] = 0,\end{aligned}$$

即，引理 4.1 中使用的一致性假设 (4.3) 得到了满足。然而，同一引理中的条件 (4.2) 显然会导出与 (A.2) 中不同的值。因此，若希望实现自由流保持，近似 (A.1) 并不适用（当然，若使用 $\dot{}$ 的精确值，也会得出相同结论）。相反，我们必须采用由 (4.2) 给出的 $\nabla \cdot \boldsymbol{X}$，然后建设性地利用初值问题 (3.10) 来定义 $\mathcal{J}$。根据命题 4.1，这样便可实现半离散自由流保持。还需注意，为了实现全离散自由流保持，我们需要对两个方程采用相同的时间积分格式，同时求解关于 $\mathcal{J}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的半耦合系统 (4.4)。

致谢。本研究部分基于南非国家研究基金会资助的研究成果（资助编号：89916）。Tomas Lundquist 还部分获得了瑞典 Vetenskapsr°adet 的资助，资助协议编号为 2020-03642 VR，并得到瑞典电子科学研究中心（SeRC）的资助。Jan Nordstr¨om 获得了瑞典 Vetenskapsr°adet 的资助，资助编号为 2018-05084 VR，并得到 SeRC 的资助。文中表达的观点、研究结果、结论或建议仅代表作者本人，南非国家研究基金会对此不承担任何责任。

参考文献

[1] O. °Alund 和 J. Nordstr¨om, *Encapsulated high order difference operators on curvilinear non-conforming grids*, 《计算物理学杂志》 **385** 2019 209 224 ()，–。

[2] Douglas N. Arnold、Franco Brezzi、Bernardo Cockburn 和 L. Donatella Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM 数值分析杂志 39 (2002), 第 5 期, 1749–1779。[3] Santiago Badia 和 Ramon Codina, *Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion equation using an ALE framework*, SIAM 数值分析杂志 44 (2006), 第 5 期, 2159–2197。[4] Ted Belytschko、Wing Kam Liu 和 Brian Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures* 2000 , John Wiley & Sons, Ltd, （英文）。[5] Daniele Boffi 和 Lucia Gastaldi, *Stability and geometric conservation laws for ALE formulations* **193** 2004 , 《计算机方法：应用力学与工程》（ ）, 第 42 期, 4717 4739– 。[6] Andrea Bonito、Irene Kyza 和 Ricardo H. Nochetto, *Time-discrete higher-order ALE formulations: a priori error analysis* **125** 2013 2, 225 257 , Numerische Mathematik（ ）, 第 – 期。[7] , *Time-discrete higher-order ALE formulations: Stability*, SIAM 数值分析杂志 51 (2013), 第 1 期, 577–604。[8] M. Carpenter 和 D. Gottlieb, *Spectral methods on arbitrary grids*, 计算物理学杂志 129 (1996), 74–86。[9] M. H. Carpenter、D. Gottlieb 和 S. Abarbanel, *Time-stable boundary conditions for finite-difference schemes solving hyperbolic systems: Methodology and application to high-order compact schemes* **111** 1994 2, 220 236 , 计算物理学杂志（ ）, 第 – 期。[10] S. ´Etienne、A. Garon 和 D. Pelletier, *Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ALE simulations of incompressible flow*, 计算物理学杂志 228 (2009), 第 7 期, 2313–2333。[11] Charbel Farhat、Philippe Geuzaine 和 C´eline Grandmont, *The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids* **174** 2001 2, 669 694 , 计算物理学杂志（ ）, 第 – 期。[12] Luca Formaggia 和 Fabio Nobile, *A stability analysis for the arbitrary Lagrangian Eulerian formulation with finite elements* **7** 1999 , 《东西方数值数学杂志》（ ）。[13] Luca Formaggia 和 Fabio Nobile, *Stability analysis of second-order time accurate schemes for ALE–FEM* **193** 2004 , 《计算机方法：应用力学与工程》（ ）, 第 39 期, 4097 4116– 。[14] G. J. Gassner, *A skew-symmetric discontinuous galerkin spectral element discretization and its relation to SBP-SAT finite difference methods*, SIAM 科学计算杂志 35 (2013), 1233–1253。[15] Sigal Gottlieb, *On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multi–step time discretizations* **25** 2005 105 128 , 科学计算杂志（ ）, –。[16] M.E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, 1981。[17] B. Gustafsson, *High order difference methods for time dependent pde*, Springer-Verlag, 2008。[18] J. E. Hicken 和 D. W. Zingg, *Summation-by-parts operators and high order quadrature*, 计算与应用数学杂志 237 (2013), 第 1 期, 111–125。[19] David A. Kopriva、Andrew R. Winters、Marvin Bohm 和 Gregor J. Gassner, *A provably sta-ble discontinuous Galerkin spectral element approximation for moving hexahedral meshes*, 《计算机与流体》139 (2016), 148–160。[20] Heinz-Otto Kreiss 和 Jens Lorenz, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations* 2004 , 工业与应用数学学会, 。[21] L. Gary Leal, *Advanced transport phenomena: Fluid mechanics and convective transport processes* 2007 , 剑桥化学工程丛书, 剑桥大学出版社, 。[22] Doron Levy 和 Eitan Tadmor, *From semidiscrete to fully discrete: Stability of Runge–Kutta schemes by the energy method* **40** 1998 1, 40 73 , SIAM 综述（ ）, 第 – 期。[23] Viktor Linders、Tomas Lundquist 和 Jan Nordstr¨om, *On the order of accuracy of finite difference operators on diagonal norm based summation-by-parts form*, SIAM 数值分析杂志 56 (2018), 1048 – 1063。[24] T. Lundquist 、 A. Malan 和 J. Nordstr¨om, *A hybrid framework for coupling arbitrary summation-by-parts schemes on general meshes*, 计算物理学杂志 362 (2018), 49–68。[25] , *Efficient and error minimized coupling procedures for unstructured and moving meshes* **406** 2020 109158 , 计算物理学杂志（ ）, 。[26] T. Lundquist 和 J. Nordstr¨om, *Stable and accurate filtering procedures*, 科学计算杂志 82 (2020), 第 16 期。[27] Tomas Lundquist、Fredrik Laur´en 和 Jan Nordstrom, *A multi-domain summation-by-parts formulation for complex geometries* **463** 2022 111269 , , 计算物理学杂志（ ）, 。[28] Cesar A. Acosta Minoli 和 David A. Kopriva, *Discontinuous Galerkin spectral element ap-*

proximations on moving meshes **230** 2011 5, , 计算物理 1876 1902 学杂志（），第 – 期。[29] S. Nikkar 和 J. Nordstr¨om, *Fully discrete energy stable high order finite difference methods for hyperbolic problems in deforming domains*, 计算物理学杂志 291（2015），82–98。[30] J. Nordstr ¨ om, , , 科学 *Conservative finite difference formulations variable coefficients energy estimates and artificial dissipation* **29** 2006 3, 375 404 计算杂志（），第 – 期。[31] J. Nordstr¨om 和 M. H. Carpenter, *High-order finite difference methods, multidimensionallinear problems and curvilinear coordinates*, 计算物理学杂志 173（2001），149–174。[32] J. Nordstr¨om、K. Forsberg、C. Adamsson 和 P. Eliasson, *Finite volume methods, unstructured meshes and strict stability for hyperbolic problems*, 应用数值数学 45（2003），453–473。[33] Jan Nordstr¨om, *A roadmap to well posed and stable problems in computational physics*, 科学计算杂志 71（2017），第 1 期，365–385。[34] Jan Nordstr ¨ *The number of boundary conditions for initial* om 和 *boundary value problems* **58** 2020 5, 2818 Thomas M. Hagstrom, , SIAM 数值分析杂志（），第 – 2828 期。[35] P.-O. Persson、J. Bonet 和 J. Peraire, *Discontinuous Galerkin solution of the Navier–Stokesequations on deformable domains*, 《计算力学与工程方法》198（2009），第 17 期，1585–1595。[36] Hendrik Ranocha 和 Philipp ¨Offner, *L2 stability of explicit Runge–Kutta schemes*, 科学计算杂志 75（2018），第 2 期，1040–1056。[37] Chi-Wang Shu, *Total-variation-diminishing time discretizations*, SIAM 科学与统计计算杂志 9（1988），第 6 期，1073–1084。[38] Zheng Sun 和 Chi-Wang Shu, *Strong stability of explicit Runge–Kutta time discretizations*, SIAM 数值分析杂志 57（2019），第 3 期，1158–1182。[39] Zhou、Lingling、Xia、Yinhua 和 Shu、Chi-Wang, *Stability analysis and error estimates of arbitrary Lagrangian–Eulerian discontinuous Galerkin method coupled with Runge-Kutta time-marching for linear conservation laws* 2 **53** 2019 1, 105 144 , ESAIM: M AN（），第 – 期。