arXiv:2302.06395v1 [math-ph] 10 Feb 2023

超对称自由费米子顶点代数的超共形结构

SANGWON YOON

Abstract. 本文定义了超对称带电自由费米子顶点代数的移位超共形向量，它是 SUSY bc-$\beta\gamma$ 系统的超共形向量的单参数变形。此外，我们运用 $N_K = 1$ SUSY 顶点代数形式体系，找到了 SUSY 带电自由费米子顶点代数相应的移位 $N = 2$ 超共形对称性。最后，为了用 $N = 2$超场描述 SUSY 带电自由费米子顶点代数的移位 $N = 2$ 超共形对称性，我们构造了 $N_K = 2$ 该 bc-$\beta\gamma$ 系统的 SUSY 版本。

1. Introduction

数学和物理文献中已广泛研究超共形对称性，参见例如 [1, 9, 16, 20]。特别是在顶点代数理论中，超共形向量赋予顶点代数超共形结构（参见 [13]）。

本文研究超对称带电自由费米子顶点代数的超共形结构以及超共形向量的变形。在 [4,14], 中，非 SUSY 带电自由费米子顶点代数作为非 SUSY W-代数的鬼部分出现。与非 SUSY 情形一样，SUSY 带电自由费米子顶点代数是 SUSY W-代数的鬼部分，该代数已在 [17,18]中研究。另一方面，共形向量在顶点代数理论中发挥着重要作用，例如，它们导出了能量动量场的概念（见 [13]）。此外，超共形向量可视为共形向量的超对称类比。

尽管一般情况下寻找超共形向量存在一些困难，但已有研究探讨了若干情形下超共形向量的构造。例如，[9], 研究了非 SUSY 自由费米子顶点代数的超共形向量，并在 [13]给出了非 SUSY 仿射顶点代数的 Kac-Todorov 构造（见 [15]）。在 SUSY 情形下，关于 SUSY 顶点代数的超共形结构的一些基础知识，尤其是 SUSY 仿射顶点代数和 SUSY bc-$\beta\gamma$ 系统的超共形向量，可参见 [11]。

在 BRST 上同调的背景下，除了构造（超）共形向量之外，（超）共形向量的变形也十分重要。在 [5], 中，介绍了非 SUSY bc-$\beta\gamma$系统的共形向量的单参数变形。此外， [4, 14], 使用了对非 SUSY 仿射顶点代数的共形向量的 Sugawara 构造所作的修正；对于 SUSY 对应物， [12] 给出了 SUSY 仿射顶点代数的修正的 Kac-Todorov 超共形向量。

在本文中，我们给出了超对称

向量的一个单参数变形，该向量属于超对称 bc-$\beta\gamma$ 系统（定理 4.6），称为超对称带电自由费米子顶点代数的移位超共形向量，借此获得超对称带电自由费米子顶点代数中单项式场的不同共形权。此外，我们还发现了一种与移位超共形向量相容的 $N = 2$ 超共形对称性（定理 4.14）。

本文的组织结构如下。第 2 节遵循 $[11, 13]$, ，简要回顾顶点代数和 SUSY 顶点代数的定义及基本性质。第 3 节回顾顶点代数和 SUSY 顶点代数背景下超共形顶点代数的定义。第 4 节陈述本文的主要结果。我们定义超对称带电自由费米子顶点代数的平移超共形向量，并找到相应的 $N = 2$ 超共形对称性。本节末尾，我们使用 $N_K = 2$ SUSY 顶点代数形式体系描述平移后的 $N = 2$ 超共形结构。附录 A 给出 SUSY 带电自由费米子顶点代数的 λ 括号的一些计算。附录 B 包含 SUSY 带电自由费米子顶点代数的电荷分解。

2. Vertex algebras and SUSY vertex algebras

本节回顾顶点代数和超对称顶点代数的定义。我们只考虑 $N_K = 1$ 和 $N_K = 2$ 超对称顶点代数。主要参考文献为 [4], [11] 和 [13]。

定义 2.1. [13] 设 V为一个向量超空间。设 z 为一个偶不定元。场是一个取值于 End(V) 的形式分布，其形式为

$$a(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j-1} a_{(j)},$$

其中，对于每个 $v \in V$，除有限多个 $j \in \mathbb{Z}$ 外，均有 $a_{(j)}v = 0$ 。

定义 2.2. $[4, 13]$ 顶点代数（V， $|0\rangle$， ∂， Y）由一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的向量超空间 V、一个偶向量 $|0\rangle$、一个偶端同态 ∂以及态场对应 Y 组成；后者是从 V 到取值于 End(V) 的场空间的保宇称线性映射，并满足以下公理：

- (真空)

$$\partial\,|0\rangle = 0, \quad Y(a, z)\,|0\rangle\,|_{z=0} = a,$$

- (平移协变性)

$$[\partial, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z),$$

- (局部性) 对任意 a、 $b \in V$，存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$(z - w)^n [Y(a, z), Y(b, w)] = 0.$$

V 上的正规序乘积定义为

$$: ab : = a_{(-1)}b.$$

在本文中，我们将正规序乘积记作 ab ，而 $: a : bc :$ 记作 abc。

定义 2.3. 李共形代数是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 $\mathbb{C}[\partial]$-模 R，其带有一个 λ-括号，该括号是保持宇称的 $\mathbb{C}$-双线性映射:

$$[\ _\lambda\ ]: R\otimes R\to \mathbb{C}[\lambda]\otimes R,\quad a\otimes b\mapsto [a\ _\lambda\ b],$$

满足以下条件:

- （半线性）

$$[\partial a\ _\lambda\ b]=-\lambda[a\ _\lambda\ b],\quad [a\ _\lambda\ \partial b]=(\partial+\lambda)[a\ _\lambda\ b],$$

- （斜对称性）

$$[b\ _\lambda\ a]=(-1)^{ab+1}[a\ _{-\partial-\lambda}\ b],$$

- （雅可比恒等式）

$$[a\ _\lambda\ [b\ _\mu\ c]]=[[a\ _\lambda\ b]\ _{\lambda+\mu}\ c]+(-1)^{ab}[b\ _\mu\ [a\ _\lambda\ c]],$$

其中我们将 λ-括号记作:

$$[a\ _\lambda\ b]=\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{\lambda^j}{j!}a_{(j)}b.$$

定义 2.4. [4] 顶点代数是一个元组 $(V,\partial,[\ _\lambda\ ],|0\rangle,::)$，满足:

- $(V,\partial,[\ _\lambda\ ])$ 是一个李共形代数,
- $(V,\partial,|0\rangle,:)$ 是一个含有导子 ∂ 的含幺微分超代数，并满足以下性质:

（拟交换性）

$$ab-(-1)^{ab}ba=\int_{-\partial}^{0}[a\ _\lambda\ b]\ d\lambda,$$

（拟结合性）

$$(ab)c-a(bc)=\left(\int_0^{\partial}\ d\lambda a\right)[b\ _\lambda\ c]+(-1)^{ab}\left(\int_0^{\partial}\ d\lambda b\right)[a\ _\lambda\ c],$$

- λ-括号与乘积 $:$ 之间的关系为:

（非交换 Wick 公式）

$$[a\ _\lambda\ bc]=[a\ _\lambda\ b]c+(-1)^{ab}b[a\ _\lambda\ c]+\int_0^{\lambda}[[a\ _\lambda\ b]\ _\mu\ c]\ d\mu.$$

例2.5. [4, 14] 设 U 是有限维向量超空间， A 是 U的一组基。定义两个向量超空间:

$$\varphi_U\simeq\Pi U,\quad \varphi^U\simeq\Pi U^*,$$

其基元素分别记为 φ_a 和 φ^a 。这里， Π 表示奇偶反转函子， U^*是 U的对偶向量空间。在 $R^{ch}=\mathbb{C}[\partial]\otimes(\varphi_U\oplus\varphi^U)$ 上定义 λ-括号如下:

$$[\varphi_a\ _\lambda\ \varphi^b]=\delta_{ab},\quad [\varphi_a\ _\lambda\ \varphi_b]=[\varphi^a\ _\lambda\ \varphi^b]=0,$$

对于 $a,b\in A$。于是， R^{ch} 是李共形代数，而与向量超空间 U 相关联的带电自由费米子顶点代数 F^{ch}，是 $V(R^{ch})$ 的包络顶点代数。

例 2.6. [6] 设 U 为向量超空间，其基 $A = A_{\bar{0}} \cup A_{\bar{1}}$ 是 U 的一组基，其中 $A_{\bar{0}} = \{\beta, \gamma\}$ 是偶部分， $A_{\bar{1}} = \{b, c\}$ 是基的奇部分。在 $R^{bc\beta\gamma} = \mathbb{C}[\partial] \otimes U$ 上定义 λ-括号如下:

$$[\beta\ {}_\lambda\ \gamma] = 1, \quad [\gamma\ {}_\lambda\ \beta] = -1,$$
$$[b\ {}_\lambda\ c] = 1, \quad [c\ {}_\lambda\ b] = 1,$$

且基元素上的其他 λ-括号均为零。于是， $R^{bc\beta\gamma}$ 是一个李共形代数，而 bc-$\beta\gamma$ 系统是包络顶点代数 $V(R^{bc\beta\gamma})$。

定义 2.7。 [11] 设 V 为一个向量超空间。设 z 为偶不定元， θ 为奇不定元，使得 $\theta^2 = 0$ 和 $\theta z = z\theta$。一个 $N = 1$ 超场是一个取值于 End(V) 的形式分布，其形式为

$$a(z, \theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j-1} a_{(j|1)} + \theta \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j-1} a_{(j|0)},$$

其中，对除有限多个 $j \in \mathbb{Z}$ 之外的所有情况，以及每个 $v \in V$，均有 $a_{(j|*)}v = 0$ 。

定义 2.8。 [11] 一个 $N_K = 1$ 超对称顶点代数是一个元组 $(V, |0\rangle, D, Y)$，由一个 V 上的向量超空间、一个偶向量 $|0\rangle$、一个奇端同态D以及态场对应 Y组成；后者是从 V 到取值于 End(V) 的 $N = 1$ 超场空间的保持宇称线性映射，并满足以下公理:

- (真空)

$$D\,|0\rangle = 0, \quad Y(a, z, \theta)\,|0\rangle\,|_{z=0,\theta=0} = a,$$

- (平移协变性)

$$[D, Y(a, z, \theta)] = (\partial_\theta - \theta\partial_z) Y(a, z, \theta),$$

- (局部性) 对任意 $a, b \in V$， 存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$(z - w)^n [Y(a, z, \theta), Y(b, w, \zeta)] = 0.$$

V 上的正规序乘积定义为

$$: ab : = a_{(-1|1)} b.$$

注 2.9. [11] 考虑由偶生成元 ∂ 和奇生成元 D生成的非交换结合超代数 $\mathcal{H}_{N=1} = \mathbb{C}[\partial, D]$ ，其关系为:

$$D^2 = \partial, \quad [\partial, D] = 0,$$

并考虑由偶生成元 λ 和奇生成元 χ生成的非交换结合超代数 $\mathcal{L}_{N=1} = \mathbb{C}[\lambda, \chi]$ ，其关系为:

$$\chi^2 = -\lambda, \quad [\lambda, \chi] = 0.$$

定义 2.10. [11, 18] 超对称李共形代数是一个$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次的 $\mathcal{H}_{N=1}$-模 R ，带有一个 Λ-括号，该括号是一个次数为 1 的 $\mathbb{C}$-双线性映射:

$$[\ {}_\Lambda\ ] : R \otimes R \to \mathcal{L}_{N=1} \otimes R, \quad a \otimes b \mapsto [a\ {}_\Lambda\ b],$$

满足以下条件:

- (半线性)

$$[Da\ {}_\Lambda\ b] = \chi[a\ {}_\Lambda\ b], \quad [a\ {}_\Lambda\ Db] = (-1)^{a+1}(D + \chi)[a\ {}_\Lambda\ b],$$

其中 D 和 χ 满足关系 $[D,\chi]=2\lambda$,

- (斜对称性)

$$[b\ {}_\Lambda\ a]=(-1)^{ab}[a\ {}_{-\nabla-\Lambda}\ b],$$

其中 $-\nabla-\Lambda=(-\partial-\lambda,-D-\chi)$ 满足以下关系

$$[D,\chi]=2\lambda,\quad [\partial,\lambda]=[\partial,\chi]=[D,\lambda]=0,$$

- (雅可比恒等式)

$$[a\ {}_\Lambda\ [b\ {}_\Gamma\ c]]=(-1)^{a+1}[[a\ {}_\Lambda\ b]\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ c]+(-1)^{(a+1)(b+1)}[b\ {}_\Gamma\ [a\ {}_\Lambda\ c]],$$

其中 $\Gamma=(\gamma,\eta)$ 和 $\Lambda+\Gamma=(\lambda+\gamma,\chi+\eta)$ 满足以下关系:

$$[\eta,\eta]=-2\gamma,\quad [\gamma,\gamma]=[\gamma,\eta]=[\lambda,\gamma]=[\lambda,\eta]=[\chi,\gamma]=[\chi,\eta]=0.$$

我们将 Λ-括号记作:

$$[a\ {}_\Lambda\ b]=\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{\lambda^j}{j!}a_{(j|0)}b+\chi\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{\lambda^j}{j!}a_{(j|1)}b.$$

定义 2.11. [11] 一个 $N_K=1$ 超对称顶点代数是一个元组 $(V,D,[\ {}_\Lambda\ ],|0\rangle,:\ :)$, 满足:

- $(V,D,[\ {}_\Lambda\ ])$ 是一个 $N_K=1$ SUSY李共形代数,
- $(V,D,|0\rangle,:\ :)$ 是一个含幺微分超代数, 带有一个奇导子 D, 并满足以下性质:

(拟交换性)

$$ab-(-1)^{ab}ba=\int_{-\nabla}^{0}[a\ {}_\Lambda\ b]\ d\Lambda,$$

(拟结合性)

$$(ab)c-a(bc)=\left(\int_0^{\nabla}\ d\Lambda a\right)[b\ {}_\Lambda\ c]+(-1)^{ab}\left(\int_0^{\nabla}\ d\Lambda b\right)[a\ {}_\Lambda\ c],$$

- Λ-括号与乘积 : 的关系如下:

(非交换 Wick 公式)

$$[a\ {}_\Lambda\ bc]=[a\ {}_\Lambda\ b]c+(-1)^{(a+1)b}b[a\ {}_\Lambda\ c]+\int_0^{\Lambda}[[a\ {}_\Lambda\ b]\ {}_\Gamma\ c]\ d\Gamma,$$

其中积分 $\int_0^{\Lambda}d\Gamma$ 计算为 $\partial_\eta\int_0^{\lambda}d\gamma$。

例 2.12. [18] 设 U 是一个有限维向量超空间, 且 $A=A_{\bar{0}}\cup A_{\bar{1}}$ 是 U的一组基, 其中 $A_{\bar{0}}$ 是该基的偶部分, $A_{\bar{1}}$ 是该基的奇部分。定义两个向量超空间:

$$\phi_U\simeq U,\quad \phi^{\bar{U}}\simeq\Pi U^*,$$

其基元素分别记为 ϕ_a 和 $\phi^{\bar{a}}$。在 $R_{N=1}^{ch}=\mathcal{H}_{N=1}\otimes(\phi_U\oplus\phi^{\bar{U}})$ 上定义 Λ-括号如下:

$$[\phi_a\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{b}}]=\delta_{ab},\quad [\phi_a\ {}_\Lambda\ \phi_b]=[\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{b}}]=0,$$

对于 $a,b\in A$。那么 $R_{N=1}^{ch}$ 是一个 $N_K=1$ 超对称李共形代数, 而与向量超空间 U 相关联的超对称带电自由费米子顶点代数 $F_{N=1}^{ch}$ 是泛包络超对称顶点代数

$V(R^{ch}_{N=1})$。关于泛包络超对称顶点代数的描述，参见 [18] 中的定义 2.13。

定义 2.13。 [11] 设 V为一个向量超空间。设 z为一个偶不定元，设 θ^1、 θ^2 为奇不定元，满足 $[\theta^i,\theta^j]=0$ 和 $[\theta^i,z]=0$。一个 $N=2$超场是一个取值于 End(V) 的形式分布，其形式为

$$a(z,\theta^1,\theta^2)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j-1}a_{(j|11)}+\theta^1\sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j-1}a_{(j|01)} + \theta^2\sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j-1}a_{(j|10)}+\theta^1\theta^2\sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{-j-1}a_{(j|00)},$$

其中，对于除有限多个 $j\in\mathbb{Z}$ 之外的所有 $j\in\mathbb{Z}$，均有 $a_{(j|**)}v=0$；对于每个 $v\in V$，均有 $a_{(j|**)}v=0$。

定义 2.14。 [11] 一个 $N_K=2$ SUSY 顶点代数是一个元组 $(V,|0\rangle,D^1,D^2,Y)$，由一个 V 上的向量超空间、一个偶向量 $|0\rangle$、两个奇端同态 D^1、 D^2 以及态场对应 Y 组成；其中， Y 是一个从 V到取值于 End(V) 的 $N=2$ 超场空间的保宇称线性映射，并满足以下公理:

- (真空)

$$D^i\,|0\rangle=0,\quad Y(a,z,\theta^1,\theta^2)\,|0\rangle\,|_{z=0,\theta^i=0}=a,$$

- (平移协变性)

$$[D^i,Y(a,z,\theta^1,\theta^2)]=(\partial_{\theta^i}-\theta^i\partial_z)Y(a,z,\theta^1,\theta^2),$$

- (局部性) 对于任意 a、 $b\in V$，存在 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$(z-w)^n[Y(a,z,\theta^1,\theta^2),Y(b,w,\zeta^1,\zeta^2)]=0.$$

V 上的正规序乘积定义为

$$:ab:=a_{(-1|11)}b.$$

注 2.15. [11] 考虑由偶生成元 ∂ 和奇生成元 D^1、 D^2 生成的非交换结合超代数 $\mathcal{H}_{N=2}=\mathbb{C}[\partial,D^1,D^2]$，其关系为:

$$[D^i,D^j]=2\delta_{ij}\partial,\quad [\partial,D^i]=0,$$

以及由偶生成元 λ 和奇生成元 χ^1、 χ^2 生成的非交换结合超代数 $\mathcal{L}_{N=2}=\mathbb{C}[\lambda,\chi^1,\chi^2]$，其关系为:

$$[\chi^i,\chi^j]=-2\delta_{ij}\lambda,\quad [\lambda,\chi^i]=0.$$

定义 2.16. [8, 11] 超对称李共形代数是一个$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次的 $\mathcal{H}_{N=2}$-模 R，带有一个 Λ-括号，它是保持宇称的 $\mathbb{C}$-双线性映射:

$$[\ {}_\Lambda\ ]:R\otimes R\to\mathcal{L}_{N=2}\otimes R,\quad a\otimes b\mapsto[a\ {}_\Lambda\ b],$$

满足以下条件:

- （半线性）

$$[D^a\ {}_\Lambda\ b]=-\chi^i[a\ {}_\Lambda\ b],\quad [a\ {}_\Lambda\ D^ib]=(-1)^a(D^i+\chi^i)[a\ {}_\Lambda\ b],$$

其中 D^i 和 χ^i 满足关系 $[D^i, \chi^j] = 2\delta_{ij}\lambda$,

• (斜对称性)

$$[b\ {}_\Lambda\ a] = (-1)^{ab+1}[a\ {}_{-\nabla-\Lambda}\ b],$$

其中 $-\nabla - \Lambda = (-\partial - \lambda, -D^1 - \chi^1, -D^2 - \chi^2)$ 满足以下关系

$$[D^i, \chi^j] = 2\delta_{ij}\lambda, \quad [\partial, \lambda] = [\partial, \chi^i] = [D^i, \lambda] = 0,$$

• (雅可比恒等式)

$$[a\ {}_\Lambda\ [b\ {}_\Gamma\ c]] = [[a\ {}_\Lambda\ b]\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ c] + (-1)^{ab}[b\ {}_\Gamma\ [a\ {}_\Lambda\ c]],$$

其中 $\Gamma = (\gamma, \eta^1, \eta^2)$ 和 $\Lambda + \Gamma = (\lambda + \gamma, \chi^1 + \eta^1, \chi^2 + \eta^2)$ 满足以下关系:

$$[\eta^i, \eta^j] = -2\delta_{ij}\gamma, \quad [\gamma, \gamma] = [\gamma, \eta^i] = [\lambda, \gamma] = [\lambda, \eta^i] = [\chi^i, \gamma] = [\chi^i, \eta^j] = 0.$$

我们将 Λ-括号记作:

$$[a\ {}_\Lambda\ b] = \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} a_{(j|00)}b - \chi^1 \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} a_{(j|10)}b - \chi^2 \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} a_{(j|01)}b - \chi^1\chi^2 \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} a_{(j|11)}b.$$

定义 2.17. [11] 超对称顶点代数是一个元组 $(V, D^1, D^2, [\ {}_\Lambda\ ], |0\rangle, ::)$, 满足:

• $(V, D^1, D^2, [\ {}_\Lambda\ ])$ 是一个 $N_K = 2$ SUSY 李共形代数,

• $(V, D^1, D^2, |0\rangle, ::)$ 是一个含幺微分超代数, 具有奇导子 D^1和 D^2 , 并满足以下性质:

(拟交换性)

$$ab - (-1)^{ab}ba = \int_{-\nabla}^{0} [a\ {}_\Lambda\ b]\ d\Lambda,$$

（拟结合性）

$$(ab)c - a(bc) = \left(\int_0^\nabla\ d\Lambda a\right)[b\ {}_\Lambda\ c] + (-1)^{ab}\left(\int_0^\nabla\ d\Lambda b\right)[a\ {}_\Lambda\ c],$$

• Λ-括号与乘积 : 的关系如下:

（非交换 Wick 公式）

$$[a\ {}_\Lambda\ bc] = [a\ {}_\Lambda\ b]c + (-1)^{ab}b[a\ {}_\Lambda\ c] + \int_0^\Lambda [[a\ {}_\Lambda\ b]\ {}_\Gamma\ c]\ d\Gamma,$$

其中积分 $\int_0^\Lambda d\Gamma$ 为 $\partial_{\eta^1}\partial_{\eta^2}\int_0^\lambda d\gamma$。

3. Superconformal vertex algebras

本节将回顾 $N = 1$ 和 $N = 2$ 超共形顶点代数在顶点代数和超对称顶点代数背景下的定义。定义的详细内容见 [11] 和 [13]。

定义 3.1。 [13] 设 V是一个顶点代数。若偶向量 $L \in V$满足以下条件, 则称其为共形向量:

• $Y(L, z)$ 是一个中心荷为 c 的 Virasoro 场, 即

$$[L\ {}_\lambda\ L] = (\partial + 2\lambda)L + \frac{c}{12}\lambda^3,$$

• $L_{(0)} = \partial$,

• $L_{(1)}$ 在 V 上可对角化。

对于 $v \in V$，如果满足以下条件，我们称 v 具有共形权 $\Delta \in \mathbb{C}$：

$$[L\ {}_\lambda\ v] = (\partial + \Delta\lambda)v + O(\lambda^2), \tag{3.1}$$

其中 $O(\lambda^2)$ 是 λ 中不含常数项和一次项的多项式。此外，如果 (3.1) 中没有 $O(\lambda^2)$ 项，则称向量 v 为初级。

定义 3.2. [10, 13] 超共形顶点代数由一个共形向量 L 和一个称为超共形向量的奇向量 G 生成，并满足以下超维拉斯托罗关系：

$$[L\ {}_\lambda\ L] = (\partial + 2\lambda)L + \frac{c}{12}\lambda^3,$$
$$[L\ {}_\lambda\ G] = (\partial + \frac{3}{2}\lambda)G,$$
$$[G\ {}_\lambda\ G] = 2L + \frac{c}{3}\lambda^2.$$

定义 3.3. [10, 13] 超共形顶点代数由一个共形向量 L、一个偶向量 J 和两个奇向量 G^+、G^- 生成，并满足以下 λ-括号关系：

$$[L\ {}_\lambda\ L] = (\partial + 2\lambda)L + \frac{c}{12}\lambda^3, \quad [L\ {}_\lambda\ G^\pm] = (\partial + \frac{3}{2}\lambda)G^\pm,$$
$$[G^\pm\ {}_\lambda\ G^\pm] = 0, \quad [G^+\ {}_\lambda\ G^-] = L + (\frac{1}{2}\partial + \lambda)J + \frac{c}{6}\lambda^2,$$
$$[L\ {}_\lambda\ J] = (\partial + \lambda)J, \quad [G^\pm\ {}_\lambda\ J] = \mp G^\pm, \quad [J\ {}_\lambda\ J] = \frac{c}{3}\lambda.$$

定义 3.4. [11] 设 V 是一个 $N_K = 1$ 超对称顶点代数。若向量 $T \in V$ 满足以下条件，则称其为 $N = 1$ 超共形向量：

• $Y(T, z, \theta)$ 是一个中心荷为 c 的超维拉斯托罗场，即

$$[T\ {}_\Lambda\ T] = (2\partial + 3\lambda + \chi D)T + \frac{c}{3}\lambda^2\chi,$$

• $T_{(0|0)} = 2\partial$, $T_{(0|1)} = D$,

• $T_{(1|0)}$ 在 V 上可对角化。

对于 $v \in V$，若 v 具有共形权 $\Delta \in \mathbb{C}$，则称：

$$[T\ {}_\Lambda\ v] = (2\partial + 2\Delta\lambda + \chi D)v + O(\Lambda^2), \tag{3.2}$$

其中 $O(\Lambda^2)$ 是关于 Λ 的一个多项式，不含常数项和一次项。此外，若 (3.2) 中没有 $O(\Lambda^2)$ 项，则称向量 v 为初级。

注3.5。 [10, 11] 作为一个 $N_K = 1$ 超对称顶点代数，$N = 2$ 超共形顶点代数由一个 $N = 1$ 超共形向量 T 和一个 J 满足以下 $N_K = 1$ Λ-括号关系的偶向量生成：

$$[T\ {}_\Lambda\ T] = (2\partial + 3\lambda + \chi D)T + \frac{c}{3}\lambda^2\chi,$$
$$[T\ {}_\Lambda\ J] = (2\partial + 2\lambda + \chi D)J,$$
$$[J\ {}_\Lambda\ J] = T + \frac{c}{3}\lambda\chi.$$

定义 3.6。 [11] 设 V为一个 $N_K = 2$ 超对称顶点代数。若向量 $P \in V$满足以下条件，则称其为 $N = 2$ 超共形向量：

• $Y(P, z, \theta^1, \theta^2)$ 是一个中心荷为 c 的 $N = 2$ 超维拉斯托罗场，即

$$[P\ {}_\Lambda\ P] = (2\partial + 2\lambda + \chi^1 D^1 + \chi^2 D^2)P + \frac{c}{3}\lambda\chi^1\chi^2,$$

• $P_{(0|00)} = 2\partial, \quad P_{(0|10)} = -D^1, \quad P_{(0|01)} = D^2,$

• $P_{(1|00)}$ 在 V 上可对角化。

对于 $v \in V$，我们称 v 的共形权为 $\Delta \in \mathbb{C}$，如果：

$$[P\ {}_\Lambda\ v] = (2\partial + 2\Delta\lambda + \chi^1 D^1 + \chi^2 D^2)v + O(\Lambda^2), \tag{3.3}$$

其中 $O(\Lambda^2)$ 是一个关于 Λ 的多项式，不含常数项和线性项。此外，如果式 (3.3) 中没有 $O(\Lambda^2)$ 项，则称向量 v 为初级。

4. Superconformal structures of SUSY charged free fermion vertexalgebras

对于备注 4.10 中 SUSY W-代数的超共形向量构造，需要对超对称带电自由费米子顶点代数 $F^{ch}_{N=1}$ 的标准超共形向量 T^{ch}_{st}进行特定变形。本节将证明主要结果定理 4.6，并在定理 4.14 中找出 $F^{ch}_{N=1}$ 相应的 $N = 2$超共形对称性。我们还将构造 bc-$\beta\gamma$ 系统的一个 $N_K = 2$版本，从而可以在定理 4.21 中通过 $N_K = 2$ SUSY 顶点代数形式统一定理 4.6 和定理 4.14。

4.1. SUSY 带电自由费米子顶点代数的标准超共形向量。首先，我们回顾 SUSY 带电自由费米子顶点代数的标准超共形向量，以及其与非 SUSY bc-$\beta\gamma$ 系统的超共形向量之间的联系。对于与向量超空间 U相关联的 SUSY 带电自由费米子顶点代数 $F^{ch}_{N=1}$，回忆一下， $A = A_{\bar{0}} \cup A_{\bar{1}}$指的是 U的基。

例 4.1. 对于与 $\mathfrak{osp}(1|2)$ 相关联的非 SUSY 带电自由费米子顶点代数， [14]，中的标准共形向量 L^{ch}_{st} 定义为

$$L^{ch}_{st} = -\frac{1}{2}\varphi^{1/2}\partial\varphi_{1/2} + \frac{1}{2}\partial\varphi^{1/2}\varphi_{1/2} + \partial\varphi_1\varphi^1,$$

并且我们可以很容易地发现，$F^{ch}(\mathfrak{osp}(1|2))$ 的相应标准超共形向量为

$$G^{ch}_{st} = \varphi^{1/2}\varphi^1 + \partial\varphi_1\varphi_{1/2},$$

即上述两个向量满足以下 λ-括号：

$$[L^{ch}_{st}\ {}_\lambda\ L^{ch}_{st}] = (\partial + 2\lambda)L^{ch}_{st} + \frac{c}{12}\lambda^3,$$

$$[L^{ch}_{st}\ {}_\lambda\ G^{ch}_{st}] = \Big(\partial + \frac{3}{2}\lambda\Big)G^{ch}_{st},$$

$$[G^{ch}_{st}\ {}_\lambda\ G^{ch}_{st}] = 2L^{ch}_{st} + \frac{c}{3}\lambda^2,$$

中心荷为 $c = -3$。如果我们将场 $\varphi_{1/2}$、 $\varphi^{1/2}$、 φ^1、 φ_1 分别重命名为 b、 c、 β、 γ，并反转奇偶性，那么顶点代数 $F^{ch}(\mathfrak{osp}(1|2))$ 与

L_{st}^{ch} 和 G_{st}^{ch} 就是著名的 bc-$\beta\gamma$ 系统，其共形向量和超共形向量为：

$$L_{st}^{ch}=\frac{1}{2}(-c\partial b+\partial cb+2\partial\gamma\beta),\quad G_{st}^{ch}=c\beta+\partial\gamma b,$$

中心荷为 3。关于 bc-$\beta\gamma$ 系统的更详细说明见 [6]。关于物理陈述的详情，请读者参阅 [19]。

定义 4.2。对于 SUSY 带电自由费米子顶点代数 $F_{N=1}^{ch}$ 的 $N=1$ 超共形结构，我们对 [11] 的例 5.12 中 SUSY bc-$\beta\gamma$ 系统的超共形向量稍作修改。令 $F_{N=1}^{ch}$ 的标准超共形向量为 T_{st}^{ch}，定义如下：

$$T_{st}^{ch}=\sum_{a\in A_{\bar{0}}}(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\sum_{a\in A_{\bar{1}}}(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}).$$

那么场 T_{st}^{ch} 满足 $N=1$ 超共形关系

$$[T_{st}^{ch}\ {}_\Lambda\ T_{st}^{ch}]=(2\partial+3\lambda+\chi D)T_{st}^{ch}+\frac{c_{st}}{3}\lambda^2\chi,$$

其中中心荷 c_{st} 为 $3\dim_{\mathbb{C}}U$。上述 Λ-括号的验证可由定理 4.6 得出。

注 4.3。 [3,6,7,10] 令 $F_{N=1}^{ch}$ 为与向量超空间 $U=U_{\bar{0}}\oplus U_{\bar{1}}$ 相关联的 SUSY 带电自由费米子顶点代数。对于 $A_{\bar{0}}$ 中的基元素 a，若将每个超场 ϕ_a、$\phi^{\bar{a}}$ 写作如下形式：

$$Y(\phi_a,z,\theta)=Y(\gamma,z)+\theta Y(c,z),\quad Y(\phi^{\bar{a}},z,\theta)=Y(b,z)+\theta Y(\beta,z),\tag{4.1}$$

那么我们可以看到，T_{st}^{ch} 的 $A_{\bar{0}}$部分是非超对称 bc-$\beta\gamma$ 系统中标准超共形向量的 $\dim_{\mathbb{C}}U_{\bar{0}}$ 份拷贝，即

$$Y(\sum_{a\in A_{\bar{0}}}(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}),z,\theta)=Y(\sum_{a\in A_{\bar{0}}}(G_{st}^{ch}),z)+2\theta Y(\sum_{a\in A_{\bar{0}}}(L_{st}^{ch}),z).$$

类似地，若将 ϕ_a、$\phi^{\bar{a}}$ 的超场展开为

$$Y(\phi^{\bar{a}},z,\theta)=Y(\gamma,z)+\theta Y(c,z),\quad Y(\phi_a,z,\theta)=Y(b,z)+\theta Y(\beta,z),$$

对于 A 中的奇元素 a，则 T_{st}^{ch} 是 $\dim_{\mathbb{C}}U$ 份 G_{st}^{ch} 与 L_{st}^{ch} 之和，即

$$T_{st}^{ch}=\sum_{a\in A}G_{st}^{ch}+2\theta(\sum_{a\in A}L_{st}^{ch}).$$

在注记 4.11 中，我们也得到了关于移位超共形向量的类似结果。

证明。对于任意偶元素 a，$Y(D\phi_a,z,\theta)$ 的超场展开为

$$\begin{aligned}Y(D\phi_a,z,\theta)&=(\partial_\theta+\theta\partial_z)Y(\phi_a,z,\theta)\\&=(\partial_\theta+\theta\partial_z)(Y(\gamma,z)+\theta Y(c,z))\\&=Y(c,z)+\theta Y(\partial\gamma,z)\end{aligned}\tag{4.2}$$

利用 [11] 中定理 4.16 的规则。同理，我们有

$$Y(D\phi^{\bar{a}},z,\theta)=Y(\beta,z)+\theta Y(\partial b,z),\tag{4.3}$$

因此

$$\begin{aligned} Y(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}, z, \theta) &= (Y(c,z) + \theta Y(\partial\gamma, z))(Y(\beta, z) + \theta Y(\partial b, z)) \\ &= Y(c\beta, z) + \theta Y(\partial\gamma\beta - c\partial b, z). \end{aligned} \tag{4.4}$$

$c\partial b$ 的负号源于奇场 $Y(c,z)$ 与奇不定元 θ 的反对易性。 $Y(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}, z, \theta)$ 的展开也可表示为

$$\begin{aligned} Y(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}, z, \theta) &= Y(\partial\phi_a, z, \theta)Y(\phi^{\bar{a}}, z, \theta) \\ &= \partial_z Y(\phi_a, z, \theta)Y(\phi^{\bar{a}}, z, \theta) \\ &= (Y(\partial\gamma, z) + \theta Y(\partial c, z))(Y(b, z) + \theta Y(\beta, z)) \\ &= Y(\partial\gamma b, z) + \theta Y(\partial cb + \partial\gamma\beta, z), \end{aligned} \tag{4.5}$$

因此我们有

(4.6)

$$\begin{aligned} Y(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} + D\phi_a D\phi^{\bar{a}}, z, \theta) &= Y(c\beta + \partial\gamma b, z) + 2\theta Y\Big(\frac{1}{2}(-c\partial b + \partial cb + 2\partial\gamma\beta), z\Big) \\ &= Y(G^{ch}_{st}, z) + 2\theta Y(L^{ch}_{st}, z). \end{aligned}$$

对于奇元素 a，我们还得到如下超场展开

$$\begin{aligned} Y(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}, z, \theta) &= Y(\phi_a, z, \theta)Y(\partial\phi^{\bar{a}}, z, \theta) \\ &= Y(\phi_a, z, \theta)\partial_z Y(\phi^{\bar{a}}, z, \theta) \\ &= (Y(b, z) + \theta Y(\beta, z))(Y(\partial\gamma, z) + \theta Y(\partial c, z)) \\ &= Y(b\partial\gamma, z) + \theta Y(\beta\partial\gamma - b\partial c, z) \\ &= Y(\partial\gamma b, z) + \theta Y(\partial cb + \partial\gamma\beta, z), \\ Y(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}, z, \theta) &= (Y(\beta, z) + \theta Y(\partial b, z))(Y(c, z) + \theta Y(\partial\gamma, z)) \\ &= Y(\beta c, z) + \theta Y(\partial bc + \beta\partial\gamma, z) \\ &= Y(c\beta, z) + \theta Y(\partial\gamma\beta - c\partial b, z), \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此， $A_{\bar{1}}$-部分的场 $Y(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} + D\phi_a D\phi^{\bar{a}}, z, \theta)$ 具有与（4.6）中相同的超场展开。因此我们得到结果

$$Y(T^{ch}_{st}, z, \theta) = Y(\sum_{a\in A} G^{ch}_{st}, z) + 2\theta Y(\sum_{a\in A} L^{ch}_{st}, z).$$

□

4.2. SUSY 带电自由费米子顶点代数的移位超共形向量。在定理 4.6 中，我们定义了移位超共形向量 T^{ch}_{sh}。通过使用假设4.5 找到适当的鬼项，我们将其构造为标准超共形向量 T^{ch}_{st} 的一种变形：所要求的移位超共形向量是三个特定二次单项式项的线性组合，从而得到各个场 ϕ_a 和 $\phi^{\bar{a}}$ 的不同共形权。

引理4.4. 设 $F^{ch}_{N=1}$ 为 SUSY 带电自由费米子顶点代数。对于 A中的任意偶元素 a ，我们有以下 Λ-括号：

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a\phi^{\bar{a}}] = \partial(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}) + 2\lambda(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}),$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a\partial\phi^{\bar{a}}] = \partial(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}) + 2\lambda(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}) + \lambda^2(\phi_a\phi^{\bar{a}}),$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi_a D\phi^{\bar{a}}] = \partial(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) + \lambda(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) + \chi D(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) + \frac{1}{2}\lambda^2\chi - \lambda\chi(D\phi_a\phi^{\bar{a}}), \tag{4.8}$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ \partial\phi_a\phi^{\bar{a}}] = -\partial(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}) - 2\lambda(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}) - \lambda^2(\phi_a\phi^{\bar{a}}),$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ \phi_a\partial\phi^{\bar{a}}] = -\partial(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}) - 2\lambda(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}),$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi_a D\phi^{\bar{a}}] = -\partial(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) - \lambda(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) - \chi D(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) + \frac{1}{2}\lambda^2\chi - \lambda\chi(\phi_a D\phi^{\bar{a}}),$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ \partial\phi_a\phi^{\bar{a}}] = \partial(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}) + \lambda(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}) + \chi D(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}) + \frac{1}{2}\lambda^2\chi + \lambda\chi(D\phi_a\phi^{\bar{a}}),$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ \phi_a\partial\phi^{\bar{a}}] = \partial(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}) + \lambda(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}) + \chi D(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}) + \frac{1}{2}\lambda^2\chi + \lambda\chi(\phi_a D\phi^{\bar{a}}),$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi_a D\phi^{\bar{a}}] = \partial(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) + 2\lambda(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}). \tag{4.9}$$

证明. 对于(4.8)中的 Λ-括号，我们有：

$$\begin{aligned}
[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi_a D\phi^{\bar{a}}] &= [\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi_a]D\phi^{\bar{a}} + D\phi_a[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi^{\bar{a}}] \\
&\quad + \int_0^\Lambda [[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} \ _\Lambda \ D\phi_a] \ _\Gamma \ D\phi^{\bar{a}}] \ d\Gamma \\
&= ((D+\chi)\partial\phi_a)D\phi^{\bar{a}} + D\phi_a((D+\chi)(\partial+\lambda)\phi^{\bar{a}}) \\
&\quad + \int_0^\Lambda [(D+\chi)\partial\phi_a \ _\Gamma \ D\phi^{\bar{a}}] \ d\Gamma \\
&= \partial D\phi_a D\phi^{\bar{a}} + \chi\partial\phi_a D\phi^{\bar{a}} + D\phi_a\partial D\phi^{\bar{a}} + \lambda D\phi_a D\phi^{\bar{a}} \\
&\quad - \chi D\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} - \lambda\chi D\phi_a\phi^{\bar{a}} + \int_0^\Lambda [(D+\chi)\partial\phi_a \ _\Gamma \ D\phi^{\bar{a}}] \ d\Gamma \\
&= \partial(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) + \lambda(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) \\
&\quad + \chi D(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) - \lambda\chi(D\phi_a\phi^{\bar{a}}) + \frac{1}{2}\lambda^2\chi,
\end{aligned}$$

由附录 A 中的 (A.3) 和 (A.4)，以及超对称李共形代数的非交换 Wick 公式可得。事实上，积分项计算如下：

$$\begin{aligned}\int_0^\Lambda [(D+\chi)\partial\phi_a\ {}_\Gamma\ D\phi^{\bar{a}}]\ d\Gamma &= \int_0^\Lambda (\eta-\chi)(-\gamma)(-1)(D+\eta)[\phi_a\ {}_\Gamma\ \phi^{\bar{a}}]\ d\Gamma\\ &= \int_0^\Lambda (\eta-\chi)\gamma\eta\ d\Gamma\\ &= \int_0^\Lambda -\gamma^2-\chi\gamma\eta\ d\Gamma\\ &= \partial_\eta\left(\int_0^\lambda -\gamma^2-\chi\gamma\eta\ d\gamma\right)\\ &= \partial_\eta\left(-\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{2}\chi\lambda^2\eta\right)=\frac{1}{2}\chi\lambda^2.\end{aligned}$$

同样，利用引理 A.1、引理 A.2 和引理 A.3 中的结果，我们可以计算其他 Λ-括号。□

现在我们来求超对称带荷自由费米子顶点代数中的移位超共形向量：

假设4.5。设 T^{ch}_{sh} 为引理4.4中写成三个二次项线性组合的场，即

$$T^{ch}_{sh}=m_1\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+m_2\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}+m_3D\phi_aD\phi^{\bar{a}}.$$

根据引理4.4， Λ与自身的 T^{ch}_{sh} -括号为：

$$\begin{aligned}[T^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ T^{ch}_{sh}] = &\begin{pmatrix}(m_1^2-m_1m_2+m_1m_3)\partial\\ +(2m_1^2-2m_1m_2+m_1m_3)\lambda+(m_1m_3)\chi D\end{pmatrix}\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\\ &+\begin{pmatrix}(m_1m_2-m_2^2+m_2m_3)\partial\\ +(2m_1m_2-2m_2^2+m_2m_3)\lambda+(m_2m_3)\chi D\end{pmatrix}\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\\ &+\begin{pmatrix}(m_1m_3-m_2m_3+m_3^2)\partial\\ +(m_1m_3-m_2m_3+2m_3^2)\lambda+(m_1m_3-m_2m_3)\chi D\end{pmatrix}D\phi_aD\phi^{\bar{a}}\\ &+(m_1m_3+m_2m_3)\lambda^2\chi.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}(2\partial+3\lambda+\chi D)T^{ch}_{sh}+\frac{c_{sh}}{3}\lambda^2\chi = &\Big((2m_1)\partial+(3m_1)\lambda+(m_1)\chi D\Big)\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\\ &+\Big((2m_2)\partial+(3m_2)\lambda+(m_2)\chi D\Big)\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\\ &+\Big((2m_3)\partial+(3m_3)\lambda+(m_3)\chi D\Big)D\phi_aD\phi^{\bar{a}}\\ &+\frac{c_{sh}}{3}\lambda^2\chi.\end{aligned}$$

通过比较每个单项式项的系数，我们知道如下形式的三元组

$$(m_1,m_2,m_3)=(t_a+1,t_a,1),$$

对任意复数 t_a，都满足以下 λ 括号等式:

$$[T^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ T^{ch}_{sh}] = (2\partial + 3\lambda + \chi D)T^{ch}_{sh} + \frac{c_{sh}}{3}\lambda^2\chi,$$

其中中心荷为 $c_{sh} = 6t_a + 3$。对于奇元素 $a \in A$，我们将场 ϕ_a 和 $\phi^{\bar{a}}$ 分别替换为 $\phi^{\bar{a}}$ 和 ϕ_a，即可得到该结果。

因此，我们证明了以下定理:

定理 4.6。设 T^{ch}_{sh} 为由下式定义的场

$$\begin{aligned} T^{ch}_{sh} = &\sum_{a\in A_{\bar{0}}} (t_a+1)\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} + t_a\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} + D\phi_a D\phi^{\bar{a}} \\ &+ \sum_{a\in A_{\bar{1}}} t_a\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} + (t_a+1)\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} + D\phi_a D\phi^{\bar{a}}, \end{aligned}$$

其中 $(t_a)_{a\in A}$ 是一个复数序列。那么，场 T^{ch}_{sh} 是超对称带电自由费米子顶点代数 $F^{ch}_{N=1}$ 的超共形向量，其中心荷为

$$c_{sh} = \sum_{a\in A}(6t_a + 3).$$

定义 4.7。定理 4.6 中定义的场 T^{ch}_{sh} 称为超对称带电自由费米子顶点代数 $F^{ch}_{N=1}$ 的移位超共形向量。

注记 4.8. 若将鬼场 T^{ch}_{ghost} 定义为

$$T^{ch}_{ghost} = \sum_{a\in A} t_a\partial(\phi_a\phi^{\bar{a}}),$$

则移位超共形向量 T^{ch}_{sh} 可写为

$$T^{ch}_{sh} = T^{ch}_{st} + T^{ch}_{ghost}.$$

此外，若复数 t_a 均为零，则可恢复标准超共形向量 T^{ch}_{st}。

现在，场 ϕ_a 和 $\phi^{\bar{a}}$ 的共形权各有一个自由度。

命题 4.9. 对于 A 中的偶元素 a， ϕ_a和 $\phi^{\bar{a}}$的共形权分别为 $-\frac{1}{2}t_a$和 $\frac{1}{2}t_a + \frac{1}{2}$。对于 A 中的奇元素 a，其共形权分别为$\frac{1}{2}t_a + \frac{1}{2}$和 $-\frac{1}{2}t_a$。此外，场 ϕ_a和 $\phi^{\bar{a}}$关于 T^{ch}_{sh}是初级的。

证明。由附录 A 中的 λ 括号 (A.1)、(A.5) 和 (A.7)，我们得到

$$\begin{aligned} &[(t_a+1)\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} + t_a\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} + D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] \\ &\quad = (t_a+1)[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] + t_a[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] + [D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] \\ &\quad = (t_a+1)\partial\phi_a - t_a(\partial+\lambda)\phi_a + (\partial+\chi D)\phi_a \\ &\quad = 2\partial\phi_a - t_a\lambda\phi_a + \chi D\phi_a, \end{aligned}$$

对于任意偶元素 a，我们还有

$$\begin{aligned}[(t_a+1)\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+t_a\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}{}_\Lambda\,\phi^{\bar{a}}]&\\ =(t_a+1)[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}{}_\Lambda\,\phi^{\bar{a}}]+t_a[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}{}_\Lambda\,\phi^{\bar{a}}]+[D\phi_aD\phi^{\bar{a}}{}_\Lambda\,\phi^{\bar{a}}]&\\ =(t_a+1)(\partial+\lambda)\phi^{\bar{a}}-t_a\partial\phi^{\bar{a}}+(\partial+\chi D)\phi^{\bar{a}}&\\ =2\partial\phi^{\bar{a}}+(t_a+1)\lambda\phi^{\bar{a}}+\chi D\phi^{\bar{a}},&\end{aligned}$$

根据 (A.2)、(A.6) 和 (A.8) 中的 λ 括号。因此，我们有以下Λ 括号:

$$\begin{aligned}[T^{ch}_{sh}{}_\Lambda\,\phi_a]&=(2\partial-t_a\lambda+\chi D)\phi_a,\\ [T^{ch}_{sh}{}_\Lambda\,\phi^{\bar{a}}]&=(2\partial+(t_a+1)\lambda+\chi D)\phi^{\bar{a}},\end{aligned}$$

对于任意偶元素 a，以及

$$\begin{aligned}[T^{ch}_{sh}{}_\Lambda\,\phi_a]&=(2\partial+(t_a+1)\lambda+\chi D)\phi_a,\\ [T^{ch}_{sh}{}_\Lambda\,\phi^{\bar{a}}]&=(2\partial-t_a\lambda+\chi D)\phi^{\bar{a}},\end{aligned}$$

对于 A 中的任意奇元素 a。 □

注 4.10。粗略地说，SUSY W 代数是 SUSY 仿射顶点代数与 SUSY 带荷自由费米子顶点代数的张量积的 BRST 上同调，即:

$$W(\overline{\mathfrak{g}},f_{odd},k)=H(V^k(\overline{\mathfrak{g}})\otimes F^{ch}_{N=1},Q),$$

其中 Q 是 $V^k(\overline{\mathfrak{g}})\otimes F^{ch}_{N=1}$ 的微分，而 $\overline{\mathfrak{g}}$ 表示具有反转奇偶性的 $\mathfrak{g}$（详情请参见 [18] 的第 4.1 节）。对于 SUSY 仿射顶点代数 $V^k(\overline{\mathfrak{g}})$，存在一个 $N=1$ 超共形向量 T^{KT}_{st}，即 Kac-Todorov 超共形向量，它最初源自 SUSY 仿射顶点代数的 [15]，（参见 [11] 的例 5.9）。此外，对于任意向量 $\overline{v}\in\overline{\mathfrak{g}}$，我们知道该向量

$$T^{KT}_{sh}=T^{KT}_{st}+\partial\overline{v},$$

也是一个 $N=1$ 超共形向量（参见 [12]中的例 2.13）。因此，我们提出，将定理 4.6 中的移位超共形向量与 Kac-Todorov 超共形向量相加

$$T^W:=T^{KT}_{sh}\otimes 1+1\otimes T^{ch}_{sh}$$

可得到超对称 W-代数的一个超共形向量。

注 4.11. 通过非超对称超共形向量分解场 T^{ch}_{sh}，可采用与注 4.3 相同的方法，即，SUSY 带电自由费米子顶点代数$F^{ch}_{N=1}$的移位超共形场 T^{ch}_{sh}，是非超对称 bc-$\beta\gamma$ 系统的移位超共形场之和。

证明。对于 $a\in A_{\bar{0}}$，我们有

$$\begin{aligned}Y(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}},z,\theta)&=Y(\phi_a,z,\theta)Y(\partial\phi^{\bar{a}},z,\theta)\\ &=Y(\phi_a,z,\theta)\partial_zY(\phi^{\bar{a}},z,\theta)\\ &=(Y(\gamma,z)+\theta Y(c,z))(Y(\partial b,z)+\theta Y(\partial\beta,z))\\ &=Y(\gamma\partial b,z)+\theta Y(c\partial b+\gamma\partial\beta,z),\end{aligned}$$

并且，结合方程 (4.4) 和 (4.5)，移位超共形场 T^{ch}_{sh} 的 $A_{\bar{0}}$ 部分可表示为

$$\begin{aligned}(t_a+1)\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+t_a\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}\\ =(t_a)\gamma\partial b+(t_a+1)\partial\gamma b+c\beta\\ +2\theta\Big(\frac{1}{2}((t_a-1)c\partial b+(t_a+1)\partial cb+t_a\gamma\partial\beta+(t_a+2)\partial\gamma\beta)\Big).\end{aligned}$$

若将鬼部分定义为

$$L^{ch}_{ghost}=\frac{t_a}{2}(c\partial b+\partial cb+\gamma\partial\beta+\partial\gamma\beta),\quad G^{ch}_{ghost}=t_a(\gamma\partial b+\partial\gamma b),$$

我们便得到 bc-$\beta\gamma$ 系统中的移位超共形向量:

$$\begin{aligned}L^{ch}_{sh}&=L^{ch}_{st}+L^{ch}_{ghost}\\ &=\frac{1}{2}((t_a-1)c\partial b+(t_a+1)\partial cb+t_a\gamma\partial\beta+(t_a+2)\partial\gamma\beta),\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}G^{ch}_{sh}&=G^{ch}_{st}+G^{ch}_{ghost}\\ &=(t_a)\gamma\partial b+(t_a+1)\partial\gamma b+c\beta.\end{aligned}\tag{4.11}$$

另一方面，对于奇元素 $a\in A_{\bar{1}}$，我们有

$$\begin{aligned}Y(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}},z,\theta)&=Y(\partial\phi_a,z,\theta)Y(\phi^{\bar{a}},z,\theta)\\ &=\partial_zY(\phi_a,z,\theta)Y(\phi^{\bar{a}},z,\theta)\\ &=(Y(\partial b,z)+\theta Y(\partial\beta,z))(Y(\gamma,z)+\theta Y(c,z))\\ &=Y(\partial b\gamma,z)+\theta Y(\partial\beta\gamma-\partial bc,z),\end{aligned}$$

此外，利用 (4.7) 中的方程，移位超共形场 T^{ch}_{sh} 的 $A_{\bar{1}}$ 部分可写为

$$\begin{aligned}(t_a+1)\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+t_a\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}\\ =(t_a)\gamma\partial b+(t_a+1)\partial\gamma b+c\beta\\ +2\theta\Big(\frac{1}{2}((t_a-1)c\partial b+(t_a+1)\partial cb+t_a\gamma\partial\beta+(t_a+2)\partial\gamma\beta)\Big),\end{aligned}$$

其表达式与 $A_{\bar{0}}$ 部分相同。
因此，SUSY 带电自由费米子顶点代数的移位超共形场，是 $\dim_{\mathbb{C}}U$ 个非超对称 bc-$\beta\gamma$ 系统的移位超共形场之和，即

$$T^{ch}_{sh}=\sum_{a\in A}G^{ch}_{sh}+2\theta(\sum_{a\in A}L^{ch}_{sh}).$$

□

注记 4.12。在注记 4.8 中，对于 SUSY 顶点代数的情形，当对所有 $a\in A$ 都有 $t_a=0$ 时，场 T^{ch}_{st} 是场 T^{ch}_{sh} 的一个特例。同样，我们可以看到，在非 SUSY bc-$\beta\gamma$ 系统中，L^{ch}_{st} 和 G^{ch}_{st} 的每个场也都是 L^{ch}_{sh} 和 G^{ch}_{sh} 的每个场的特例。

4.3. SUSY 带电自由费米子顶点代数的移位 $N=2$ 超共形结构。根据 [3] 和 [11], , 我们可以利用场这一事实

$$J_{st}^{ch}=\sum_{a\in A_{\bar{0}}}D\phi_a\phi^{\bar{a}}+\sum_{a\in A_{\bar{1}}}D\phi^{\bar{a}}\phi_a,$$

与 T_{st}^{ch}一起构成一种 $N=2$ 超共形顶点代数结构。对于与移位后的超共形向量 T_{sh}^{ch}相容的 $F_{N=1}^{ch}$ 的 $N=2$ 超共形对称性，我们在定理 4.14 中找到了相应的鬼项。我们还在定理 4.21 中将移位后的 $N=2$ 超共形场写成 $N=2$ 超场。

引理 4.13. 设 $F_{N=1}^{ch}$ 是超对称带电自由费米子顶点代数。对于 A 中任意偶元素 a，我们有以下 Λ-括号:

$$\begin{aligned}[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a\phi^{\bar{a}}]&=\partial(D\phi_a\phi^{\bar{a}})+\lambda(D\phi_a\phi^{\bar{a}})+\chi D(D\phi_a\phi^{\bar{a}})\\&\quad+\chi(D\phi_aD\phi^{\bar{a}})-\frac{1}{2}\lambda^2,\end{aligned}\tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_aD\phi^{\bar{a}}]&=\partial(\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\lambda(\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\chi D(\phi_aD\phi^{\bar{a}})\\&\quad-\chi(D\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\lambda\chi(\phi_a\phi^{\bar{a}})+\frac{1}{2}\lambda^2,\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a\phi^{\bar{a}}]&=-\partial(D\phi_a\phi^{\bar{a}})-\lambda(D\phi_a\phi^{\bar{a}})-\chi D(D\phi_a\phi^{\bar{a}})\\&\quad-\chi(D\phi_aD\phi^{\bar{a}})-\lambda\chi(\phi_a\phi^{\bar{a}})-\frac{1}{2}\lambda^2,\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_aD\phi^{\bar{a}}]&=-\partial(\phi_aD\phi^{\bar{a}})-\lambda(\phi_aD\phi^{\bar{a}})-\chi D(\phi_aD\phi^{\bar{a}})\\&\quad+\chi(D\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\frac{1}{2}\lambda^2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$[D\phi_aD\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a\phi^{\bar{a}}]=\partial(D\phi_a\phi^{\bar{a}})+\lambda(D\phi_a\phi^{\bar{a}})-\chi(D\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\frac{1}{2}\lambda^2,\tag{4.16}$$

$$[D\phi_aD\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_aD\phi^{\bar{a}}]=\partial(\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\lambda(\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\chi(D\phi_aD\phi^{\bar{a}})+\frac{1}{2}\lambda^2,\tag{4.17}$$

$$[D\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a\phi^{\bar{a}}]=\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}+\lambda\chi,\tag{4.18}$$

$$[D\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_aD\phi^{\bar{a}}]=\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}-D\phi_aD\phi^{\bar{a}}+\lambda(\phi_a\phi^{\bar{a}}),\tag{4.19}$$

$$[\phi_aD\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a\phi^{\bar{a}}]=-\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}-D\phi_aD\phi^{\bar{a}}-\lambda(\phi_a\phi^{\bar{a}}),\tag{4.20}$$

$$[\phi_aD\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_aD\phi^{\bar{a}}]=-\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}+D\phi_aD\phi^{\bar{a}}-\lambda\chi.\tag{4.21}$$

证明. 对于 (4.12) 中的 Λ-括号，我们有：

$$\begin{aligned}
[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a\phi^{\bar{a}}] &= [\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a]\phi^{\bar{a}} + D\phi_a[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] \\
&\qquad + \int_0^\Lambda [[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a]\ {}_\Gamma\ \phi^{\bar{a}}]\ d\Gamma \\
&= ((D+\chi)\partial\phi_a)\phi^{\bar{a}} + D\phi_a(\partial+\lambda)\phi^{\bar{a}} \\
&\qquad + \int_0^\Lambda [(D+\chi)\partial\phi_a\ {}_\Gamma\ \phi^{\bar{a}}]\ d\Gamma \\
&= \partial D\phi_a\phi^{\bar{a}} + \chi\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} + D\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} + \lambda D\phi_a\phi^{\bar{a}} \\
&\qquad + \int_0^\Lambda -(\eta-\chi)\gamma\ d\Gamma \\
&= \partial(D\phi_a\phi^{\bar{a}}) + \lambda(D\phi_a\phi^{\bar{a}}) + \chi D(D\phi_a\phi^{\bar{a}}) \\
&\qquad + \chi(D\phi_a D\phi^{\bar{a}}) - \frac{1}{2}\lambda^2,
\end{aligned}$$

由引理 A.1 中的 (A.3) 和 (A.2) 得出。类似地，我们可以利用引理 A.1、引理 A.2 和引理 A.3 计算 (4.13)-(4.17) 中的 Λ-括号。(4.18)-(4.21) 中的 Λ-括号则由引理 A.4 得出。□

定理 4.14. 设 J^{ch}_{ghost} 为如下定义的场

$$J^{ch}_{ghost} = \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a(D\phi_a\phi^{\bar{a}} + \phi_a D\phi^{\bar{a}}) + \sum_{a\in A_{\bar{1}}} t_a(D\phi^{\bar{a}}\phi_a + \phi^{\bar{a}}D\phi_a).$$

则流场

$$J^{ch}_{sh} = J^{ch}_{st} + J^{ch}_{ghost},$$

并且超共形场 T^{ch}_{sh} 生成中心荷为 c_{sh}的 $N=2$ 超共形结构。

证明. 对于 $A_{\bar{0}}$-部分，利用引理 4.13，我们得到以下 Λ-括号：

$$\begin{aligned}
[T^{ch}_{st}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{st}] &= (2\partial + 2\lambda + \chi D)J^{ch}_{st}, \\
[T^{ch}_{st}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{ghost}] &= (2\partial + 2\lambda + \chi D)J^{ch}_{ghost} + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda^2 + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda\chi\phi_a\phi^{\bar{a}}, \\
[T^{ch}_{ghost}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{st}] &= -\sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda^2 - \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda\chi\phi_a\phi^{\bar{a}}, \\
[T^{ch}_{ghost}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{ghost}] &= 0,
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$[T^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{sh}] = (2\partial + 2\lambda + \chi D)J^{ch}_{sh}.$$

此外，我们可以检验以下 Λ-括号：

$$\begin{aligned}
[J^{ch}_{st}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{st}] &= T^{ch}_{st} + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} \lambda\chi,\\
[J^{ch}_{st}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{ghost}] &= T^{ch}_{ghost} + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda\phi_a\phi^{\bar{a}} + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda\chi,\\
[J^{ch}_{ghost}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{st}] &= -\sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda\phi_a\phi^{\bar{a}} + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} t_a\lambda\chi,\\
[J^{ch}_{ghost}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{ghost}] &= 0,
\end{aligned}$$

因此我们得到以下结果：

$$[J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{sh}] = T^{ch}_{sh} + \sum_{a\in A_{\bar{0}}} (2t_a+1)\lambda\chi.$$

对于 $A_{\bar{1}}$ 部分，将场 ϕ_a 与 $\phi^{\bar{a}}$ 互换即可得到相同结果，反之亦然。因此，场 T^{ch}_{sh} 和 J^{ch}_{sh} 满足 $N=2$ 超共形对称性。

□

备注 4.15。事实上，我们可以将（参见 [3] 中的例3.13）超场 $N=1$ T^{ch}_{sh} 和 J^{ch}_{sh} 写作：

$$\begin{aligned}
T^{ch}_{sh}(z,\theta) &= (G^{ch,+}_{sh}(z) + G^{ch,-}_{sh}(z)) + 2\theta L^{ch}_{sh}(z),\\
J^{ch}_{sh}(z,\theta) &= J^{ch}_{sh}(z) + \theta(G^{ch,-}_{sh}(z) - G^{ch,+}_{sh}(z)),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中

$$L^{ch}_{sh}(z) = \sum_{a\in A}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(t_a-1)c\partial b + (t_a+1)\partial cb\\ + t_a\gamma\partial\beta + (t_a+2)\partial\gamma\beta\end{pmatrix},$$

$$G^{ch,+}_{sh}(z) = \sum_{a\in A} c\beta,$$

$$G^{ch,-}_{sh}(z) = \sum_{a\in A}(t_a+1)\partial\gamma b + (t_a)\gamma\partial b,$$

$$J^{ch}_{sh}(z) = \sum_{a\in A}(t_a+1)cb + t_a\gamma\beta,$$

由方程 (4.1)、(4.2)、(4.3)、(4.10) 和 (4.11)，可知场 L^{ch}_{sh}、$G^{ch}{}_{,sh}{}^{+}$、$G^{ch}{}_{,sh}{}^{-}$ 和 J^{ch}_{sh} 满足$N=2$ 超共形顶点代数的非 SUSY λ 括号关系。

注 4.16. 根据 [11], 定义4.10，我们回忆起$N_K=2$ 超对称李共形代数的 λ 括号定义如下：

$$\begin{aligned}
[u\ {}_\Lambda\ v] = \sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}u_{(j|00)}v &- \chi^1\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}u_{(j|10)}v\\
&- \chi^2\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}u_{(j|01)}v - \chi^1\chi^2\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}u_{(j|11)}v.
\end{aligned}$$

另一方面，根据 $N_K=2$ 超对称李共形代数的半线性，我们有：

$$\begin{aligned} u_{(j|00)}v &= -D^1D^2u_{(j|11)}v, \\ u_{(j|10)}v &= D^2u_{(j|11)}v, \\ u_{(j|01)}v &= -D^1u_{(j|11)}v, \end{aligned}$$

因此我们得到以下等式：

$$\begin{aligned} [u\ {}_\Lambda\ v] = &-[D^1D^2u\ {}_\lambda\ v] - \chi^1[D^2u\ {}_\lambda\ v] \\ &+ \chi^2[D^1u\ {}_\lambda\ v] - \chi^1\chi^2[u\ {}_\lambda\ v]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

备注 4.17. 按照备注 4.15，考虑如下 $N_K=2$ SUSY 顶点代数结构（见 [11] 中的备注 2.8），其中奇端同态定义为

$$\begin{aligned} D^1 &= (G^{ch,+}_{sh}+G^{ch,-}_{sh})_{(0)} = (G^{ch,+}_{st}+G^{ch,-}_{st})_{(0)}, \\ D^2 &= i(G^{ch,+}_{sh}-G^{ch,-}_{sh})_{(0)} = i(G^{ch,+}_{st}-G^{ch,-}_{st})_{(0)}, \end{aligned}$$

态场对应由下式给出

$$Y(v,z,\theta^1,\theta^2) = Y(v,z)+\theta^1Y(D^1v,z)+\theta^2Y(D^2v,z)+\theta^2\theta^1Y(D^1D^2v,z).$$

设 P^{ch}_{sh} 为如下定义的向量：

$$\begin{aligned} P^{ch}_{sh} &= -iJ^{ch}_{sh\,(-1)}\left|0\right\rangle \\ &= -i\sum_{a\in A}(t_a+1)cb+t_a\gamma\beta. \end{aligned}$$

则与 P^{ch}_{sh} 对应的 $N=2$ 超场展开为：

$$\begin{aligned} Y(P^{ch}_{sh},z,\theta^1,\theta^2) = &-iY(J^{ch}_{sh},z)-i\theta^1Y(D^1J^{ch}_{sh},z) \\ &-i\theta^2Y(D^2J^{ch}_{sh},z)-i\theta^2\theta^1Y(D^1D^2J^{ch}_{sh},z) \\ = &-iY(J^{ch}_{sh},z)-i\theta^1Y(G^{ch,-}_{sh}-G^{ch,+}_{sh},z) \\ &-\theta^2Y(G^{ch,+}_{sh}+G^{ch,-}_{sh},z)-\theta^2\theta^1Y(2L^{ch}_{sh},z) \\ = &-iY(J^{ch}_{sh},z,\theta^1)-\theta^2Y(T^{ch}_{sh},z,\theta^1), \end{aligned} \tag{4.24}$$

这由 $N=2$ 超共形顶点代数的非 SUSY λ 括号关系推出。

命题 4.18. 备注 4.17 中定义的场 P^{ch}_{sh} 满足以下 λ 括号：

$$[P^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ P^{ch}_{sh}]_{N_K=2} = (2\partial+2\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)P^{ch}_{sh}+\frac{c_{sh}}{3}\lambda\chi^1\chi^2.$$

因此，定理 4.14 中的平移 $N=2$ 超共形对称性由 $N_K=2$ SUSY 顶点代数形式中的一个 $N=2$ 超场 P^{ch}_{sh} 生成。

证明。注意，备注 4.15 中的场 L^{ch}_{sh}, $G^{ch,\ +}_{sh}$, $G^{ch,\ -}_{sh}$, J^{ch}_{sh} 满足超共形顶点代数的非超对称 λ 括号关系（见定义 3.3），并且根据备注 4.17 中 D^1 和 D^2 的定义，我们有：

$$\begin{aligned} D^1J^{ch}_{sh} &= G^{ch,-}_{sh}-G^{ch,+}_{sh}, \\ iD^2J^{ch}_{sh} &= G^{ch,+}_{sh}+G^{ch,-}_{sh}, \\ iD^1D^2J^{ch}_{sh} &= 2L^{ch}_{sh}. \end{aligned}$$

于是，由备注 4.16 中的等式 (4.23)，我们有：

$$\begin{aligned}
[P^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ P^{ch}_{sh}] =& -i[iD^1D^2J^{ch}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] - i\chi^1[iD^2J^{ch}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] \\
&\qquad - \chi^2[D^1J^{ch}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] + \chi^1\chi^2[J^{ch}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] \\
=& -i[2L^{ch}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] - i\chi^1[G^{ch,+}_{sh} + G^{ch,-}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] \\
&\qquad - \chi^2[G^{ch,-}_{sh} - G^{ch,+}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] + \chi^1\chi^2[J^{ch}_{sh}\ {}_\lambda\ J^{ch}_{sh}] \\
=& -i(2\partial + 2\lambda)J^{ch}_{sh} - i\chi^1(G^{ch,-}_{sh} - G^{ch,+}_{sh}) \\
&\qquad - \chi^2(G^{ch,+}_{sh} + G^{ch,-}_{sh}) + \chi^1\chi^2\frac{c_{sh}}{3}\lambda \\
=& -i(2\partial + 2\lambda)J^{ch}_{sh} - i\chi^1D^1J^{ch}_{sh} - i\chi^2D^2J^{ch}_{sh} + \chi^1\chi^2\frac{c_{sh}}{3}\lambda \\
=& (2\partial + 2\lambda + \chi^1D^1 + \chi^2D^2)(-iJ^{ch}_{sh}) + \frac{c_{sh}}{3}\lambda\chi^1\chi^2.
\end{aligned}$$

□

注 4.19。现在，使用注 4.3 中的记号，定义 $N = 2$ 超场 Φ_a 和 $\Phi^{\bar{a}}$ 如下：

$$\begin{aligned}
\Phi_a &= Y(\gamma, z, \theta^1, \theta^2) \\
&= Y(\gamma, z) + \theta^1 Y(D^1\gamma, z) + \theta^2 Y(D^2\gamma, z) + \theta^2\theta^1 Y(D^1D^2\gamma, z) \\
&= Y(\gamma, z) + \theta^1 Y(c, z) + \theta^2 Y(ic, z) + \theta^2\theta^1 Y(i\partial\gamma, z) \\
&= \phi_a + i\theta^2 D^1\phi_a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{\bar{a}} &= Y(b, z, \theta^1, \theta^2) \\
&= Y(b, z) + \theta^1 Y(D^1b, z) + \theta^2 Y(D^2b, z) + \theta^2\theta^1 Y(D^1D^2b, z) \\
&= Y(b, z) + \theta^1 Y(\beta, z) + \theta^2 Y(i\beta, z) + \theta^2\theta^1 Y(i\partial b, z) \\
&= \phi^{\bar{a}} + i\theta^2 D^1\phi^{\bar{a}},
\end{aligned}$$

其中，$N_K = 2$ 超对称顶点代数结构由备注 4.17 给出。于是，Φ_a 和 $\Phi^{\bar{a}}$ 的 Λ-括号为：

$$[\Phi_a\ {}_\Lambda\ \Phi^{\bar{a}}] = -i\chi^1 + \chi^2. \tag{4.25}$$

我们还知道：

$$\begin{aligned}
D^1\Phi_a &= D^1\phi_a - i\theta^2\partial\phi_a, \quad D^1\Phi^{\bar{a}} = D^1\phi^{\bar{a}} - i\theta^2\partial\phi^{\bar{a}}, \\
D^2\Phi_a &= iD^1\phi_a + \theta^2\partial\phi_a, \quad D^2\Phi^{\bar{a}} = iD^1\phi^{\bar{a}} + \theta^2\partial\phi^{\bar{a}},
\end{aligned}$$

因此，对于任意偶元素 $a \in A_{\bar{0}}$，我们有：

$$\begin{aligned}
D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} &= D^1\phi_a\phi^{\bar{a}} - i\theta^2(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} + D^1\phi_aD^1\phi^{\bar{a}}), \\
\Phi_aD^1\Phi^{\bar{a}} &= \phi_aD^1\phi^{\bar{a}} - i\theta^2(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} - D^1\phi_aD^1\phi^{\bar{a}}),
\end{aligned}$$

并且，对于任意奇元素 $a \in A_{\bar{1}}$：

$$\begin{aligned}
D^1\Phi^{\bar{a}}\Phi_a &= D^1\phi^{\bar{a}}\phi_a - i\theta^2(\phi_a\partial\phi^{\bar{a}} + D^1\phi_aD^1\phi^{\bar{a}}), \\
\Phi^{\bar{a}}D^1\Phi_a &= \phi^{\bar{a}}D^1\phi_a - i\theta^2(\partial\phi_a\phi^{\bar{a}} - D^1\phi_aD^1\phi^{\bar{a}}).
\end{aligned}$$

因此，(4.24) 中的 $N=2$ 超场 P_{sh}^{ch} 可以写为：

$$P_{sh}^{ch}=-i\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{a\in A_{\bar{0}}}(t_a+1)D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}+t_a\Phi_aD^1\Phi^{\bar{a}}\\ \quad+\displaystyle\sum_{a\in A_{\bar{1}}}(t_a+1)D^1\Phi^{\bar{a}}\Phi_a+t_a\Phi^{\bar{a}}D^1\Phi_a\end{array}\right).$$

然后，利用 $N_K=2$ λ 括号（4.25）及以下关系：

$$iD^1\Phi_a=D^2\Phi_a,\quad iD^1\Phi^{\bar{a}}=D^2\Phi^{\bar{a}},\tag{4.26}$$

还可以直接验证，场 P_{sh}^{ch} 是一个 $N=2$ 超共形向量（见定理 4.21）。

定义 4.20。设 U 是一个有限维向量超空间， $A=A_{\bar{0}}\cup A_{\bar{1}}$是 U的一个基，其中 $A_{\bar{0}}$ 是该基的偶部分， $A_{\bar{1}}$ 是该基的奇部分。定义两个向量超空间：

$$\Phi_U\simeq U,\quad \Phi^{\bar{U}}\simeq\Pi U^*,$$

其基元素分别记为 Φ_a和 $\Phi^{\bar{a}}$。在 $R_{N=2}^{bc\beta\gamma}=\mathcal{H}_{N=2}\otimes$（$\Phi_U\oplus\Phi^{\bar{U}}$）上定义 Λ括号如下：

$$[\Phi_a\ {}_\Lambda\ \Phi^{\bar{b}}]=\delta_{ab}(-i\chi^1+\chi^2),\quad [\Phi_a\ {}_\Lambda\ \Phi_b]=[\Phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \Phi^{\bar{b}}]=0,$$

对于 a、$b\in A$。于是， $\mathcal{H}_{N=2}$-模 $R_{N=2}^{bc\beta\gamma}$ 是一个 $N_K=2$ 超对称李共形代数。现在令 V（$R_{N=2}^{bc\beta\gamma}$）为 $R_{N=2}^{bc\beta\gamma}$ 的通用包络 $N_K=2$ 超对称顶点代数，并令 I（$R_{N=2}^{bc\beta\gamma}$）为由形如（4.26）的元素生成的理想。于是，我们将与向量超空间 U 相关联的 $N=2$ 超对称 bc-$\beta\gamma$ 系统定义为商 V（$R_{N=2}^{bc\beta\gamma}$）$/I$（$R_{N=2}^{bc\beta\gamma}$）。

定理 4.21。设 P_{sh}^{ch} 为由下式定义的向量

$$P_{sh}^{ch}=-i\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{a\in A_{\bar{0}}}(t_a+1)D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}+t_a\Phi_aD^1\Phi^{\bar{a}}\\ \quad+\displaystyle\sum_{a\in A_{\bar{1}}}(t_a+1)D^1\Phi^{\bar{a}}\Phi_a+t_a\Phi^{\bar{a}}D^1\Phi_a\end{array}\right),$$

其中 $(t_a)_{a\in A}$ 是一个复数序列。则向量 P_{sh}^{ch} 是 $N=2$超共形向量，属于具有中心荷的 $N=2$ 超对称 bc-$\beta\gamma$ 系统

$$c_{sh}=\sum_{a\in A}(6t_a+3).$$

证明。设 a 是 A 的偶元素。根据$N_K=2$ 超对称李共形代数的非交换 Wick 公式，我们有：

$$[\Phi_a\ {}_\Lambda\ D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}]=(i\chi^1D^1-\chi^2D^1)\Phi_a,$$

因此，根据斜对称性：

$$\begin{aligned}[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \Phi_a]&=-[\Phi_a\ {}_{-\nabla-\Lambda}\ D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}]\\&=(-i(-D^1-\chi^1)D^1+(-D^2-\chi^2)D^1)\Phi_a\\&=i(2\partial+\chi^1D^1+\chi^2D^2)\Phi_a.\end{aligned}\tag{4.27}$$

因此我们有：

$$\begin{aligned}[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, D^1\Phi_a] &= i(D^1+\chi^1)(2\partial+\chi^1D^1+\chi^2D^2)\Phi_a \\ &= i(2\partial+\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)D^1\Phi_a-\chi^1\chi^2D^1\Phi_a.\end{aligned} \tag{4.28}$$

同样，我们得到：

$$[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, \Phi^{\bar{a}}] = i(2\partial+\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)\Phi^{\bar{a}}+\chi^1\chi^2\Phi^{\bar{a}}. \tag{4.29}$$

由式 (4.28) 和 (4.29) 中的 Λ-括号，以及非交换 Wick 公式可得：

$$\begin{aligned}[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}] &= [D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, D^1\Phi_a]\Phi^{\bar{a}}+D^1\Phi_a[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, \Phi^{\bar{a}}] \\ &\quad+\int_0^\Lambda [[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, D^1\Phi_a] \,{}_\Gamma\, \Phi^{\bar{a}}]\,d\Gamma \\ &= i(2\partial+2\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)(D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}})-\lambda\chi^1\chi^2.\end{aligned} \tag{4.30}$$

另一方面，我们可以计算：

$$[\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, \Phi_a\Phi^{\bar{a}}] = 0. \tag{4.31}$$

由 (4.27) 和 (4.29) 中的 Λ-括号可得：

$$\begin{aligned}[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, \Phi_a\Phi^{\bar{a}}] &= i(2\partial+\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)(\Phi_a\Phi^{\bar{a}}) \\ &\quad+\chi^1\chi^2(\Phi_a\Phi^{\bar{a}})-\lambda(-i\chi^1+\chi^2).\end{aligned}$$

因此，利用半线性，我们得到：

$$\begin{aligned}[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}} \,{}_\Lambda\, D^1(\Phi_a\Phi^{\bar{a}})] &= i(2\partial+2\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)(D^1(\Phi_a\Phi^{\bar{a}})) \\ &\quad+(i\lambda\chi^1+\lambda\chi^2)(\Phi_a\Phi^{\bar{a}})-i\lambda^2-\lambda\chi^1\chi^2,\end{aligned} \tag{4.32}$$

并且，由斜对称性可得：

$$[D^1(\Phi_a\Phi^{\bar{a}}) \,{}_\Lambda\, D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}] = -(i\lambda\chi^1+\lambda\chi^2)(\Phi_a\Phi^{\bar{a}})+i\lambda^2-\lambda\chi^1\chi^2. \tag{4.33}$$

结合 (4.30)、(4.31)、(4.32) 和 (4.33) 中的结果，我们得到：

$$\begin{aligned}&[D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}+t_aD^1(\Phi_a\Phi^{\bar{a}}) \,{}_\Lambda\, D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}+t_aD^1(\Phi_a\Phi^{\bar{a}})] \\ &\quad= i(2\partial+2\lambda+\chi^1D^1+\chi^2D^2)(D^1\Phi_a\Phi^{\bar{a}}+t_aD^1(\Phi_a\Phi^{\bar{a}}))-(2t_a+1)\lambda\chi^1\chi^2,\end{aligned}$$

因此，我们得到了这个结果。 □

A. Calculations of lambda brackets

对于任意偶元素 $a \in A$，在 $F_{N=1}^{ch}$ 中，我们有以下 λ 括号。

引理 A.1. $\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}$ 的 λ 括号：

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] = \partial\phi_a, \tag{A.1}$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] = (\partial+\lambda)\phi^{\bar{a}}, \tag{A.2}$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a] = (D+\chi)\partial\phi_a, \tag{A.3}$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi^{\bar{a}}] = (D+\chi)(\partial+\lambda)\phi^{\bar{a}}, \tag{A.4}$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a] = (\partial+\lambda)\partial\phi_a,$$

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi^{\bar{a}}] = (\partial+\lambda)^2\phi^{\bar{a}}.$$

证明。 $N_K = 1$ SUSY 顶点代数的括号可以通过使用相关规则得到。对于（A.1）中的 Λ 括号：

$$\begin{aligned}[\phi_a\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a\phi^{\bar{a}}] &= [\phi_a\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a]\phi^{\bar{a}} + (-1)^{(a+1)a}\partial\phi_a[\phi_a\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] + \int_0^\Lambda [[\phi_a\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a]\ {}_\Gamma\ \phi^{\bar{a}}]\, d\Gamma \\ &= \partial\phi_a,\end{aligned}$$

因为根据半线性，我们知道：

$$[\phi_a\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a] = (\partial+\lambda)[\phi_a\ {}_\Lambda\ \phi_a] = 0.$$

因此，根据斜对称性，我们得到：

$$[\partial\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] = (-1)^{(a+a+1)a}[\phi_a\ {}_{-\nabla-\Lambda}\ \partial\phi_a\phi^{\bar{a}}] = \partial\phi_a.$$

同样，其他 Λ 括号也可以通过使用 $N_K = 1$ SUSY 顶点代数的 Λ 括号规则得到。□

引理 A.2. $\phi_a\partial\phi$ 的 λ 括号 ${}^{\bar{a}}$：

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] = -(\partial+\lambda)\phi_a, \tag{A.5}$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] = -\partial\phi^{\bar{a}}, \tag{A.6}$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a] = -(D+\chi)(\partial+\lambda)\phi_a,$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi^{\bar{a}}] = -(D+\chi)\partial\phi^{\bar{a}},$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a] = -(\partial+\lambda)^2\phi_a,$$

$$[\phi_a\partial\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi^{\bar{a}}] = -(\partial+\lambda)\partial\phi^{\bar{a}}.$$

证明。由直接计算可得。 □

引理 A.3。 $D\phi_a D\phi^{\bar{a}}$ 的 λ 括号:

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] = (\partial + \chi D)\phi_a, \tag{A.7}$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] = (\partial + \chi D)\phi^{\bar{a}}, \tag{A.8}$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a] = (\partial + \lambda)D\phi_a,$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi^{\bar{a}}] = (\partial + \lambda)D\phi^{\bar{a}},$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi_a] = (\partial + \lambda)(\partial + \chi D)\phi_a,$$

$$[D\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \partial\phi^{\bar{a}}] = (\partial + \lambda)(\partial + \chi D)\phi^{\bar{a}}.$$

证明。通过直接计算即可验证这些结果。 □

引理 A.4。 $D\phi_a\phi^{\bar{a}}$ 和 $\phi_a D\phi^{\bar{a}}$的 λ 括号:

$$[D\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] = -D\phi_a,$$

$$[D\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] = -(D + \chi)\phi^{\bar{a}},$$

$$[D\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a] = (\partial + \chi D)\phi_a,$$

$$[D\phi_a\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi^{\bar{a}}] = (\partial + \lambda)\phi^{\bar{a}},$$

$$[\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi_a] = (D + \chi)\phi_a,$$

$$[\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ \phi^{\bar{a}}] = D\phi^{\bar{a}},$$

$$[\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi_a] = -(\partial + \lambda)\phi_a,$$

$$[\phi_a D\phi^{\bar{a}}\ {}_\Lambda\ D\phi^{\bar{a}}] = -(\partial + \chi D)\phi^{\bar{a}}.$$

证明。通过直接计算也可得到这些结果。 □

B. Charge decomposition

定义 B.1. 如 [12], 第 5.1 节所述，与 $v \in F^{ch}_{N=1}$对应的 $J^{ch}_{sh\,(0|1)}$ 的特征值称为 v的荷。于是，对于 A中的任意偶元素 a， ϕ_a和 $\phi^{\bar{a}}$的荷分别为 t_a和 $-(t_a+1)$。对于奇元素， ϕ_a和 $\phi^{\bar{a}}$的荷分别为 $-(t_a+1)$和 t_a。此外，若我们如下定义 $F^{ch}_{N=1}$ 的 BRST 算子 Q：

$$Q = \frac{1}{2}\left(T^{ch}_{sh\,(0|1)} - J^{ch}_{sh\,(0|0)}\right),$$

则可得到以下结果。

命题 B.2。$F^{ch}_{N=1}$ 的 BRST 算子 Q 满足 $Q^2 = 0$。

证明。若我们设为 $d = \sum_{a\in A} D\phi_a D\phi^{\bar{a}}$，则可知：

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\left(T^{ch}_{sh\,(0|1)} - J^{ch}_{sh\,(0|0)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(T^{ch}_{sh\,(0|1)} - DJ^{ch}_{sh\,(0|1)}\right) = d_{(0|1)}, \end{aligned}$$

根据超对称李共形代数的半线性。我们还有： $N_K = 1$

$$\begin{aligned} [d\ {}_\Lambda\ [d\ {}_\Gamma\ v]] &= [[d\ {}_\Lambda\ d]\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] + [d\ {}_\Gamma\ [d\ {}_\Lambda\ v]] \\ &= [\partial d + 2\lambda d\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] + [d\ {}_\Gamma\ [d\ {}_\Lambda\ v]] \\ &= (\lambda-\gamma)[d\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] + [d\ {}_\Gamma\ [d\ {}_\Lambda\ v]], \end{aligned} \tag{B.1}$$

对于 $v \in F^{ch}_{N=1}$，由超对称李共形代数的雅可比恒等式以及引理4.4中的方程 (4.9) 可得。因此，通过比较 (B.1) 中的 $\chi\eta$ 项，我们得到结果： $N_K = 1$

$$d_{(0|1)}(d_{(0|1)}v) = 0.$$

□

注 B.3. BRST 算子 Q 对 t_a 的任意取值均保持不变，即：

$$Q = \frac{1}{2}\left(T^{ch}_{st\ (0|1)} - J^{ch}_{st\ (0|0)}\right).$$

事实上，若将场 T^{ch}_{sh} 和 J^{ch}_{sh} 按照 (4.22) 分解，则 BRST 算子Q 是场 ${G^{ch}}_{,sh}{}^{+}$ 的零模。另一方面，鬼项对由以下方式定义的 $F^{ch}_{N=1}$ 的同伦算子 H 有贡献：

$$H = \frac{1}{2}\left(T^{ch}_{sh\,(0|1)} + J^{ch}_{sh\,(0|0)}\right) = (T^{ch}_{sh} - d)_{(0|1)},$$

它是场 ${G^{ch}}_{,sh}{}^{-}$ 的零模。

命题 B.4. 设 $v \in F^{ch}_{N=1}$ 是荷为 m 的向量。那么 $Q(v)$ 的荷为 $m+1$。

证明. 根据引理 4.13，我们有：

$$[d\ {}_\Lambda\ J^{ch}_{sh}] = (\partial+\lambda)J^{ch}_{sh} - \chi d + \frac{c_{sh}}{6}\lambda^2,$$

其中 $d = \sum_{a\in A} D\phi_a D\phi^{\bar{a}}$。因此我们得到以下 Λ-括号：

$$\begin{aligned} [J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ d] &= [d\ {}_{-\Lambda-\nabla}\ J^{ch}_{sh}] \\ &= -\lambda J^{ch}_{sh} + (\chi + D)d + \frac{c_{sh}}{6}\lambda^2, \end{aligned}$$

根据 $N_K = 1$ 超对称李共形代数的斜对称性，进而得到：

$$\begin{aligned} [J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ [d\ {}_\Gamma\ v]] &= -[[J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ d]\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] + [d\ {}_\Gamma\ [J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ v]] \\ &= [\lambda J^{ch}_{sh} - (\chi+D)d - \frac{c_{sh}}{6}\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] + [d\ {}_\Gamma\ [J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ v]] \\ &= \lambda[J^{ch}_{sh}\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] - \eta[d\ {}_{\Lambda+\Gamma}\ v] + [d\ {}_\Gamma\ [J^{ch}_{sh}\ {}_\Lambda\ v]], \end{aligned} \tag{B.2}$$

根据 $N_K = 1$ 超对称李共形代数的雅可比恒等式。比较 (B.2) 中 $\chi\eta$项的系数，可得结果:

$$\begin{aligned} J^{ch}_{sh\,(0|1)}Q(v) &= J^{ch}_{sh\,(0|1)}(d_{(0|1)}v) \\ &= d_{(0|1)}v + d_{(0|1)}(J^{ch}_{sh\,(0|1)}v) \\ &= Q(v) + Q(mv) = (m+1)Q(v). \end{aligned}$$

□

注 B.5. 对于 BRST 算子 Q 和 $F^{ch}_{N=1}$的同伦算子 H，如注 B.3 中所定义，经过简单计算可得以下结果:

$$Q(D^i\phi) = \begin{cases} D^{i+1}\phi, & \text{if } i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0, & \text{if } i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}+1, \end{cases}$$

$$H(D^i\phi) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \\ D^{i+1}\phi, & \text{if } i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}+1, \end{cases}$$

其中，对于任意 $a \in A$， ϕ 或者是 ϕ_a，或者是 ϕ^a。此外，同伦算子 H使荷减少 -1。而且，若 u、$v \in F^{ch}_{N=1}$的荷分别为 m_u和m_v，则 uv 的荷为 $m_u + (-1)^u m_v$。

命题 B.6. 对于 $(t_a)_{a\in A} \in \mathbb{Z}^{\dim_{\mathbb{C}}U}$，超对称带电自由费米子顶点代数具有一个 $\mathbb{Z}$分次:

$$F^{ch}_{N=1} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F^{ch,m}_{N=1},$$

称为电荷分解，其中 $F^{ch,m}_{N=1}$ 是由荷为 m的元素构成的子空间。

证明。结合注 B.5 和命题 B.4 中的事实，我们得到所述结果。□

References

[1] D. Adamovi´c, *Representations of the $N = 2$ Superconformal Vertex Algebra*, 《国际数学研究通知》2 (1999), 61-79。[2] B. Bakalov, V. G. Kac, *Field Algebras*, 《国际数学研究通知》3 (2003), 123-159。[3] D. Ben-Zvi, R. Heluani, M. Szczesny, *Supersymmetry of the Chiral de Rham Complex*, 《组合数学》144 (2008), 503-521。[4] A. De Sole, V. G. Kac, *Finite vs Affine W-Algebras*, 《日本数学杂志》1 (2006), 137-261。[5] W. Eholzer, L. Feh´er, A. Honecker, *Ghost systems: A Vertex Algebra Point of View*, 《核物理 B》518 (1998), 669-688。[6] J. Ekstrand, R. Heluani, J. K ¨ ´ allen, M. Zabzine, , *Non-Linear Sigma Models via the Chiral de Rham Complex* 13 2009 1221 1254 , 《理论与数学物理进展》( ), -。[7] J. Ekstrand, R. Heluani, J. K ¨ ´ allen, M. Zabzine, , *Chiral de Rham Complex on Riemannian Manifolds and Special Holonomy* 318 2013 575 613 , 《数学物理通讯》( ), -。[8] J. Ekstrand, R. Heluani, M. Zabzine, *Duals of $N = 2$ Supersymmetric Vertex Algebras on Poisson Manifolds* 62 2012 11, 2259 2278 , 《几何物理杂志》( ), -。[9] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras* 103 1986 105 119 , 《数学物理通讯》( ), -。[10] R. Heluani, *Supersymmetry of the Chiral de Rham Complex II: Commuting Sectors*, 《国际数学研究通知》6 (2009), 953-987。[11] R. Heluani, V. G. Kac, *Supersymmetric Vertex Algebras*, 《数学物理通讯》271 (2007), 103-178。[12] R. Heluani, M. Zabzine, *Generalized Calabi-Yau Manifolds and the Chiral de Rham Complex* 223 2010 1815 1844 , 《理论与数学物理进展》( ), -。[13] V. G. Kac, *Vertex Algebras for Beginners*, 大学讲座丛书, 美国数学会, 第10卷, 1996年。第二版, 1998年。[14] V. G. Kac, S. Roan, M. Wakimoto, *Quantum Reduction for Affine Superalgebras*, 《数学物理通讯》241 (2003), 307-342。[15] V. G. Kac, I. T. Todorov, *Superconformal Current Algebras and Their Unitary Representations* 102 1985 337 347 , 《数学物理通讯》( ), -。[16] V. G. Kac, M. Wakimoto, *Quantum Reduction and Representation Theory of Superconformal Algebras* 185 2004 400 458 , 《理论与数学物理进展》( ), -。[17] J. O. Madsen, E. Ragoucy, *Quantum Hamiltonian Reduction in Superspace Formalism*, 《核物理 B》429 (1994), 277-290。[18] A. Molev, E. Ragoucy, U. R. Suh, *Supersymmetric W-Algebras*, 《数学物理快报》111 (2021), 第1期, 第6篇论文, 25页。[19] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 2: Superstring Theory and Beyond*, 剑桥数学物理专著, 剑桥大学出版社, 1998年。[20] A. Schwimmer, N. Seiberg, *Comments on the $N = 2$ 3 4 Superconformal Algebras in Two Dimensions* 184 1987 191 196 , , , 《物理快报 B》( ), -。

Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Gwanak-ro 1, Gwanak-gu, Seoul 08826, Korea*Email address*: ysw317@snu.ac.kr