arXiv:2302.06408v1 [math.CV] 13 Feb 2023

¨无限共形型曲面的魏尔-彼得森-泰希米勒理论

ERIC SCHIPPERS 和 WOLFGANG STAUBACH

Abstract. 过去二十年来，魏尔-彼得森度量理论已扩展至一般的无限型泰希米勒空间，例如普适泰希米勒空间。本文综述无限维泰希米勒空间的魏尔-彼得森几何方面的主要成果，包括复希尔伯特流形结构、凯勒几何与整体分析的严格定义，以及周期映射的推广。我们还将探讨自20世纪80年代以来，该理论在表示论和物理学中的研究动机。此外，本文还介绍魏尔-彼得森泰希米勒空间在流体力学和二维共形场论等其他领域中的若干应用实例。

1. Introduction

1.1. 历史与动机。我们首先回顾魏尔-彼得森数量积和魏尔-彼得森度量的历史渊源。在解析数论以及自守形式理论中，H. Petersson [63] 在权重为 k 的尖点形式空间 S_k 上定义了数量积，如下所示：

首先，设 Γ 为 SL(2,$\mathbb{Z}$) 的一个同余子群， F 为 Γ.的任意基本域¯令 $\Gamma = \Gamma/\{\pm \mathrm{I}\}$. 对于尖点形式 $f, g \in S_k(\Gamma)$（即权重为 k 且傅里叶级数展开中的常数项为零的模形式），定义 Petersson 标量积如下：

$$(f,g) = \frac{1}{\left[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}\right]} \iint_F (\mathrm{Im}(z))^k f(z)\overline{g(z)} \frac{dA_z}{(\mathrm{Im}(z))^2}. \tag{1.1}$$

由于双曲面积元 $\frac{dA_z}{(\mathrm{Im}(z))^2}$ 以及 ~~(Im(z))^k f~~(z)g(z) 都是 Γ-不变的，因此积分定义良好，且与基本域的选择无关。该数量积收敛，因为 f和 g都是尖点形式，并且当 Im(z) $\to \infty$ 时， $|f(z)| = |g(z)| = O\left(e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)}\right)$。此外，只需 f 或 g 其中一个是尖点形式，Petersson 积便收敛。

利用 Petersson 数量积，并在 Kodaira-Spencer 紧复流形变形理论的背景下，A. Weil [132], [133], 在黎曼曲面的二次微分空间上定义了一个内积，具体如下。若 Teichm¨uller 空间中的一个点由黎曼曲面 $\mathscr{R}$表示，则该点处的余切空间可与 $\mathscr{R}$处的二次微分空间等同。由于该黎曼曲面具有一个

日期：2023年2月14日。Eric Schippers 部分受加拿大自然科学与工程研究委员会资助。

自然双曲度量（例如在 $\mathscr{R}$ 具有负欧拉示性数的情形下），便可通过在黎曼曲面上积分，在二次微分空间上定义一个厄米内积。这会在 Teichm¨uller 空间中每个点的切空间上诱导出一个厄米内积，进而得到一个黎曼度量。

具体而言，设 $T(\mathscr{R})$ 是亏格为 g 的紧黎曼曲面 $\mathscr{R}$ 的 Teichm¨üller 空间，并设 $\mathscr{R}_t \in T(\mathscr{R})$ 是经过 $\mathscr{R} := \mathscr{R}_0 \in T(\mathscr{R})$ 的一条光滑路径。切向量 $\mathscr{R}_0 = d\mathscr{R}_t/\,dt|_{t=0}$ 可唯一地表示为一个调和贝尔特拉米微分

$$\mu = \rho^{-1}\bar{\varphi} \tag{1.2}$$

其中，ρ 是双曲度量，$\varphi \in Q(\mathscr{R})$ 是全纯二次微分。$T(\mathscr{R})$ 上的魏尔-彼得森度量（简称 WP 度量）定义为

$$\left\|\dot{\mathscr{R}}_0\right\|^2_{\mathrm{WP}} = \|\mu\|^2_{\mathrm{WP}} = \int_{\mathscr{R}} |\mu|^2\rho = \int_{\mathscr{R}} |\varphi|^2\rho^{-1}, \tag{1.3}$$

which 可以使用 Petersson 标量积 (1.1) 与 (f, f) 进行比较。

现在，我们非常简要地概述 Thurston 对 Teichm¨üller 理论和魏尔-彼得森度量理论的参与。若要更全面地了解 Thurston 在这一领域及其他背景下的工作，读者可参阅 K. Ohshika 和 A. Papadopoulos 的文章 [59]，或查阅 A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Po´enaru[29] 合著的书。

William Thurston 对 Teichm¨uller 理论的兴趣源于他对曲面理论以及曲面上黎曼度量变形理论的兴趣。他的动机是发展一种完全基于双曲几何，而不依赖 Teichm¨uller-Ahlfors-Bers 拟共形方法及二次微分理论的 Teichm¨uller 空间理论[1]，（参见例如 [59]）。按照他的变形理论方法，对于一个欧拉示性数为 $\chi(\mathscr{R}) < 0$ 的曲面 $\mathscr{R}$，总可以在其上赋予曲率为 $-1.$ 的黎曼度量。于是，若两个黎曼度量 g_1 和 g_2 之间存在一个与单位元同伦的微分同胚 g_1，使得 g_1 可由 g_2 得到，则称它们同伦。现在，若S 是紧致且无边界的，Teichm¨uller 空间 $T(\mathscr{R})$ 可定义为曲率为 -1 的所有黎曼度量的同伦类集合。若 $\mathscr{R}$ 有边界，则 $T(\mathscr{R})$ 是定义在 $\mathscr{R}$ 内部、曲率为 -1 的黎曼度量的同伦类集合；这些度量在边界分支附近以伪球面的细端为模型。Thurston 将这种度量称为双曲度量。

在他将 Teichm¨uller 理论应用于曲面理论的过程中，他的一项杰出成就是证明了所谓的尼尔森-瑟斯顿分类定理 [123]。该结果指出，紧曲面 S 到自身的每个同胚 f，都同伦于一个具有下列至少一项性质的同胚 F：

- F 具有有限阶（即 F 的某个幂是单位元），

[1]事实上，由于每个 Teichm¨uller 等价类都包含无穷多个拟共形映射，因此拟共形表述中存在大量冗余信息。这促使人们考虑极值拟共形映射，尽管众所周知，一般情况下唯一性并不成立。

- F 保持 $\mathscr{R}$上的某个互不相交的简单闭曲线的有限并，
- F 是伪阿诺索夫的（这是 Thurston 引入的一个动力学术语，参见例如 [123]）。

为了了解 Teichm¨üller 理论如何融入其中，Thurston 考虑了一个亏格为 $g \geq 2$ 的闭、连通、可定向曲面 $\mathscr{R}$。随后他发现，根据 Fricke 的一项结果，T($\mathscr{R}$) 是曲面 $\mathscr{R}$ 上双曲度量在同伦意义下的空间（且是一个维数为 $6g-6$ 的开球），并且它的紧化与一个闭球同胚。此外，这个球的边界是 PMF($\mathscr{R}$)，即曲面 $\mathscr{R}$ 上测度叶状结构的射影类空间。而且，曲面 $\mathscr{R}$ 的映射类群记作 Mod($\mathscr{R}$)，它作用于这个闭球。然后，利用布劳威尔不动点定理，Thurston 得出结论：Mod($\mathscr{R}$) 的每个元素都在 T($\mathscr{R}$) $\cup$ PMF($\mathscr{R}$) 中有不动点。最后，对不动点的各种情形进行分析，得出了分类定理。L. Bers 在 [13]基于极值拟共形映射的 Teichm¨üller 理论，给出了尼尔森-瑟斯顿分类定理的一个解析证明。

Thurston 也提出了自己研究 Weil–Petersson 度量的方法，由此清晰地揭示了紧曲面 Teichm¨uller 空间上的几何。在这一背景下，他再次受到双曲几何的启发，在 Teichmu¨uller 空间上引入了一种黎曼度量：在由双曲曲面表示的点处，两个切向量的数量积等于曲面上一列均匀分布的闭测地线长度的二阶导数（或随机测地线长度的海森矩阵）。此外，他在 [122] 引入了地震这一概念，将其作为一种推广 Fenchel–Nielsen 变形的操作：沿简单闭测地线切开双曲曲面，再通过扭转将其粘合起来。

在 [136], ，S. Wolpert 证明 Thurston 的度量是 Weil–Petersson 度量的一个倍数。这又为理解紧曲面情形下的图景增添了一个要素，即辨认来自双曲曲面几何的 Teichm¨uller 空间上的几何。

关于 Teichm¨uller 理论诸多方面（包括魏尔-彼得森几何）在紧致有限维情形下的全面概述，请参见 G. Schumacher 的综述[101]。

1.2. 无限共形型曲面的魏尔-彼得森几何。本文主要探讨无限维拟共形 Te- ichm¨uller 空间的魏尔-彼得森几何。这里，我们从宏观视角简要说明其几何动机。本文其余部分将更全面地介绍近期进展及其历史背景。我们希望借此说明，是什么促使许多研究者——他们往往从外部审视 Teichm¨uller 理论——重新点燃 Ahlfors- Bers 理论的余烬。

这个故事始于一道障碍。对于圆盘这类无限型曲面，任意方向上的魏尔-彼得森配对在 Teichm¨uller 空间中并不收敛。因此，要研究这类曲面的 Teichm¨uller 空间的黎曼几何，就必须消除这一障碍。这需要发展一种 Teichm¨uller 空间的精化，使其切空间相对于 Weil-Petersson 乘积成为希尔伯特空间。

既然这并非易事，不妨先思考一个问题：人们最初为何会对无限维 Teichm¨uller 空间感兴趣（更不用说它们的魏尔-彼得森精化了）？ Ahlfors-Bers 时期之后，可以说研究重点转离了拟共形 Teichm¨uller 理论，这或许主要是因为 Thurston 的洞见影响深远。他对黎曼曲面的看法在很大程度上立足于双曲几何，从某种意义上说带有克莱因几何的特点。也就是说，万有覆盖是一个齐性空间：圆盘的所有等距变换构成的群除以一点的稳定子群所得的商。

黎曼曲面的双曲几何具有刚性。两个黎曼曲面之间任何局部保向等距变换都是覆盖映射（见 J.H. Hubbard [44, 命题 3.3.4]；对于圆盘，这相当于施瓦茨引理中的等号情形）。因此，黎曼曲面的双曲几何本质上是有限维的。

相比之下，局部保角变换未必能延拓到全局。它们的刚性远不如双曲等距变换——要指定一个固定某点的局部双全纯映射，需要给出一个幂级数。因此，二维保角几何（复分析）的局部对称群是无限维的。由此可见，二维保角几何的变形理论也应当是无限维的。事实确实如此：例如，圆盘的 Teichm¨üller 空间是一个巴拿赫流形。[2]

局部对称群也难以用李群来简单描述。然而，尽管按照现代定义，局部对称群并非李群，但它符合 S. Lie 最初的构想，即将李群视为偏微分方程的局部定义对称群（见 J. F. Pommaret [64] 和 A. Vinogradov [127]的导论）。在这里，共形变换是拉普拉斯方程的保向对称变换。因此，外界对拟共形 Teichm¨üller 理论，尤其是普遍 Teichm¨üller 空间的兴趣，来自那些无法回避或推迟这种局部观点的领域，也就不足为奇了。这些领域包括流体力学、无限维群、几何偏微分方程，以及与物理学相关的领域，例如二维共形场论、顶点算子代数、弦理论和几何量子化。在这些领域中，Ahlfors-Bers Teichm¨üller 理论也发挥着作用。

我们不妨作如下比较。G. Gould 的非凡才华对听众产生了如此巨大的影响，以至于很长一段时间以来，他对 J. S. 巴赫作品的某些诠释，例如《哥德堡变奏曲》和《赋格的艺术》，一直被视为这些作品的终极演绎。的确，自 20 世纪 50 年代以来，Gould 演绎巴赫的方式便被视为演奏巴赫键盘音乐的一次范式转变。然而，要领略截然不同范式的美，无须否定 Gould；要欣赏他的洞见，也无须摒弃其他范式。在上述类比中，我们可以用 Klein、Ahlfors 和 Bers、Grothendieck 或 Thurston 来代替 Gould，用黎曼来代替巴赫。回过头看，无限型曲面的魏尔-彼得森理论具有一种简洁性，能够融入许多范式。

[2]事实上，通过Bers技巧，Teichm¨üller空间——即变形空间——被识别为共形对称空间。

解析问题是将无限维现象纳入标准几何范式的一道屏障。例如，无限维群可能并非连续的（例如，在普遍 Teichm¨uller 空间中，左乘并不连续）。同样，构造向量丛和联络所需的表示，也需要解决泛函分析中的问题。在 Teichm¨uller 理论中，解析方面的进展如今已消除了这道屏障。回到上面的两个例子，根据 L. Takhtajan 和 L. P. Teo 的一个定理，魏尔-彼得森普遍 Teichm¨uller 空间是一个拓扑群。此外，得益于 S. Vodopyanov、S. Nag 和 D. Sullivan 的一个定理，我们可以将普遍 Teichm¨uller 空间忠实地表示为单位圆 Sobolev $H^{1/2}$space 上的有界辛同胚。

本文旨在综述其中一些进展，并为新的魏尔-彼得森解析理论提供路线图。由于这套理论尚属新兴，我们着重于文献综述，而非尽可能迅速地介绍相关结果。全文着重说明新的几何与代数定理如何推动解析理论的发展[3]。

最重要的是，魏尔-彼得森理论使无限共形型模空间的 K¨ahler 几何成为可能，从而也加深了我们对几何、分析、表示论和物理学的理解。

要研究 K¨ahler 几何，就需要一个复流形，因此，魏尔-彼得森 Teichm¨üller 理论的发展，很大程度上都围绕着证明各种复结构的存在性与相容性展开。我们尤其概述了关于三种复结构的研究成果：两种分别由 Bers 嵌入和调和贝尔特拉米微分得到的经典复结构的类似结构，以及第三种复结构。从某种意义上说，第三种复结构是对 Bers思想的改造，其动机来自二维共形场论。第四种复结构则源于对经典周期映射的推广。

当然，研究 Teichmüller 理论中的复结构由来已久。无论从哪个角度来看，这些结果都显得如此自然，令人惊叹。事实上，人们会觉得，许多结果，例如广义周期映射及其几何，一百年前就足以引起数学家的兴趣。

致谢。我们感谢 Yi-Zhi Huang 与我们进行了许多宝贵的讨论，并鼓励我们开展关于模空间的研究；当然，也感谢 David Radnell，他是我们许多工作的合作伙伴。

1.3. 概述。我们力求如实介绍无限维魏尔-彼得森理论的发展历程。据我们所知，至今尚无此类综述。该领域始于20世纪80年代，但在21世纪初取得了一些奠基性成果之后，才开始蓬勃发展。如今成果不断涌现，毫无疑问，等本文发表时还会有新的进展。

只要可能，我们当然会尽量采用熟悉的记号，但遗憾的是，教科书和论文中的记号差异很大。为了保持内容易于理解，我们

[3]但反过来也同样成立——分析推动了几何和代数的发展。5

不得不保持记号一致，因此无法遵循各位作者的不同选择。毋庸置疑，所有定理在记号变换下均保持不变。

第2节确立记号并介绍基本定义。由于本文很大一部分内容涉及魏尔-彼得森 Teichm¨üller 空间上复结构的存在性与等价性，为了做好铺垫，我们在第3节和第4节回顾通常 Teichm¨üller 空间的三种模型，并介绍与之相关的复结构构造。其中两种是经典模型，分别由 Bers 嵌入和调和贝尔特拉米微分给出。第三种是 D. Radnell 和 E. Schippers 提出的纤维模型 [72]，其灵感来自共形场论。该模型用于若干构造，并与魏尔-彼得森 Teichm¨üller 理论的一些应用有关。本节最后概述经典 L^∞ Teichm¨üller 理论与 L^2 魏尔-彼得森 Teichm¨üller 理论之间的差异。

第5节概述 G. Cui 和 L.A. Takhtajan-L.P. Teo 关于魏尔-彼得森万有 Teichm¨üller 空间的主要结果。第6节介绍极化，以及将周期映射推广到西格尔圆盘的相关内容。鉴于这些内容在魏尔-彼得森理论的形成动机中十分重要，我们也简述其历史。为求完备性，第7节简要概述 Teichm¨üller 空间的其他一些拓展。第8节概述 M. Yanagishita 和 Radnell-Schippers-Staubach 关于一般曲面的魏尔-彼得森理论。

第 9 节给出了关于魏尔-彼得森度量的 K¨ähler 理论和整体分析的结果。第 10 节简要介绍了该理论在物理学、流体力学和随机勒夫纳演化中的一些应用。

2. Preliminaries

¯2.1. 曲面、边界与提升。令 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示复平面和黎曼球面。令 $\mathbb{D}_+ = \{z\colon |z| < 1\}$ 和 $\mathbb{D}_- = \{z\colon |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ 分别表示以 0 和 ∞ 为中心的单位圆盘。我们用 $\mathbb{S}^1$ 表示圆盘的边界，并假设其相对于 $\mathbb{D}_+$正向定向。

本文主要考虑万有覆盖为圆盘的黎曼曲面 Σ，即 $\Sigma = \mathbb{D}_-/G$，其中 G 是福克斯群（此处商映射是覆盖映射，因此我们不允许福克斯群有不动点）。

作用于 $\mathbb{D}_+$ 或 $\mathbb{D}_-$ 上的福克斯群 G 的极限集，要么是整个边界$\mathbb{S}^1$，要么是 $\mathbb{S}^1$中的一个处处稀疏子集；在后一种情况下，称其为第一类或第二类。本文将研究由第二类福克斯群生成的曲面。这些曲面是带边黎曼曲面（见 [49, 3]）。若 $\Sigma \cong \mathbb{D}_-/G$ 是一个第二类福克斯群G，并令 B 为 G 在 $\mathbb{S}^1$中极限集的补集，则$\mathbb{D}_-/G \cup B/G$ 是一个带边黎曼曲面，其中 $\mathbb{D}_-/G \cong \Sigma$ 和 B/G 为边界。因此，每当我们提到带边黎曼曲面时，指的都是以这种方式精确得到的曲面。

这样的曲面还有一个双曲面 Σ^*相识别。它具有一个反全纯对合

$$i : \Sigma^d \to \Sigma^d$$

它将 Σ 映射到 Σ^*，反之亦然，并保持边界不变。

亏格为 g 、边界有 n 个连通分支且每个连通分支都同胚于 $\mathbb{S}^1$的曲面，称为类型 (g, n) 带边曲面。使用这一术语时，我们总是假设$n \geq 1$ 。对于这类曲面，其双曲面是亏格为 $2g + n - 1$的紧黎曼曲面，边界 B/G 则可自然地视为双曲面中的一条解析曲线 $\partial\Sigma = \partial\Sigma^*$ 。

2.2. 微分。给定黎曼曲面 Σ， Σ 上的 (r, s)-微分，即 $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，是在局部坐标下由 $h(z)\, dz^r \odot d\bar{z}^s$ 给出的量，它在全纯坐标变换 $z = g(w)$ 下按如下方式变换

$$h(z)\, dz^r \odot d\bar{z}^s = \tilde{h}(w)\, dw^r \odot d\bar{w}^s, \qquad \tilde{h}(w) = h(g(w))g'(w)^r\overline{g'(w)}^s.$$

这里 $\odot$ 表示对称张量积。我们将 Σ 上可测的 (r, s)-微分空间记作 $\mathscr{D}_{r,s}(\Sigma)$。在需要时再施加正则性条件。按照惯例，我们将局部坐标形式写作

$$h(z)dz^r d\bar{z}^s.$$

例如，二次微分是 $(2, 0)$-微分，而贝尔特拉米微分是 $(-1, 1)$ 微分。容易看出，微分的乘积定义良好，并且 (r_1, s_1)-微分与 (r_2, s_2)-微分的乘积是 $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$-微分。

Σ 上的双曲度量可视为一个 (1,1)-微分，我们将其记为ρ_Σ，通常局部写作

$$\rho_\Sigma = h(z)|dz|^2$$

其中 $h(z)$ 是一个严格正函数。这里必须记住， $|dz|^2$ 表示$dz \odot d\bar{z}$。例如， $\mathbb{D}_+$ 上的双曲度量和 $\mathbb{D}_-$ 分别为

$$\rho_{\mathbb{D}_+} = \frac{d\bar{z} \odot dz}{(1 - |z|)^2}, \quad \rho_{\mathbb{D}_-} = \frac{d\bar{z} \odot dz}{(|z|^2 - 1)^2}$$

res别地。该度量诱导的双曲面积测度局部表示为

$$dA_{\text{hyp}} = h(z)\frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i}$$

有些资料也将其写作 $h(z)|dz|^2$。

线元 $\lambda_\Sigma = \sqrt{h(z)}|dz|$ 是一个方便的对象，它在坐标变换 $z = g(w)$ 下按密度 $\sqrt{h(z)}$ $|dz| = \sqrt{h(g(w))}|g'(w)||dw|$ 变换。该密度可用于构造一个不变的 L^2 范数和 L^∞ 范数。

对于 $\alpha \in \mathscr{D}_{r,s}(\Sigma)$，其局部表示为 $g(z)\, dz^r d\bar{z}^s$，容易验证 $|\alpha/\lambda_\Sigma^{r+s}|$ 是一个定义良好的全局函数，与局部表达式 $\sqrt{h(z)}^{-r-s}|g(z)|$ 一致。记其本性上确界为 $\|\alpha\|_\infty$。于是我们记

$$L^\infty_{r,s}(\Sigma) = \{\alpha \in \mathscr{D}_{r,s}(\Sigma) : \|\alpha\|_\infty < \infty\}$$

同理，我们得到 L^2 范数

$$\|\alpha\|_2 = \iint_\Sigma |\alpha|^2 \lambda^{-2r-2s} dA_{\text{hyp}}$$

以及其在 L^2 微分上的相应厄米内积，并记为 e

$$L^2_{r,s}(\Sigma) = \{\alpha \in \mathscr{D}_{r,s}(\Sigma) : \|\alpha\|_2 < \infty\}.$$

例如

$$L^2_{-1,1}(\mathbb{D}_-) := \left\{\mu \in \mathscr{D}_{-1,1}(\mathbb{D}_-) \,:\, \iint_{\mathbb{D}_-} \frac{|\mu(z)|^2}{(|z|^2-1)^2} d\mathrm{A}_z < \infty\right\}$$

其中 $d\mathrm{A}_z$ 表示欧几里得面积测度。

若 $\Sigma = \mathbb{D}_\pm/G$ where G 是一个福克斯群，则任意 (r,s)-微分 α 都有唯一的提升 $\hat{}\alpha = a(z)\,dz^r d\bar{z}^s$ 到 $\mathbb{D}_\pm$，并满足不变性

$$a \circ g \cdot (g')^r \cdot (\overline{g'})^s = a \quad \text{for all} \quad g \in G. \tag{2.1}$$

用 $L^\infty_{r,s}(\mathbb{D}_\pm, G)$ 和 $L^2_{r,s}(\mathbb{D}_\pm, G)$ 分别表示在基本域 $D \subset \mathbb{D}_\pm$ 上满足式 (2.1) 意义下的不变性，且分别为 L^∞ 和 L^2 的微分空间。注意，由于不变性，$L^\infty_{r,s}(\mathbb{D}_\pm)$ 中的元素在 $\mathbb{D}_\pm$ 上本质有界。另一方面，$L^2_{r,s}(\mathbb{D}_\pm, G)$ 中的元素不一定属于 $L^2_{r,s}(\mathbb{D}_\pm)$。

于是我们得到一个自然同构（由覆盖映射直接诱导

$$\begin{aligned} L^\infty_{r,s}(\Sigma) &\cong L^\infty_{r,s}(\mathbb{D}_-, G) \\ L^2_{r,s}(\Sigma) &\cong L^2_{r,s}(\mathbb{D}_-, G) \end{aligned} \tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned} L^\infty_{r,s}(\Sigma^*) &\cong L^\infty_{r,s}(\mathbb{D}_+, G) \\ L^2_{r,s}(\Sigma^*) &\cong L^2_{r,s}(\mathbb{D}_+, G) \end{aligned} \tag{2.3}$$

注 2.1。我们遵循这样的约定：Σ 被 $\mathbb{D}_-$ 覆盖，而其双曲面 Σ^* 被 $\mathbb{D}_+$覆盖。

范数和内积具有共形不变性，它们向 L^p 空间的直接推广也同样如此。这些范数在复分析、Teichm¨uller 理论和数论中广泛使用，并采用各种不同的名称和记号。

最后，我们将使用记号 $A^\infty_r(\Sigma)$ 和 $A^2_r(\Sigma)$，分别表示 $L^\infty_{r,0}(\Sigma)$ 和 $L^2_{r,0}(\Sigma)$ 的全纯元素子空间。例如

$$A^\infty_2(\mathbb{D}_+) = \left\{Q(z)dz^2 \;\text{ holomorphic on } \mathbb{D}_+ \,:\, \sup_{z\in\mathbb{D}_+}(1-|z|^2)^2|Q(z)| < \infty\right\}$$

这是大家熟悉的 Nehari有界二次微分空间。此外

$$A^2_2(\mathbb{D}_+) := \left\{Q(z)dz^2 \;\text{ holomorphic on } \mathbb{D}_+ \,:\, \iint_{\mathbb{D}_+}(1-|z|^2)^2|Q(z)|^2 d\mathrm{A}_z < \infty\right\}$$

将在魏尔-彼得森理论中发挥重要作用。

2.3. 变形：拟共形映射与拟对称映射。黎曼曲面之间的拟共形映射 $f\colon\ \Sigma_1 \to \Sigma_2$ （有时缩写为 $f \in \mathrm{QC}(\Sigma_1, \Sigma_2)$），是满足以下条件的保定向同胚，即（$-1, 1$）-微分 $\mu(f) = \overline{\partial} f / \partial f$满足

$$\|\mu(f)\|_\infty < 1.$$

将 $L^\infty_{-1,1}(\Sigma)$ 中的单位球记为 $L^\infty_{-1,1}(\Sigma)_1$。拟共形映射是黎曼曲面的典型形变，它不保持复结构。

称 h of $\mathbb{S}^1$ 为拟对称映射，当且仅当存在常数 $k > 0$，使得对于任意 α 以及任意不等于 2π 的倍数的 β，不等式

$$\frac{1}{k} \le \left| \frac{h(e^{i(\alpha+\beta)}) - h(e^{i\alpha})}{h(e^{i\alpha}) - h(e^{i(\alpha-\beta)})} \right| \le k$$

成立。令 $\mathrm{QS}(\mathbb{S}^1)$ 表示从 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{S}^1$的拟对称映射集合。每个拟共形映射 $\Phi\colon\ \mathbb{D}_- \to \mathbb{D}_-$ 都可连续延拓至 $\mathbb{S}^1$，且该延拓是拟对称映射。反过来，每个拟对称映射都是某个（高度不唯一的）拟共形映射的边界值。令 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$ 表示保持圆及其定向的 M¨obius 变换。

设 Σ 是一个黎曼曲面，其边界与 $\mathbb{S}^1$ 同胚，记为 C。那么存在一个双全纯映射 $\psi\colon\ A \to \mathbb{A}_r$，其中 A 是 Σ 中的一个双连通区域，其一侧由 C 限定，另一侧由 $\mathbb{A}_r = \{z$ 限定：$r < |z| < 1\}$ 是平面中的一个圆环。根据 Carath´eodory 定理，ψ 可连续延拓为从 C 到 $\mathbb{A}_r$ 的一条边界曲线的同胚映射，我们设该边界曲线为 $\mathbb{S}^1$。

定义 2.2. 若映射 $\phi\colon\ C \to C_1$ 满足：对于 $\psi_1 \circ \phi \circ \psi^{-1}$ 和 $\mathbb{S}^1$，存在 ψ_1 和 ψ 的某种领圈图选择，使得 C_1 与 C 是拟对称映射，则称 ϕ 为拟对称映射。此类映射的集合记为 $\mathrm{QS}(C, C_1)$。

给定两个类型为 (g, n) 的带边黎曼曲面 Σ、Σ_1，令 $\mathrm{QS}(\partial\Sigma, \partial\Sigma_1)$ 表示满足以下条件的双射 ϕ: $\partial\Sigma \to \partial\Sigma_1$：将 ϕ 限制在每个连通分支上，所得映射均为上述意义下的拟对称映射。

不难证明，如果对于一组选定的领圈图 ψ_1 和 ψ，$\psi_1 \circ \phi \circ \psi^{-1}$ 是拟对称映射，那么对于所有选择，它都是拟对称映射。

3. Three models of Teichmüller space

本节介绍 Teichm¨uller 空间的三种模型：以曲面本身的拟共形变形来描述；以镜像上的保形变形来描述；以及以“帽”的保形变形来描述。前两种图景是经典的，最后一种则源自共形场论。该模型与 Teichm¨uller 理论之间的联系归功于 Radnell-Schippers。

在这些模型中，Teichm¨uller 空间既可以直接在曲面本身上描述，也可以用覆盖空间上在福克斯群作用下保持不变的对象来描述。我们分别将其称为直接图景和提升图景。

3.1. Teichm¨uller 空间的定义。在直接图景中，我们固定一个黎曼曲面Σ，它由第二类福克斯群通过圆盘覆盖。令 $\partial\Sigma$ 表示边界（可能为空）。

定义 3.1（Teichm¨uller 等价）。给定两个拟共形映射 $F_1:\ \Sigma\to\Sigma_1$和 $F_2:\ \Sigma\to\Sigma_2$，若存在一个双全纯映射 $\sigma:\ \Sigma_1\to\Sigma_2$，使得 $F_2^{-1}\circ\sigma\circ F_1$ 与恒等映射相对边界同伦，则称（Σ, F_1, Σ_1）和（Σ, F_2, Σ_2）Teichm¨uller 等价。这里，相对边界同伦是指 $F_2^{-1}\circ\sigma\circ F_1$ 在边界上为单位元，并且在整个同伦过程中都成立。

Teichm¨uller 空间定义为

$$T(\Sigma)=\{(\Sigma,F_1,\Sigma_1)\}/\sim$$

其中 $\sim$是 Teichm¨uller 等价关系。给定一个代表元（Σ, F_1, Σ_1），微分$\overline{\partial}F_1/\partial F_1$ 属于 $L^\infty_{-1,\ 1}(\Sigma)_1$。将等价关系转移到$L^\infty_{-1,\ 1}(\Sigma)_1$ 上，我们得到

$$T(\Sigma)\cong L^\infty_{-1,1}(\Sigma)_1/\sim.$$

在提升模型中，假设 $\Sigma=\mathbb{D}_-/G$ 其中 G 是第二类福克斯群。 F_1、$F_2:\ \Sigma\to\Sigma$ 相对于边界同伦，当且仅当适当规范化的提升 w_1、w_2 在 $\mathbb{S}^1$ [49]上分别提升到 $\mathbb{D}_-$、$w_1=w_2$。由此得到 Teichmüller 空间的以下等价定义。

定理3.2。Teichmüller 空间 $T(\Sigma)$ 与以下集合一一对应：

$$T(G):=\{w\in\mathrm{QC}(\mathbb{D}_-,\mathbb{D}_-):w\ \textit{fixes}\ -1,\ i,\ 1,\ w\circ g\circ w^{-1}\in\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)\ \forall\ g\in G\}/\sim$$

$$\textit{where}\ w_1\sim w_2\ \textit{if}\ w_1=w_2\ \textit{on}\ \mathbb{S}^1.$$

由 (2.2) 可得

$$T(G)\cong L^\infty(\mathbb{D}_-,G)/\sim.$$

注意，我们可以将 $T(\mathbb{D}_-)$ 与 $T(\{1\})$ 等同起来。

此外，还有一种重要的变体，称为拟福克斯模型，它源自所谓的 Bers技巧（见后文第 3.2 小节）；此处不作讨论。

Teichmüller 空间具有由 Teichmüller 度量诱导的拓扑。回顾，给定 $T(\Sigma)$ 中的点 p_1 和 p_2，Teichmüller 度量定义为

$$d_{T(\Sigma)}(p_1,p_2)=\inf\operatorname{arctanh}\|\mu_{F_2\circ F_1^{-1}}\|_\infty. \tag{3.1}$$

wher下确界取遍所有代表 $[\Sigma,F_k,\Sigma_k]$ 中属于 p_k 的 $k=1,\ 2$.

这也可以用提升图景来表述。

为便于后续使用，我们在此定义模群。令 $Q(\Sigma):=\mathrm{QC}(\Sigma,\Sigma)$ 和 $Q_0(\Sigma)$ 表示 $Q(\Sigma)$ 中与边界相对且与恒等映射同伦的子集。这是关于复合的一个正规子群。Teichm¨uller 模群是商

$$\mathrm{Mod}(\Sigma)=Q(\Sigma)/Q_0(\Sigma)$$

它通过以下方式反作用于 Teichm¨uller 空间：

$$[\rho][\Sigma,F,\Sigma_1]\mapsto[\Sigma,F\circ\rho,\Sigma_1].$$

众所周知，黎曼模空间可以认作 $T(\Sigma)/\mathrm{Mod}(\Sigma)$。

以下模群的子群将在后文中发挥重要作用。ModI(Σ)由Mod(Σ)中那些代表元在

边界上为单位元的等价类组成。这个群由两类拟共形映射生成。同伦的一组基可写为 $\partial_1\Sigma$, $\ldots, \partial_n\Sigma, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$，其中 $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ 是通过缝合圆帽而得到的亏格为 g的紧曲面的同伦基。因此，ModI(Σ)由绕这些曲线的整数扭转生成。由绕 $\partial_1\Sigma, \ldots, \partial_n\Sigma$ 的整数扭转生成的群记为DB(Σ)。由绕非平凡简单闭内部曲线 $a_1, \ldots, b_g$的整数扭转生成的群记为DI(Σ)。

根据 Teichm¨uller 等价关系，拟共形变形中存在大量冗余。哪些贝尔特拉米微分是“本质的”? 对于一般曲面，这个问题没有全局答案，但有局部答案。给定一个黎曼曲面 Σ, 定义

$$\Omega_{-1,1}(\Sigma) = \{\mu \in \mathscr{D}_{-1,1}(\Sigma) \,:\, \rho_\Sigma\mu \in \overline{A_2^\infty(\Sigma).}\} \tag{3.2}$$

或者，在提升图景中,

$$\Omega_{-1,1}(\mathbb{D}_-, G) = \{\mu \in \mathscr{D}_{-1,1}(\mathbb{D}_-) \,:\, \rho_\Sigma\mu \in \overline{A_2^\infty(\mathbb{D}_-, G).}\}$$

这些微分在单位元处横截于 Teichm¨uller 等价关系。一个足够小的球仍包含在 Teichm¨uller 空间内。这构成了复结构和切空间变形模型的基础，后文将对此进行说明。

3.2. Bers 嵌入模型。该模型的基本思想源自所谓的 Bers技巧。给定一个黎曼曲面，与其将拟共形映射反射到双曲面上，不如将贝尔特拉米微分延拓为零，从而得到一个定义在共轭曲面上的共形映射。考察这些共形映射的 Schwarzian 导数，我们便得到一个以共轭曲面上的二次微分表示 Teichm¨uller 空间的模型。

给定任意拟共形映射 $F\colon \Sigma \to \Sigma_1$，令

$$\mu = \frac{\overline{\partial}F}{\partial F}$$

为其贝尔特拉米微分。Bers技巧是将 μ 以零延拓到双曲面 Σ^d，也就是说

$$\mu^d(z) = \begin{cases} \mu & z \in \Sigma \\ 0 & z \in \Sigma^*. \end{cases}$$

在 Σ^d 上求解贝尔特拉米方程，可得到一个拟共形映射

$$F^d : \Sigma^d \to \Sigma_1^d \tag{3.3}$$

其中 $F^d\big|_{\Sigma^*}$ 是共形的。

为关联一个二次微分，将 Σ 表示为福克斯群 G 的商 $\mathbb{D}_-/G$，并令 $F_l\colon \mathbb{D}_+ \to \bar{\mathbb{C}}$ 为 F^d 的一个提升。Schwarz导数

$$\mathcal{S}(F_l)\, dz^2 := \left(\frac{F_l'''}{F_l'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F_l''}{F_l'}\right)^2\right) dz^2$$

属于 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+, G)$，因此定义了 $A_2^\infty(\Sigma^*)$ 中的一个良定义元素。由此得到的映射

$$\beta : T(\Sigma) \to A_2^\infty(\Sigma^*)$$

称为 Bers嵌入。Bers嵌入取决于基曲面 Σ。需要强调这一点时，我们将写作 β_Σ；当 $\Sigma \cong \mathbb{D}_-/G$ 时，在提升图景中写作 β_G。

Bers嵌入的重要性源于以下事实

定理 3.3. β 定义良好且是单射。

3.3. 帽纤维模型。本节考察亏格为 g 、具有 n 个边界且同胚于 $\mathbb{S}^1$ 的带边曲面；回顾一下，我们将这类曲面称为类型（g, n）带边曲面。D. Radnell 和第一作者证明，这类曲面的 Teichm¨uller 空间纤维化于具有 n 个穿孔的紧曲面的 Teichm¨uller 空间之上，而其纤维可以辨识为映入曲面 [72] 的共形映射的若干个 n 元组。这一思想受到共形场论的启发（见后文第 10.1 节）。这一纤维化出现在一般魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间的一种模型中，也与魏尔-彼得森理论的一些物理学动机有关。

其思想如下。给定一个类型（g, n）的黎曼曲面 Σ，我们不再缝合共轭曲面 Σ^* 以得到双曲面 Σ^d，而是在每条边界曲线上缝合一个穿孔圆盘，从而得到一个具有 n 个穿孔的紧曲面 Σ^P 。我们不再像在 Bers嵌入中那样考虑 Σ^* 的共形映射，而是考虑缝合圆盘的共形映射。我们将看到，Teichm¨uller 空间 T（Σ）中的变化由 T（Σ^P）中的变化，以及通过改变这些共形映射而得到的变化张成（等价地说，即改变 Σ 的拟共形变形的边界值）。

纤维在局部上可由以下空间的幂建模:

$$\mathcal{O}^{\mathrm{qc}} = \{f : \mathbb{D}_+ \to \mathbb{C} : f \text{ holomorphic and quasiconformally extendible}\}.$$

接下来我们考 虑映入黎曼曲面的 n 元组可拟共形延拓映射 e

定义 3.4. 设 Σ^P 是亏格为 g 且有 n 个穿孔 p_1, ..., p_n 的紧黎曼曲面。类 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 是由满足下列条件的映射 n 元组 $(f_1, \ldots, f_n)$ 构成的集合:

(1) 对于 $k = 1, \ldots, n$, $f_k : \mathbb{D}_+ \to \Sigma^P$ 是全纯的，并可拟共形延拓至 $\mathbb{D}_+$ 的闭包的一个开邻域；(2) 对于 $k = 1, \ldots, n$, $f_k(0) = p_k$；(3) $f_k(\mathbb{D}_+)$ 的闭包两两不相交。

为了构造 $T(\Sigma)$ 到 $T(\Sigma^P)$ 的纤维化，我们缝合上穿孔圆盘（“帽”）的副本。固定一个类型为 (g, n) 的带边曲面 Σ，以及拟对称参数化 $\tau_k : \mathbb{S}^1 \to \partial_k\Sigma$（ $k = 1, \ldots, n$）。如果需要，这些参数化也可以选为解析的。我们缝合上 n 个圆盘 $\mathbb{D}_+$ 的副本，将 $p \in \mathbb{S}^1$ 与 $\tau(p) \in \partial_k\Sigma$ 识别。所得紧曲面 Σ^P 的复结构是唯一一个与 $\mathscr{R}$ 及 $\mathbb{D}_+$ 的副本相容的复结构。随后，参数化 τ_k 延拓为共形映射 $\mathbb{D}_+ \to \Sigma^P$ （即映入缝合后曲面的包含映射），并指定穿孔 $p_k = \tau_k(0)$（ $k = 1, \ldots, n$）。

现定义从 $T(\Sigma)$ 到 $T(\Sigma^P)$ 的纤维映射如下，假设 $2g-2+n > 0$。给定 $[\Sigma, F, \Sigma_1] \in T(\Sigma)$, 令 $\hat{F}$: $\Sigma^P \to \Sigma_1^P$ 为一个拟共形映射，使得

$$\frac{\overline{\partial}\hat{F}(z)}{\partial\hat{F}(z)} = \begin{cases} \overline{\partial}F(z)/\partial F(z) & z \in \Sigma \\ 0 & z \in \tau_k(\mathbb{D}_+) \end{cases}$$

定义

$$\mathcal{C} : T(\Sigma) \to T(\Sigma^P)$$
$$[\Sigma, F, \Sigma_1] \mapsto [\Sigma^P, \hat{F}, \Sigma_1^P]. \tag{3.4}$$

注意， $\mathcal{C}$取决于 τ_1、……、 τ_n。稍后我们将看到， $\mathcal{C}$是全纯的。

ˆ 注记3.5. 可以将 F 的定义看作对“Bers技巧”的一种自然变体。ˆ ˆ 也就是说， F所起的作用与(3.3)相同。区别在于，对于 F，要缝上帽；而对于 F^d，则要缝上双曲面。

固定任意一个 $q = [\Sigma^P, F, \Sigma_1^P]$。在DB的作用下， $\mathcal{C}$的纤维可与$\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma_1^P)$等同。具体而言， $f = (f_1、……、 f_n) \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma_1^P)$，令 Σ_1由去掉圆盘$f_k(\mathbb{D}_+)$得到。令

$$F_f' : \Sigma^P \to \Sigma_1^P$$

是一个与 $F|_\Sigma$ 同伦且满足 $F \circ \tau_k = f_k$的拟共形映射。（可以证明这样的映射存在 [72]。）令

$$F_f = F_f'\big|_\Sigma : \Sigma \to \Sigma_1 \tag{3.5}$$

那么， $[\Sigma, F, \Sigma_1]$ 属于纤维 $\mathcal{C}^{-1}(q)$，且任意两个这样的元素都由模群 DB 中的一个元素联系起来。于是我们定义

$$\mathbf{F}_q : \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma_1^P) \to \mathcal{C}^{-1}(q)/\mathrm{DB}$$
$$f \mapsto [\Sigma, F_f, \Sigma_1]. \tag{3.6}$$

定理3.6（[72]）。设 Σ 是类型为(g, n)且具有 $2g - 2 + n > 0$的带边曲面，并设$\mathcal{C}$、$\mathbf{F}_q$等如上所述。对于任意点 $q = [\Sigma^P, F, \Sigma_1^P] \in T(\Sigma^P)$，$\mathbf{F}_q$是一个双射。

注 3.7。由于我们假设 $n \geq 1$，限制条件 $2g - 2 + n > 0$ 仅排除了以下两种情况： $g = 0$、$n = 1$ （圆盘）和 $g = 0$、 $n = 2$ （圆环）。这些情况比较特殊，因为缝合上圆盘后，所得带 puncture 曲面（分别为一次和两次 puncture 球面）的 Teichm¨uller 空间都退化为一个点。因此，必须对纤维模型稍作调整。

第一种情形就是圆盘，上述构造归结为通用 Teichm¨üller 空间的一种标准模型（参见注记3.5）。具体而言，令 $\Sigma^P = \bar{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$,¯，我们有 $T(\mathbb{D}_-) \cong \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\mathbb{C}\backslash\{0\})/G$，其中 G 是固定 0 的莫比乌斯变换（等价地，¯还可以对 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$进行两次进一步的规范化）。

在圆环 $\mathbb{A}$ 的情形中也出现类似的纤维模型；经过一次进一步的规范化，可以将 $T(\mathbb{A})/\mathbb{Z}$ 与¯个 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\mathbb{C}\backslash\{0, \infty\})$ 的元素对应起来。这称为 Neretin-Segal 半群，参见 [73]。

3.4. 右平移与基点变换。拟共形映射 $F_\mu : \Sigma \to \Sigma_\mu$在 Teichm¨uller 空间 $T(\Sigma)$ 与 $T(\Sigma_\mu)$ 之间诱导一个双射。这里我们遵循一种常见的记号约定，将 F 的贝尔特拉米微分同时用作标签。具体而言，我们有

$$\mathrm{R}_{F_\mu^{-1}} : T(\Sigma) \to T(\Sigma_\mu)$$
$$[\Sigma, F, \Sigma_1] \mapsto [\Sigma_\mu, F \circ F_\mu^{-1}, \Sigma_1].$$

在提升图景中，基点变换具有如下形式。给定一个固定 -1、i 和 1 的拟共形映射 w_μ：$\mathbb{D}_- \to \mathbb{D}_-$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{w_\mu^{-1}} : T(G) &\to T(G_\mu) \\ [w] &\mapsto [w \circ w_\mu^{-1}]. \end{aligned}$$

这里，

$$G_\mu = \{w_\mu \circ g \circ w_\mu^{-1} : g \in G\}. \tag{3.7}$$

$w_\mu \circ g \circ w_\mu^{-1}$的贝尔特拉米微分为零；因此它属于 M¨ob($\mathbb{S}^1$)，并且与代表元 μ 无关。基点的改变是一个同胚；事实上，引入复结构后，它是一个双全纯映射。

4. Complex manifold and tangent space structure

4.1. L^∞ 理论概要。

4.1.1. Bers嵌入。Bers嵌入的性质经过多年的研究，最终被理解为到一个开集上的同胚。概括而言，

定理4.1。 β 的像是 $A_2^\infty(\Sigma^*)$ 中的一个开集。此外，β 是从 $T(\Sigma)$（带有由 Teichm¨uller 距离诱导的拓扑）到其像上的一个同胚。

换言之，Teichm¨uller 空间中的每个元素都可以由 Σ^* 上唯一的二次微分表示（等价地，由 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+, G)$ 中唯一的二次微分表示）。由于像是开集，且 $A_2^\infty(\Sigma^*)$ 是一个巴拿赫空间，这使得 $T(\Sigma)$ 成为一个带有全局坐标的复巴拿赫流形。

Let

$$\Phi : L^\infty_{-1,1}(\Sigma)_1 \to T(\Sigma)$$

表示通过求解贝尔特拉米方程得到的映射。此映射取决于基曲面 Σ；需要强调这一点时，我们将记作 Φ_Σ，或在 $\Sigma = \mathbb{D}_-/G$ 时于提升图景中记作 Φ_G。

我们将看到，Φ 是一个下沉映射，也就是说，它具有局部全纯截面。

定理4.2。映射 $\beta \circ \Phi$ 是一个全纯下沉映射。

这实际上正是变形模型的根本所在。

4.1.2. 变形模型。变形模型中的复结构更为复杂，因为贝尔特拉米微分包含冗余信息，而 Teichmüller 等价关系会将其消除。我们将在后文第4.2节对切空间的描述中看到这一点。

经典方法的核心是 Ahlfors-Weill 反射。这种反射的抽象几何定义十分简单：

$$\begin{aligned} \Lambda_\Sigma : A_2^\infty(\Sigma^*) &\to L^\infty_{-1,1}(\Sigma) \\ \alpha &\mapsto -\frac{1}{2}\rho_\Sigma^{-1} i^* \alpha. \end{aligned} \tag{4.1}$$

在提升图景中，利用 i 的提升是映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 这一事实，可以将其明确写成如下形式：

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbb{D}_-} : A_2^\infty(\mathbb{D}_+) &\to L^\infty_{-1,1}(\mathbb{D}_-) \\ Q(z)dz^2 &\mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{\bar{z}^4}\frac{Q(1/\bar{z})}{(|z|^2-1)^2}\frac{d\bar{z}}{dz}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

容易验证， $\Lambda_{\mathbb{D}_-}$ 保持 G-不变性。因此我们可以定义 e

$$\Lambda_G = \Lambda_{\mathbb{D}_-}\big|_{A_2(\mathbb{D}_+,G)} : A_2^\infty(\mathbb{D}_+, G) \to L^\infty_{-1,1}(\mathbb{D}_-, G)$$

使得当 Σ 为 $\mathbb{D}_-/G$ 时， Λ_G 是 Λ_Σ 的提升。

回顾调和贝尔特拉米微分的定义 (3.2)，我们有 e

$$\begin{aligned} \Omega_{-1,1}(\Sigma) &= \Lambda(A_2^\infty(\Sigma^*)) \\ \Omega_{-1,1}(\mathbb{D}_-; G) &= \Lambda(A_2^\infty(\mathbb{D}_+; G)). \end{aligned}$$

另一种以贝尔特拉米微分表示复结构的方式如下。令

$$\Phi_\Sigma : L^\infty_{-1,1}(\Sigma) \to T(\Sigma)$$

表示通过求解贝尔特拉米方程（等价地，按 Teichm¨uller 等价关系取商）得到的映射。将提升后的映射记为 Φ_G。Ahlfors-Weill 映射是 Bers 嵌入在零点附近的局部逆映射；也就是说，存在一个包含零点的开邻域 $U_\Sigma \subseteq A_2^\infty(\Sigma^*)$（事实上，是以零点为中心、半径为 2 的球），使得 $\beta_\Sigma\Phi_\Sigma\Lambda_\Sigma =$ 在 U_Σ 上等于 Id。类似地， $\Phi_G\Lambda_G$ 是 β_G 在 $A_2^\infty(\Sigma)$ 中开集 U_G 上的局部逆映射。结合平移映射，我们得到一个复图册。

定理 4.3。设 F_μ： $\Sigma \to \Sigma_\mu$。开集 $R_{F_\mu}\Phi_{\Sigma_\mu}\Lambda_{\Sigma_\mu}(U_{\Sigma_\mu})$、 $\subset T(\Sigma)$ 以及坐标图$\beta_{\Sigma_\mu}R_{F_\mu^{-1}}$构成 $T(\Sigma)$ 的一个复图册。

在提升图景中，开集 $R_{w_\mu}\Phi_G\Lambda_{G_\mu}(U_{G_\mu})$ 和坐标图 $\beta_{G_\mu}R_{w_\mu^{-1}}$构成 $T(G)$ 的一个复图册。

换句话说，我们可以利用 $\Phi_{\Sigma_\mu}\Lambda_{\Sigma_\mu}$ 是一个双全纯映射这一事实，在 $[\Sigma, F_\mu, \Sigma_\mu]$ 附近得到一个坐标图。

定理 4.4。设 Σ 是一个由圆盘覆盖的黎曼曲面。

(1) 这两个复结构相容。特别地，Bers嵌入是到其像上的双全纯映射，其中采用的是 $T(\Sigma)$ 上由坐标图诱导的复结构。(2) $\beta\Phi$ 是一个全纯淹没。特别地， $L^\infty_{-1,}$ 的复结构与 $T(\Sigma)$ 的复结构相容。(3) 基点变换是一个双全纯映射。 $_1(\Sigma)$

4.1.3. 纤维模型。这里我们概述经典 L^∞ Teichm¨uller 理论中关于全纯纤维化的基本结果。

共形映射的局部模型为

$$\mathcal{O}^{\mathrm{qc}} = \{f : \mathbb{D}_+ \to \mathbb{C} : f \text{ holomorphic and quasiconformally extendible}\}.$$

根据经典函数论可得

$$\chi : \mathcal{O}^{\mathrm{qc}} \mapsto A_1^\infty(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \left(\frac{f''}{f'}\, dz, f'(0) \right),$$

相对于直和范数 $|f'(0)| + \|f''/f'\, dz\|_\infty$ 有界。此外，其像是开集（见 [71]），因此 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}$ 是一个复巴拿赫流形。

我们按如下方式在 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 中构造一个坐标图。令 $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ 为坐标ζ_k： $B_k \to \mathbb{C}$，对应于 p_k 中的 $k = 1, \ldots, n$。令 $K = (K_1, \ldots, K_n)$ 为 B_k 中的紧集，其内部是包含 p_k 的开集。定义

$$V_{\zeta,K} = \{ f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P) : \mathrm{cl}(\, f_k(\mathbb{D}_+)) \subset K_k, k = 1, \ldots, n \}. \tag{4.3}$$

然后我们定义坐标

$$\mathcal{E} : V_{\zeta,K} \to (\mathcal{O}^{\mathrm{qc}})^n$$
$$f \mapsto \zeta \circ f. \tag{4.4}$$

利用坐标 $\chi^n \circ \mathcal{E}$，我们得到如下结论。

定理 4.5（[71]）。 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 是一个局部模型为 $\bigoplus^n A_1^\infty(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C}$ 的巴拿赫流形。

$\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 上的复结构与由纤维化 $\mathcal{C} : T(\Sigma) \to T(\Sigma^P)$ 所诱导的复结构相容；后者与 $T(\Sigma)$ 上的复结构相容，见下述定理：

定理 4.6（[72]）。设 Σ 是类型为（g, n）的带边曲面，且满足 $2g - 2 + n > 0$。

（1）映射 $\mathcal{C}$ 是全纯的，并具有局部全纯截面。特别地，对于任意 $q \in T$（Σ^P），纤维 $\mathcal{C}^{-1}(q)$ 是 T（Σ）的复子流形。（2）对于任意点 $q = [\Sigma^P, F, \Sigma_1^P] \in T$（$\Sigma^P$），由（3.6）给出的 F_q 是一个双全纯映射。

利用这一点，可以在 T（Σ）上得到全纯坐标。设 T、$V_{\zeta,K}$ 是如上所述的 $\mathcal{O}_{\mathrm{qc}}$（$\Sigma_1^P$）上的坐标，并令$U_{\zeta,K} = T$（$V_{\zeta,K}$）。通过 F. Gardiner 发展的一种希弗变形，有一个包含 0 的开集 $U \subseteq \mathbb{C}^d$，其中 d 是 T（Σ^P）的维数，并且存在一个双全纯映射

$$U \to T(\Sigma^P)$$
$$\epsilon \mapsto [\Sigma^P, \nu_\epsilon \circ F, \nu_\epsilon(\Sigma_1^P)]$$

其中 ν_ϵ 在每个图表 ζ_i 的定义域上都是共形的。

现在，给定任意一点 $p \in \mathcal{C}^{-1}(q)$，它可写成 $[\Sigma, F_f, \Sigma_1] \in T(\Sigma)$，其中某个 $f \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 满足条件（因为根据定理3.6，F_q 是一个双射，只需用 DB 中的一个元素进行调整即可）。然后定义

$$\mathcal{G} : U \times V_{\zeta,K} \to T(\Sigma)$$
$$(\epsilon, f) \mapsto [\Sigma, \nu_\epsilon \circ F_f, \nu_\epsilon(\Sigma_1)]. \tag{4.5}$$

这是一个局部双全纯映射。

定理 4.7（[72]）。设 Σ是类型为（g, n）的带边曲面，满足 $2g-2+n > 0$。 $\mathcal{G}$是到其像上的双全纯映射。特别地，形如 $\mathcal{G}^{-1}$ 的映射构成了 T（Σ）上的一种与标准复结构相容的复结构图册。

如果需要，通过将第二分量与 $\chi^n \circ \mathcal{E}$复合，我们可以直接得到到巴拿赫空间 $\mathbb{C}^d \oplus \bigoplus^n [A_1^\infty$（$\mathbb{D}_+$） $\oplus \mathbb{C}$]的坐标图。

注 4.8. 尽管记号较为复杂，思路却相当简单。¨的 Teichmüller 空间局部可分解为封口曲面 Σ^P 的变形，以及 Σ的拟共形映射边界值的横向变形。通过对 Bers技巧进行修改，可以用映入 Σ^P的共形映射来建模边界值的变化。

注 4.9. 我们在注 3.7 中看到，例外情形是 $\Sigma = \mathbb{D}_-$ 和 $\Sigma = \mathbb{A}$ ，其中$\mathbb{A}$ 是一个圆环。在圆盘的情形下追溯这一过程，只会重新得到以 Bers嵌入的前施瓦茨导数版本表示的标准模型。文献 [73] 针对 T（$\mathbb{A}$）给出了定理 4.6 和 4.7 的相应版本。

注 4.10. F$_q$ 的全纯性见推论 3.3] ，而$\mathcal{G}$ 的双全纯性见定理 4.1]„ 不过所用记号相当不同。

注 4.11。这些坐标的构想源自 D. Radnell [69]。

4.2. 三种模型中的切空间。变形模型：给定一个等价类，其中有许多拟共形变形。因此，如果我们要用 $L^\infty_{-1,1}$(Σ) 来构造 Teichm¨uller 空间的切空间，就必须将与 $L^\infty_{-1,1}$(Σ) 相切的方向商掉。这些冗余方向构成了所谓的“无穷小平凡”微分空间。具体而言，定义

$$\mathcal{N}(\Sigma) = \mathrm{Ker} D_0(\beta_\Sigma \circ \Phi_\Sigma)$$

$$D_0(\beta_\Sigma \circ \Phi) : L^\infty_{-1,1} \to A^\infty_2(\Sigma^*) \tag{4.6}$$

表示 $\beta_\Sigma \circ \Phi_\Sigma$ 在基点 $[0] = [\Sigma, \mathrm{Id}\ \Sigma]$ 处的导数。因此，由于 Bers 嵌入是到其像上的同胚， $\mathcal{N}$(Σ) 就是与等价关系相切的方向集合。一个基本结果是

$$L^\infty_{-1,1}(\Sigma) = \mathcal{N}(\Sigma) \oplus \Omega_{-1,1}(\Sigma). \tag{4.7}$$

因此，若令 $[0] = [\Sigma$,Id $\Sigma]$ 表示 Teichm¨uller 空间的“原点”，则 $[0]$ 处的切空间为

$$T_{[0]}T(\Sigma) \cong \Omega_{-1,1}(\Sigma).$$

任意点 $q = [\Sigma, F, \Sigma']$ 处的切空间可通过右平移得到。由于

$$R_{[F]}[\Sigma', \mathrm{Id}, \Sigma'] = [\Sigma, F, \Sigma']$$

导数满足

$$D_0 R_{[F]} : T_{[0]}T(\Sigma') \to T_q T(\Sigma).$$

由于 Ω$_{-1,\ 1}$(Σ′) 是 $T_{[0]}T$(Σ′) 的模型，因此我们得到

$$T_q T(\Sigma) \cong R_{[F]}\Omega_{-1,1}(\Sigma'). \tag{4.8}$$

可以将第 4.1.2 节中建立的坐标视为该切空间模型的局部指数化。

Bers 嵌入模型：由于 Bers 嵌入是从 $T(\Sigma)$ 到 $A_2^\infty(\Sigma^*)$ 的一个开子集的双射，因此 $A_2^\infty(\Sigma^*)$ 中不存在冗余方向。因此，在 $[0]$ 处的切空间可以识别为 $A_2^\infty(\Sigma^*)$，即

$$T_{[0]}T(\Sigma) \cong A_2^\infty(\Sigma^*).$$

由于 $A_2^\infty(\Sigma^*)$ 是一个线性空间，我们也有

$$T_qT(\Sigma) \cong T_{\beta(q)}A_2^\infty(\Sigma^*) \cong A_2^\infty(\Sigma^*).$$

纤维模型：这里我们指出，可以利用纤维化得到一个切空间模型。本文其他部分不会用到这一结果。令 $p = [\Sigma, F, \Sigma_1]$ and$q = \mathcal{C}(p) = [\Sigma^P, \hat{}F, \Sigma_1^P]$。根据定理 4.7，利用 $A_1^\infty(\mathbb{D}_+)$ 的线性性，

$$T_{[\Sigma,F,\Sigma_1]}T(\Sigma) \cong T_qT(\Sigma^P) \times \bigoplus_{k=1}^{n} (A_1^\infty(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C})$$

通过 $\mathcal{G}$ 的导数映射。由于 $T_qT(\Sigma^P)$ 是有限维的，因此不会带来解析上的困难。在 $\mathcal{G}$ 下，利用希弗变形，它与 $\mathbb{C}^d$ 等同；不过，切空间也可以采用任何其他模型。

4.3. 魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间概述。在第 3 节给出的每种模型中，经过解析选择，便可在 Teichm¨uller 空间上得到复流形结构。粗略地说，魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间是通过将 L^∞ 对象替换为L^2 对象而得到的。例如，在魏尔-彼得森理论中， L^2 调和贝尔特拉米微分空间

$$H_{-1,1}(\Sigma) = \left\{\mu \in \mathscr{D}_{-1,1}(\Sigma) \,:\, \rho_\Sigma\mu \in \overline{A_2^2(\Sigma)}\right\}$$

起到 $\Omega_{-1,\ 1}(\Sigma)$ 的作用。

	经典	魏尔-彼得森
贝尔特拉米微分	$L^\infty_{-1,\ 1}(\Sigma)_1$	$L^\infty_{-1,1}(\Sigma)_1 \cap L^2_{-1\ ,1}(\Sigma)$
变形模型坐标	$\Omega_{-1,1}(\Sigma)$	$H_{-1,\ 1}(\Sigma)$
Bers嵌入模型坐标	$A_2^\infty(\Sigma^*)$	$A_2^2(\Sigma^*)$
纤维模型坐标	$(A_1^\infty(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C})^n \times T(\Sigma^P)$	$(A_1^2(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C})^n \times T(\Sigma^P)$

$[0] = [\Sigma, \mathrm{Id}\ \Sigma]$ 处切空间的魏尔-彼得森内积如下。在Bers嵌入模型中，我们将在后文看到，切空间可以与$A_2^2(\Sigma^*)$等同。在该模型中，配对就是由 $A_2^2(\Sigma^*)$上的内积所诱导的内积:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\mathrm{WP},0} := \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{A_2^2(\Sigma^*)} = \iint_{\Sigma^*} \rho_{\Sigma^*}^{-2} \phi_1 \overline{\phi_2}\, dA_{\mathrm{hyp}}.$$

在提升图景中，对于 $h_1(z)dz^2, h_2(z)dz^2 \in A_2^2(\mathbb{D}_+, G)$，有

$$\left\langle h_1(z)dz^2, h_2(z)dz^2 \right\rangle_{\mathrm{WP},0} := \left\langle h_1(z)dz^2, h_2(z)dz^2 \right\rangle_{A_2^2(\mathbb{D}_+,G)} = \iint_N (1-|z|^2)^2 h_1(z)\overline{h_2(z)} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i}$$

其中 N 是 G 的基本域。

在变形模型中，切空间由调和 Beltrami 微分建模。在这种情况下，对于 μ_1、$\mu_2 \in H_{-1,1}(\Sigma)$，魏尔-彼得森配对为

$$\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_{\mathrm{WP},0} = \iint_{\Sigma} \mu_1 \overline{\mu_2}\, dA_{\mathrm{hyp}}.$$

容易验证，在 Ahlfors-Weill 反射 Λ 下，除一个常数因子外，这与二次微分上的配对一致。

要理解这一点，我们首先需要为某类曲面 Σ 定义魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间，并证明它具有希尔伯特流形复结构。Teichm¨uller 空间上各种复结构的存在性与等价性是一个重要的研究问题，其渊源可追溯到黎曼的工作。在有限维情形和经典的 Ahlfors-Bers 理论中，这一问题涵盖了许多重要结果。魏尔-彼得森理论中的困难也毫不逊色。

注 4.12。构造魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间及其等价的复结构，需要在L^2 情形下重做经典构造中的全部分析。尽管过程中有不少意外，也有一长串“意料之中”的定理，其中一些证明在技术上颇为复杂。回顾起来，这项工作的价值或许比最初阶段显得更加显而易见。

5. The Weil-Petersson Universal Teichmüller space

5.1. 历史与概述。魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间的早期研究动机源自对圆周微分同胚群 Diff($\mathbb{S}^1$) 的研究。该群在环群、表示论、弦理论和共形场论中发挥着重要作用 [46, 67, 20, 21, 62, 99, 135]。A. Kirillov 和 D. Yuri'ev [48, 47] 结合表示论研究了它的余伴随轨道。这里有两个余伴随轨道：Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 和 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ （其中 $\mathbb{S}^1$ 通过 M¨ob($\mathbb{S}^1$) 中的旋转子群作用）。Kirillov-Yuri'ev 根据基里洛夫-科斯坦特-苏里奥理论 [47, 48] 确定了这些轨道上的辛形式。Diff($\mathbb{S}^1$) 在单位元处的切空间由圆周上的光滑向量场 Vect($\mathbb{S}^1$) 构成，其生成元为 $L_n = -ie^{in\theta}\partial/\partial\theta$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$。存在一个自然的复结构 J，其定义为

$$JL_m = -i\,\mathrm{sgn}(m) L_m.$$

Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 上唯一的齐性辛形式在单位元处由[48, 47, 19]给出

$$\omega(L_m, L_n) = a(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$

其中 a 为某个实常数。因此，存在唯一一个与复结构 J 相容的 K¨ahler 度量。

受 M. Bowick [18] 以及 M. Bowick 和 S. Rajeev [20], 的工作启发，S. Nag 和 A. Verjovsky [58]观察到 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 与通用 Teichm¨üller 空间之间的联系。利用切空间的变形模型，他们证明 K¨ahler 度量与贝尔特拉米微分的魏尔-彼得森配对的形式表达式一致，该表达式定义于

$T(\mathbb{D}_-)$，因此该配对在 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) $\subset T(\mathbb{D}_-)$ 中的点处沿着切于 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 的方向收敛。此外，他们还证明，Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 到 $T(\mathbb{D}_-)$ 中的包含映射是 Gˆateaux 全纯的。

暂且不谈几何与代数，眼下首先浮现的问题是：相对于 Nag-Verjovsky 的魏尔-彼得森配对，Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 的完备化是什么?

由于 $T(\mathbb{D}_-)$ 是一个巴拿赫流形，我们当然不能期待它具有 K¨ahler 度量；事实上，即使在单位元处，魏尔-彼得森配对在沿着 $T(\mathbb{D}_-)$ 的任意方向取切时也不收敛。因此，我们需要找到通用 Teichm¨uller 空间的一个子集或精细化，使魏尔-彼得森配对在每个切空间上都收敛。许多研究者构造了这个“魏尔-彼得森通用 Teichm¨uller 空间”。本节介绍由 Cui [23] 和 Takhtajan-Teo [116] 发展的流形与切空间性质。

关于魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间的开创性论文出自 Cui [23]。Cui 定义了魏尔-彼得森类拟对称映射（称之为“可积渐近仿射同胚”），构造了一个魏尔-彼得森通用 Teichm¨uller 空间，其复结构由全纯 Bers 嵌入给出，并证明它是 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 的完备化。这彻底确立了 WP 通用 Teichm¨uller 空间的 Bers 嵌入模型。研究还证明，WP 通用 Teichm¨uller 空间相对于诱导的测地距离是完备的。

其中一些结果后来由 Takhtajan-Teo 独立证明 [114], ，随后作为 [116] 两章中的第一章发表。他们还从变形模型构造了复结构，并全面发展了切空间结构。此外，他们证明了周期映射到西格尔圆盘的自然无限维类比，在经典情形和魏尔-彼得森情形下都是全纯的。G. Segal [103], 提出了这一无限维类比，随后许多作者对此进行了研究，包括 Kirillov-Yuri’ev [48], 、Nag [56], 、Nag 和 Sullivan [57] ，以及 D. Hong 和 S. Rajeev [41]。下文第6.1节将对此进行介绍。

Takhtajan-Teo 还首次研究了 WP 万有 Teichmüller 空间的 K¨ahler 几何与整体分析。此主题将在第9节讨论。

5.2. 魏尔-彼得森万有 Teichmüller 空间。

5.2.1. Bers 嵌入模型。若拟对称映射 $\phi \in \mathrm{QS}(\mathbb{S}^1)$ 存在延拓到 $\mathbb{D}_-$ 的拟共形映射，且其贝尔特拉米微分属于$L^2_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$，则称其为魏尔-彼得森拟对称映射。用 $\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$ 表示这类拟对称映射构成的类。接下来我们考虑 Teichm¨uller 空间的以下子集。

D定义 5.1. WP 类通用 Teichm ¨uller 空间定义为

$$T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-) := \mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1).$$

Cui 根据 Schwarzian 导数和前 Schwarzian 导数刻画了魏尔-彼得松拟对称。回顾一下，对于具有拟共形延拓的 ϕ ,

ˆ 存在一个通过 Bers技巧 F 获得的相应映射，使得

$$f := \hat{F}\Big|_{\mathbb{D}_+} \tag{5.1}$$

是共形的且与扩张方式的选择无关（除归一化外）).

定义 pre-Schwarzian 导数和 Schwarzian 导数

$$\mathcal{A}(f) = \frac{f''}{f'}, \qquad \mathcal{S}(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

我们有

定理 5.2（[23, 116]）。以下各条件等价:

(1) ϕ: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是 WP类拟对称性；(2) f满足 $\mathcal{S}(f)(z)\ dz^2 \in A_2^2(\mathbb{D}_+)$；(3) 若 f 经过归一化，使得 ∞ 位于 $f(\mathbb{D}_+)$的补集内部，则$(f''(z)/f'(z))\ dz \in A_1^2(\mathbb{D}_+)$。

Cui [23] 以及后来 Takhtajan-Teo [116] 证明了

定理 5.3 ([23, 116])。$A_2^2(\mathbb{D}_+) \subset A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$，且该包含映射有界。

此外，以下结论成立。

定理 5.4 ([23, 116])。 $\beta(T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)) = \beta(T(\mathbb{D}_-)) \cap A_2^2(\mathbb{D}_+)$。特别地， $\beta(T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-))$ 是开集。

由 Bers 嵌入的像是开集这一事实可知， $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 继承了来自 $A_2^2(\mathbb{D})$ 的复希尔伯特流形结构。

Cui 证明了 Bers 嵌入在以下意义下是全纯的。稍微修改 Cui 的记号，令 $M_* = L^2_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-) \cap L^\infty_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-)$，其直和范数为

$$\|\mu\|_* = \|\mu\|_\infty + \|\mu\|_2.$$

这是一个巴拿赫空间。此外，如果

$$M_{*1} := \{\mu \in M_* : \|\mu\|_\infty < 1\},$$

那么，由于 $\mu \mapsto \|\mu\|_\infty$ 关于直和范数连续， M_{*1} 显然是开集。这就得到

定理 5.5（[23]）。Bers同构 $\beta \circ \Phi$ 在 M_{*1}上的限制是一个映入 A_2^2（$\mathbb{D}_+$）的全纯映射。

Cui 首先证明了 T_{WP}（$\mathbb{D}_-$）上的魏尔-彼得森度量在每一点都收敛，且由此诱导的距离是完备的。利用定理 5.4 通过 A_2（$\mathbb{D}_+$）得到的复结构，我们可知任意一点处的切空间都可以用 A_2（$\mathbb{D}_+$）来建模。给定两个元素 ϕ、$\psi \in A_2$（$\mathbb{D}_+$） $\cong T_0 A_2$（$\mathbb{D}_+$），单位元处的魏尔-彼得森配对自然定义为 A_2（$\mathbb{D}_+$）中的 L^2 配对。

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathrm{WP},0} = \iint_{\mathbb{D}_+} \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \overline{\psi(z)} \phi(z) dA_z.$$

在任意一点处，配对由右平移／基点变换定义。对于$h \in T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$，令ˇ R_h 表示由 R_h 在 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$上的右平移所诱导的、作用于 $\beta(T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-))$的右平移。我们有

定理 5.6（[23]）。˘ R_h 是一个双全纯映射。此外，存在一个常数 C （与 h无关），使得在单位元处的导数 $D_0\check{}R_h$ 满足

$$\frac{1}{C} \leq \|D_0\check{R}_h\|_2 \leq C.$$

对于 $h \in T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 处由 ψ、 $\phi \in T_{\beta(h)}A_2(\mathbb{D}_+) \cong A_2(\mathbb{D}_+)$ 表示的任意一对切向量，我们将 h 处的魏尔-彼得森配对定义为

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathrm{WP},h} = \left\langle (D_0\check{R}_h)^{-1}\phi, (D_0\check{R}_h)^{-1}\psi \right\rangle_{\mathrm{WP},0}. \tag{5.2}$$

立即可见，这是每个切空间上的收敛黎曼度量，并且随点光滑变化。换言之，我们找到了通用 Teichm¨uller 空间的最大子集；该子集是一个希尔伯特流形，并且魏尔-彼得森配对在每个切空间上都收敛。这回答了第 5.1 节中提出的问题。

切空间不仅是完备的，流形本身相对于由魏尔-彼得森度量诱导的距离也是完备的。

定理 5.7（[23]）。 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 相对于由魏尔-彼得森配对诱导的距离是完备的。

Cui [23]证明了 $\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$ 与 $\mathrm{QS}(\mathbb{S}^1)$ 一样是一个群。Takhtajan-Teo 证明了它是一个拓扑群。

定理 5.8（[116]）。$\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$ 是一个拓扑群。

众所周知，$\mathrm{QS}(\mathbb{S}^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$ 不是一个拓扑群。

Cui 方法的一个关键方面是，$\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$ 中元素的 Douady-Earle 延拓在 $L^2_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-)$ 中具有贝尔特拉米微分。Douady-Earle 延拓是拟对称映射 $\phi \in \mathrm{QS}(\mathbb{S}^1)$ 到 $\mathbb{D}_-$ 的显式拟共形延拓 $E(\phi)$。它是共形自然的，即，对于任意 $M_1, M_2 \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$,

$$E(M_1 \circ \phi \circ M_2) = M_1 \circ E(\phi) \circ M_2.$$

定理 5.9（[23]）。如果 $\phi \in \mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$，那么 $E(\phi)$ 的贝尔特拉米微分 $\mu(E(\phi)) \in L^2_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-)$。此外，给定 $\mu \in M_{*1}$ ，令 $\sigma(\mu) \in M_{*1}$ 为$E(\ w_\mu|_{\mathbb{S}^1})$ 的贝尔特拉米微分。那么 $\sigma\colon\ M_{*1} \to M_{*1}$ 是连续的。

最后，我们直接由定理 5.3 得出

定理 5.10（[23, 116]）。从 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 到 $T(\mathbb{D}_-)$ 的包含映射是全纯的。

该定理指的是到巴拿赫流形 $T(\mathbb{D}_-)$ 中的包含映射。如前文所述，Nag-Verjovsky [58] 证明了，从 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$ 到 $T(\mathbb{D}_-)$ 的包含映射是 Gˆateaux 全纯的。从 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 到赋予下一节所述 Takhtajan- Teo 希尔伯特流形结构的 $T(\mathbb{D}_-)$ 的包含映射同样是全纯的。这或多或少是由他们的构造自动得到的。

本节中的一些结果由 H. Guo[39]推广到了 L^p 情形下的 $p \geq 1$ 。S. Tang 证明了 Douady-Earle 延拓属于 L^p ，并且 Bers嵌入关于 $L^p \cap L^\infty$上的交范数是全纯的。关于 L^p理论的概述以及 Teichm¨uller 空间的其他改进，参见第 7 节。

注 5.11。在 Guo [39], 中，引用了 Cui 的一篇论文，题为“Teichm¨uller spaces and Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$)，待发表”。这似乎指的是 Cui [23], 的论文；事实上，匿名审稿人曾告知作者这一点。

注 5.12。尽管 [23, 39] 二者都没有在正文或标题中使用“魏尔-彼得森”一词，但据我们所知，它们是首批严格定义魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间并发展其复结构的论文。遗憾的是，在 [23]和 [39], 发表时，期刊《中国科学》在西方仍然鲜为人知。

5.2.2. 变形模型。变形模型（包括用调和贝尔特拉米微分刻画切空间的模型）由 Takhtajan-Teo [114], 完成，后来作为 [116]的两章中的第一章发表。他们的方法有一个显著区别：为整个 Teichm¨uller 空间 $T(\mathbb{D}_-)$赋予希尔伯特流形结构，代价是使该空间不再连通。 $[0] \in T(\mathbb{D}_-)$的连通分支是 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$。

回顾经典情形，切空间可以用调和贝尔特拉米微分 $\Omega_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$ 来建模，该微分是根据 Ahlfors-Weill 反射 $\Lambda_{\mathbb{D}_-}$ 定义的（见 (4.2)）。Takhajan 和 Teo 定义

$$H_{-1,1}(\mathbb{D}_-) = \Lambda_{\mathbb{D}_-} A_2^2(\mathbb{D}_+), \tag{5.3}$$

这一定义是有意义的，这要归功于定理 5.3。

与 L^∞ 情形一样，可以利用 Ahlfors-Weill 反射构造一个图册。根据定理 5.3，存在一个以 0 为中心、充分小的球 $B \subset A_2^2(\mathbb{D}_+)$，它包含于 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$ 中半径为 2 的球内，因此 $\Lambda_{\mathbb{D}_-}(B)$ 中的所有元素都是 $T(\mathbb{D}_-)$ 中元素的贝尔特拉米微分。对于 $\mu \in L^\infty_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$，令 $V_\mu = R_{w_\mu}\Phi_{\mathbb{D}_-}\Lambda_{\mathbb{D}_-}(B)$，即可得到以下结果。

定理 5.13（[116]）。设 $w_\mu : \mathbb{D}_- \to \mathbb{D}-$ 是贝尔特拉米方程的一个标准化解。集合 $R_{w_\mu}\Phi_{\mathbb{D}_-}\Lambda_{\mathbb{D}_-}(B)$ 和坐标图 $\beta_{\mathbb{D}_-} R_{w_\mu^{-1}}$构成 $T(\mathbb{D}_-)$ 上的复希尔伯特流形结构的图册。

在与此复结构相关的拓扑中， $T(\mathbb{D}_-)$包含无穷多个连通分支。这些连通分支是某个分布的积分流形，因此与切空间重合。这些切空间恰好是 $T(\mathbb{D}_-)$中魏尔-彼得森配对收敛的方向。单位元的连通分支是$T_{WP}(\mathbb{D}_-)$。

定理 5.14（[116]）。相对于此复结构，右平移（基点变换）是一个双全纯映射。

注 5.15。请注意，这一表述强于 Cui 定理 5.6 中关于右平移/基点变换是双全纯映射的表述，因为它适用于所有拟共形平移，而不仅仅是魏尔-彼得森类的平移。若将范围限制在魏尔-彼得森类变形上，则可将 Cui 定理的这一部分作为特殊情形得到。

另一方面，Cui 定理中给出的微分下界是其完备性简短证明的关键，但定理 5.16 并不包含这一结果。

回顾方程 (4.7) 的分解，我们有

$$L^\infty_{-1,1}(\mathbb{D}_-) \cap L^2_{-1,1}(\mathbb{D}_-) = \big(\mathcal{N}(\mathbb{D}_-) \cap L^2_{-1,1}(\mathbb{D}_-)\big) \oplus H_{-1,1}(\mathbb{D}_-). \tag{5.4}$$

这里我们用到了这样一个事实：$H_{-1,1}(\mathbb{D}_-) \subset \Omega_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$，这可直接由定理 5.3 得出。这表明，我们可以将 $[0]$ 处的切空间与 L^2 调和贝尔特拉米微分等同起来：

$$T_{[0]}T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-) \cong H_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$$

Takhtajan-Teo 证明了

定理 5.16 ([116])。对于任意规范化拟共形映射 $w_\mu : \mathbb{D}_- \to \mathbb{D}_-$, $D_0R_{w_\mu}$ 是有界同构。

接着，我们如下定义 $T(\mathbb{D}_-)$ 上的分布 $\mathfrak{D}_T$：对于每个 $[w_\mu] \in T(\mathbb{D}_-)$，赋予希尔伯特空间 $D_0R_{w_\mu}H_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$。

Takhtajan-Teo 令人惊讶的想法是将空间 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$ 拆分开，并将其视为 $A_2^2(\mathbb{D}_+)$ 的平移集合之并。也就是说，考虑 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$ 的叶状结构

$$A_2^\infty(\mathbb{D}_+) = \cup_{\phi\in A_2^\infty(\mathbb{D}_+)} \left[\phi + A_2^2(\mathbb{D}_+)\right].$$

每个叶片都以显然的方式构成希尔伯特流形，而向量空间 $A^\infty(\mathbb{D}_+)$ 可视为由不可数个互不连通的希尔伯特流形组成的集合（忽略原有范数）。$\phi \in A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$ 处与 $A_2^2(\mathbb{D}_+)$ 相切的向量空间构成一个分布 $\mathfrak{D}_A$，叶状结构的叶片是该分布的积分流形。

总结他们的一些结果：

定理 5.17 ([116])。将 $T(\mathbb{D}_-)$ 和 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$ 视为上述希尔伯特流形。则

(1) Bers嵌入 $\beta : T(\mathbb{D}_+) \to A_2^2(\mathbb{D}_-)$ 是到其像上的双全纯映射。(2) 分布 $\mathcal{D}_T$ 的积分流形是叶状结构 $A_2^\infty(\mathbb{D}_+)$ 的叶 $\phi + A_2^2(\mathbb{D}_+)$ 在 Bers嵌入下的逆像。(3) $[0] \in T(\mathbb{D}_-)$ 的连通分支为 $\beta^{-1}(A_2^2(\mathbb{D}_+))$。

特别地，我们看到，关于 Takhtajan-Teo 的复希尔伯特流形结构，$T_{WP}(\mathbb{D}_-)$ 是 $T(\mathbb{D}_-)$ 的单位元连通分支。

我们还看到，切空间可以由以下对象建模

$$T_{[w_\mu]}T(\mathbb{D}_-) \cong D_0R_\mu H_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$$

并且正如我们之前所见，根据

$$T_{[w_\mu]}T(\mathbb{D}_-) \cong D_0\check{R}_\mu A_2^2(\mathbb{D}_+).$$

因此，我们得到了魏尔-彼得森配对的两种不同表达式；公式 (5.2) 以及

$$\langle \phi, \psi\rangle_{\mathrm{WP},[w_\mu]} = \left\langle (D_0R_{w_\mu})^{-1}\phi, (D_0R_{w_\mu})^{-1}\psi \right\rangle_{\mathrm{WP},[0]}. \tag{5.5}$$

追溯 定义可知，二者显然只相差一个常数 .

注 5.18。应当注意，定理 5.17 第 (1) 部分与定理 5.5 的内容截然不同，即使将 Bers嵌入限制在 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 上也是如此。

5.3. 魏尔-彼得森拟对称映射的若干进一步刻画。本节介绍 $\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$ 的一些其他近期刻画。这里我们从简介绍，因为 C. Bishop 的论文 [15] 已经对这一主题作了出色的综述。在同一篇论文中，Bishop 对 WP 类给出了许多新颖而引人注目的刻画，并将其推广到高维。我们鼓励读者阅读 Bishop 的原始论文 [14, 15]，以充分领会其中结果的广度与深度，并了解这些结果与诸多领域的联系,

包括数学和物理学。

Takhtajan-Teo [116] 提出了一个关于刻画 WP 类拟对称映射的问题。在此背景下，Y. Shen [110] 证明了 WP 类拟对称映射的如下刻画。

定理 5.19. 设 f 是从 $\mathbb{D}_+$ 到一个拟圆盘的共形映射， $h = g^{-1} \circ f$是定义在 $\mathbb{S}^1$上的相应拟对称共形焊接。则以下陈述等价

(1) h属于 WP 类；(2) h 是绝对连续的（相对于弧长测度），且 $\log h'$ 属于齐次 Sobole夫空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^1)$

后来，Shen 与 Y. Hu 和 L. Wu [42] 合作，在不使用拟共形延拓的情况下，给出了魏尔-彼得森类元素的内蕴刻画。这些结果回答了上述 Takhtajan 和 Teo 提出的问题。

最近，Shen 和 X. Liu [50] 证明了所谓 p–可积拟圆的如下刻画；对于 $p > 1$，该刻画在 WP 类拟圆的情形下可表述为

定理 5.20. 设 f 是从 $\mathbb{D}_+$ 到某个拟圆盘的共形映射，且 $h = g^{-1} \circ f$是与 $\Gamma := f(\mathbb{S}^1)$ 对应的拟对称共形焊接。那么以下陈述等价

(1) Γ是 WP 类拟圆；(2) $\log g' \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_-)$；(3) Γ 可求长，长度为 l，且存在某个实值函数 $b \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^1)$，使得弧长参数化 $z\colon \mathbb{S}^1 \to \Gamma$ 满足 $z'(\zeta) = \frac{l}{2\pi} e^{ib(\zeta)}$；(4) Γ 可求长，且 Γ 的单位切向方向 τ 满足 $\tau(z) = e^{iu(z)}$，其中某个实值函数为 $u \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。

在 [14] 和 [15], 中，C. Bishop 给出了证明定理 5.19 的一种更几何化的方法。他还证明了以下刻画结果:

定理 5.21。对于定理 5.20 中的 f 和 Γ，有

(1) Γ 是 WP 类拟圆，当且仅当它具有有限的 M ¨obius 能量，即

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(\Gamma) := \int_\Gamma \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x-y|^2} - \frac{1}{\ell(x,y)^2} \right) dx\, dy < \infty, \tag{5.6}$$

其中 $\ell(x, y)$ 是沿曲线 Γ 从 x 到 y 的弧长距离。

(2) Γ 是 WP 类拟圆，当且仅当它是弦弧，且其弧长参数化属于 Sobolev 空间 $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{S}^1)$。

这里，若可求长曲线 Γ 对所有 $x, y \in \Gamma$ 均满足 $length(\gamma) = O(|x-y|)$，则称其为弦弧，其中 $\gamma \subset \Gamma$ 是端点为 x, y 的最短子弧。

注 5.22. 作者在与 D. Radnell 合著的文章 [80], 中指出，WP 类拟圆是弦弧曲线，不过证明存在一个漏洞。Bishop 在 [14] 中为这一事实给出了严谨的证明。

最后，我们还注意到， $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 在单位元处的切空间，恰好由满足某些归一化条件的单位圆上的 $H^{\frac{3}{2}}$ 向量场构成（参见 [58], [116]）。

6. The period mapping

6.1. 极化与西格尔圆盘。许多研究者曾考虑将群 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 嵌入西格尔圆盘的无穷维版本。后来，这一结果被推广到 Teichm¨uller 空间 $T_{\mathrm{W}P}(\mathbb{D}_-)$ 和 $T(\mathbb{D}_-)$。

Nag 和 Sullivan 的一篇论文确立了适用于 Te- ichm¨uller 理论的解析观点。为简化叙述，我们采用他们的观点。过程中，我们也会补充介绍这些思想的发展历程。

令 $H^{1/2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^1)$ 和 $H^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ 分别表示圆上实值函数和复值函数的 Sobolev $1/2$ 空间。用点号表示模去常数后的空间，例如 $\dot{H}^{1/2}_{\mathbb{R}}$ 。K. Vodopy'anov [128]以及 S. Nag 和 D. Sullivan [57]分别独立证明，复合一个同胚 ϕ

$$h \mapsto h \circ \phi$$

（模常数）在 $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ 上是有界算子，当且仅当 ϕ 是拟对称映射（Vodopy'anov 在实直线上以等价形式表述了这一结果）。可以证明， $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ 关于配对的完备化是一个辛空间

$$\omega(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{S}^1} f \cdot dg \tag{6.1}$$

对于光滑函数。因此，我们得到了拟对称映射通过 $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ 上的辛同胚作用所构成的表示。总之

定理 6.1（[128, 57]）。同胚 $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 在 $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ 上诱导一个有界复合算子，当且仅当 $\phi \in \mathrm{QS}(\mathbb{S}^1)$。这个有界算子是一个辛同胚。

人们早已知道，Diff($\mathbb{S}^1$) 关于这一配对进行辛作用。Segal [103] 研究了这一点，并将其与受限辛群的亚辛表示联系起来。当时，该作用仅限于圆周上的光滑实值函数（模常数）（ C^∞ 个 $\dot{H}^{1/2}_{\mathbb{R}}$ 元素）。Segal 定义了西格尔圆盘的一个无穷维类比，它参数化了复化辛空间的正极化。Nag 和 Sullivan [57] 证明，该作用可自然扩展到 QS($\mathbb{S}^1$)，并开创了解析理论；要严谨地研究特希米勒空间的 K¨ahler 几何、周期映射和辛作用，最终离不开这一理论。正如我们将看到的，正确的解析方法会带来更清晰的几何与代数图景（这与 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 中傅里叶级数的代数比方说 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 中傅里叶级数的代数更清晰的情形大致相同）。例如，正如我们即将看到的，它使得与模空间 $T(\mathbb{D}_-)$ 和 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 的精确联系得以显现。

现在我们更精确地描述无限维西格尔圆盘。若满足以下条件，我们称 $(V^{\mathbb{C}}, \omega, J)$ 为复辛 Hilbert 空间：

(1) $V^{\mathbb{C}}$ 是具有复结构的实向量空间 V 的复化；

(2) J 和 ω 分别是 V上复结构和辛形式的复线性扩张；(3) 关于配对 $\langle v, w\rangle := \omega(v, J\overline{w})$, $V^{\mathbb{C}}$ 是一个可分希尔伯特空间；(4) ω 和 J 是连续的。

定义 6.2. 设 $(V^{\mathbb{C}}, J, \omega)$ 是一个复辛 Hilbert 空间。若 $V^{\mathbb{C}}$ 的复子空间 W

(1) W 是各向同性的；(2) $V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$；且 (3) $\omega(v, i\overline{w})$
是 W 上的正定半双线性型，则称其为正极化子空间。

我们也将分解 (2) 称为极化。

容易验证，若 W_0 和 $\overline{W_0}$ 分别是 J 的 $-i$-和 i-特征子空间，则 $W_0 \oplus \overline{W_0}$ 是一种极化，我们称之为标准极化。

极化 由无限维西格尔圆盘参数化，下面我们来定义它。

定义 6.3. 设 $(V^{\mathbb{C}}, J, \omega)$ 为复辛 Hilbert 空间，并以 $V^{\mathbb{C}} = W_0 \oplus \overline{W_0}$ 表示标准极化。无限维西格尔圆盘是满足以下条件的有界线性映射 $Z : \overline{W_0} \to W_0$ 的集合：

(1) 对所有 $v, w \in \overline{W_0}$, $\omega(v, Zw) = \omega(w, Zv)$;
(2) $I - \overline{Z}Z$ 是正定的。

受限西格尔圆盘是无限维西格尔圆盘中另外满足以下条件的元素所构成的集合：

(3) Z 是希尔伯特–施密特的。

注 6.4. 条件 (1) 等价于在标准正交基下的 $Z^T = Z$，或者等价地，$Z^* = \overline{Z}$。

注 6.5. 虽然我们没有见过“受限西格尔圆盘”这一术语，但它显然是对 Shale 群所用术语的扩展。在文献中，“西格尔圆盘”这一术语有时与本文的用法一致，有时则指受限西格尔圆盘。

可以证明，通过令 W 为 Z的图，正极化的集合与无限维西格尔圆盘一一对应。也很容易看出，V的实辛同胚群通过复线性延拓作用于极化空间，因而也作用于西格尔圆盘。

西格尔圆盘最初由 C. L. Siegel 在有限维情形下研究 [112]。Segal [103]结合由 Diff($\mathbb{S}^1$) 诱导的辛群表示，研究了受限西格尔圆盘，如上所述。Segal 纳入的条件 Z 为希尔伯特 – 施密特算子，源自 Shale [108]。Shale 证明，CCR代数的自同构能够在福克空间上实现为酉算子的充要条件正是该条件——也就是说，这是产生与元辛群相关联的射影酉表示的必要条件。向量空间 V 上的辛群的相应子群 $\mathrm{Sym}_{\mathrm{res}}(V)$ 称为受限辛群，并贯穿于无限维群的表示论中；例如参见 J. Ottesen [61] 或 M.

Schottenloher [99], 以及上述参考文献。

黎曼曲面上 1-形式的全纯与反全纯分解给出了极化的一个标准例子。事实上，这正是经典周期映射的基础，也是西格尔构造的动机之一。在文献中，通常使用与之等价的西格尔上半平面模型来表述。

另一个例子来自圆上函数的正、负傅里叶模态 [103], ，我们将在 Nag 和 Sullivan 的框架下给出这一例子。令 $V^{\mathbb{C}} = \dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1) \subset L^2(\mathbb{S}^1)$，其中辛形式是 ((6.1)) 的完备化，而复结构是希尔伯特变换

$$Je^{in\theta} = -i\,\mathrm{sgn}(n)\,e^{in\theta}$$

for $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$。标准极化由仅含正傅里叶模态和仅含负傅里叶模态的函数给出。这些函数是圆盘上导数平方可积的全纯函数与反全纯函数的边界值（狄利克雷空间 $W_0 = \mathcal{D}(\mathbb{D}_+)$、$W_0 = \mathcal{D}(\mathbb{D}_+)$），即

$$\dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1) = \dot{\mathcal{D}}(\mathbb{D}_+) \oplus \overline{\dot{\mathcal{D}}(\mathbb{D}_+)}.$$

很容易证明，M¨ob($\mathbb{S}^1$) 正是 QS($\mathbb{S}^1$) 中保持标准极化的子集。因此，根据 Vodopy'anov、Nag-Sullivan 的定理 6.1，我们得到一个从万有 Teichm¨uller 空间到无限维西格尔圆盘的嵌入。许多作者此前已针对光滑子空间 Diff($\mathbb{S}^1$) 研究过这一点，其中包括上文提到的 Segal [103] 、Kirillov-Yuri'ev [48], 和 Nag [56]。Takhtajan-Teo [116][4] 将其称为 KYNS（Kirillov-Yuri'ev-Nag-Sullivan）嵌入。

有限维西格尔圆盘是一个齐性复流形，带有自然的辛不变厄米度量；该度量在单位元处由 $Tr(Z_1 Z_2)$ [112] 给出。（注意，由于 Z 矩阵的对称性，这就是矩阵的弗罗贝尼乌斯内积。）这一结构自然推广到无限维受限西格尔圆盘，因为其收敛条件恰好是 Z_1 和 Z_2 为希尔伯特 – 施密特。

不难证明，微分同胚会诱导希尔伯特–施密特复合算子 [103]。Kirillov-Yuri'ev [48], 以及后来的 Nag 和 Sullivan [56], 证明，在 KYNS 周期嵌入下，广义 Siegel K¨ahler 形式的拉回与 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 的魏尔-彼得森度量一致。关于 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$的完整结果归功于 Takhtajan-Teo。

现在，Kirillov-Yuri'ev [48]证明，KYNS 嵌入中的算子 Z 就是格伦斯基矩阵。文献中，格伦斯基矩阵有多种形式。其中一种形式由 Bergman 和 Schiffer [12], 提出，是作用于反全纯 Bergman¯空间上的积分算子。给定 $T(\mathbb{D}_-)$ 的一个元素，令 $f\colon\ \mathbb{D}_+ \to \mathbb{C}$ 为通过 Bers 技巧（5.1）得到的相应归一化共形映射。我们将一个格伦斯基算子与 f （因而也与一个

[4]不过，Segal-Kirillov-Yuri'ev-Nag-Sullivan-Takhtajan-Teo 嵌入或许更为恰当。28

元素 $T(\mathbb{D}_-)$) 如下。对于平方可积的反全纯 $h(z)$，我们定义 $\overline{\quad}$ e

$$\mathbf{Gr}_f\overline{h}(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}^+}\left(\frac{f'(w)f'(z)}{(f(w)-f(z))^2} - \frac{1}{(w-z)^2}\right)\overline{h(w)}\,\frac{d\bar{w}\wedge dw}{2i}. \tag{6.2}$$

由于求导是从模去常数的狄利克雷空间到伯格曼空间的等距映射，因此也可以在齐次狄利克雷空间上等价地表述这一点。在这种情况下，我们得到

$$Z = \Pi([\mu]) = d^{-1}\mathbf{Gr}_f d : \overline{\dot{\mathcal{D}}(\mathbb{D}_+)} \to \dot{\mathcal{D}}(\mathbb{D}_+). \tag{6.3}$$

从积分表达式 (6.2) 可以很容易看出，这个算子具有 M¨obius 不变性，也就是说，对于 T M¨obius，有 $\mathrm{Gr}^{T\circ f} = \mathrm{Gr}^f$，因此，正如预期的那样，$f$ 的归一化无关紧要。

注 6.6。格伦斯基矩阵可以针对在 0 [26, 65] 的某个邻域内单叶的全纯函数 f 来定义。在 [48], 中有一个可能造成严重误导的排印错误。文中称，$I - \overline{Z}_f Z_f > 0$ 等价于局部共形映射 f 在圆盘上单叶这一条件。事实上，经典结论恰恰相反：$I - \overline{Z}Z \geq 0$ 作用于 $\mathbb{C}^n$ 中任意 n 的向量时，等价于它在 $\mathbb{D}$ 上单叶。（在这里的表述中，$I - \overline{Z}Z \geq 0$ 作为多项式上的线性变换。）根据 Pommerenke 和 K¨uhnau 的结果，$I - \overline{Z}Z > 0$ 这一条件等价于单叶性和拟共形可延拓性。例见 Pommerenke [65]。

以下定理由 Y. Shen 和 Takhtajan-Teo 分别独立得到，它有力地推动了魏尔-彼得森类 Teichm¨uller 理论的发展。

定理 6.7 ([109, 116])。由 $\phi \in$QS($\mathbb{S}^1$) 诱导的格伦斯基算子是希尔伯特–施密特算子，当且仅当 ϕ 是魏尔-彼得森类拟对称映射。特别地，同胚在 $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ 上诱导的复合算子属于受限辛群，当且仅当该同胚是魏尔-彼得森类拟对称映射。

因此，$T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 恰好是 $T(\mathbb{D}_-)$ 中经周期映射 Π 映入受限西格尔圆盘的元素所构成的群。将 Π 到 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 的限制记为 Π_{WP}。

结合其几何解释，这些条件的层次关系十分显著。$I - \overline{Z}_f Z_f \geq 0$ 蕴含 f 的单叶性，但 $I - \overline{Z}_f Z_f > 0$ 还进一步意味着 f 可作拟共形延拓（因而 f 与普适 Teichm¨uller 空间中的一个元素相关联）。若再加上条件 Z 为希尔伯特–施密特算子，则所考虑的空间便限制为魏尔-彼得森类 Teichm¨uller 空间。

注 6.8。Segal-Wilson 和 Kirillov-Yuri'ev 考虑 Diff($\mathbb{S}^1$) 在 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 上的作用，因此扩张实际上属于圆盘的哈代空间与反全纯哈代空间的直和。这对光滑同胚成立，但拟对称映射似乎在 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 上并非有界。对于拟对称映射，必须像 Nag 和 Sullivan 那样考虑 space$\dot{H}^{1/2}$($\mathbb{S}^1$) 空间。

人们可能会问，是否可以从 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 上的魏尔-彼得森度量恢复有限维空间上的魏尔-彼得森度量。Nag 和 Verjovsky [58] 证明，任意福克斯群的 Teichm¨üller 空间都与纤维横截。特别是，将 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 上的魏尔-彼得森度量拉回到有限维 Teichm¨üller 空间后，所得度量不可能是该有限维空间上的魏尔-彼得森度量。不过，他们展示了如何通过 S.J. Patterson 提出的平均化过程，从有限维空间上的度量

恢复魏尔-彼得森度量。Takhtajan-Teo 运用这一技巧，从他们在 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ [116] 上的曲率公式推出 Wolpert 曲率公式（见后文第 9 节）。

6.2. 周期映射的解释。在诸多解释中，Nag 和 Sullivan [57] 指出，这个周期映射类似于紧曲面的周期映射。

从历史上看，B. Riemann [85] 利用周期矩阵及其双线性关系，为一组在 $\mathbb{C}^g$ 中关于 $\mathbb{R}$ 线性无关的向量提供了一个必要且充分的条件，使这些向量成为某个 g 维阿贝尔簇上 g 全纯微分的周期。他还利用自己的 Theta 函数解决了任意代数曲线的雅可比反演问题。Torelli [121], 进一步发展了 Riemann 的工作，将亏格为 $g \geq 1$ 的紧黎曼曲面的双全纯等价与相关黎曼曲面的所谓极化雅可比簇联系起来。A. Andreotti 和 A. Weil 又进一步发展了 Torelli 的工作，使之成为复代数几何的基石之一。

我们先讨论周期映射的全纯性。Ahlfors 证明，紧曲面的周期映射 R 全纯地依赖于曲面，而 $T(R)$ 的复结构是使这一结论成立的唯一复结构 [4]。Takhtajan-Teo [116] 证明了两个周期映射 Π 和 Π_{WP} 都是全纯的。Π 的陪域是巴拿赫空间$\mathfrak{B}(\mathcal{D}(\mathbb{D}_-) \to \mathcal{D}(\mathbb{D}_+)$, 其元素是从 $\mathcal{D}(\mathbb{D}_-)$ 到 $\mathcal{D}(\mathbb{D}_+)$ 的有界算子。下面给出相关结论。

定理 6.9（[116]）。周期嵌入 $\Pi\colon T(\mathbb{D}_-) \to \mathfrak{B}(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{D}_-}), \mathcal{D}(\mathbb{D}_-))$ 是单射且全纯的。

注 6.10。他们的表述是用 ℓ^2给出的。将 ℓ^2 与伯格曼空间等同后，这里的表述可由公式 (6.3) 直接推出。为与 Nag 和 Sullivan [57] 保持一致，并在此处提供几何解释，我们调整了表述。

Π_{WP}的陪域，即受限西格尔圆盘，是 Sato-Segal-Wilson 格拉斯曼流形 $\mathfrak{S}$的子集。后者具有由希尔伯特–施密特范数诱导的复希尔伯特流形结构。我们有

定理 6.11（[116]）。KYNS 周期嵌入

$$\Pi_{\mathrm{WP}} : T_{\mathrm{WP}}(Z) \to \mathfrak{S}$$

是全纯的。

作者证明，拟圆盘 $\mathscr{K}$ 的齐次狄利克雷空间中元素的边界值，同时也是其补集的齐次狄利克雷空间中某个元素的边界值。这种“越界”映射恰好在拟圆盘的情形下有界。这就得到了以下结果，用以诠释 Nag 和 Sullivan 的极化。

定理 6.12（[82]）。设 f 与元素 $[\mu] \in T(\mathbb{D}_-)$ 和 $Z = \Pi([\mu])$ 相关联。设 $\mathscr{K} = f(\mathbb{D}_+)$ 且 $\mathscr{K}^* = \mathbb{C}\backslash\mathrm{cl}(f(\mathbb{D}_+))$。则 Z的图像 W为

$$\{h : \mathbb{D}_+ \to \mathbb{C} \ harmonic : \ h|_{\mathbb{S}^1} = H \circ f \ for \ some \ H \in \dot{\mathcal{D}}(\mathscr{K}^*)\}.$$

上述内容默认 H 延拓到 $\partial\mathscr{K}^* = \partial\mathscr{K}$，因此这个复合是有意义的（其中涉及一些解析细节，为简洁起见我们不予讨论）。在

换言之，格伦斯基算子 Z 的图形 W 是 $\mathscr{K}^*$上狄利克雷有界全纯函数边界值的拉回。因此，新的极化可以视为 $\mathscr{K}^*$上极化的拉回。将 $\mathscr{K}^*$ 视为 Teichm¨uller 空间中的一个元素，这就是 Nag 和 Sullivan[57] 给出的周期映射的解释（通过 d 进行共轭，以改用形式来表述）。

将极化解释为全纯函数边界值的拉回，这一观点也出现在二维共形场论中 [43, 附录 D]。Radnell-Schippers-Staubach 在 [81] 中讨论了这一结果与共形场论的关系；然而，该定理当时仅针对与魏尔-彼得森 Teichmüller 空间元素相关联的 Grunsky 矩阵作了陈述。后来，作者惊讶地发现，这一结果可以推广到整个 Teichmüller 空间 [82]。事实上，它在此被推广到了类型为 $(0,n)$ 的带边曲面。[5] $(0,n)$ 的定理用本文所采用的记号表述如下。¯设 $f \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\mathbb{C}\backslash\{p_1,\dots,p_n\})$ 是一组像互不重叠的拟共形映射，且每个映射都将 0 映到 p_n。记其诱导的 Grunsky 算子为

$$Z_f : \overline{\dot{\mathcal{D}}(\mathbb{D}_+)}^n \to \dot{\mathcal{D}}(\mathbb{D}_+)^n$$

（例如，可以利用积分表达式 (6.2) 对此进行定义）。令

$$\Sigma = \bar{\mathbb{C}}\backslash \cup_{k=1}^n \operatorname{cl} f_k(\mathbb{D}_+)$$

于是，记作 $\mathbb{D}_+^n = \mathbb{D}_+ \times \cdots \times \mathbb{D}_+$，广义格伦斯基算子的图为

$$\{h : \mathbb{D}_+^n \to \mathbb{C} \text{ harmonic} : \ h|_{(\mathbb{S}^1)^n} = H \circ f \text{ for some } H \in \dot{\mathcal{D}}(\Sigma)\}.$$

定理 6.12 是其特例。

鉴于上述结果，自然会想到一个问题：能否利用纤维／共形场论模型来定义周期矩阵，从而自然地统一有限维周期映射与无限维周期映射？下一步是将格伦斯基算子推广到任意亏格的曲面以及任意数量的边界曲线，这项工作由 M. Shirazi 完成 [111], ，并证明定理 6.12 在这种情形下仍然成立。在此过程中，必须针对经典周期所引起的拓扑障碍作出调整。广义周期映射与紧曲面的经典周期矩阵之间，除类比关系之外究竟有何联系，曾是一个悬而未决的问题；但近期的工作 [96] 以及正在进行的研究统一了二者。

注 6.13. 在更高亏格的情形下，需要研究 1-形式，而不只是函数。为此，作者证明， L^2 调和一形式的边界值可以与 Sobolev $H^{-1/2}$ 空间以共形不变的方式对应起来，并发展了一形式越界理论 [96, 97]。

因此，探讨扩展周期映射是否为 Teichm¨uller 空间的全纯映射是很有意义的。Radnell-Schippers-Staubach [83]证明了，对于类型为 $(0,n)$ 的曲面，定理 6.9 成立，其中使用的是由纤维模型产生的图册。（请注意，其中的例外情形 $g=0,n=1$ 和 $g=0,n=2$ 已按照注 3.7 得到处理。）该论文中的方法应当可以相当容易地扩展到类型 (g,n)。我们非常希望能将定理 6.11 推广到类型为 (g,n) 的带边曲面的魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间（将在后面的第 8 节中描述）。

[5]关于 WP类拟圆的早期结果见 [80], ，但该文未发表。

7. A brief overview of other refinements of Teichmüller space

在此，出于完备性和比较的考虑，我们还简要提及 Teichm¨uller 空间的一些其他细化形式，而非魏尔-彼得森空间。

Gardiner-Sullivan 的渐近共形 Teichmüller 空间。渐近 Teichmüller 空间 AT($\mathscr{R}$) 最初由 F. Gardiner 和 D. Sullivan [35] 针对上半平面提出，随后由 C. Earle、F. Gardiner 和 N. Lakic [27] 推广到任意双曲黎曼曲面。若单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的单叶函数 f 可拟共形延拓到整个平面，且 $f(\infty) = \infty$，则称其为渐近共形 [66]，如果

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1 - |z|) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| = 0.$$

现在，给定双曲黎曼曲面 $\mathscr{R}$上的两个拟共形映射 f 和 g，考虑以下等价关系：

$f \sim g$，如果存在一个从 $f(\mathscr{R})$ 到 $g(\mathscr{R})$ 的渐近共形映射 h，使得 $g^{-1} \circ h \circ f$与恒等映射同伦，且相对于 $\mathscr{R}$的理想边界而言。渐近 Teichmüller 空间 AT($\mathscr{R}$) 是 $\mathscr{R}$上的拟共形映射关于此等价关系所成的等价类集合。

注意到，这一定义是Teichm¨uller空间 $T(\mathscr{R})$定义的一种变体，其中要求映射 h 为共形映射。由于共形映射是渐近共形的，因此存在良定义的投影 $\mathcal{P}: \ T(\mathscr{R}) \to$ AT($\mathscr{R}$)。如果 $\mathscr{R}$ 是一个亏格有限且去掉有限个点的闭黎曼曲面，那么AT($\mathscr{R}$)只包含一个点。Earle、Gardiner和Lakic [27, 28] 证明了(AT($\mathscr{R}$)具有复流形结构，使得商映射 $\mathcal{P}: \ T(\mathscr{R}) \to$ AT($\mathscr{R}$) 是全纯的。有关这一主题的更多信息，请参阅 Gardiner-Lakic 专著 [34]。

Astala-Zinsmeister的BMO Teichm¨uller空间。这一版本的Teichm¨uller空间由K. Astala和M. Zinsmeister于 [8]引入。要定义它，需要做一些准备。首先回顾，在单连通域 $\mathscr{K}$ 中定义的正测度 λ 称为Carleson测度，当且仅当

$$\|\lambda\|_c = \sup \left\{ \frac{\lambda(\mathscr{K} \cap \mathbb{D}(z,r))}{r} : z \in \partial\mathscr{K}, 0 < r < \operatorname{diameter}(\mathscr{K}) \right\} < \infty, \tag{7.1}$$

其中，$\mathbb{D}(z,r)$ 是以 z 为中心、半径为 r 的圆盘。用 $CM(\mathscr{K})$ 表示 $\mathscr{K}$ 上所有 Carleson测度的集合。

现在令 $\mathcal{L}_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{D}_+)$ 为本质有界可测函数 μ 在 $\mathbb{D}_+$ 上构成的巴拿赫空间，使得测度

$$\lambda_\mu = \frac{|\mu|^2(z)}{1 - |z|^2} \, d\mathrm{A}_z$$

属于 $CM(\mathbb{D}_+)$。$\mathcal{L}_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{D}_+)$ 上的范数定义为

$$\|\mu\|_{\mathcal{L}_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{D}_+)} := \|\mu\|_\infty + \|\lambda_\mu\|_c^{1/2}$$

其中，$\|\lambda_\mu\|_c$ 是 λ_μ 的 Carleson范数，定义见（7.1）。令

$$\mathcal{M}_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{D}_+) = \{\mu \in \mathcal{L}_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{D}_+) : \|\mu\|_\infty < 1\}.$$

Cui-Zinsmeister [24] 将其推广到与福克斯群 G 相关的曲面，方法如下。设 G 是一个福克斯群，即由 M¨obius 变换构成的、作用适当不连续且无不动点的群，并且保持 $\mathbb{D}_+$ 不变。对于这样的群，令

$$M(G) := \left\{ \mu \in L^\infty(\mathbb{D}_+) : \|\mu\|_\infty < 1 \text{ and } \forall g \in G, \mu = \mu \circ g \frac{\overline{g'}}{g'} \right\}. \tag{7.2}$$

现在，对于相应的黎曼曲面 $\mathscr{R} = \mathbb{D}_+/G$，定义

$$\mathcal{M}_{\mathrm{BMO}}(G) := M(G) \cap \mathcal{M}_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{D}_+)$$

其采用与经典 Teichm¨uller 空间相同的等价关系。给定 $\mathcal{M}_{\mathrm{BMO}}(G)$，此处记为 BMOT($\mathscr{R}$) 的 BMO-Teichm¨uller 空间定义为由该等价关系确定的商空间。

注意，如果 G 是余紧的，那么与渐近 Teichm¨uller 空间的情形一样，BMOT($\mathscr{R}$) 是平凡的。但这就是两者类比的全部；渐近 Teichm¨uller 空间中的等价关系则大不相同。有关这一领域的进一步研究，请参阅 [54, 131]。

Guo-Tang 的 L^p-Teichm¨uller 空间。对于 $p \in [1, \infty)$, L^p-Teichm¨uller 空间最初由 Guo 于 [39], 引入，并由 Tang 在 [118], 中发展，其定义如下。首先，令$\mathcal{L}^p(\mathbb{D}_+)$ 为本质有界可测函数 μ 在 $\mathbb{D}_+$ 上构成的巴拿赫空间，使得

$$\iint_{\mathbb{D}_+} \frac{|\mu|^p(z)}{(1-|z|^2)^2} \, d\mathrm{A}_z < \infty.$$

Set $\mathcal{M}_p(\mathbb{D}_+) = \{\mu \in \mathcal{L}^p(\mathbb{D}_+)$: $\|\mu\|_\infty < 1\}$, 对于福克斯群 G , 定义 e

$$\mathcal{M}_p(G) := M(G) \cap \mathcal{M}_p(\mathbb{D}_+), \tag{7.3}$$

其中 $M(G)$ 如 (7.2) 所示，并采用与经典 Teichm¨uller 空间相同的等价关系。对于黎曼曲面黎曼曲面 $\mathscr{R} = \mathbb{D}_+/G$，此处记作 L^{p}T($\mathscr{R}$) 的 L^p-Teichm¨uller 空间，定义为由该等价关系所确定的商空间。在 [138], , Yanagishita 针对任意 $p \geq 2$，在与满足 Lehner 条件的任意福克斯群 G相关联的 G-不变、 p-可积 Teichm¨uller 空间上引入了一种复结构。

关于这一主题的进一步发展，请参阅 [50, 119, 52, 53]。 $p = 2$ 的情形当然就是 WP 类 Teichm¨uller 空间。

8. Weil-Petersson Teichmüller spaces of general surfaces

8.1. 概述。Yanagishita 和 Radnell-Schippers-Staubach 分别将魏尔-彼得森 Teichm¨uller 理论扩展到了更一般的曲面。两种方法有所不同，因此所得结果在很大程度上相互补充。最终，研究表明，所有三种模型中的复结构均存在且彼此等价。这里我们简要概述相关内容。具体结果将在下一节给出。

第一步由 Radnell-Schippers-Staubach 在 [74], 后来分为两部分发表的工作中迈出 [77, 76]。该工作通过将等价类限制为边界值属于 Weil–Petersson 类拟对称映射的拟共形变形，给出了类型为 (g, n) 的魏尔-彼得森类 Teichm¨üller 空间的定义，并给出了其拓扑和希尔伯特流形

结构，采用的是纤维模型。

Yanagishita [138] 和 Radnell-Schippers-Staubach [75] （后来发表于 [78, 79]）同时且独立地进一步研究了两个方面。Yanagishita 为满足他所称的 Lehner 条件的曲面的魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间赋予了复结构，该条件对简单闭测地线的长度设定了下界。这适用于类型为（g， n）的带边曲面。他的方法与 Cui [23], 采用第 4.1.1 节的 Bers 嵌入模型的方法相似。事实上，正如 Guo [39] 和 Tang[118] 对万能 Teichm¨uller 空间所做的那样，研究结果表明，对于 $p \geq 1$ 的 L^p理论，这些结论同样成立（通常会得到巴拿赫流形结构）。 $p = 2$的情形即为 Weil–Petersson 空间，并可得到希尔伯特流形结构。

另一方面，Radnell-Schippers-Staubach [75], 后来分两部分发表的[78, 79], 研究，为魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间赋予了基于调和贝尔特拉米微分的复希尔伯特流形结构；也就是说，该结构基于第 4.1.2 节的变形模型，适用于类型为 (g, n) 且具有 $2g - 2 + n > 0$ 的带边曲面。针对这一魏尔 - 彼得森 Teichm¨uller 空间，提出了两种定义：一种要求拟共形映射的边界值为 WP 类拟对称映射；另一种要求存在一个具有 L^2 贝尔特拉米微分的代表元。后一种定义与 Yanagishita 将其限制在类型为 (g, n) 的曲面时所给出的定义一致。利用缝合技巧和双曲度量的边界行为，证明了这两种定义等价。还证明了变形复结构与从纤维模型得到的复希尔伯特流形结构相容。请注意，即使在经典的 L^∞ 情形下，从纤维/CFT 视角导出的复结构与任一经典结构相容，也是一项相当近期的成果 [72]。因此，对于类型为 (g, n) 且具有 $2g - 2 + n > 0$ 的带边曲面，Radnell-Schippers-Staubach [75] 给出了切空间结构，并证明魏尔-彼得森配对在每个切空间上都收敛。

Yanagishita [139]后来独立地基于调和贝尔特拉米微分，为更一般地满足 Lehner 条件的曲面构造了复希尔伯特流形结构。随后，他证明了该结构与由 Bers嵌入导出的复结构相容，并证明魏尔-彼得森度量在每个切空间上收敛。他还证明了该度量是 K¨ahler 度量，将 Takhtajan-Teo 关于普遍 Teichm¨uller 空间的定理推广了出去。关于 K¨ahler 性和曲率的相关结果将在后面的第 9 节中讨论。

总而言之，对于满足 Lehner 条件的曲面，Bers 嵌入模型与变形模型给出了等价的复结构。对于类型为 $(g, n)2g - 2 + n > 0$ 的带边曲面，变形模型与纤维模型给出了等价的复结构。因此，在类型为 (g, n) 且具有 $2g-2+n > 0$ 的带边曲面这一特殊情形下，三种复结构彼此等价。

注 8.1. 由此可以进一步探讨，是否存在某种有意义的方式，使纤维模型能够扩展到满足 Lehner 条件的一般曲面（或者比类型 (g, n) 的带边曲面更大的某个子类）。

8.2. 流形与切空间结构。

8.2.1. 纤维模型。Radnell、Schippers 和 Staubach 首次定义了型为（g,n）的带边曲面的魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间，并赋予其复希尔伯特流形结构 [74], ，此后相关内容见 [77, 76]。这是通过将T（Σ）的纤维模型细化为魏尔-彼得森类映射而得到的。回顾一下，通过缝合圆帽，可以得到一个带有n 个穿孔的亏格为 g 的曲面 Σ^P 。其思路是将第 4.1.3 节的构造限制到正则性更高的魏尔-彼得森类映射。共形映射的局部模型为

$$\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{WP}} = \{f \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}} : \|f''/f'\|_{A^2_1(\mathbb{D}_+)} < \infty\}.$$

因此我们定义

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{WP}} = \chi|_{\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{WP}}} : \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{WP}} &\mapsto A^2_1(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C} \\ f &\mapsto (f''/f', f'(0)).\end{aligned}$$

由于根据 Cui 和 Takhtajan-Teo 的定理 5.3，包含映射 $A^2_1(\mathbb{D}_+) \to A^\infty_1(\mathbb{D}_+)$ 是有界的，因此可直接得出包含映射 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}$ 是有界的。我们有

定理8.2（[77]）。设 Σ^P 是一个亏格为 g 且有 n 个穿孔的曲面。 $\chi_{\mathrm{WP}}(\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}})$ 在 $A^2_1(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C}$ 中是开集。

若 $f \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}(\Sigma^P)$ 满足 $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$（见定义 3.4），并且存在坐标 $\zeta_k : B_k \to \mathbb{C}$，属于 p_k，对应于 $k = 1, \dots, n$，使得 $\zeta_k \circ f_k \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}$，则称其为 $f \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}(\Sigma^P)$。

通过将第 4.1.3 节的开集 (4.3) 和坐标图 (4.4) 限制到魏尔-彼得森情形，我们在 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}(\Sigma^P)$ 中构造一个坐标图。沿用该节中的记号，令

$$V_{\zeta,K} = \{f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{WP}}(\Sigma^P) : \mathrm{cl}(\, f_k(\mathbb{D}_+)) \subset K_k, k = 1, \dots, n\}.$$

这些集合构成了 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}$ [74] 上一个豪斯多夫、第二可数拓扑的基。接下来我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{E} : V_{\zeta,K} &\to (\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{WP}})^n \\ f &\mapsto \zeta \circ f.\end{aligned}$$

定理8.3（[77]）。设 Σ^P 是一个亏格为 g、有 n 个穿孔的曲面。 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 是一个巴拿赫流形，其局部模型为 $\bigoplus^n A^\infty_1(\mathbb{D}_+) \oplus \mathbb{C}$，相对于图册 $\chi^n_{\mathrm{WP}} \circ \mathcal{E}$。

我们还有

定理8.4（[77]）。设 Σ^P 是一个亏格为 g 、有 n 个穿孔的曲面。包含映射$\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}(\Sigma^P) \to \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 是全纯的。

回顾定义2.2中关于边界拟对称映射的内容，我们定义如下魏尔-彼得森类拟对称映射。

定义8.5。设 Σ 和 Σ_1 是带边曲面，其边界的分支 C 和 C_1 同胚于 $\mathbb{S}^1$。若拟对称映射 $\phi : C \to C_1$ 满足：对于 C 和 C_1 的任意领圈图 ψ 和 ψ_1，都有 $\psi_1 \circ \phi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{QS}_{\mathrm{WP}(\mathbb{S}^1)}$，则称其为魏尔-彼得森类。

如果 Σ 和 Σ_1 是类型为 (g,n) 的带边曲面，我们称映射 $\phi \in \mathrm{QS}(C, C_1)$ 为魏尔-彼得森映射，若其在 $\partial\Sigma$ 的每个分支上的限制都属于上述意义下的魏尔-彼得森类。将这类魏尔-彼得森类映射的集合记为 $\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\partial\Sigma, \partial\Sigma_1)$。

Radnell-Schippers-Staubach 如下定义了类型为 (g,n) 的带边曲面的魏尔-彼得森类 Teichm¨uller 空间。

定义 8.6. 设 Σ 为类型为 (g,n) 的带边曲面。 Σ 的魏尔-彼得森类 Te- ichm¨uller 空间为

$$T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)=\{[\Sigma,F,\Sigma_1]\in T(\Sigma):\ F|_{\partial\Sigma}\in \mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\partial\Sigma,\partial\Sigma_1)\}\,.$$

回顾 (3.4)、(3.6) 及其上下文中给出的 $\mathcal{C}$ 和 F_q 的定义。令

$$\mathcal{C}_{\mathrm{WP}}=\mathcal{C}|_{T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)}\,.$$

对于一点 q，令 $\mathrm{F}_{\mathrm{WP},\ q}$ 表示 F_q 在 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}$ 上的限制。

这是良定义的，因为 ModI(Σ)，尤其是 DB(Σ)，显然保持 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$。最后，令 $U_{\zeta,\ K}=T(V_{\zeta,\ K})$ 表示由 $(\mathcal{O}^{qc}{}_{\mathrm{WP}})^n$ 中的开集 $V_{\zeta,\ K}$ 在 $(\mathcal{O}^{qc}{}_{\mathrm{WP}}(\Sigma_1))$ 上诱导出的开集，并令

$$\mathcal{G}_{\mathrm{WP}}:U\times V_{\zeta,K}\to T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$$

由将 $\mathcal{G}$ 的第二分量限制到 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}_{WP}(\Sigma_1)$ 的开子集 $V_{\zeta,\ K}$ 上而得到。$\mathcal{G}$ 显然取决于 ζ、 K 以及点 $p\in\mathcal{C}^{-1}(q)$ 的选择，因此得到一族这样的映射。回顾整个构造取决于对拟对称映射 τ_1，……，τ_n 的选择，它们用于参数化边界。

定理 8.7（[76]）。设 Σ 是一个类型为 (g,n)、具有 $2g-2+n>0$ 的带边曲面，并固定一个 n 元组的拟对称映射 $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$，其中 $\tau_k\in\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1,\partial_k\Sigma)$。由上述 τ 诱导的映射族 $\mathcal{G}^{-1}$ 构成一个图册，因此 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 关于此图册是一个复希尔伯特流形。此复结构与 τ 无关。

注 8.8. 已证明，此图册中各映射的定义域构成一个 Hausdorff、第二可数且可分的拓扑的基。

注 8.9. 与 $\chi^n_{\mathrm{WP}}\circ\mathcal{E}$复合后， $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 的局部模型为 $\mathbb{C}^d\oplus(A^2_1(\mathbb{D}_+)\ \oplus\mathbb{C})^n$。

注 8.10. 关于此复结构，纤维是复流形，且$\mathcal{C}_{\mathrm{WP}}$ 是一个具有局部全纯淹没的全纯映射。这基本上可直接由定义得出。

注 8.11. 由于 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma^P)$ 退化为一点（正如注 3.7 中所见）， $2g-2+n>0$ 排除了两种例外情形。例外情形$g=0$ 和 $n=1$ 不过是 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$，因此纤维模型将 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 与经过适当¯归一化的 $\mathrm{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ 元素等同起来。因此，这种情形正是 Cui 和 Takhtajan-Teo 已给出的$T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 的预施瓦茨模型。

$g=0$、 $n=1$ 的情形可以用与 Radnell-Schippers[73] 中相同的方法处理，即将那些论证重复用于 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{A})$，不过目前尚未这样做。

我们还有

定理 8.12（[76]）。设 Σ 是一个类型为（g， n）的带边曲面，满足 $2g-2+n>0$；并设 F: $\Sigma\to\Sigma_0$ 是一个拟共形映射，满足 $[\Sigma,F,\Sigma_0]\in T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$。基点变换映射

$$R_F:T_{\mathrm{WP}}(\Sigma_0)\to T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$$

相对于定理 8.7 中得到的复结构是一个双全纯映射。

当然，这将在证明不同复结构之间的相容性时发挥作用。

下面的定理也至关重要。

定理 8.13（[76]）。设 Σ 是 $2g-2+n>0$ 的一个类型为（g, n）的带边曲面。模群 ModI 保持 T_{WP}（Σ）。此外，它通过双全纯映射适当不连续且无不动点地作用。

在 [75], 后来发表于 [78], 的文献中，Radnell-Schippers-Staubach 根据微分在领圈上的行为，对微分进行了局部刻画。设 Σ 为一个类型为（g, n）的黎曼曲面。根据带边曲面的定义，在 $\Sigma\cup\partial\Sigma$ 上存在一个映射到闭圆盘（等价地，映射到上半平面）的图册，使得过渡映射相对于闭圆盘上的相对拓扑是同胚的，并且在内部是全纯的（例如参见 Ahlfors Sario [3]）。如果一个坐标图映射到开圆盘（等价地，其定义域只包含 Σ中的点），我们称其为内部图；如果其定义域包含 $\partial\Sigma$中的点，则称其为边界图。

设$\alpha\in\mathscr{Q}_{l,\,m}(\Sigma)$。给定此图册中的一个坐标图 $\psi:\ U\to V$，我们称 $\psi^*\alpha=h(z)dz^l d\bar{z}^k\in L^2_{l,\,m}(\mathbb{D}_+;\ V)$ 当且仅当

$$\int_V \frac{|h(z)|^2}{(1-|z|^2)^{2-2l-2m}}\frac{d\bar{z}\wedge dz}{2i}<\infty.$$

换言之，我们要求相对于 $\mathbb{D}_+$ 上的双曲度量，坐标图的拉回属于 L^2。

定理 8.14（[78]）。设 Σ 是类型为（g, n）的带边曲面。以下条件等价。

(1) $\alpha\in L^2_{l,\,m}(\Sigma)$; (2) $\psi^*\alpha\in L^2_{l,\,m}(\mathbb{D}_+;V)$，对边界图册中的所有坐标图 $\psi:\ U\to V$ 均成立；(3) $\psi^*\alpha\in L^2_{l,\,m}(\mathbb{D}_+;V)$，对一组覆盖 Σ 的特定内部图以及 $\partial_1\Sigma,\dots,\partial_n\Sigma$ 的特定领圈图 $\psi_1,\dots,\psi_n$ 均成立。

本质上，这一思想是：边界领圈邻域上的双曲度量，在解析意义上与圆盘在 $\mathbb{S}^1$ 附近的双曲度量表现相同。这是应用缝合观点的一个有用工具。

这一局部刻画可用于证明以下结论。

定理 8.15（[78]）。设 Σ 和 Σ_1 是类型为（g,n）的带边曲面，且 $f:\Sigma\to\Sigma_1$是拟共形映射。那么，$F|_{\partial\Sigma}\in\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 当且仅当 F 相对于边界同伦于一个拟共形映射 $F_0:\Sigma\to\Sigma_1$，并且满足

$$\mu(F_0)\in L^2_{-1,1}(\Sigma)\cap L^\infty_{-1,1}(\Sigma)_1.$$

接下来我们将看到，Yanagishita 的一项结果表明，这样的代表元可由 Douady-Earle 延拓得到。

注 8.16。文献 [75, 79] 还证明了，对于 $k=1,\dots,n$，$\phi_k=F|_{\partial_k\Sigma}\in\mathrm{QS}(\mathbb{S}^1,\Sigma)$ 当且仅当相应的标架 $f=(f_1,\dots,f_n)$（$f:\mathbb{D}_+\to\Sigma^P$由纤维映射 $\mathcal{C}$ 得到）属于 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{WP}}$。因此，定理 8.15 将 Cui 和 Takhtajan-Teo 的定理 5.2 推广到了类型为（g,n）的曲面。

特别是，

推论 8.17. [75, 78] 设 Σ 为类型 (g,n) 的带边黎曼曲面。那么

$$T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)=\{[\Sigma,F,\Sigma_1]\in T(\Sigma)\ :\ \mu(F)\in L^2_{-1,1}(\Sigma)\cap L^\infty_{-1,1}(\Sigma)\}. \tag{8.1}$$

因此，(8.1) 为这些曲面的魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间提供了另一种定义。

8.2.2. Bers 嵌入模型。Yanagishita [138] 利用 Bers 嵌入模型在 Weil-Petersson Teichm¨uller 空间上构造了一个复结构。我们概述 Yanagishita 关于 L^2 情形下 Bers 嵌入的结果。事实上，对于 $p \geq 1$ 而言，这些结果在 L^p 中成立（或在少数情况下在 $p \geq 2$中成立）。

令 G 为任意福克斯群。令 $T^p(G)$ 表示 $[\mu]$ 中具有代表元 $\mu \in L^p_{-1,1}(N)$ 的元素子集，其中 N是 G的基本域。

注 8.18。等价地，在所得商曲面 $\Sigma = \mathbb{D}_-/G$上有 $\mu \in L^p_{-1,1}(\Sigma)$。因此，对于 $p = 2$，这与 Radnell-Schippers 的公式 (8.1) 定义一致（尽管该定义仅针对类型为 (g, n) 的带边曲面作出）。从这里开始，我们将限制于 $p = 2$，此时具有复希尔伯特流形结构和黎曼度量。

Yanagishita 证明了映射

$$\sigma : T^2(G) \to L^\infty_{-1,1}(\mathbb{D}_-; G)$$

将 $[\mu]$ 映射为 w_μ 边界值的 Douady-Earle 延拓，属于 $L^2_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-; G)$。

记 $\mathrm{Ael}^2(\mathbb{D}_-; G) = L^\infty_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-) \cap L^2_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-; G)$，其中赋予其直和范数

$$\|\cdot\|_{2,\infty} = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_2$$

如 Cui 中所述（注意 Cui 使用了记号 $M_{1,\ *}$）。我们还按照 (3.7) 定义了 $\psi \in T(\mathbb{D}_-;\ G)$ 的扰动群 G_ψ。

回顾一下，Cui 证明了魏尔-彼得松拟对称构成一个群。对于 G-不变拟对称映射，这一点并不成立，但下面的定理在某种意义上推广了 Cui 的结果。

定理 8.19。 [138] 对于任意福克斯群 G，以下条件等价。

(1) $\psi \in T^2(G)$。(2) $\psi^{-1} \in T^2(G_\psi)$。

(3) $\sigma(\psi) \in L^\infty_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-; G) \cap L^2_{-1,\ 1}(\mathbb{D}_-; G)$。

用直接图景表述，令 Σ 和 Σ_ψ 分别为 $\mathbb{D}_-/G$ 和 $\mathbb{D}_-/G_\psi$，这表明基点变换 R_ψ 将 $T^2(\Sigma)$ 映到 $T^2(\Sigma_\psi)$。

注 8.20。请注意，这与定理 8.12 是不同的定理，即使在类型为 (g, n) 的情形下也是如此，因为目前尚不知道这些复结构是否相同。后文我们将看到，它们实际上是相同的。

Yanagishita 还定义了以下 Teichm¨uller 距离的类似形式。对于 $\psi_1, \psi_2 \in T^2(G)$，定义

$$\ell_{2,\infty}(G)(\psi_1, \psi_2) = \inf\left\{ \left\| \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1\overline{\mu_2}} \right\|_{2,\infty} : \mu_k \in \mathrm{Ael}^2(G), [\mu_k] = \psi_k, k = 1, 2 \right\}.$$

我们还有以下定理，它在一定程度上推广了 Cui 和 Takhtajan-Teo 的定理 5.2。

定理 8.21（[138]）。对于任意福克斯群，

$$\beta(T^2(G)) \subset \beta(T(G)) \cap A^2_2(\mathbb{D}_+; G).$$

注 8.22。这也推广了定理 5.2 的一个包含关系，但有趣的是，其推广方式与注 8.16 不同。

因此，我们可以探讨 Bers 嵌入的拓扑性质。事实上，有如下结论。

定理 8.23 ([138])。设 G 是任意一个福克斯群。

(1) σ 从 $(T^2(G), \ell_{2,\infty})$ 到 $\left(\mathrm{Ael}^2(G), \|\cdot\|_{2,\infty}\right)$ 是连续的。(2) Bers 嵌入 β 从 $(T^2(G), \ell_{2,\infty})$ 到 $A_2^2(\mathbb{D}_+; G)$ 是连续的。

如果进一步假设 G 满足 Yanagishita 所称的“Lehner 条件”，则还可以得出更多结论。

定义 8.24。若 G 中所有简单闭测地线长度的下确界有限，则称福克斯群 G 满足 Lehner 条件。

随后，他基于 R. Rajeswara、D. Niebur、M. Sheingorn 和 J. Lehner 的研究结果证明了以下结论。

定理 8.25（[138]）。福克斯群 G 满足 Lehner 条件，当且仅当从 $A_2^2(G)$ 到 $A_2^\infty(G)$ 的包含映射是有界的。

根据定义可直接看出，类型为 (g,n) 的带边曲面满足 Lehner 条件。

Yanagishita 证明了，在此条件下，Bers嵌入是到其像上的同胚。

定理 8.26（[138]）。设 G 是满足 Lehner 条件的福克斯群。则 Bers嵌入 β 是从 $(T^2(G), \ell_{2,\infty})$ 到 $A_2^2(\mathbb{D}_+; G)$ 中其像上的同胚。因此，$T^2(G)$ 具有复希尔伯特流形结构。

这就完成了从 Bers嵌入构造复结构的过程，类似于经典的第 4.1.1 节中的 L^∞ 巴拿赫流形结构。

此外，关于此复结构，基点变换是双全纯映射。

定理 8.27（[138]）。对于任意福克斯群 G 和 $\psi \in T^2(G)$，基点变换映射 R_ψ 是从 $(T^2(G), \ell_{2,\infty}(G))$ 到 $(T^2(G_\psi), \ell_{2,\infty}(G_\psi))$ 的同胚。若 G 满足 Lehner 条件，则根据定理 8.26，R_ψ 相对于由 $A_2^2(\mathbb{D}_+; G)$ 诱导的复希尔伯特流形结构是一个双全纯映射。

在黎曼曲面上，基点变换将 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-/G)$ 映至 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-/G_\psi)$。

注记 8.28。需要指出的是，即使对于类型为 (g,n) 的曲面，定理 8.26 中关于复结构的陈述也不能由定理 8.7 推出，定理 8.7 也不能由定理 8.26 推出。这是因为当时尚未证明这些复结构彼此相同。最终，三个复结构被证明是一致的，正如我们将在下文看到的那样。

8.2.3. 变形模型。复结构和切空间的变形模型最初见于 [75], ，后来发表于 [79], ，适用于满足 $2g-2+n>0$ 的类型为（g,n）的带边曲面。该理论以 Ahlfors-Weill 反射为基础，与第 4.1.2 节中的经典 L^∞ 模型相同。

下文使用记号

$$\mathrm{TBD}(\Sigma)=L^\infty_{-1,1}(\Sigma)\cap L^2_{-1,1}(\Sigma).$$

这里，TBD 表示“切向 Beltrami 微分”，即 $L^\infty_{-1,1}(\Sigma)_1$ 和 $L^2_{-1,1}(\Sigma)$中曲线的切向量。下面的存在性定理在描述切空间时发挥了重要作用，也为考虑这个空间提供了依据。

定理 8.29（[79]）。设 Σ 是一个类型为（g,n）的带边曲面，满足 $2g-2+n>0$。设 $t\mapsto[\Sigma,F_t,\Sigma_t]$ 是 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 中的一条全纯曲线，其复结构由定理 8.7 得到，并满足 $[\Sigma,F_0,\Sigma_0]=[\Sigma,\mathrm{Id}\ \Sigma]$。则存在一个 $\delta>0$ 以及一族由一个参数决定的代表元（$\Sigma,F_t\Sigma_t$），对应于 $|t|<\delta$，使得

(1) $\|\mu(F_t)\|_2$ 在 t 中一致有界；(2) $t\mapsto\mu(F_t)$ 在 $L^2_{-1,1}(\Sigma)$ 中全纯；(3) $t\mapsto\mu(f_t)$ 在 $L^\infty_{-1,1}(\Sigma)$ 中全纯。

因此，可以找到在 L^∞ 和 L^2空间中同时全纯的曲线。

此外还证明了

定理 8.30（[79]）。设 Σ 是一个类型（g,n）带边曲面。我们有 $H_{-1,\ 1}(\Sigma)\subset\Omega^{1,1}(\Sigma)$，且该包含映射有界。

这等价于包含映射 $A_2^2(\Sigma^*)\ \to\ A_2^\infty(\Sigma^*)$ 有界。利用类型（g,n）带边曲面满足 Lehner 条件这一事实，也可以由定理 8.25 得出这一结论。或者也可以说，这两个定理意味着类型（g,n）曲面满足 Lehner 条件。

作为推论，我们得到

推论 8.31（[79]）。若 Σ 是一个类型（g,n）带边曲面，则

$$\Omega_{-1,1}(\Sigma)\cap\mathrm{TBD}(\Sigma)=H_{-1,1}(\Sigma).$$

因此，自然可以定义

$$\mathcal{N}_r(\Sigma)=\mathcal{N}(\Sigma)\cap L^2_{-1,1}(\Sigma)$$

其中回顾一下，$\mathcal{N}(\Sigma)$ 是无穷小平凡微分，也就是说，这些微分与 Teichm¨uller 等价关系相切。利用推论 8.31 以及 Bergman 投影作用于微分的性质，Radnell-Schippers-Staubach 得到了 TBD(Σ) 模去无穷小平凡微分后的如下刻画。

定理 8.32（[79]）。设 Σ 是一个类型为（$g,\ n$）的带边曲面。则有如下直和分解

$$\mathrm{TBD}(\Sigma)=\mathcal{N}_r(\Sigma)\oplus H_{-1,1}(\Sigma).$$

从 TBD(Σ) 到 $H_{-1,1}(\Sigma)$ 的投影是有界的。最后，$\mathcal{N}_r(\Sigma)$ 是 Bers嵌入 $D_0(\beta\circ\Phi)$ 在 $[\Sigma,\mathrm{Id}\ \Sigma]$ 处的导数的核。

这进而导出了对 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 中切向量的描述。

定理 8.33（[79]）。设 v 是在 $[\Sigma,\mathrm{Id}\ \Sigma]$ 处与 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 相切的向量。存在一条全纯曲线 $t\mapsto[\Sigma,F_t,\Sigma_t]$（其中 $|t|<\delta$），使得 $[\Sigma,F_0,\Sigma_0]=[\Sigma,\mathrm{Id}\ \Sigma]$，并且 (1) $\mu(F_t)\in H_{-1,\ 1}(\Sigma)$ 对于 $|t|<\delta$；(2) 关于 H_{-1}，μ_t 在 t 中全纯，$_1(\Sigma)$；(3) v 在 $t=0$ 处与 $[\Sigma,F_t,\Sigma_t]$ 相切。

这使我们能够构造一个新的图册。回顾，$\Phi:L^{\infty}_{-1,\ 1}(\Sigma)_1\to T(\Sigma)$ 通过求解贝尔特拉米方程，将贝尔特拉米微分映射为其对应的 Teichmüller 空间代表元。首先，我们对 Φ 作局部求逆。

定理 8.34（[79]）。设 Σ 是一个类型为 (g,n) 的带边黎曼曲面，且 $2g-2+n>0$。存在 $0\in H_{-1,\ 1}(\Sigma)$ 的一个邻域 U，使得关于由定理 8.7 得到的复结构，$\Phi|_U$ 是到 $T_{WP}(\Sigma)$ 上的一个双全纯映射。

利用基点变换关于复结构的全纯性（定理 8.12），我们得到

推论 8.35（[75, 79]）。设 Σ 是类型为 $(g,\ n)$ 的带边曲面，且 $2g-2+n>0$。设 $F:\Sigma\to\Sigma_0$ 是一个拟共形映射。在 $H_{-1,1}(\Sigma_0)$ 中存在包含 0 的开邻域 B，使得

$$\Psi_{(\Sigma,f,\Sigma_0)}:=R_{F_\mu}\Phi_{\Sigma_0}$$

是映到 $[\Sigma,F,\Sigma_0]$ 的一个开邻域上的双全纯映射。这些映射的逆映射构成了 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 上的一个复希尔伯特流形结构的图册，并且与定理 8.7 中得到的复结构相容。[6]

注记 8.36。这些映射的逆映射是 $\Lambda^{-1}_{\Sigma_0}\beta_{\Sigma_0}R_{F_0^{-1}}$，因此，除去显然等距地反射到 $A_2^2(\Sigma_0^*)$ 中的情形外，它们就是第 4.1.2 节经典坐标图的 L^2 版本。注意，由于 Ahlfors-Weill 反射 Λ 显然是一个等距映射，我们也自动得到 $\beta_{\Sigma_0}R_{F_0^{-1}}$ 是映入 $A_2^2(\Sigma_0^*)$ 的一个图册。

上述结果表明，我们可以将任意点$[\Sigma,F,\Sigma_0]\in T_{\mathrm{WP}}(\Sigma_0)$处的切空间与

$$T_{[\Sigma,F,\Sigma_0]}T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)\cong D_0R_FH_{-1,1}(\Sigma_0).$$

直接推论可知，魏尔-彼得森度量在每个切空间上都收敛。事实上，我们可以如下定义魏尔-彼得森配对。设 $\mu,\nu\in H_{-1,1}(\Sigma)$ 是 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 在 $[\Sigma,\mathrm{Id}\ \Sigma]$ 处切空间中的元素。则令

$$\langle\mu,\nu\rangle_{[\Sigma,\mathrm{Id},\Sigma]}$$

表示 $H_{-1,1}(\Sigma)$ 中的内积。于是，对于任意点 $[\Sigma,F,\Sigma_0]\in T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 以及切向量 $\mathbf{v}$、$\mathbf{w}\in T_{[\Sigma,F,\Sigma_0]}T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$，我们定义魏尔-彼得森黎曼度量如下：

$$\left\langle D(R_F)^{-1}\mathbf{v},D(R_F)^{-1}\mathbf{w}\right\rangle_{[\Sigma,F,\Sigma_0]}. \tag{8.2}$$

该级数在每个切空间上都收敛，并且由于基点变换映射的双全纯性，显然是光滑的。它是唯一一个在基点变换下保持不变、且在单位元处与配对相一致的度量 $H_{-1,1}(\Sigma_0)$。

[6]该结果在 [79, 定理 4.8] 的陈述中有一处排印错误：$H_{-1,1}(\Sigma)$ 应替换为此处所示的 $H_{-1,1}(\Sigma_0)$。

后来，Yanagishita 将变形图册的结果推广到了满足 Lehner 条件 [139] 的一般曲面 $\Sigma = \mathbb{D}_-/G$，其福克斯群 G 满足该条件。

定理 8.37（[139]）。设 G 是满足 Lehner 条件的福克斯群。坐标图$\beta_{\Sigma_0} R_{F_0^{-1}}$构成一个图册，给出与通过定理 8.26 从 Bers 嵌入得到的复结构相容的复希尔伯特流形结构。基点变换是全纯的。

他还将切空间和魏尔-彼得森配对的描述推广到了由满足 Lehner 条件的福克斯群 G 所对应的曲面 $\Sigma = \mathbb{D}_-/G$。

定理 8.38（[139]）。推论 8.31 对满足 Lehner 条件的曲面也成立。

定理 8.39（[139]）。定理 8.32 对满足 Lehner 条件的曲面也成立。

因此，他得到了满足 Lehner 条件的曲面上的收敛魏尔-彼得森配对（8.2）。

定理 8.34 和定理 8.37 中关于图册定义复结构的陈述，在类型为（g，n）的带边曲面情形下相同；事实上，定理 8.34 是定理 8.37 的推论。然而，关于该结构相容性的陈述则截然不同：定理 8.34 指出，该图册与由纤维结构得到的复希尔伯特流形结构相容；而定理 8.37 指出，该图册与由 Bers 嵌入得到的复希尔伯特流形结构相容。综合这些结果可知，三者彼此一致。也就是说，由定理 8.7、8.34 和 8.37 可得如下结论。

推论 8.40。设 Σ 是一个满足 $2g-2+n>0$ 的 (g,n) 型带边曲面。由纤维模型、Bers嵌入和变形模型得到的复希尔伯特流形结构彼此等价。

作者在我们的综述 [95] 中对此进行了论述。

注 8.41。对于两个经典复结构的 L^2 类比，我们加入了一个从纤维/CFT 视角导出的新复结构。在经典 L^∞ 情形下，这还需要一些额外工作 [72]。

最后，我们以 Yanagishita 的另一个有趣结果作结。与 Cui 的完备性定理（定理 5.7）形成鲜明对比的是，Weil-Petersson 距离几乎从不完备。

定理 8.42（[141]）。设 Σ 是一个满足 Lehner 条件的黎曼曲面。若 Σ 与穿孔圆盘或圆盘共形等价，则 $T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$ 是完备的。否则，它不是完备的。

注 8.43。事实上，该定理已被证明对 $p \geq 2$成立；对于 $p \geq 2$，圆盘的p-魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间的完备性归功于 K. Matsuzaki [51]。

9. Kähler geometry and global analysis of Weil-Petersson Teichmüllerspace

本节简要概述与魏尔-彼得森度量相关的一些几何结果，重点讨论 K¨ähler 性和 K¨ähler 势、陈类及指标定理。此外，我们还将回顾有限维情形（即紧黎曼曲面的情形）中的一些结果，既为了与目前已有的无限维结果作比较，也因为这些结果在魏尔-彼得森理论背景下本身就很有意义。这里的介绍绝非面面俱到，我们只选取与 WP 类 Teichm¨uller 理论相关的一些结果。

9.1. K¨ahler 性、曲率与 K¨ahler 势。在论文 [133]中，Weil 提出魏尔-彼得森度量是否为 K¨ahler 度量；如果是，其曲率又是什么。
L. Ahlfors [6] , 解决了这个问题。他证明，对于紧黎曼曲面，魏尔-彼得森度量是 K¨ahler 度量。更具体地说，他证明了以下定理:

定理 9.1. 设 $\mathscr{R}$ 为亏格 $g>1$ 的紧黎曼曲面。在 Teichm ¨uller 空间$T(\mathscr{R})$中，Bers 坐标在参考点处关于魏尔-彼得森度量是测地坐标。特别地，该度量是 K ¨ahler 度量。

Ahlfors 在其文集的评论中 [2], 提到，Weil 也有一个证明，但没有发表。后来，Ahlfors 计算了全纯截面的曲率以及里奇曲率 [7], ，由此得到

定理 9.2。魏尔-彼得森度量的里奇曲率、全纯截面曲率和标量曲率均为负。

在 [137], S. Wolpert 运用经典的 Maaß 不变微分算子演算，得到了黎曼曲率张量的一个公式，并证明魏尔-彼得森度量的截面曲率为负。H. L. Royden [86], [87]和 A. Tromba [124]也独立得到了曲率为负这一结果。更明确地说，设 $\mathscr{R}$ 为亏格 $g>1$的紧黎曼曲面。记 $\{\mu_\alpha;\ \alpha=1,\ \ldots\ldots,\ 3g-3\}$ 为 $\mathscr{R}$ 上与一组切向量 $\{\partial/\partial s_\alpha;\ \alpha=1,\ \ldots\ldots,\ 3g-3\}$相对应的调和贝尔特拉米微分向量空间的一组基。引入这组基

$$g_{\alpha\bar\beta}=\int_{\mathscr{R}}\mu_\alpha\overline{\mu_\beta}\,dA_{\mathrm{hyp}}, \tag{9.1}$$

可以将魏尔-彼得森度量写成

$$\omega_{\mathrm{WP}}=ig_{\alpha,\bar\beta}\,dz^\alpha\wedge d\bar z^\beta,$$

采用爱因斯坦求和约定。以下结果见 [137] 和[124]。

定理9.3. 设 $\mathscr{R}$ 是一个亏格为 $g>1$ 的紧黎曼曲面，则有

(1) 对于 $g>1$ ， ω_{WP} 在 $T(\mathscr{R})$ 上的全纯截面曲率和里奇曲率均有上界 $2\pi^{-1}(g-1)$。

(2) ω_{WP} 的截面曲率为负。

(3) 彼得松-魏尔度量的曲率张量等于

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = & -2\int_{\mathscr{R}} (D-2)^{-1}\left(\mu_\alpha\overline{\mu_\beta}\right)\left(\mu_\gamma\overline{\mu_\delta}\right)\, dA_z \\
& -2\int_{\mathscr{R}} (D-2)^{-1}\left(\mu_\alpha\overline{\mu_\delta}\right)\left(\mu_\gamma\overline{\mu_\beta}\right)\, dA_{\mathrm{hyp}}
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

其中 D 是作用于 $\mathscr{R}$ 上的 L^2 函数的实拉普拉斯算子，其谱位于 $(-\infty, 0]$。

在 [100], 中，Schumacher 不仅证明了定理9.3中的截面曲率为负，还进一步证明了以下结果。

定理9.4. 对于 $g>1$， $T(\mathscr{R})$ 上的魏尔-彼得森度量具有 Y. T. Siu 意义下的强负曲率，即其黎曼张量满足

$$
R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}\left(A^\alpha\overline{B^\beta} - C^\alpha\overline{D^\beta}\right)\left(\overline{A^\delta}B^\gamma - \overline{C^\delta}D^\gamma\right) \geq 0
$$

对所有复向量 A^α、B^β、C^γ、D^δ 均成立，且等号仅在所有 α 和 β 均满足 $A^\alpha\overline{B^\beta} = C^\alpha\overline{D^\beta}$ 时成立。

回顾第6节.1，在有限维情形下，西格尔圆盘具有自然的 K¨ahler 度量。该度量的 K¨ahler 势为 $-\operatorname{Tr}\log(1-\overline{Z}Z)$。回顾 Segal 定义了一个无限维西格尔圆盘，并在其上定义了这一 K¨ahler 度量 [103]。

注意， Z 为希尔伯特–施密特算子的条件（这是 Segal 对无限维西格尔圆盘定义的一部分），恰好就是 K¨ahler 势收敛的条件。Kirillov 和 Yuriev[48] 以及 Nag [56] 证明了，无限维西格尔圆盘上的自然 K¨ahler 度量的拉回就是魏尔-彼得森度量。因此

$$
-\operatorname{Tr}\log\left(1-Z^*Z\right) \tag{9.3}
$$

它也是魏尔-彼得森度量的一个 K¨ahler 势，正如 [48, 41]中明确指出的那样。Hong-Rajeev 指出，相对于 K¨ahler 度量，Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 并不完备，这表明它并非魏尔-彼得森度量的正确解析框架。正如我们在第 6 节所见，这一解析框架由 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 给出。

Ahlfors、Wolpert 和 Tromba 上述结果在无限维情形下的推广，是 Takhtajan-Teo 关于通用 Teichmüller 空间的 K¨ahler-Einstein 定理。为描述该定理，考虑通用 Teichmüller 空间 $T(\mathbb{D}_-)$、通用 Teichmüller 曲线 $\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$，以及投影 $\pi:\ \mathscr{T}(\mathbb{D}_-) \to T(\mathbb{D}_-)$。通用 Teichmüller 曲线 $\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$ 是 Bers 所研究的、位于 $T(\mathbb{D}_-)$ 之上的全纯纤维空间。每个点 $[\mu]\in T(\mathbb{D}_-)$ 上方的纤维¯是一个拟圆盘 $w_\mu(\mathbb{D}_-)$， $\subset\mathbb{C}$ 其复结构继承自黎曼球面，且 $\mathscr{T}(\mathbb{D}_-) = \{([\mu], z);\ \ [\mu]\in T(\mathbb{D}_-)\ \ z\in w_\mu(\mathbb{D}_-)\}$.魏尔-彼得森通用 Teichmüller 空间 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 是 $T(\mathbb{D}_-)$ 中原点（即单位元）所在的连通分支，而魏尔-彼得森通用 Teichmüller 曲线$\mathscr{T}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 则是将范围限制到 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 后得到的。更具体地说，Takhtajan-Teo 的结果可概括如下。令 $G=\frac{1}{2}\left(\Delta+\frac{1}{2}\right)^{-1}$，其中 Δ 是 $\mathbb{D}_-$ 上双曲度量的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，并令 $G(z,w)$ 表示 G 的积分核。该核可明确写为 $G(z,w)$ $=\frac{2u+1}{2\pi}\log\frac{u+1}{u}-\frac{1}{\pi}$，其中 $u=u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$，参见例如 [40]。

随后，Takhtajan-Teo [116] 在无限共形型曲面的魏尔-彼得森 Teichmüller 理论中证明了以下开创性结果。

定理 9.5。令

$$G(f)(z) = \iint_{\mathbb{D}_-} G(z,w) f(w)\, dA_{\mathrm{hyp}}. \tag{9.4}$$

则以下结论成立：

(1) 魏尔-彼得森度量是希尔伯特流形 $T(\mathbb{D}_-)$ 上的 K¨ahler 度量。此外，Bers 坐标是 $T(\mathbb{D}_-)$ 原点处的测地坐标。(2) 设 $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma, \mu_\delta \in H_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$（在 (5.3) 中定义，与万有 Teichm¨uller 空间原点处的切空间同构）为正交归一切向量。那么， $T(\mathbb{D}_-)$ 原点处的黎曼张量为

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = -\frac{\partial^2 g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial t_\gamma \partial \bar{t}_\delta} = -\left\langle G\left(\mu_\alpha \bar{\mu}_\delta\right), \mu_\beta \bar{\mu}_\gamma \right\rangle - \left\langle \mu_\alpha \bar{\mu}_\beta, G\left(\bar{\mu}_\gamma \mu_\delta\right) \right\rangle$$

其中 $g_{\alpha\bar{\beta}}$ 是魏尔-彼得森度量，配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $L^2_{-1,1}(\mathbb{D}_-)$ 中的配对 .

(3) $\mathscr{T}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 和 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 在希尔伯特流形 $T(\mathbb{D}_-)$ 的拓扑下是拓扑群，而希尔伯特流形 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 也是一个具有负定 Ricci 张量的 K¨ahler- 爱因斯坦流形

$$\mathrm{Ric}_{\mathrm{WP}} = -\frac{13}{12\pi}\omega_{\mathrm{WP}},$$

其中 ω_{WP} 是 $T(\mathbb{D}_-)$ 上魏尔-彼得森 K¨ähler 度量的辛形式。

Takhtajan 和 Teo [116] 还引入了所谓的万能 Liouville 作用量，其定义为

$$\mathrm{S}_1([\mu]) = \iint_{\mathbb{D}_+} \left|\mathcal{A}\left(f^\mu\right)\right|^2 d\mathrm{A}_z + \iint_{\mathbb{D}_-} \left|\mathcal{A}\left(g_\mu\right)\right|^2 d\mathrm{A}_z - 4\pi \log\left|g'_\mu(\infty)\right|, \tag{9.5}$$

其中 $w_\mu = g_\mu^{-1} \circ f^\mu$ 是与 $[\mu]$ 对应的共形焊接， $[\mu]$ 属于 WP 类 Te-ichm¨üller 空间；$\mathcal{A}f := f''/f'$ 是 f的前 Schwarzian 导数。他们证明，这个作用量是魏尔-彼得森 Teichm¨üller 空间上魏尔-彼得森度量的 K¨ähler 势，事实上

$$\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\mathrm{S}_1 = \omega_{\mathrm{WP}}. \tag{9.6}$$

此外，若 f_μ 是与 $[\mu] \in T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 相关联的共形映射，且 Z 是与 f相关联的 Grunsky 映射，则

$$S_2 = \log\det(I - \overline{Z}Z) \tag{9.7}$$

是魏尔-彼得森度量的一个势。Takhtajan 和 Teo 的这一结果推广了公式 (9.3)：该公式通过从有限维 Siegel 圆盘上的 K¨ähler 势拉回而得到，并完善了 Nag [56], Nag-Verjovsky [58], 和 Kirillov-Yuriev [48]中的相关理论。

最后，关于上述势函数，我们还要提及 Takhtajan-Teo 的缝合公式，该公式用焊接曲线的 Fredholm 行列式来表示这些行列式。我们将在第 10.3 小节（定理 10.10）中进一步讨论这一点，届时会讨论 ζ 正则化

行列式。

备注 9.6。有趣的是，Schiffer 和 Schiffer-Hawley 特别指出，S_1 [88, 89, 91, 92] 和 S_2 [90] 具有特殊的几何意义（尽管他们假设了更高的正则性）。Schiffer 和 Hawley 在 [90], 中给出了 S_1 的一个变分公式，参见 [116, 备注 3.11]。Schiffer 和 Hawley 还证明了 $S_1 = S_2$。即使假设更高的正则性，这个论证仍不完全，因为他们只证明了结论在一组特定的变分下成立。

本文运用精妙而富有启发性的类比，借鉴黎曼几何背景中的联络与曲率，探讨如何利用核函数以及位势理论中的相关量构造不变域泛函。本文的一个思路是，通过极小化涉及边界曲率的泛函来构造典范映射。[7]

与 Schiffer 及其合作者的许多研究一样，本文 [90] 运用了几何与物理学中有关对称性和不变性的思想，但给人的印象是，当时的技术手段尚不成熟。事实上，Schiffer 熟悉这些领域，曾师从 I. Schur 研究不变量理论 [93], ，并且终身对物理学抱有浓厚兴趣，甚至合著过一本广义相对论教材 [1]。无论如何，他的技术与思想对于复几何和物理学的持续重要性不容否认。细心的读者甚至能在其中发现一个关于曲线 Fredholm 行列式的 Polyakov-Alvarez 型公式。

作者在 [96], 中提出了黎曼曲面上的越界与散射概念，由此我们推导出魏尔-彼得森度量的 K¨ahler 势公式。我们研究中的一个基本对象是所谓的 Schiffer 算子，下面回顾其定义。

定义 9.7. 对于具有格林函数 $\mathscr{G}(w, w_0;\ z, q)$ 的紧黎曼曲面 $\mathscr{R}$，Schiffer 核定义为

$$L_{\mathscr{R}}(z, w) = \frac{1}{\pi i}\partial_z \partial_w \mathscr{G}(w, w_0; z, q).$$

设 $\mathscr{R}$ 是一条由简单闭曲线组成的复形 Γ 分割成曲面 Σ_1 和 Σ_2 的紧曲面。对于如上所述的 $k = 1,2$ 以及 Σ_1 和 Σ_2，我们定义 Schiffer 比较算子为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k : \overline{\mathcal{A}(\Sigma_k)} &\to \mathcal{A}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \\ \overline{\alpha} &\mapsto \iint_{\Sigma_k} L_{\mathscr{R}}(\cdot, w) \wedge \overline{\alpha(w)}, \end{aligned}$$

以及限制算子

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k^0 : \mathcal{A}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) &\to \mathcal{A}(\Sigma_k) \\ \alpha &\mapsto \alpha|_{\Sigma_k}. \end{aligned}$$

此外，我们对 $j, k \in \{1, 2\}$ 定义

$$\mathbf{T}_{j,k} = \mathbf{R}_k^0 \mathbf{T}_j : \overline{\mathcal{A}(\Sigma_j)} \to \mathcal{A}(\Sigma_k). \tag{9.8}$$

[7]这一原则在复分析中有着深厚的历史渊源，它指出极值问题、不变量与典范映射之间存在对应关系。

我们还有柯西算子的一个类似物，即

定义 9.8. 设 Γ 是黎曼球面上的一个拟圆，其补集有 $\dot{}$ 个分支 Σ_1 和 Σ_2。令 $\mathcal{D}(\Sigma)$ 表示齐次狄利克雷空间（即模去常数）。设 Γ_ϵ 从 Σ_1 内部趋近 Γ 。对于固定的 $q \notin \Gamma$，柯西算子定义为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{J}} : \dot{\mathcal{D}}(\Sigma_1) &\to \dot{\mathcal{D}}(\Sigma_2) \\ h &\mapsto \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - q} \right) d\zeta \quad z \in \Sigma_2\end{aligned}$$

其中我们舍去常数项。

根据 Schiffer 算子的恒等式以及 [96]，中柯西算子的性质，作者推导出了以下 K¨ahler 势公式。

定理 9.9. [97] 圆盘的魏尔-彼得森 Te- ichm ¨uller 空间上魏尔-彼得森度量的势为

$$\log \det(\mathbf{T}_{1,2}^* \mathbf{T}_{1,2}) = \log \det \left(\dot{\mathbf{J}}^* \dot{\mathbf{J}} \right). \tag{9.9}$$

这可以与下面的定理 10.10 进行比较。我们的定理使用复柯西算子代替诺伊曼跳跃算子，并且不要求曲线是 C^3。

[96]中发展的散射理论的另一项成果，是 Schiffer 比较算子的弗雷德霍姆指标与黎曼曲面的拓扑不变量之间的关系。

T定理 9.10（[96]）。若 Σ_1和 Σ_2 连通，且亏格分别为 g_1 和 g_2，则 en

$$\operatorname{index}(\mathbf{T}_{1,2}) = g_1 - g_2.$$

若 Σ_2 连通且亏格为 g，而 Σ_1 由 n 个互不相交的单连通区域组成，则

$$\operatorname{index}(\mathbf{T}_{1,2}) = 1 - n + g.$$

回到魏尔-彼得森度量的 K¨ahler 性质，在论文 [139] 中，M. Yanagishita 将 Takhtajan 和 Teo 的结果推广如下。

定理 9.11（[139]）。设 G 是满足 Lehner 条件的福克斯群，则 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-/G)$上的魏尔-彼得森度量是 K ¨ahler 度量。

此外

定理 9.12（[139]）。设 G 是满足 Lehner 条件的福克斯群。则 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-/G)$ 上魏尔-彼得森度量的全纯截面曲率和里奇曲率均为负。

9.2. 陈类、Quillen 度量与 ζ 函数。下面我们讨论 WP-Teichm¨uller 理论与陈-韦伊理论之间的联系。在此背景下，Wolpert [137]计算了通用 Teichm¨uller 曲线的垂直切丛的第一陈形式 $c_1(v)$，其中采用了由纤维上的双曲度量诱导的厄米度量。由于对 $c_1(v)$ 的幂在纤维上进行积分会在 Teichm¨uller 空间上产生特征类 κ_n （见下文 (9.13)），Wolpert 证明了 κ_1 是魏尔-彼得森 K¨ahler 形式 ω_{WP}的一个倍数。

另一个重要且有趣的主题是所谓行列式线丛上的 Quillen 度量，以及它与 WP-Teichm¨uller 理论的联系。为描述这一点，我们考虑一个全纯族 $\pi\colon\ X \to P$，其定义在紧基底 P上的紧复流形上。再设 E 是 X上的一个向量丛，其投影为 $\pi'\colon\ E \to X$.

给定 $p \in P$，我们将纤维 $\pi^{-1}(p)$ 与 X_p 识别，并将 π' 限制为映射 $\pi'_p\colon\ E_p \to X_p$。现在有一个由 $\overline{\partial}$-算子组成的族，记为 $\overline{\partial}_p$，其作用于丛 (E_p, π', X_p) 的截面上。该族在 K 理论的意义下定义了 P上的指标丛 $\operatorname{ind}\overline{\partial}$，其中 $\operatorname{ind}\overline{\partial} = \operatorname{Ker}\ \overline{\partial} - \operatorname{Coker}\ \overline{\partial}$.

如果 $\operatorname{ch}(\cdot)$ 表示一个丛的陈特征，而 $\operatorname{td}(T_{\mathrm{vert}}X)$ 表示 X的垂直切丛的托德类，那么由阿蒂亚-辛格族指标定理[9], 可得

$$\operatorname{ch}(\overline{\partial}) = \pi_{\int}[\operatorname{ch}(E) \cdot \operatorname{td}(T_{\mathrm{vert}}X)], \tag{9.10}$$

其中 $\pi_{\int}[\cdot]\colon\ H^*(X) \to H^{*-\dim \pi^{-1}(p)}(P)$ 表示沿纤维积分运算。若丛 $T_{\mathrm{vert}}X$ 和 E 也配备了厄米度量，那么这些丛上便会有与其度量相容的典范酉联络，因此利用这些联络，$\operatorname{ch}(E)$ 和 $\operatorname{td}(T_{\mathrm{vert}}X)$便可表示为 X上的闭微分形式。

此外，若基底 P 不紧致，且阿蒂亚-辛格族指标定理 (9.10) 不适用，那么如果指标丛 $\operatorname{ind}\overline{\partial}$ 恰好是一个向量丛（这并非总是如此，因为纤维 $\operatorname{Ker}\overline{\partial}_p$和 $\operatorname{Coker}\ \overline{\partial}_p$的维数可能发生跳变），人们便可以期待得到 (9.10) 的一个局部版本，称为局部指标定理。其做法是利用向量丛 $\operatorname{ind}\overline{\partial}$ 上的某个特定联络（若存在这样的联络），使得 (9.10) 成为其左右两端相应微分形式之间的等式。

事实证明，证明局部指标定理与如下问题密切相关：如何将陈特征和托德类明确地表示为上述映射 π 和 π'的函数。然而，如果 $\operatorname{ind}\overline{\partial}$ 不是向量丛，那么在建立局部指标定理时就会遇到困难。为解决这一问题，D. Quillen [68] 建议研究行列式线丛；在我们所研究的情形中，它定义为

$$\det \operatorname{ind}\overline{\partial} = \wedge^{\max}\operatorname{Ker}\overline{\partial} \otimes (\wedge^{\max}\operatorname{Coker}\overline{\partial})^{-1},$$

并且是 P 上的全纯线丛（当然，这要求丛 (X,π,P) 和 (E,π',X) 满足某些条件）。如果 $\|\cdot\|$ 表示由 E 和 $T_{\mathrm{vert}}X$ 上的度量诱导的 det ind $\overline{\partial}$上的 L^2范数，并且如果 $\overline{\partial_p}^*\overline{\partial_p}$ 是作用于丛 (E_p,π',X_p) 的截面上的拉普拉斯算子，那么 det $\overline{\partial_p}^*\overline{\partial_p}$ 就是拉普拉斯算子的 ζ 函数行列式，将其视为 P上的函数；据此可以定义 Quillen 度量为

$$\|\cdot\|_Q=\frac{\|\cdot\|}{(\det\overline{\partial}^*\overline{\partial})^{1/2}}.$$

Quillen 度量的一个有趣特征是，线丛（det ind$\overline{\partial}$; $\|\cdot\|_Q$）在 P 上的曲率形式（第一陈类），相差一个乘法常数后，正是 P 上的规范 K¨ahler 形式。

现在，为了在 Teichm¨uller 理论中获得从几何和整体解析角度来看有意义的结果，P、X 以及 X 上的特定丛 E 的选取都非常重要。例如，在上述抽象框架中，设 $P=T_g$ 为紧致亏格 g 黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间，$X=\mathscr{T}_g$ 为 Teichm¨uller 曲线的 Bers 纤维空间，$E=T_{\mathrm{vert}}^{-s}\mathscr{T}_g$ 为 $\mathscr{T}_g$ 的垂直全纯线丛的 $-s$ 次幂（该丛的截面是全纯的（$-s$, 0）-微分）。再次说明，与此框架相关联的一族 $\overline{\partial}$ 算子记为 $\overline{\partial}_s$，作用于黎曼曲面上的（s, 0）-微分。在这种情形下，A. A. Belavin 和 V.G. Knizhnik [10] 证明，相应 det ind $\overline{\partial}_s$ 的第一陈形式可以表示为

$$\mathrm{c}_1(\det\operatorname{ind}\overline{\partial}_s)=\int_{\pi^{-1}(p)}(\mathrm{ch}(T_{\mathrm{vert}}^{-s}\mathscr{T}_g)\cdot\mathrm{td}(T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}_g))_{2,2},\tag{9.11}$$

其中 $(\cdot)_{2,2}$ 表示 Teichm¨üller 曲线上的微分形式的 (2, 2) 分量，而$\pi^{-1}(p)$ 对于 $p\in T_g$表示丛 $\pi:\mathscr{T}_g\to T_g$ 的纤维。公式 (9.11) 可视为局部指标定理，因为它确立了 (9.11) 左右两边的 (1, 1) 形式之间的等式。现在，若以这样的方式在 $T_{\mathrm{vert}}^{-s}\mathscr{T}_g$ 上赋予度量，使得对于每个 $p\in T_g$，每个 $\pi^{-1}(p)$ 都配备庞加莱度量，那么正如 S. Wolpert [137], 所证明的，我们便有 Quillen 结果的如下类似结论，即

$$\mathrm{c}_1(\det\operatorname{ind}\overline{\partial}_s)=\frac{6s^2-6s+1}{12\pi^2}\,\omega_{\mathrm{WP}},\tag{9.12}$$

其中 ω_{WP} 是 $T_g(\Sigma)$ 上的魏尔-彼得森 K¨ähler 形式。

如果改为取 $E=T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$，那么 $w^\mu(\mathbb{D}_-)$ 上的双曲度量便在 $T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$ 上定义了一个 Hermitian 度量。正如前面提到的，这可用于在 $T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$ 上构造一个与度量相容的规范酉联络，使得 ch($T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$) 和 td($T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$) 可由 $\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)$ 上的闭微分形式表示。因此，计算该联络的曲率形式并对纤维进行积分，有望将曲率形式的幂的纤维积分 Θ（第一陈类）与某些不变量（例如度量）联系起来。

为此，Wolpert [137], Takhtajan 和 Teo [116] 考察了 Miller-Morita-Mumford 特征形式。这些是希尔伯特流形 $T(\mathbb{D}_-)$ 上的（n,n）形式，定义如下：

$$\kappa_n = (-1)^{n+1}\pi_{\int}[(\mathrm{c}_1(T_{\mathrm{vert}}\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)))^{n+1}], \tag{9.13}$$

其中 $\pi_{\int}$： $H^*(\mathscr{T}(\mathbb{D}_-)) \to H^{*-2}(T(\mathbb{D}_-))$ 表示沿纤维积分的运算。注意，(9.13) 例如表明， κ_1 可以通过对曲率形式 Θ的平方进行纤维积分来计算。Takhtajan 和 Teo 证明了以下结论。

Miller-Morita-Mumford 特征形式 κ_n 在希尔伯特流形 $T(\mathbb{D}_-)$ 上是右不变的，并且对于 $\mu_1,\dots,\mu_n,\nu_1,\dots,\nu_n \in H_{-1,\,1}(\mathbb{D}_-) \simeq T_{[0]}T(\mathbb{D}_-)$，有

$$\kappa_n(\mu_1,\dots,\mu_n,\bar\nu_1,\dots,\bar\nu_n) == \frac{i^n(n+1)!}{(2\pi)^{n+1}}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\iint_{\mathbb{D}_-} G\left(\mu_1\bar\nu_{\sigma(1)}\right)\dots G\left(\mu_n\bar\nu_{\sigma(n)}\right)dA_{\mathrm{hyp}},$$

其中 G 由 (9.4) 给出。此外，若 $T(\mathbb{D}_-)$ 配备其希尔伯特流形结构，则

$$\kappa_1 = \frac{1}{\pi^2}\omega_{\mathrm{WP}}. \tag{9.14}$$

在 [117] 中，L. Takhtajan 和 P. Zograf 为一族 ∂算子证明了局部指标定理，该算子作用于型为 (g,n) 的带 puncture 曲面 Σ，即一个亏格为 g、带有 n 个穿孔的紧曲面。此情形对应于上述一般构造，其中作如下选择：取$P = T_{g,\,n}$，即型为 (g,n) 的带 puncture 黎曼曲面的 Teichmüller 空间；取$X = \mathscr{T}_{g,\,n}$，即相应的万有族（因此，纤维化 $\pi : \mathscr{T}_{g,\,n} \to T_{g,\,n}$ 的纤维是型为 (g,n) 的黎曼曲面）；并取 $E = T_{\mathrm{vert}}^{-k}\mathscr{T}_{g,\,n}$，即$\mathscr{T}_{g,\,n}$上的垂直线丛的 k^{th} 次幂。

现在，与紧曲面的情形不同，型带 puncture 曲面上与庞加莱度量 $\Delta_k = \partial_k^*\partial_k$ 相联系的拉普拉斯算子具有连续谱。

关于这一事实，我们也来回顾塞尔伯格 ζ 函数的定义；当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时，它由下述绝对收敛乘积给出

$$Z(s) = \prod_{\{\ell\}}\prod_{m=0}^{\infty}\left(1 - e^{-(s+m)|\ell|}\right),$$

其中， ℓ 遍历相对于庞加莱度量而言， Σ 上的所有简单闭测地线， $|\ell|$是 ℓ的长度。函数 $Z(s)$ 可亚纯延拓至整个复 s 平面，并在 $s = 1$ 处有一个简单零点。

对于紧黎曼曲面，E. D'Hoker 和 D. Phong [25] 证明， Δ_k 的行列式可通过其塞尔伯格 ζ 函数 $Z(s)$ 定义，精确到一个仅依赖于 g 和 k 的常数因子；当 $k = 0$ 时，它等于 $Z'(1)$，而当 $k \geq 2$ 时，则等于 $Z(k)$。对于 g 型带 puncture 的黎曼曲面，结论也相同。

利用这一结果，Takhtajan 和佐格拉夫计算了带 puncture 曲面的 Teichmüller 空间上行列式线丛 $\det \mathrm{ind}\,\partial_k$ 的第一陈形式，其中曲面的类型为（g， n）$T_{g,\,n}$，并赋予

Quillen 度量，并证明

$$\mathrm{c}_1(\det \operatorname{ind} \bar{\partial}_k) = \frac{6k^2 - 6k + 1}{12\pi^2}\omega_{\mathrm{WP}} - \frac{1}{9}\omega_{\mathrm{cusp}}. \tag{9.15}$$

这里可以看到，该结果与 (9.12) 相比多出了一项，而这一项恰好是一个新的 K¨ahler 度量的 K¨ahler 形式，该度量定义在类型为 (g, n) 的带穿孔黎曼曲面模空间上。事实上， ω_{cusp} 是一个 K¨ahler 度量 $\langle , \rangle_{\mathrm{cusp}}$ 在 $T_{g,\ n}(\Sigma)$ 上的辛形式，并且相对于 $T_{g,\ n}(\Sigma)$ 上的模群保持不变。

度量 $\langle , \rangle_{\mathrm{cusp}}$ 是通过与 n 个穿孔相关的 Eisenstein-Maaß 级数定义的。为精确定义尖点度量，考虑一个类型为 (g, n) 的黎曼曲面 Σ，并假设其配备了庞加莱度量 ϱ；设 Γ 为一个无挠福克斯群，使得 $\Sigma = \mathbb{H}/\Gamma$，其中 $\mathbb{H}$ 是开上半平面。记 Γ 中非共轭抛物子群的集合为 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$；对于每个 $i = 1, \ldots, n$，固定一个元素 $\sigma_i \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$，使得 $\sigma_i^{-1}\Gamma_i\sigma_i = \Gamma_\infty$，其中群 Γ_∞ 由抛物变换 $z \mapsto z + 1$生成。与群 Γ 的 i^{th} 个尖点对应的 Eisenstein-Maaß 级数 $E_i(z, s)$，在 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时定义为下式

$$E_i(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_i} \mathrm{Im}\left(\sigma_i^{-1}\gamma z\right)^s, \quad i = 1, \ldots, n$$

众所周知， $E_i(z, s)$可以亚纯延拓到整个复 s 平面；对于 $\mathrm{Re} s = \frac{1}{2}$，Eisenstein-Maaß 级数 $E_i(z, s)$ $i = 1$， . . .， n构成拉普拉斯算子 Δ_0连续谱的一组完备特征函数。现在定义尖点度量如下；首先令

$$\langle \mu, \nu \rangle_i = \int_\Sigma \mu\bar{\nu}\, E_i(\cdot, 2) \quad \mu, \nu \in L^2_{-1,1}(\Sigma), \quad i = 1, \ldots, \tag{9.16}$$

结果表明，每个数量积 $\langle , \rangle_i$ 都会在 $T_{g,n}$ 上诱导出一个 K¨ahler 度量。尖点度量是以下各项之和

$$\langle , \rangle_{\mathrm{cusp}} = \sum_{i=1}^{n} \langle , \rangle_i \tag{9.17}$$

这是一个在 Teichm¨uller 模群 $\mathrm{Mod}_{g,n}$ 作用下不变的 K¨ahler 度量

在 [84] T. Ratiu 和 A. Todorov 在 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$ 上构造了一个行列式线丛，以及相应的 Quillen 范数。他们进一步提出，利用 Quillen 最初构造行列式线丛的方法， [68], 这一 Quillen 度量的曲率(1, 1)-形式是 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{S}^1)$ 上魏尔-彼得森度量的 K¨ahler 形式，因此这将是前面提到的 Takhtajan-Zograf 结果的无限维类比。与这一系列思想相关，我们还要提及 A. Fujiki 和 G. Schumacher 的论文 [33], : 其中作者运用了 J. M. Bismut 和 D. Freed [16] 以及 Bismut、H. Gillet 和 Ch. Soul´e [17] 对 Quillen 工作所作的重要推广（涉及带 Quillen 度量的行列式线丛的第一陈形式），并结合某个纤维积分公式，构造了广义魏尔-彼得森形式，并证明它（相差一个常数因子）是模空间上某个 Hermitian线丛的陈形式。

10. Weil-Petersson beyond Teichmüller theory

10.1. 共形场论与弦理论。在二维共形场论中，D. Friedan 和 S. Shenker 指出了带穿孔的黎曼曲面模空间所起的作用 [31]。C. Vafa 提出了一种共形场论的表述方式，该方式使用赋有在穿孔处消失的局部坐标的带穿孔曲面模空间 [125]。请注意，这些“坐标”是曲面共形等价类之外的额外数据。Segal 在 [104] 和 [105] 中概述了共形场论的定义；后者是一篇广为流传的预印本，最终于 [106] 发表。按照这一定义，带边界参数化的黎曼曲面（模共形等价）是某个范畴中的态射，而该范畴的对象是圆的不交并（其中一些标记为入射，另一些标记为出射）。这类曲面可以利用参数化进行缝合。若利用边界参数化沿带穿孔的圆盘进行缝合，便可得到 Vafa 与 Segal 的模空间之间的一种启发式对应关系，而包含映射则成为局部坐标的逆映射。

注 10.1. 这两个模空间之间的启发式对应关系，是 Teichm¨uller 空间复结构的纤维模型的动机之一。其想法是，带边曲面Σ 的拟共形变形 $F\colon \Sigma \to \Sigma_1$ 的边界值会在 Segal 模型中诱导出边界参数化。在 Vafa 模型中，这些数据则表现为相应紧曲面 Σ_1^P 上的 $\mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma_1^P)$ 的元素，该紧曲面是通过缝合圆帽得到的。

按照 Segal 的定义，共形场论将一个算子与入射和出射边界分量所对应的希尔伯特空间的张量积关联起来。用范畴论的语言来说，这应当是一个射影全纯函子。要求将算子与黎曼曲面关联起来的过程是全纯的，因此需要在模空间上赋予复结构，并要求缝合运算是全纯的。

Radnell-Schippers [70] 证明，模空间可以视为 Teichm¨uller 空间的一个商。为此，他们将边界参数化的集合扩展为拟对称参数化的集合；在 Vafa 模型中，额外的坐标数据是具有拟共形延拓的圆盘共形映射。

更确切地说，采用不同的解析选择，我们作出如下定义。

定义 10.2. 考虑形如 (Σ^P, f) 的配对，其中 Σ^P 是一条亏格为 g、带有 n 个带标记的 puncture $p=(p_1,\dots,p_n)$ 和 $f=(f_1,\dots,f_n) \in \mathcal{O}^{\mathrm{qc}}(\Sigma^P)$ 的紧黎曼曲面。若存在双全纯映射 $\sigma\colon \Sigma_1^P \to \Sigma_2^P$，使得 $\sigma\circ f_1 = f_2$，则称两个配对 (Σ_1^P, f_1) 和 $\sim(\Sigma_2^P, f_2)$ 等价。带标架模空间的 puncture 模型为

$$\widetilde{\mathcal{M}}_P(g,n) = \{(\Sigma^P, f)\}/\sim .$$

下标 P 表示“穿孔”模型。Segal 边界模型中的带标架模空间如下所示。

定义 10.3. 考虑二元组 (Σ,ϕ)，其中 Σ 是类型为 (g,n) 的带边曲面，其有序边界曲线为 $\partial_k\Sigma$, $k=1,\dots,n$，且 $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_n)$ 是一组拟对称映射 $\phi_k\colon \mathbb{S}^1 \to \partial_k\Sigma$。若存在双全纯映射 $\sigma\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 使得 $\psi = \sigma\circ\phi$，则称二元组 (Σ_1,ϕ) 与 $\sim(\Sigma_2,\psi)$ 等价。带标架模空间的边界模型为

$$\widetilde{\mathcal{M}}_B(g,n) = \{(\Sigma,\phi)\}/\sim .$$

这些与 [70] 一一对应。

这与 Teichm¨uller 空间的关系如下。回顾一下，ModI 是模群的子群，其元素逐点固定边界。

定理 10.4（ [70]）。设 Σ 是类型为（g,n）的带边曲面。那么存在一个双射

$$T(\Sigma)/\mathrm{ModI} \cong \widetilde{\mathcal{M}}_B(g,n) \cong \widetilde{\mathcal{M}}_P(g,n).$$

$\widetilde{\mathcal{M}}_B(g,n)$ 和 $\widetilde{\mathcal{M}}_P(g,n)$ 是复巴拿赫流形，且缝合是全纯的 .

注记10.5。在一些关于 [70], 的引文中，有人称 Radnell-Schippers 将缝合运算扩展到了拟对称映射，但这只是共形焊接的一个常规推论。真正有趣的事实，是 Teichm¨uller 空间与带标记模空间之间的几何联系。这种联系带来了双向的启示：例如在 Teichm¨uller 理论中，共形场论的视角直接导向 Teichm¨uller 空间的纤维模型。

通常会选择正则性更高的框架；例如，边界参数化会选择为解析或光滑的。那么，共形场论所需的适当正则性是什么？在 [81] 中，作者详细阐述了采用魏尔-彼得森类参数化的理由。这里我们列出选择魏尔-彼得森类模空间的四个动机。

其中前两个动机很容易表述：$\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$ 是 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 的完备化（定理 5.7），而 $\mathrm{QS}_{\mathrm{WP}}(\mathbb{S}^1)$ 是一个拓扑群（定理 5.8）。

其余两个动机与 $\overline{\partial} \oplus \mathrm{pr}$ 的行列式线丛有关，而该线丛是构造某些满足 Segal [43] 定义的共形场论的一部分。Segal 的定义涉及边界 $\partial\Sigma$ 上函数的极化，该极化由边界参数化的拉回下的正、负傅里叶模态所诱导。要求此极化属于受限西格尔圆盘。因此，边界参数化必须是魏尔-彼得森类的。最后，构造群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 的中心扩张并计算中心荷，要求 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 属于受限群 [43, 附录 D]。可以扩大该群，但前提是其作用仍属于 Shale 群。感谢 Yi-Zhi Huang 向我们解释这一点。同样，这恰好就是参数化为魏尔-彼得森拟对称映射的条件。

确实可以在带标记模空间的定义中代入魏尔-彼得森类对象，并得到以下结果。

定理 10.6（[79]）。设 Σ 是对于 $2g+2-n>0$ 而言类型为（g， n）的带边曲面。则存在一个双射

$$T_{\mathrm{WP}}(\Sigma)/\mathrm{ModI} \cong \widetilde{\mathcal{M}_{\mathrm{WP}\,B}}(g,n) \cong \widetilde{\mathcal{M}_{\mathrm{WP}\,P}}(g,n).$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$因此， $\mathcal{M}_{\mathrm{WP}\,B}$（$g$， n）和 $\mathcal{M}_{\mathrm{WP}\,P}$（$g$， n）是复希尔伯特流形。

正如我们在第6节中提到的，圆的微分同胚群在表示论中发挥着作用。它也出现在各种物理模型中。由于这些文献与魏尔-彼得森 Teichm¨uller 理论相关，我们列举其中的一些。

在弦理论中，$\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 是弦的重新参数化群，在不同情形下可以要求这种重新参数化下的不变性。$\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 的李代数可与圆上的光滑向量场相对应。这个李代数的生成元

为 $-ie^{in\theta}\partial/\partial\theta$。其复化由形如 $z^{n-1}\partial/\partial z$, $n\in\mathbb{Z}$ 的元素生成。由这些生成元构成的多项式表达式的向量空间，配以向量场李括号，称为维特代数。在物理学文献中，维特代数被视为共形对称群 [11, 99][8]。尽管群 Diff($\mathbb{S}^1$) 有李代数 Vect($\mathbb{S}^1$)，但它不存在复化。也就是说，不存在李代数为维特代数（或其某种完备化）的李群 [99]。

Segal [104, 105] 指出，最接近于充当 Diff($\mathbb{S}^1$) 复化对象的是带有坐标的两次 puncture 球面的带标架模空间。等价地说，它是带有参数化的圆环的带标架模空间。这是一个半群，因为缝合保持类型 (0, 2)，因而诱导出乘法，但不存在逆元。如果局部坐标采用拟对称参数化，或者等价地采用 $\mathcal{O}^{qc}(\mathbb{C}\backslash\{0,\infty\})$ 的元素¯，那么由定理 10.4 可知，该半群可与圆环的 Teichm¨uller 空间模去由边界扭转产生的 $\mathbb{Z}$ 作用 $\mathbb{A}$ 后所得的空间相识别，也就是说

$$\widetilde{M}_B(0,2)\cong\widetilde{M}_P(0,2)\cong T(A)/\mathbb{Z}$$

（见 [73]），并且该半群中的缝合相对于由 $T(\mathbb{A})$ 得到的复结构是全纯的。根据定理 10.6，可以将上述模空间替换为其魏尔-彼得森版本。

有人提出，泛 Teichm¨uller 空间或许能在弦理论 [20, 21, 41, 62]的非微扰方法中发挥作用。Bowick-Rajeev [21] 考察时空 $\mathbb{R}^{d-1}$中的1 环空间，而 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 则与重参数化不变性及复结构的变化相关（见第6.1节）。他们指出：“Friedan 和 Shenker [31]提出了一种同样基于复几何的弦理论方法。我们有兴趣了解他们所研究的‘泛 Teichm¨uller 空间’与 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$之间的关系。”请注意，这段话实际上并未提及泛 Teichm¨uller 空间：Friedan 和 Shenker 使用的是“泛模空间”一词，并认为这个空间“并非数学文献中所描述的泛 Teichm¨uller 空间”——也就是 $T(\mathbb{D}_-)$。

另一方面，Hong-Rajeev 观察到了 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 与 $T(\mathbb{D}_-)$ 之间的联系。路径求和仅在紧曲面上进行，而将普遍 Teichm¨uller 空间包含紧黎曼曲面模空间这一事实作为证据，支持了使用 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 进行非微扰研究的设想，并提出了一种可能的作用量。它与 Weil-Petersson 几何的相关性在于，嵌入 Segal 的极化所构成的无限维受限西格尔圆盘这一点发挥了明确作用。事实上，Hong-Rajeev（引用 [58]）指出，Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 的不完备性是一项技术障碍。Cui 和 Takhtajan-Teo 的结果（定理 5.7）消除了这一障碍。在此背景下，Shen 和 Takhtajan-Teo 关于 Teichm¨uller 空间 $p\in T(\mathbb{D}_-)$ 中的元素映入受限西格尔圆盘当且仅当 $p\in T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 的结果（定理 6.7），令人十分满意。

注记 10.7。Hong-Rajeev [41] 指出，Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 是普遍 Teichm¨uller 空间的稠密子集。暂且不论对“稠密”的不同解释，真正稠密的其实是

[8]从局部对称性的微分几何观点来看，这个对称群的规模是预期的两倍；固定一点的局部双全纯映射由 $z^n\partial/\partial z$ 生成，其中 $n\geq 1$。

商 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$)，它是普遍 Teichm¨üller 空间 $T(\mathbb{D}_-) \cong$QS($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 的子集。不过，L.P. Teo [120] 证明，普遍 Teichm¨üller 曲线$\mathcal{T}(\mathbb{D}_-)$（即前文第 9.2 节提到的、以 $T(\mathbb{D}_-)$ 为底空间的 Bers 纤维空间）可以自然地与 QS($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 识别。Takhtajan 和 Teo [116]证明，QS$_{\mathrm{WP}}$($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 是一个希尔伯特流形和拓扑群；事实上，Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$ 是魏尔-彼得森普遍 Teichm¨üller 曲线在其相应拓扑下的稠密子集。这可以视为 Hong 和 Rajeev 的想法得以复兴。

关于紧曲面上的求和，万有双曲层状结构同样值得关注，并可能提供另一种方法；参见 [113, 57, 22]。

10.2. 流体力学。数学流体动力学中一个值得关注的主题，是研究 Diff($\mathbb{S}^1$)/M¨ob($\mathbb{S}^1$) 的几何方面。M. Schonbek、A. Todorov 和 J. Zubelli [98] 将其与 Segal [103] 以及 Nag-Sullivan [57] 的极化，以及嵌入 Sato-Segal-Wilson 格拉斯曼流形 [107]联系起来加以研究。他们提出了一种希尔伯特流形结构，其切空间模型为 $H^{3/2}$ 。受 Arnol'd 关于 Euler 方程的方法以及 Segal-Wilson [107], 的启发，Schonbek、Todorov 和 Zubelli 利用了这样一个重要事实：Teichm¨üller 空间的测地线能够提供关于周期 Korteweg-de Vries（KdV）方程解的行为的信息，并由此证明了具有单位圆上 Sobolev 空间初始数据的 KdV 方程周期解的存在性。随后，他们运用无穷维 Cartan-Hadamard 理论，证明了测地流的 Arnol'd 指数不稳定性。

借助第 5.2 节所描述的 Cui 和 Takhtajan-Teo 的流形结构，单位元处的切空间是圆上属于 $H^{\frac{3}{2}}$ 类的函数空间；换言之，Teichm¨uller 空间 $T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 具有希尔伯特流形结构，其切空间可与 $H^{3/2}$($\mathbb{S}^1$)-向量场相识别。在 [30] A. Figalli 则根据分数阶 Sobolev 范数刻画了由 $H^{3/2}$($\mathbb{S}^1$)-向量场生成的流。更确切地说，他证明了由一个 $H^{3/2}$ ($\mathbb{S}^1$)-向量场生成的流属于 Sobolev 空间 $W^{1,p}$ ($\mathbb{S}^1$)，对所有 $p \geq 1$ 均成立，并且属于 $W^{1+r,q}$ ($\mathbb{S}^1$)，对所有 $0 < r < 1/2$ 和 $1 \leq q < 1/r$均成立。然而，Figalli 还证明存在一个自治向量场 $u \in H^{3/2}$($\mathbb{S}^1$)，使得其流映射既不是 Lipschitz 的，也不属于 $W^{1+r,1/r}$($\mathbb{S}^1$)，对所有 $r \in$ (0, 1) 均成立。特别地，取 $r = 1/2$ ，可见存在一个由 $H^{3/2}$($\mathbb{S}^1$)-向量场生成的流，它既不属于 $W^{3/2,2}$($\mathbb{S}^1$) $= H^{3/2}$($\mathbb{S}^1$)，也不属于 Lipschitz 空间。

根据 Takhtajan 和 Teo 的上述工作，普遍 Teichm¨uller 空间的恒等分支取代了临界 Sobolev类 $H^{\frac{3}{2}}$ 微分同胚。

在 [37] 和 [38] 中，F. Gay-Balmaz、J. Marsden 和 T. Ratiu 从映射流形的角度研究了这个群：他们将其认作圆上的拟对称同胚群的一个子群，并证明该群的所有元素对所有 $\varepsilon > 0$都属于 $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ 类。由此还得出，对于圆 $\mathbb{S}^1$上的 WP 类拟对称映射 ϕ ，其本身 ϕ 和逆映射 ϕ^{-1} 对所有 $\varepsilon > 0$都属于 $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$($\mathbb{S}^1$)。由于魏尔-彼得森度量在每个切空间上诱导希尔伯特空间拓扑，Gay-Balmaz 和 Ratiu 还证明该度量是完备的，即魏尔-彼得森度量的所有测地线都对任意时间存在。他们也证明，相对于由魏尔-彼得森度量定义的距离函数，这个空间是柯西完备的；这一点此前已由 Cui 证明

过。 [23]。[9] 关于上文提到的 Sobolev 正则性，Shen [110] 证明，存在某个魏尔-彼得森类拟对称同胚，它既不属于 Sobolev 空间 $H^{\frac{3}{2}}$，也不属于 Lipschitz 空间 Λ^1。基于对魏尔-彼得森类这一新的刻画，Shen 在魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间上引入了一种度量，并用它为 Takhtajan-Teo 关于魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间是一个拓扑群的结果给出了新的证明。

此外，Gay-Balmaz 和 Ratiu 得到了一个新方程，即所谓的欧拉-魏尔-彼得森方程，并证明其解属于 C^0 $H^{\frac{3}{2}}$ 和 C^1 $H^{\frac{1}{2}}$。论文 [36]，中魏尔-彼得森方法的另一项成果，具体来说是基于魏尔-彼得森测地线的长时间存在性，解决了 E. Sharon 和 D. Mumford 在 [102]，中提出的一个问题：平面上两个形状之间是否存在唯一测地线。

10.3. 勒夫纳能量。若尔当曲线的勒夫纳能量是其勒夫纳驱动项的狄利克雷能量，由 P. Friz、A. Shekar [32] 和 Y. Wang [129] 引入。更精确地说，设 η 是黎曼球面上的一条若尔当曲线 $\mathbb{C}.$，η 的勒夫纳能量记为 $I^L(\eta)$，按定义即为该驱动项的狄利克雷能量。Wang 在 [129] 中证明，若 η 经过 ∞，则有

$$I^L(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{H}} |\nabla \log|f'(z)||^2\, dA_z + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{H}^*} |\nabla \log|g'(z)||^2\, d\mathrm{A}_z, \tag{10.1}$$

其中，f 和 g 分别将上、下半平面 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{H}^*$ 共形映射到 $\mathbb{C}\backslash\eta$的两个¯分支，同时固定 ∞（即（f，g）是一个焊接对）。此外，[129] 证明了若尔当曲线具有有限的勒夫纳能量，当且仅当它是魏尔-彼得森拟圆，也就是说，其归一化焊接同胚属于魏尔-彼得森 Teichm¨uller 空间。

ζ 正则化行列式与勒夫纳能量之间存在有趣的联系，Wang 在 [130]中对此进行了探讨。首先，让我们简要回顾行列式的 ζ 函数正则化的一些基本事实。为此，设 Δ_g 为紧曲面上带狄利克雷边界条件的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，该曲面的共形度量为（$\mathscr{R}$，g），且具有光滑边界（例如至少为 $C^{1,\,1}$）。与 $-\Delta_g$ 相关的 ζ 函数定义为

$$\zeta_g(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} t^{s-1} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\, dt \tag{10.2}$$

其中 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \ldots$ 是 $-\Delta_g$的离散谱。现在，根据 H. Weyl [134] 的一个结果可知，对于某个常数 C，有 $\lambda_j \sim C\, j$；因此，ζ_g 在 $\{s \in \mathbb{C}$中是全纯的；$\mathrm{Re}(s) > 1\}$。此后，ζ_g 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$（在 $s = 1$处有一个简单极点）；特别地，ζ_g 在 $s = 0$ 处全纯，因此 $\zeta_g'(0)$存在，且由下式给出

$$\zeta_g'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\zeta_g(s) - \zeta_g(0)}{s - 0}.$$

[9]根据霍普夫-里诺定理，若满足柯西完备性，人们会预期测地线完备性也成立。然而，在无限维情形下，这一点并不显然。

更明确地说，有

$$\zeta_g'(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\log(\lambda_j)}{\lambda_j^s},$$

由此可得，对于 $s=0$

$$\zeta_g'(0) = -\sum_{j=1}^{\infty} \log(\lambda_j) = -\log\left(\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j\right).$$

因此我们得到

$$e^{-\zeta_g'(0)} = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \det(-\Delta_g),$$

由此可以通过下式定义 $-\Delta_g$ 的行列式

$$\det(-\Delta_g) := e^{-\zeta_g'(0)}. \tag{10.3}$$

当 $(\mathscr{S}, g)$ 是一个无边界的紧曲面时，拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ_g 具有离散谱，且其核为一维；其正则化行列式记为 $\det'_\zeta(-\Delta_g)$，定义方式与上文类似，只考虑非零特征值。在此背景下，一个有趣的事实是，拉普拉斯算子的 ζ 正则化行列式同时取决于曲面的黎曼结构和共形结构。

事实上，若 $g = e^{2\lambda} g_0$ 是一个与 g_0 共形等价的度量，且 $\lambda \in C^\infty(\mathscr{R})$（或在 $C^\infty(\mathscr{S})$ 中），则 $-\Delta_g$ 和 $-\Delta_{g_0}$ 的正则化行列式之间的关系由以下 Polyakov-Alvarez 共形反常公式 [60] 给出：

定理 10.8。对于一个无边界的紧曲面 $(\mathscr{S}, g)$，有

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\det'_\zeta(-\Delta_g)}{\det'_\zeta(-\Delta_{g_0})}\right) = &-\frac{1}{6\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathscr{S}} |\nabla_{g_0}\lambda|^2_{g_0}\, d\mathrm{A}_{g_0} + \int_{\mathscr{S}} K_{g_0}\lambda\, d\mathrm{A}_{g_0}\right] \\ &+ \log\left(\frac{\mathrm{A}_g(\mathscr{S})}{\mathrm{A}_{g_0}(\mathscr{S})}\right)\end{aligned} \tag{10.4}$$

对于带边界的曲面 $(\mathscr{R}, g)$，相应的公式为

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\det_\zeta(-\Delta_g)}{\det_\zeta(-\Delta_{g_0})}\right) = &-\frac{1}{6\pi}\Big[\frac{1}{2}\int_{\mathscr{R}} |\nabla_{g_0}\lambda|^2_{g_0}\, d\mathrm{A}_{g_0} + \int_{\mathscr{R}} K_{g_0}\lambda\, d\mathrm{A}_{g_0} + \int_{\partial\mathscr{R}} k_{g_0}\lambda\, d\ell_{g_0}\Big] \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathscr{R}} \partial_n\lambda\, d\ell_{g_0},\end{aligned} \tag{10.5}$$

其中，$d\mathrm{A}_{g_0}$ 是面积测度，$d\ell_{g_0}$ 是边界测度，K_{g_0} 是高斯曲率，k_{g_0} 是边界上的测地曲率，以上各项均与度量 g_0 相关；∂_n 是沿单位外法向量的导数。此外，∇_{g_0} 是黎曼梯度，$\mathrm{A}_{g_0}(\cdot)$ 是曲面的面积（二者均相对于度量 g_0。）

在 [130] Wang 证明，对于光滑简单闭曲线，勒夫纳能量可以用上文引入的某个 Neumann 跳跃算子的 ζ 正则化行列式来表示。更明确地，考虑带有黎曼度量 g 的二维球面 $\mathbb{C}$，并设 $\gamma \subset S^2$ 为一条将 $\bar{\mathbb{C}}$ 分成两个分支 D_1 和 D_2 的光滑若尔当曲线。记作

$\Delta_{D_i,\ g}$ 为 (D_i, g) 上满足狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子，$i = 1$，2。接下来，在光滑若尔当曲线空间上定义泛函 $\mathscr{H}(\cdot, g)$：

$$\mathscr{H}(\gamma, g) := \log \det{}'_{\zeta}\left(-\Delta_{\bar{\mathbb{C}},g}\right) - \log \mathrm{vol}_g\left(\bar{\mathbb{C}}\right) - \log \det{}_{\zeta}\left(-\Delta_{D_1,g}\right) - \log \det{}_{\zeta}\left(-\Delta_{D_2,g}\right).$$

根据上述信息，Wang [130]证明了以下定理

定理10.9。若 $g = e^{2\varphi} g_0$ 是与球面度量 g_0 在 $\mathbb{C}$上共形等价的度量，则：

(1) $\mathbb{S}^1$ 在所有光滑若尔当曲线中使 $\mathscr{H}(\cdot, g)$ 达到最小值 $\gamma \subset \bar{\mathbb{C}}$(

2) 设 γ 是 $\mathbb{C}$上的一条光滑若尔当曲线。我们有如下单位元

$$I^L(\gamma) = 12\mathscr{H}(\gamma, g) - 12\mathscr{H}\left(\mathbb{S}^1, g\right) = 12 \log \frac{\det_{\zeta}\left(-\Delta_{\mathbb{D}_+,g}\right) \det_{\zeta}\left(-\Delta_{\mathbb{D}_-,g}\right)}{\det_{\zeta}\left(-\Delta_{D_1,g}\right) \det_{\zeta}\left(-\Delta_{D_2,g}\right)}, \tag{10.6}$$

wh其中 $\mathbb{D}_+$ 和 $\mathbb{D}_-$ 是 $\mathbb{S}$的补集的两个连通分支 [1].

此外，Wang 证明，勒夫纳能量等于 Takhtajan-Teo 的普适李维尔作用量的某个倍数，该作用量由式 (9.5) 给出。

在 [130], 之前，Schiffer [88, 89], Takhtajan-Teo [116] 定义了拟圆的 Fredholm 行列式。曲线的 Fredholm 行列式起源于经典位势理论，与弗雷德霍姆通过跳跃公式求解狄利克雷与诺伊曼问题有关。Schiffer [88, 89, 91, 92], 考虑 C^3 曲线时，证明经典 Fredholm 行列式可以用格伦斯基算子表示。Takhtajan-Teo 的工作自然地将这一结果推广到了拟圆。

简而言之，给定一个焊接对（f, g），使得相应的算子 $\mathbf{Gr}_f\mathbf{Gr}_f^*$ 和 $\mathbf{Gr}_g\mathbf{Gr}_g^*$ 属于迹类，则相应拟圆 $\mathscr{C} = f(\mathbb{S}^1)$ 的 Fredholm 行列式定义为

$$\mathrm{Det}_F(\mathscr{C}) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{Gr}_f\mathbf{Gr}_f^*) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{Gr}_g\mathbf{Gr}_g^*).$$

Takhtajan 和 Teo 随后证明了以下行列式的缝合公式成立

定理 10.10. 设 $\gamma = g^{-1} \circ f \in T_{\mathrm{WP}}(\mathbb{D}_-)$ 属于 $C^3(\mathbb{S}^1)$。则对于 $\mathscr{C} = f(\mathbb{S}^1)$，有

$$\mathrm{Det}_F(\mathcal{C}) = \frac{\det_{\zeta}(-\Delta_{\tilde{\mathscr{K}}}) \det_{\zeta}(-\Delta_{\tilde{\mathscr{K}}^*})}{\det_{\zeta}(-\Delta_{\mathbb{D}_+}) \det_{\zeta}(-\Delta_{\mathbb{D}_-})}. \tag{10.7}$$

这可以解释为球面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上共形度量的拉普拉斯算子的缝合公式；该度量在内部域 $\tilde{\mathscr{K}} = \imath(\mathscr{K}^*)$ 上为度量 $|dw|^2$，其中 $\imath(z) := \frac{1}{z}$，而在外部域 $\tilde{\mathscr{K}}^* = \imath(\mathscr{K})$ 上为度量 $\frac{|dw|^2}{|\ ^{-1}\ w\ \mathrm{f}()|^4}$。Fredholm 行列式 ~~Det~~$_F(\mathscr{C})$ 是诺伊曼跳跃算子行列式的逆映射，该算子对应于沿闭曲线 $\mathscr{C}$ 切割 $\mathbb{C}$，并对内部和外部拉普拉斯算子施加狄利克雷边界条件。

因此，将定理 10.9 和 10.10 结合起来，还可以看出勒夫纳能量与拟圆的 Fredholm 行列式之间的关系。

References

[1] R. Adler、M. Bazin 和 M. Schiffer，《广义相对论导论》。McGraw-Hill Book Co.，纽约—多伦多—伦敦—悉尼，1965年。[2] L. V. Ahlfors，《论文集》，第 1—2 卷。Rae Michael Shortt 协助编纂。Contemporary Mathematicians。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1982年。[3] L. V. Ahlfors 和 L. Sario，《黎曼曲面》，普林斯顿大学出版社，1960年。[4] L. V. Ahlfors，闭黎曼曲面空间的复解析结构。1960年，《解析函数》，第 45–66 页，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州。[5] L. V. Ahlfors，《经典与当代分析》。《SIAM 评论》3（1961），1–9。[6] L. V. Ahlfors，关于黎曼曲面的 Teichm ¨uller 空间的一些注记。《数学年刊》（第 2 辑）74（1961），171–191。[7] L. V. Ahlfors，Teichm ¨uller 空间的曲率性质。《数学分析杂志》9（1961/1962），161–176。[8] K. Astala 和 M. Zinsmeister，Teichm ¨uller 空间与 BMOA。《数学年刊》289（1991），第 4 期，613–625。[9] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer，椭圆算子的指标。IV。《数学年刊》（第 2 辑）93（1971），119–138。[10] A. A. Belavin 和 V. G. Knizhnik，复几何与量子弦理论。《JETP》91，364–390（1986）（俄语）；《苏联物理学 JETP》64（1986），214–228。[11]A. A. Belavin、A. M. Polyakov 和 A. B. Zamolodchikov，二维量子场论中的无限共形对称。《核物理 B》241（1984），第 2 期，333–380。[12] S. Bergman 和 M. Schiffer，核函数与共形映射。《组合数学》8（1951），205–249。[13] L. Bers，拟共形映射的一个极值问题及 Thurston 的一个定理。《数学学报》141（1978），73–98。[14] C. J. Bishop，魏尔–彼得森曲线的函数论刻画。《伊比利亚美洲数学杂志》38（2022），第 7 期，2355–2384。[15] C. J. Bishop，魏尔-彼得森曲线、共形能量、 β-数与极小曲面。可见 http://www.math.stonybrook.edu/∼bishop/papers/wpbeta.pdf。[16] J. M. Bismut、J. M. 和 D. S. Freed，椭圆族的分析 I。《数学物理通讯》106（1986），159–176。[17] J. M. Bismut、H. Gillet 和 Ch. Soule，解析挠率与全纯行列式丛 I、II、III。《数学物理通讯》115（1987），49–78、79–126、301–351。[18] M. J. Bowick，弦理论的几何。第八届大统一研讨会，锡拉丘兹，纽约州（麻省理工学院预印本 CTP 第 1492 号），（1987）[19] M. J. Bowick 和 A. Lahiri，Diff($\mathbb{S}^1$)/SL(2, R) 的里奇曲率。《数学物理学杂志》29，1979（1988）[20]M. J. Bowick 和 S. G. Rajeev，闭玻色弦理论的全纯几何与 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$。《核物理 B》293（1987），第 2 期，348–384。[21] M. J. Bowick 和 S. G. Rajeev，作为环空间 K ¨ahler 几何的弦理论。《物理评论快报》58，535–538（1987）。[22] J. M. Burgos 和 A. Verjovsky，万有双曲层状结构的 Teichm ¨uller 理论。《芬兰科学院数学辑刊》45（2020），第 1 期，577–599。[23] G. Cui，圆的可积渐近仿射同胚与 Teichm ¨uller 空间。《中国科学》A 辑 43（2000），第 3 期，267–279。[24] G. Cui 和 M. Zinsmeister，BMO-Teichm ¨uller 空间。《伊利诺伊数学杂志》48（2004），第 4 期，1223–1233。[25] E. D'Hoker 和 D. Phong，关于黎曼曲面上拉普拉斯算子的行列式。《数学物理通讯》104，537–545（1986）[26] P. Duren，《单叶函数》，数学科学基础丛书第 259 卷，Springer-Verlag，纽约（1983）。[27] C. J. Earle、F. P. Gardiner 和 N. Lakic，渐近 Teichm ¨uller 空间。I. 复结构。载于《继承 Ahlfors 与 Bers 的传统》（纽约州石溪，1998），17–38 页，当代数学第 256 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[28] C. J. Earle、F. P. Gardiner 和 N. Lakic，渐近 Teichm ¨uller 空间。II. 度量结构。载于《继承 Ahlfors 与 Bers 的传统》，III，187–219 页，当代数学第 355 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（2004）。

[29] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Po´enar，《瑟斯顿关于曲面的研究》，Djun Kim 和 Dan Margalit 译，数学札记第48卷，普林斯顿大学出版社，2012年。[30] A. Figalli，关于圆上 $H^{\frac{3}{2}}$-向量场的流。《数学年刊》347（2010年），43–57。[31] D. Friedan 和 S. Shenker，二维共形场论的解析几何，《核物理B》281（1987年），第3–4期，509—545，DOI 10.1016/0550-3213(87)90418- 4。[32] P. Friz、A. Shekhar，关于 SLE 迹的存在性：有限能量驱动函数与非恒定 κ。《概率论及其相关领域》169，第1–2期（2017年）。[33] A. Fujiki 和 G. Schumacher，极值紧致 K ¨ahler 流形的模空间与广义魏尔-彼得森度量。《数学科学研究所刊物》26（1990年），第1期，101–183。[34] F. P. Gardiner 和 N. Lakic，拟共形 Teichm ¨uller 理论。《数学综述与专著》第76卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2000年。xx+372 页。[35] F. P. Gardiner 和 D. P. Sullivan，闭曲线上的对称结构，《美国数学杂志》114，683–736，（1992年）。[36] F. Gay-Balmaz，无限维测地流与普遍 Teichm ¨uller 空间。博士论文，洛桑联邦理工学院，编号4254（2009年）。DOI:10.5075/epfl-thesis-4254。[37] F. Gay-Balmaz、J. E. Marsden 和 T. S. Ratiu，普遍 Teichm ¨uller 空间的几何与 Euler-魏尔-彼得森方程，技术报告，巴黎高等师范学院，巴黎，2009年。[38] F. Gay-Balmaz 和 T. S. Ratiu，普遍 Teichm ¨uller 空间的几何与 Euler-魏尔-彼得森方程，《数学进展》279（2015年），717–778。[39] H. Guo，可积 Teichm ¨uller 空间，《中国科学：A辑》43（2000年），第1期，47–58。[40] D. A. Hejhal，PSL (2, R) 的塞尔伯格迹公式。第I卷，Springer-Verlag，柏林，1976年，数学讲义第548卷。[41] D. K. Hong 和 S. G. Rajeev，普遍 Teichm ¨uller 空间与 Diff($\mathbb{S}^1$)/$\mathbb{S}^1$。《数学物理通讯》135（1991年），第2期，401–411。[42] Y. Hu、Y. Shen 和 L. Wu，重新探讨魏尔-彼得森 Teichm ¨uller 空间。《数学分析与应用杂志》491，124304（2020年）[43] Y.-Z. Huang，二维保角几何与顶点算子代数，《数学进展》第148卷，Birkh¨auser，马萨诸塞州波士顿，1997年。[44] J. H. Hubbard，Teichm ¨uller 理论及其在几何、拓扑和动力系统中的应用。第1卷：Te- ichm ¨uller 理论。Adrien Douady、William Dunbar、Roland Roeder、Sylvain Bon- not、David Brown、Allen Hatcher、Chris Hruska 和 Sudeb Mitra 供稿。William Thurston 和 Clifford Earle 作序。Matrix Editions，纽约州伊萨卡，2006年。[45] L. Ji 和 A. Papadopoulos，Teichm ¨uller 理论的历史发展。《精密科学史档案》67（2013年），第2期，119–147。[46] B. Khesin 和 R. Wendt，无限维群的几何。《数学及其边缘领域成果》第3辑：现代数学综述系列第51卷。Springer-Verlag，柏林，2009年。[47] A. A. Kirillov，圆周微分同胚群 K 轨道上的 K ¨ahler 结构。《泛函分析及其应用》21，122–125（1987年）。[48] A. A. Kirillov 和 D. V. Yuriev，维拉索罗代数的轨道方法表示，《几何与物理杂志》5（1988年），第3期，351–363。[49]O. Lehto，单叶函数与 Teichm ¨uller 空间，《数学研究生教材》第109卷，Springer-Verlag，纽约，1987年。[50] X. Liu 和 Y. Shen，可积 Teichm ¨uller 空间。《数学杂志》302（2022年），第4期，2233–2251。[51] K. Matsuzaki，圆周微分同胚群与 Teichm ¨uller 空间的刚性，《分析数学杂志》140（2020年），第2期，511–548。[52] K. Matsuzaki 和 M. Yanagishita，拟共形映射的重心延拓的渐近共形性。《Filomat》31，85–90（2017年）。[53] K. Matsuzaki 和 H. Wei，p-魏尔-彼得森 Teichm ¨uller 空间与曲线的拟共形延拓。《几何分析杂志》32，213（2022年）。[54] K. Matsuzaki 和 H. Wei，弦弧曲线空间与 BMO/VMO Teichm ¨uller 空间。《芬兰数学年刊》48（2023年），第1期，27–42。

[55] S. Nag，Teichm ¨üller 空间的复解析理论，加拿大数学会专著与高级教材系列，Wiley，1988年。[56] S. Nag，普遍 Teichm ¨üller 空间中的周期映射。《美国数学会通报》（新系列）26（1992年），第2期，280–287。[57] S. Nag 和 D. Sullivan，通过量子微积分与圆上的 $H^{1/2}$ 空间研究 Teichm ¨üller 理论及普遍周期映射，《大阪数学杂志》32（1995年），第1期，1–34。[58] S. Nag 和 A. Verjovsky，Diff($\mathbb{S}^1$) 与 Teichm ¨üller 空间，《数学物理通讯》130（1990年），第1期，123–138。[59] K. Ohshika；A. Papadopoulos，略窥瑟斯顿的研究。载于《瑟斯顿传统：几何与拓扑》，1–58，Springer，Cham，（2020年）。[60] B. Osgood、R. Phillips、P. Sarnak，拉普拉斯算子行列式的极值。《泛函分析杂志》80，第1期（1988年）[61] J. T. Ottesen，量子物理中的无限维群与代数。《物理学讲义》。新系列 m：专著，第27卷。Springer-Verlag，柏林，1995年。[62] O. Pekonen，几何与物理中的普遍 Teichm ¨üller 空间，《几何与物理杂志》15（1995年），第3期，227–251。[63] H. Petersson，关于整模形式内积的计算。《瑞士数学评论》22，168–199（1949年）[64] J. F. Pommaret，李伪群与力学。《数学及其应用》第16卷。Gordon & Breach Science Publishers，纽约，1988年。[65] C. Pommerenke，单叶函数，附 Gerd Jensen 撰写的二次微分一章。《Studia Mathematica/Mathematische Lehrb¨ücher》，第XXV卷。Vandenhoeck & Ruprecht，哥廷根，1975年。[66] C. Pommerenke，共形映射的边界行为。Springer-Verlag，柏林，1992年。[67] A. Pressley 和 G. Segal，环群。《牛津数学专著》。牛津科学出版物。牛津大学出版社克拉伦登出版社，纽约，1986年。[68] D. Quillen，黎曼曲面上的柯西-黎曼算子的行列式。《泛函分析及其应用》19（1），37–41（1985年）（俄语）；《泛函分析及其应用》19，31–34（1985年）[69] D. Radnell，Teichm ¨üller 空间中的 Schiffer 变分、行列式线丛与模函子，博士论文，罗格斯大学，新布朗斯维克，NJ，2003年10月。[70] D. Radnell 和 E. Schippers，带结构 Teichm ¨üller 空间中的拟对称缝合，《当代数学通讯》8（2006年），第4期，481–534。[71]D. Radnell 和 E. Schippers，映入黎曼曲面的可拟共形延拓不重叠映射集合上的复结构，《分析数学杂志》108（2009年），277–291。[72] D. Radnell 和 E. Schippers，带边黎曼曲面 Teichm ¨üller 空间的纤维结构与局部坐标，《共形几何与动力系统》14（2010年），14–34。[73] D. Radnell 和 E. Schippers，带结构环带半群与圆环的 Teichm ¨üller 空间，《伦敦数学会杂志》（第2辑）86（2012年），第2期，321–342。[74] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，带边黎曼曲面的精化 Teichm ¨üller 空间上的希尔伯特流形结构。arXiv:1207.0973 2012年7月。分两部分发表于 [76, 77]。[75] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，带边黎曼曲面 Teichm ¨üller 空间上的收敛魏尔-彼得森度量。arXiv:1403.0868 2014年3月。分两部分发表于 [78, 79]。[76]D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，带边曲面的魏尔-彼得森类 Teichm ¨üller 空间上的希尔伯特流形结构，《当代数学通讯》17（2015年），第4期，DOI: 10.1142/S0219199715500169。[77] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，映入黎曼曲面的魏尔-彼得森类不重叠映射，《当代数学通讯》18（2016年），第4期。[78] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，带有贝尔特拉米微分的带边黎曼曲面的拟共形映射，《分析数学杂志》132（2017年），229–245。[79]D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，带边曲面 Teichm ¨üller 空间上魏尔-彼得森度量的收敛性。《当代数学通讯》19，第1期（2017年）。DOI: 10.1142/S0219199716500255。[80] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，具有魏尔-彼得森类边界的多连通域的狄利克雷空间。arXiv:1309.4337v2（v1 于2013年发布）。

[81] D. Radnell；E. Schippers；W. Staubach，《拟共形 Teichmüller 理论：二维共形场论的分析基础》。载于《李代数、顶点算子代数及相关主题》，《当代数学》，695，205—238，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2017年。[82] D. Radnell；E. Schippers；W. Staubach，《由拟圆围成的区域的狄利克雷空间》。《当代数学通讯》22（2020），第3期。arXiv:1705.01279v1。[83] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，《亏格零带边曲面的 Teichmüller 空间的周期映射模型》。《共形几何与动力系统》23（2019），32–51。[84] T. Ratiu 和 A. Todorov，《魏尔-彼得森度量的无限维视角》。《若干复变数与复几何》，第2部分（加利福尼亚州圣克鲁斯，1989），467—476，《纯数学专题讨论会论文集》，52，第2部分，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1991年。[85] B. Riemann，《阿贝尔函数理论》。《纯粹与应用数学杂志》54，115—155（1857）。重印于其《数学著作全集》[227], 第88–144页。[86] H. L. Royden，《Teichmüller 空间上的不变度量》，载于《分析论文集》（Ahlfors、L.、Kra、I.、Maskit、B.、Nirenberg、L. 编），纽约、伦敦，1974年。[87] H. L. Royden，《Teichmüller 空间上的内蕴度量》，《国际数学家大会论文集》2，217–221（1974）。[88] M. M. Schiffer，《平面区域的 Fredholm 特征值》。《太平洋数学杂志》7（1957），1187–1225。[89] M. M. Schiffer，《多连通区域的 Fredholm 特征值》。《太平洋数学杂志》9（1959），337—378。[90] M. Schiffer 和 N. S. Hawley，《联络与共形映射》。《数学学报》107（1962），175—274。[91] M. M. Schiffer，《Fredholm 特征值与共形映射》。《数学与应用研究报告》（第5辑）22（1963），447–468。[92] M. M. Schiffer，《Fredholm 特征值与 Grunsky 矩阵》。《波兰数学杂志》39（1981），149–164。[93] M. Schiffer，《Issai Schur：个人回忆》，为1986年在特拉维夫举行的纪念 Issai Schur 的专题讨论会所作演讲的手稿，载于 [94]。[94] M. M. Schiffer，《Menahem Max Schiffer：精选论文》。第2卷。Peter Duren 和 Lawrence Zalcman 编。《当代数学家丛书》。Birkhäuser/Springer，纽约，2014年。[95] E. Schippers 和 W. Staubach，《黎曼曲面模空间的比较》。《复分析与动力系统》，231–271，《数学趋势》，Birkhäuser/Springer，Cham，2018年。[96] E. Schippers 和 W. Staubach，《黎曼曲面上调和一形式的散射理论》。已提交。[97] E. Schippers 和 W. Staubach，《黎曼曲面散射理论综述及其在整体分析与几何中的应用》。即将刊于《越南数学杂志》特刊，以纪念 Carlos Kenig 70岁生日（2023年）。[98] M. E. Schonbek、A. N. Todorov 和 J. P. Zubelli，《圆周微分同胚、格拉斯曼流形上的测地流与周期 KdV 方程的几何》。《理论与数学物理进展》3（1999），第4期，1027–1092。[99] M. Schottenloher，《共形场论数学导论》。第二版。《物理学讲义》759。Springer-Verlag，柏林，2008年。[100] G. Schumacher，《紧黎曼曲面模空间的调和映射》。《数学年刊》275，466–466（1986）。[101] G. Schumacher，《Teichmüller 空间理论：展望 Kähler 流形的模空间》。《若干复变数》，VI，251–310，《数学科学百科全书》69，Springer，柏林，1990年。[102] D. Mumford 和 E. Sharon，《使用共形映射进行二维形状分析》。《国际计算机视觉杂志》第70卷，55–75页（2006年）。[103] G. Segal，《某些无限维群的酉表示》。《数学物理通讯》80（1981），第3期，301–342。[104]G. Segal，《共形场论的定义》，载于《理论物理中的微分几何方法》（科莫，1987），《北约高级科学研究所系列：数学与物理科学》250卷，Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1988年，第165–171页。[105] G. Segal，《共形场论的定义》。预印本，1988年。后发表于 [106][106] G. Segal，《共形场论的定义》，载于《拓扑、几何与量子场论》（U. Tillmann 编），伦敦数学学会讲义丛书308卷，剑桥大学出版社，2004年，421–576。[107] G. Segal 和 G. Wilson，《环群与 KdV 型方程》。《高等科学研究所数学出版物》第 61 期（ 1985 ），5–65。

[108] D. Shale, 《自由玻色子场的线性对称性》。《美国数学会汇刊》103（1962），149—167。[109] Y. Shen, 《关于 Grunsky 算子》。《中国科学：数学》A辑50（2007），第12期，1805–1817。[110] Y. Shen, 《魏尔-彼得森 Teichmüller 空间》。《美国数学杂志》140（2018），第4期，1041–1074。[111] M. Shirazi, 《带边黎曼曲面对应的 Faber 算子与 Grunsky 算子》。《共形几何与动力系统》24（2020），177–201。[112] C. L. Siegel, 《辛几何》。学术出版社，纽约—伦敦，1964年。[113]D. Sullivan, 《关联 Milnor-Thurston、Feigenbaum 与 Ahlfors-Bers 的普适性》，载于 Milnor 纪念文集《现代数学中的拓扑方法》（L. Goldberg 和 A. Phillips 编），Publish or Perish，1993年，543–563。[114] L. A. Takhtajan 和 L.-P. Teo, 《魏尔-彼得森度量与万有 Teichmüller 空间 I：曲率性质与陈形式》。arXiv:math/0312172v3，2004年6月（v1、v2 为2003年12月）。作为第一章发表于 [116]。[115] L. A. Takhtajan 和 L.-P. Teo, 《魏尔-彼得森度量与万有 Teichmüller 空间 II：Kähler 势与周期映射》。arXiv:math/0406408，2004年6月。作为第二章发表于 [116]。[116] L. A. Takhtajan 和 L.-P. Teo, 《万有 Teichmüller 空间上的魏尔 - 彼得森度量》。《美国数学会回忆录》 183 （ 2006 ），第 861 期。[117] L. Takhtajan；P. G. Zograf, 《带 puncture 的黎曼曲面族的 $\overline{\partial}$-算子局部指标定理及其模空间上的一种新 Kähler 度量》。《数学物理通讯》137（1991），第2期，399–426。[118] S. Tang, 《可积 Teichmüller 空间的一些刻画》。《中国科学：数学》56（2013），第3期，541–551。[119] S. Tang、S.、Y. Shen, 《可积 Teichmüller 空间》。《数学分析及其应用杂志》465，658–672（2018）。[120] L.-P. Teo, 《万有 Teichmüller 曲线上的维林-基里洛夫度量》。《数学分析杂志》93（2004），271–307。[121] R. Torelli, 《论 Jacobi 簇》。《林琴国家科学院院刊》22（5）：98–103（1913）。[122] W. P. Thurston, 《二维双曲几何中的地震》。《低维拓扑与克莱因群》（考文垂/达勒姆，1984），91–112，伦敦数学学会讲义丛书112，剑桥大学出版社，剑桥，1986年。[123] W. P. Thurston, 《论曲面微分同胚的几何与动力学》。《美国数学会通报》（新辑）19（1988），第2期，417–431，[124]A. J. Tromba, 《几乎复结构空间上的一种自然仿射联络，以及相对于魏尔-彼得森度量的 Teichmüller 空间曲率》，《数学手稿》56，475–497（1986）。[125] C. Vafa, 《共形场论与带 puncture 曲面》。《物理快报 B》199（1987），第2期，195–202。[126] A. Vasil’ev, 《共形与拟共形映射的曲线族模空间》。《数学讲义》1788。Springer-Verlag，柏林，2002年。[127] A. Vinogradov, 《偏微分方程的对称性是什么，偏微分方程本身又是什么？》，载于《Sophus Lie 与 Felix Klein：埃尔朗根纲领及其对数学和物理学的影响》，137—190，《IRMA 数学与理论物理讲义》23，欧洲数学会，苏黎世，2015年。[128] K. Vodop’yanov, 《齐性群的映射与函数空间的嵌入》。《西伯利亚数学杂志》30（1989），25–41。[129] Y. Wang, 《确定性洛温链的能量：可逆性及通过 SLE0+ 的解释》。《欧洲数学会杂志》（JEMS）21（2019），第7期，1915–1941。[130] Y. Wang, 《勒夫纳能量的等价描述》。《数学发明》218（2）：573–621，2019年。[131] H. Wei 和 M. Zinsmeister, 《一种实变量构造及其在 BMO-Teichmüller 理论中的应用》。《伊利诺伊数学杂志》66（2022），第3期，449–462。[132] A. Weil, 《黎曼曲面模》，《布尔巴基讨论班》；第10年：1957/1958。会议文本；报告168；第2版修订版，报告168，巴黎：数学秘书处，第413–419页。[133] A. Weil, 《论黎曼曲面的模》，《科学著作集》。论文集。第II卷（1951–1964），柏林、纽约：Springer-Verlag，第381–389页。[134] H. Weyl, 《线性偏微分方程特征值的渐近分布定律》。《数学年刊》71（4），441–479（1912）。

[135] W. E. Witten，维拉索罗群的余伴随轨道，《数学物理通讯》114（1981），1–53。[136] S. Wolpert，Teichm ¨üller 空间上的 Thurston 黎曼度量。《微分几何杂志》23（1986），第 2 期，143–174。[137] S. Wolpert，曲线模空间的陈形式与黎曼张量。《数学发明》85（1）（1986），119–145。[138] M. Yanagishita，p-可积 Teichm ¨üller 空间上复结构的引入。芬兰科学院数学辑刊 39（2014），第 2 期，947–971。[139] M. Yanagishita，平方可积 Teichm ¨üller 空间上魏尔-彼得森度量的 K ¨ähler 性与负性。《几何分析杂志》27（2017），第 3 期，1995–2017。[140]M. Yanagishita。p-魏尔–彼得松度量的光滑性与强伪凸性。芬兰科学院数学辑刊第 44 卷（2019），15–28。[141] M. Yanagishita。 p-魏尔-彼得森距离的完备性。《几何与动力学会议录》26（2022），34–45。
Eric Schippers,
Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg, Mani-toba, R3T 2N2, Canada电子邮箱：eric schippers@umanitoba.caWolfgang Staubach,
Department of Mathematics, Uppsala University, Box 480, 751 06Uppsala, Sweden电子邮箱：wulf@math.uu.se