天线增益上界及其表示为特征增益之和的可行性

Miloslav Capek，*IEEE* 高级会员 和 Lukas Jelinek

arXiv:2302.06425v2 [physics.app-ph] 7 Oct 2023

摘要——**天线增益上界可表示为有损特征模之和，具体而言，是特征远场平方之和。该方法结合了 Harrington 经典方法在求最大方向性方面的优点，以及基于电流密度的方法的优点。对于在给定设计区域内设计、且已确定其最优性能的任意天线或阵列，该上界均适用。将其分解为各个模态，便可研究障碍物的自由度，将其辐射分类为常规电流或超指向性电流，并确定这些电流与给定激励的兼容性。该上界适用于任意形状的设计区域及特定的材料分布。文中研究了品质因数和辐射效率方面的代价。对于电小天线，还施加了自谐振电流这一额外约束。相关示例验证了所提出的理论，展示了该方法的实用性，并为天线设计师提供了有益的见解。文中还以端射阵列为例，通过将最优电流密度分解为有损特征模，详细研究了最优增益的可行性。**

索引词—**天线理论、特征模、特征值和特征函数、基本界限、优化方法、数值方法。**

I. 引言

ANTENNAS 在许多应用中都需要具备高增益性能的天线和天线阵列 [1]。它们的设计十分复杂，尤其是在电尺寸较小的设计区域 [2], [3] 或高增益端射阵列的情况下 [4], [5], [6], [7]。因此，在设计过程开始时了解理论极限非常有利，因为这有助于我们评估已实现设计的性能 [8],[9], [10] 并制定切实可行的停止准则。

Harrington 提出的最著名上界 [11] 基于球面波级数的截断，截断范围取决于天线的电尺寸。该估算考虑所谓的“常规”增益，其中不考虑高度反应性的分量。此上界仅由电尺寸决定，因此易于应用。不可避免地，这种估算并不紧确（球壳上的电流密度分布除外），对于高增益应用而言也过于保守。尽管如此，了解可用模式的数量仍有帮助；因此，原始研究后来经过多次改进次 [12], [13], [7], , 研究均涉及在附加参数（带宽、欧姆损耗、电尺寸）约束下最大化天线方向性。方向性上界的评估进一步扩展至任意形状的障碍物，并分别利用理想导体的特征模和模态场展开。然而，仍然需要对发散级数进行经验性截断。 [14] 和 [15]

近期提出了基于电流密度的界限 [16], [17],, 其灵感来自一种针对天线阵列的类似方法 [18], [19]。对于任意形状的设计区域和指定的材料分布，可以确定基于电流的界限，从而给出紧致的天线增益上界。研究利用辐射模 [17] 来阐释最优电流解的构成；然而，这种构成仅与最优电流有关，并未充分说明特定设计区域或其与激励的兼容性。

为了解决上述问题，本文展示了如何将产生天线增益上界的最优电流分解为有损特征模 [20]。本文的主要成果是证明以下公式成立：

$$G_{\mathrm{ub}} = \sum_n G_n, \tag{1}$$

即。增益上界可以由特征增益按模态逐项构成。在所分析区域内构造的任何天线或阵列都无法超过这一上界 [21]。除了公式（1）可直接应用之外，本文还旨在说明可以获取并利用其他信息来辅助天线设计，例如模态显著性分布、最优激励系数、模态辐射效率或模态品质因数。这些模态参数还可用于截断级数，从而进一步收紧上界。

按照以往研究，本文考虑有损导体和电介质。本文采用模态分解对耗散功率[1]矩阵进行对角化，以便将天线增益上界写成（1）的形式。鉴于其具有优良的代数性质，本文采用 [20]对特征模分解进行的修正来处理有损障碍物。与理想导体的特征模相比， [22],后者对远场进行正交化，而本文则对总耗散

稿件收到日期：2023年10月10日；修订日期：2023年10月10日。本研究得到捷克科学基金会项目21-19025M以及教育、青年和体育部项目LTAIN19047的支持。M. Capek和L. Jelinek就职于捷克布拉格捷克技术大学（电子邮箱： {miloslav.capek；lukas.jelinek}@fel.cvut.cz）。本文一幅或多幅图的彩色版本可在线获取：http://ieeexplore.ieee.org。

[1]本文中，“损耗”一词用于指转化为热的能量，而“耗散”一词则同时涵盖转化为热的能量和辐射能量。

（辐射功率加欧姆损耗）功率进行对角化。系统矩阵仍然经过对角化，在考虑激励时保留了标准模态叠加公式。该表述具有可操作性，例如，采用针对表面或体积的电场积分方程，或者一般而言，只要耗散功率能够写成矩阵算子即可。无需将辐射功率与加热损耗功率分开。

本文结构安排如下。第二节给出天线增益上界。第三节分解增益公式分母中的耗散功率矩阵，从而可以在第四节将天线增益上界写成式（II），即表明上界是模态增益之和。第五节介绍其与光学定理的关系。第六节和第七节分别通过两个平行板和端射阵列的示例验证该理论并展示其性质。随后讨论其他方面：第八节给出任意极化下的上界，第九节讨论自谐振约束。本文最后在第十节作总结。III1IV，即。。，即表明上界是模态增益之和。第五节介绍其与光学定理的关系。该理论在第六节和第七节分别通过两个平行板和端射阵列的示例得到验证，并展示了其性质。随后讨论其他方面：第八节给出任意极化下的上界，第九节讨论自谐振约束。本文最后在第十节作总结。V。该理论在两个平行板和端射阵列的示例中得到验证，其性质也在第VI 和VII节分别展示。随后讨论其他方面：第八节给出任意极化下的上界，第九节讨论自谐振约束。VIII ，以及IX。本文最后在第X节作总结。

II. 天线增益上界

天线增益定义为 [23, (2-46)]

$$G\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\frac{4\pi U\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)}{P}=\frac{2\pi}{Z_0}\frac{\left|F\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\right|^2}{P_{\mathrm{rad}}+P_{\mathrm{lost}}},\tag{2}$$

其中，$U(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})=|F(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})|^2/(2Z_0)$ 表示朝向$\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向、极化为$\hat{\boldsymbol{e}}$的辐射强度，$F(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 是相应的电远场，P 是时间平均耗散功率（天线接收的总功率），P_{rad} 是时间平均辐射功率，P_{lost} 是时间平均损耗功率（焦耳热），Z_0 是自由空间阻抗。电远场 $F(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 也可以写成

$$F\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}\tag{3}$$

其中，$\mathbf{K}$ 为远场矩阵 [24, (39)]，而$\mathbf{I}=[I_p]\in\mathbb{C}^{N\times 1}$为展开系数列向量，电流密度以基函数近似表示 $\{\boldsymbol{\psi}_p\}$, [25]，如下

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}\right)\approx\sum_{p=1}^{P}I_p\boldsymbol{\psi}_p\left(\boldsymbol{r}\right).\tag{4}$$

天线增益可改写为

$$G\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\frac{4\pi}{Z_0}\frac{\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}}{\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}},\tag{5}$$

其中$\mathbf{R}+\mathbf{L}$ 是总耗散功率的适当模型。在本文采用的电场积分方程（EFIE）中，矩阵$\mathbf{R}$ 是阻抗矩阵中对应真空（辐射）的部分，而矩阵$\mathbf{L}$ 则表示材料损耗 [16]。在这一框架下，高导电表面以表面电阻率 R_{s} [26]建模，而介电材料则以体电阻率 ρ建模，因此矩阵$\mathbf{L}$ 的逐元素定义如下：

$$L_{pq}=\int_{\Omega}\rho\left(\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{\psi}_p^{*}\left(\boldsymbol{r}\right)\cdot\boldsymbol{\psi}_q\left(\boldsymbol{r}\right)\,\mathrm{d}\Omega.\tag{6}$$

天线增益的最大化公式在 [27,(10-46)]中针对端子电压推导得出，在 [17]中则针对存在有损导体时求得的理想电流推导得出，其形式为

$$G_{\mathrm{ub}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\frac{4\pi}{Z_0}\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right).\tag{7}$$

与上界 G_{ub} 相关联的最优电流$\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}$ 为

$$\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}=c\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right).\tag{8}$$

with

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)}}.\tag{9}$$

公式 (7) 是本文推导 (1) 的出发点。

III. 耗散功率算子的因式分解

矩阵 $\mathbf{R}$ $+\mathbf{L}$ 在 (7) 中的因式分解，使得上界可以表示为模态贡献之和。为此，可以采用任何涉及耗散功率矩阵对角化的分解方法，例如例如，文献中提出了辐射模 [17]。本文采用[20,(63)] 中提出的分解方法，因为它与激励相关。这些“有损特征模”定义[2] 为

$$\mathbf{X}\mathbf{I}_n=\lambda_n\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}_n,\tag{10}$$

其中 $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 是电抗矩阵，*i.e.*，即电场积分方程 [16] 中系统矩阵的虚部。注意，由于整个矩阵 $\mathbf{R}+\mathbf{L}$ 都已对角化，因此无需将辐射功率与加热损耗功率分离。电流向量的归一化$\mathbf{I}_n$ 使其满足

$$\mathbf{I}_m^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}_n=\delta_{mn},\tag{11}$$

$$\mathbf{I}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{X}\mathbf{I}_n=\delta_{mn}\lambda_n,\tag{12}$$

其中 H 表示厄米共轭。特征值 λ_n 为实数，这是求解对称实值广义特征值问题（10）的结果。

（10）的模式可叠加为 [22]

$$\mathbf{I}=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mathbf{I}_n=[\mathbf{I}_n]\boldsymbol{\alpha}=\sum_{n}\frac{\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{V}}{1+\mathrm{j}\lambda_n}\mathbf{I}_n,\tag{13}$$

其中 $[\mathbf{I}_n]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 是按列排列的模态电流矩阵，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^{N\times 1}$ 是激励系数向量，而$\mathbf{I}\in\mathbb{C}^{N\times 1}$ 是通过求解矩量法问题通常得到的“馈电电流”

$$\mathbf{I}=\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V},\tag{14}$$

其中$\mathbf{V}\in\mathbb{C}^{N\times 1}$ 是表示激励的向量（差隙、平面波，.....）。

由（10）定义的模式具有一个关键特征，本文将利用这一特征:

$$\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)^{-1}=\sum_{n}\mathbf{I}_n\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}=[\mathbf{I}_n][\mathbf{I}_n]^{\mathrm{H}}.\tag{15}$$

[2]作者意识到，对于有损障碍物，还存在其他可能的特征模定义，参见， [20]。此处采用（10），因为无论命名约定如何，该公式都具有有利的代数性质，可用于推导（1）。

逆矩阵（15）存在，因为$\mathbf{L}$ 对于任何实材料都是满秩矩阵，前提是叠加（13）收敛。关系式（15）不适用于经典特征模 [22]，这是由于矩阵$\mathbf{R}$存在秩亏。

IV. 最大增益作为有损特征模之和

考虑公式（7）和（15），天线增益上界也可以写为

$$G_{\mathrm{ub}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\frac{4\pi}{Z_0}\sum_n\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}_n=\sum_n G_n\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right), \tag{16}$$

其中 G_n 表示特征增益

$$G_n\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\frac{4\pi}{Z_0}\frac{\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}_n}{\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}_n} \tag{17}$$

并且应用了（11）。公式（16）是本文的主要结果之一，也可以等价地表示为

$$G_{\mathrm{ub}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\frac{4\pi}{Z_0}\sum_n\left|F_n\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\right|^2, \tag{18}$$

其中 $F_n(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 为特征远场，并采用了归一化（11）。最大可能增益始终由特征远场的平方和给出，并针对整个设计区域进行评估。这是一个普遍结论，对给定的任意形状设计区域及其材料分布，适用于所有方向和频率。任何位于指定区域内的天线、阵列或真空中的电流都无法超过数值（18），因此，该数值可在设计过程初期为天线设计师提供重要信息。

如果需要，表示天线增益上界的最优电流密度也可以分解为模态（10），如下所示：

$$\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}=\sum_n\beta_n\mathbf{I}_n, \tag{19}$$

其中，利用（8）和（15），展开系数为

$$\beta_n=c\left(\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}_n\right)^{\mathrm{H}}=cF_n^*\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right), \tag{20}$$

最大增益 G_{ub} 的值与先前的研究 [16], [17], （即式 (7)）相同；然而，公式 (16) 为分类所需模式的数量、这些模式与所用激励的耦合方式，以及当某些模式未被适当激励时上界 G_{ub} 如何降低，开辟了新的可能性。将结果分解为特征模，也证明了相较于对应相同设计区域的所有实际设计天线增益，上界 G_{ub} 具有优越性，见附录 A。不等式 $G(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\le G_{\mathrm{ub}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 与以下事实有关：最大天线增益由特定的展开系数 β_n 实现，这些系数与激励向量 $\mathrm{V}_{\mathrm{ub}}=\mathrm{Z}\mathrm{I}_{\mathrm{ub}}$ 相关。因此，代入式 (15) 并考虑式 (11)–(12)，即可从式 (13) 得到式 (20)，这提供了另一种推导方式。

$$\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}=\sum_n\frac{\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{Z}\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}}{1+\mathrm{j}\lambda_n}\mathbf{I}_n=\sum_n c\left(\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{I}_n\right)^{\mathrm{H}}\mathbf{I}_n=\sum_n\beta_n\mathbf{I}_n. \tag{21}$$

V. 与前向散射和光学定理的关系

将天线增益上界表示为有损特征模之和的做法，对散射理论也有影响。输入功率与耗散功率之间的平衡可用光学定理 [28]来表示。

$$\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\mathbf{V}\right\}=-\frac{4\pi}{kZ_0}\mathrm{Im}\left\{\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}\right\}, \tag{22}$$

其中，我们利用表示单位振幅入射平面波$|E_0|=1\mathrm{Vm}^{-1}$的激励系数 $\mathbf{V}$ 与指向同一方向 [24, 的远场矢量 $\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 之间的关系；该平面波的极化为 $\hat{\boldsymbol{e}}$，方向为 $\hat{\boldsymbol{r}}$（方程（41））， 即，

$$\mathbf{V}=-\mathrm{j}\frac{4\pi}{kZ_0}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}). \tag{23}$$

在光学定理（22）约束下，最大远场强度的问题 $|F(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})|^2$ 可表示为

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\quad&&|F(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})|^2\\&\text{subject to}\quad&&\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}-\mathrm{Re}\left\{\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\mathbf{V}\right\}=0\\&&&\mathbf{V}+\mathrm{j}\frac{4\pi}{kZ_0}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})=0\end{aligned} \tag{24}$$

并在 [29, 方程（55）]中求解。可以证明，满足（24）的最优电流为

$$\mathbf{I}=-\mathrm{j}\frac{4\pi}{kZ_0}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right) \tag{25}$$

这与相同的电流[3]，即天线增益上界对应的电流，参见（8）。换言之，受光学定理约束时，最大前向散射也可由特征增益之和确定（16）。障碍物的散射特性完全由一组有损特征模刻画，而了解这些特征模即可立即得出前向散射的上界。

通过比较最优电流密度的特征模展开（$ka\gg1$ 其中 a 为完全包围天线的最小球体半径）与前向散射情形下由平面波激发的电流密度（19），可以发现对于电尺寸较大的障碍物存在一个有趣的渐近关系；13），即在（$i_\circ$ $e_\circ$，当（23）成立时。将（23）代入（13），即可得到

$$\mathbf{I}=-\mathrm{j}\frac{4\pi}{kZ_0}\sum_n\frac{1}{1+\mathrm{j}\lambda_n}F_n^*\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{I}_n. \tag{26}$$

可以看出，当 $|\lambda_n|\longrightarrow1,\ \ \forall n$时，展开式（26）等价于（19）–（20）（相差一个常数），$i_\circ$ $e_\circ$，即入射平面波激发的电流与使前向散射最大化的电流相同。

[3]电流（25）和（8）仅在幅度上有所不同，*i.e.*，即相差一个常数。然而，该常数与（2）的结果无关。

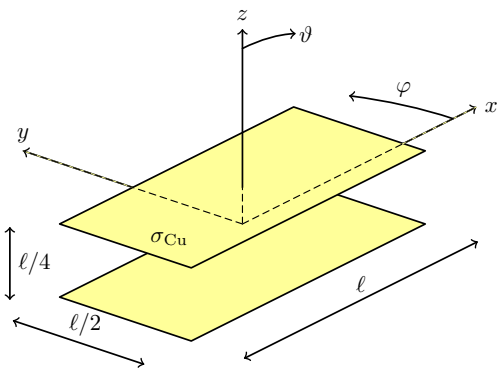

图1. 本文研究的设计区域：两块平行矩形板以坐标系原点为中心放置，且边缘平行于坐标轴。最大增益在 $\varphi = 0$ 平面内进行评估。极化 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 使用球坐标角 $\hat{}\boldsymbol{\vartheta}$和 $\hat{}\boldsymbol{\varphi}$定义。

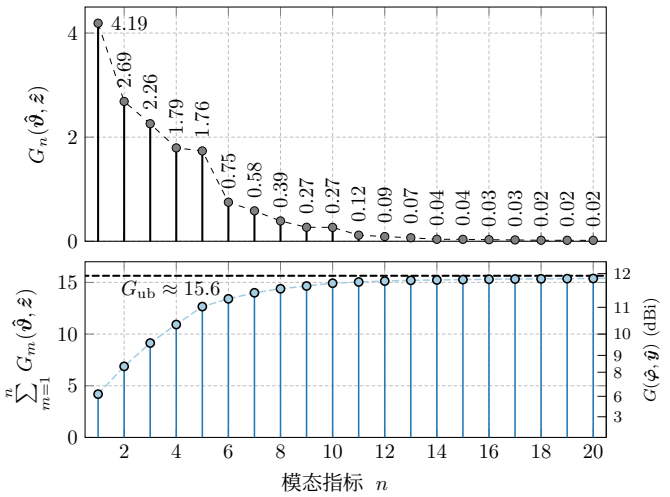

图 2. 上：图中展示了所示设置下的模态天线增益 G_n ，该设置见图1。$\hat{}$极化$\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$、辐射方向$\hat{}\boldsymbol{r} = \hat{}\boldsymbol{z}$和电尺寸 $k\ell = \pi$ 均用于计算。模态增益按从高到低的顺序排列。下：模态增益的累积和。所有模式的总和给出上界 G_{ub} （虚线）。下方面板使用两个 y 轴。左侧 y 轴表示无量纲的天线增益，右侧 y 轴的单位为 dBi。面板内所有数值均为无量纲。

VI. 示例：两块平行板的最大增益

为展示所提出的天线增益上界模态分解的主要特性，假设电流支撑区域由上下平行放置的两块矩形板构成，见图 1。研究宽边方向上的最大增益，而端射辐射将在第VII节讨论。每块贴片的尺寸为 $\ell \times \ell/2$ ，间距为 $\ell/4$。电尺寸为 $k\ell = \pi$，其中 k 是自由空间中的波数。所选工作频率为 750 MHz，且 $\ell = 0.2\,\mathrm{m}$。两块板均由铜制成（$\sigma = 5.96 \cdot 10^7 \mathrm{Sm}^{-1}$），欧姆损耗采用等效表面电阻为 $R_{\mathrm{s}} = 0.007\Omega$的薄片模型进行近似。该模型采用 800 个三角形和 1140 个 Rao-Wilton-Glisson 基函数离散化 [30]。所有矩阵算子均在 AToM 中计算 [31]。值得注意的是，尽管电流支撑区域很简单，下文讨论的上界适用于任何适配该设计区域的辐射结构，*i.e.*，即适用于多种实用的平面天线设计。

A. 模态增益之和的上界

前 20 个模式的模态天线增益 G_n 如图 2 上方面板所示，并按增益从高到低排序。只有前十个模式对上界有显著贡献；将它们相加可得到 $\approx 95.4\%$ 的上界 G_{ub} ，其余每个模式对上界的贡献均小于1% 。图 2 下方面板以模态天线增益的累积和直观地展示了这一点。将所有模式相加可得上界 G_{ub}，参见（16）。

B. 其他模态指标下的性能

上界在实践中无法达到。这是因为所有模式无法同时被激励，且每个模式都有其特定的激励系数 β_n，参见。，（20）。至此，图中分析了前 20 个模式3 ，排序方式相同如图2所示。此外，根据模态辐射效率将这些模式分为两组

$$\eta_{\mathrm{rad},n} = \frac{P_{\mathrm{rad},nn}}{P_{\mathrm{rad},nn} + P_{\mathrm{lost},nn}} = \frac{\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{I}_n}{\mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}(\mathbf{R}+\mathbf{L})\mathbf{I}_n} = \mathbf{I}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{I}_n, \tag{27}$$

其中，归一化（11）被纳入式（27）右端的分母中。模态效率低于 20% 的模式称为超指向模式，并以浅色标记突出显示。模态效率$\eta_{\mathrm{rad},\ n}$ 高于 20% 的模式称为常规模态，并以深色标记突出显示。可以看出，只有前七个模式的模态效率显著高于 20%。此外，在此电尺寸下（$k\ell = \pi$），只有两个模式（第 1 和第 5 个模式）具有较高的模态显著性。上方窗格显示最优激励系数 $|\beta_n|$的绝对值。图3 中的研究表明，两个平行板具有实现高天线增益的巨大潜力，但在实践中无法实现。实际情况下，预期增益约为 6 （第 1 和第 5 个模式的模态增益之和）。改变设计区域的拓扑结构或许能改善某些模式的激励系数和／或其他模态指标，但会降低上界；设计域的任何扰动都会使上界下降。最后补充说明图 3中的模态品质因数，其计算方式为 [32]

$$Q_n = \frac{2\omega \max\{W_{\mathrm{m},n}, W_{\mathrm{e},n}\}}{P_{\mathrm{rad}}}, \tag{28}$$

其中 $W_{\mathrm{m},\ n}$ 和 $W_{\mathrm{e},\ n}$ 分别为周期平均磁储能和电储能 [33]，，显示在底部窗格中。只有两种模式（第 1 种和第 5 种模式）表现出较小的品质因数。这表明，增加更多模式（提高增益）会缩小天线的工作带宽。这一观察结果与 Harrington 的

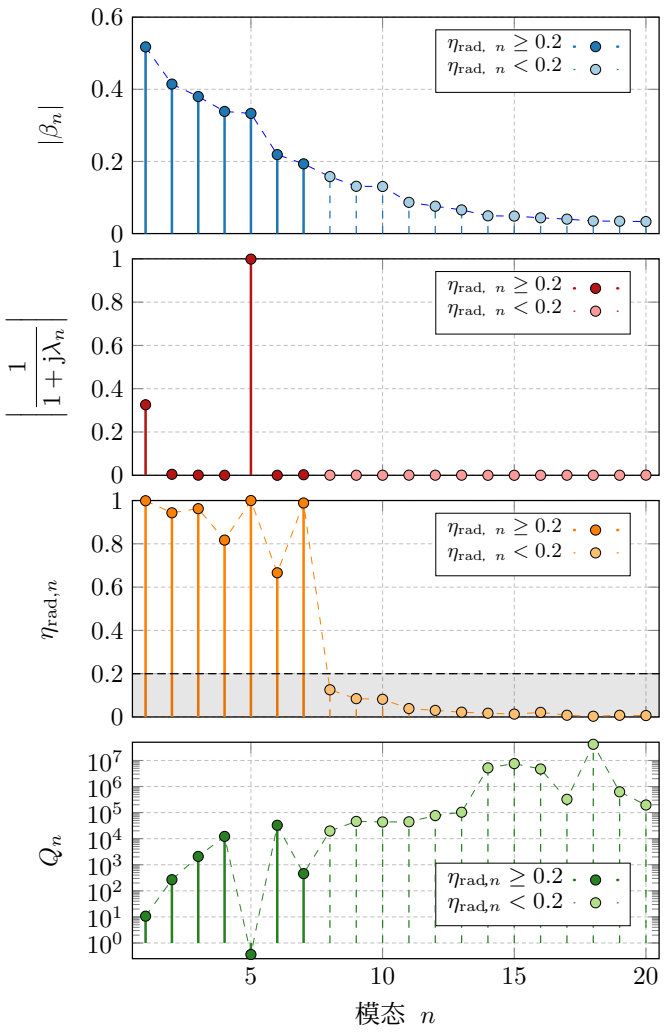

图3. 激励系数 β_n，模态显著性 $|1/(1+\mathrm{j}\lambda_n)|$，特征辐射效率 $\eta_{\mathrm{rad},\ n}$以及特征辐射品质因数 Q_n 对应图2中的模态增益。排序相同。这些模式进一步分为常规（$\eta_{\mathrm{rad},\ n} > 0.2$）和超指向性（$\eta_{\mathrm{rad},\ n} \leq 0.2$）。所有面板均通过深浅不同的标记颜色来区分。

结论 [11] 一致，并将在本节末尾进行详细讨论。

C. 最优电流与模态电流

特征模常用于深入了解辐射机制。天线设计师的直觉通常源于对模态电流的观察。图 4展示了几种模态电流，并体现了它们的不同特性。模态增益最高的主导模态显示在左上角。最后一个常规模态（$\eta_{\mathrm{rad},\ n} \geq 0.2$）是第 7 模态，参见图 3 底部面板，并显示在右上角。可以看出，第 1 和第 7 模式都具有平滑的电流分布，因此具有较高的模态效率。第一个超指向性模态，即第 8 模态，显示在左下角。正如预期，电流密度高度不规则，从而导致较高的欧姆损耗。最后，最优电流密度 $\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}$ 显示在右下角，其形状类似于一个阵列，角落处设有偶极辐射器。

D. 上界的角度依赖性

不同的特征模会根据辐射方向和极化，以不同方式对增益上界作出贡献。图 5 通过研究其对仰角 ϑ （在给定极化 $\boldsymbol{\vartheta}$和方位角 $\varphi = 0$下）的依赖关系，准确展示了这一事实。同样，根据模态效率将模式区分为两组——常规模态以彩色表示，超指向模式以灰色表示。对于辐射方向 $\vartheta = 0$，这些模式按照模态增益从高到低排序，图中显示了对 M 个模式求和时的天线增益。例如可以看到，对于 $M = 1$，模态增益最高的模式（ $\vartheta = 0$ ）并未对 $\vartheta = \pi/2$的上界作出贡献。当所有模式求和后，可得到上限增益（见 $M = N$所对应的红色细线）。

包括互项在内的模态辐射功率和损耗功率$\mathbf{I}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{I}_n/2$, $m \neq n$如图6所示。对于常规模态，辐射功率占主导；而对于超指向性模态，损耗功率占主导。还可以看出，在有损特征模态的情况下，辐射功率和损耗功率均不正交，参见（11）。然而，对于对增益上界贡献显著的模态，不同模态之间的相关性较低。

E. 作为材料电导率函数的上界

上界显著取决于所用材料的性质，见图7，图中展示了两种辐射方向$\hat{}\boldsymbol{r} = \hat{}\boldsymbol{z}$ 和$\hat{}\hat{}\boldsymbol{r} = \hat{}\boldsymbol{x}$以及极化$\hat{}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\vartheta}$对应的天线增益上界。考虑了较大范围的表面电阻率 R_{s}，其中铜（$R_{\mathrm{s}} = 0.007$欧姆）以竖直虚线标出。实线所示的上界 G_{ub}随电阻率降低而增大，并在电阻率为零时发散 R_{s}，这与方向性上界无界的特性相一致 [34]。

参与的常规模态数量 N_{normal} 由圆形标记表示。仅考虑对上界的贡献至少为 0.1 的模态。仅将这些模态相加为 $G_{>0.1}^{\mathrm{normal}}$ 时，得到虚线，表明这些模态数量足以较为精确地表示上界。请注意，尽管上界相近，$\hat{}\boldsymbol{r} = \hat{}\boldsymbol{z}$ （宽边方向）与$\hat{}\boldsymbol{r} = \hat{}\boldsymbol{x}$ （端射方向）的模态数量却明显不成比例。

F. 与其他研究的比较

沿 z 轴的天线增益上界达到 $G_{\mathrm{ub}} \approx 15.6$ （11.9dBi）。这一数值显著高于 Harrington估算给出的预测 [35][11]

$$G_{\mathrm{normal}} = ka^2 + 2ka, \tag{29}$$

由此得到 $G_{\mathrm{normal}} \approx 6.84$ （8.35 dBi）。估算值（29）基于这样的假设：仅使用阶数不超过 $L_{\max} = 2$（偶极子和四极子）的球面模，因为 $L_{\max} = \lceil ka \rceil$。然而，最优电流 $\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}$ 的球面模展开给出了图 8 所示的分布，其中 TM/TE 双重态的组合使用至

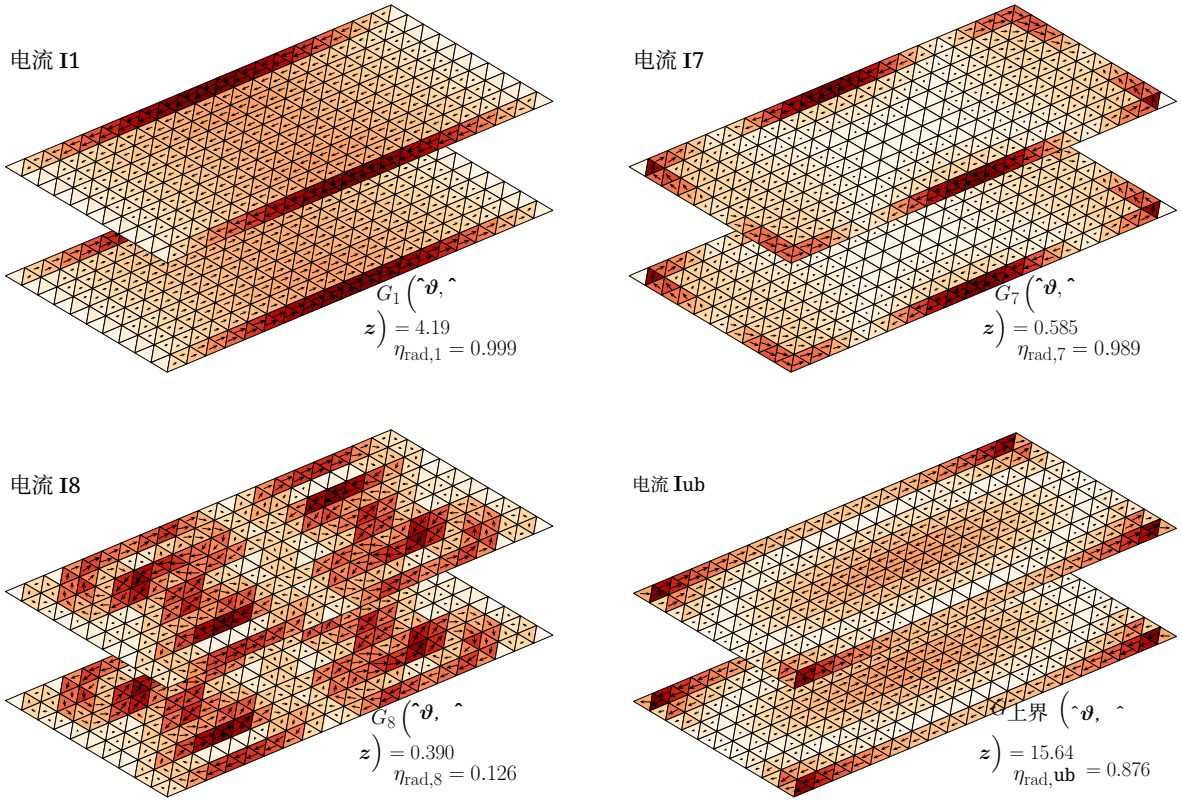

图 4. 图 1 所示结构的三个选定有损特征模的表面电流密度，以及最优电流密度 $\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}$ （右下角）。电流 $\mathbf{I}_1$ 具有最高的模态天线增益。电流 $\mathbf{I}_7$ 是最后一个“常规”模态（模态增益尚可，但模态辐射效率较高），而电流 $\mathbf{I}_8$ 是第一个“超指向性”特征模（模态增益尚可，但模态效率较低）。

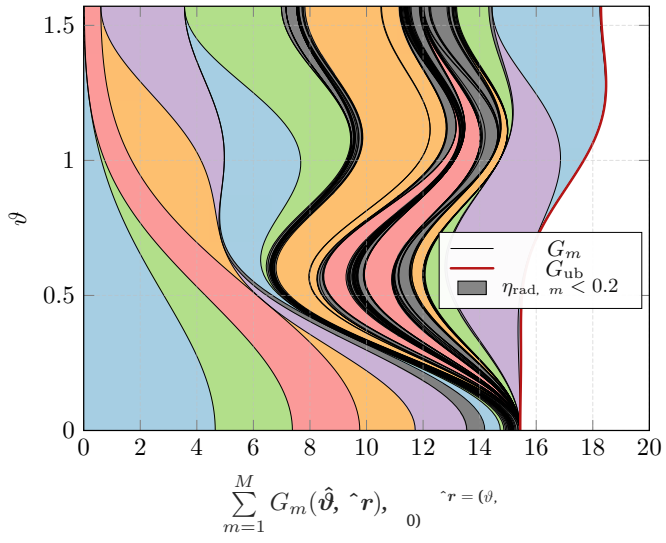

图 5. 模态增益的组成（x轴）随辐射角（y轴，取值为 ϑ）的变化。采用极化 $\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$。将所有模态求和时，$M = N$，即可实现天线增益上界。对较少模态求和得到 $G < G_{\mathrm{ub}}$。模态按照图 2 所示的顺序排列，*i.e.*，即根据 $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ 方向上的模态增益排列。

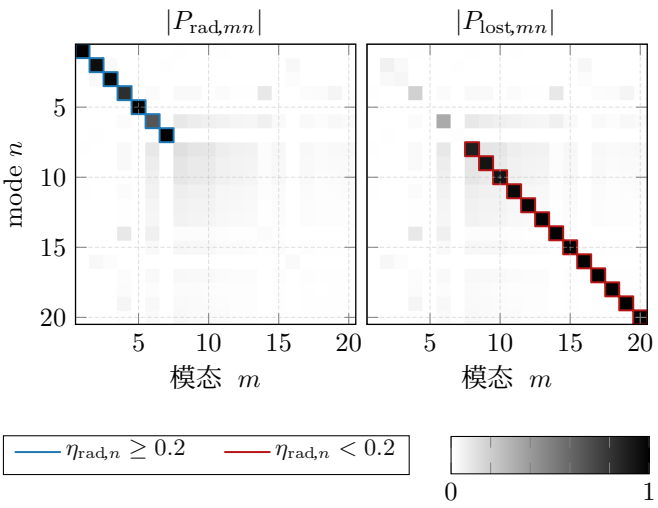

图 6. 功率项 $P_{\mathrm{rad},\ mn} = \mathbf{I}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{I}_n/2$ （左）和 $P_{\mathrm{lost},\ mn} = \mathbf{I}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\mathbf{I}_n/2$ （右）。由于非对角项可能为负，因此显示绝对值。总和 $P_{\mathrm{rad},\ mn} + P_{\mathrm{lost},\ mn}$ 按照（11）进行归一化，*i.e.*，对于 $m = n$ 其值为 1，否则为 0。尽管分离出的功率项并未通过有损特征模实现正交化，但对于良导体和低阶模态，不同模态之间的相关性 $m \neq n$ 较低。可以看出，前七个模态主要产生辐射，而其余模态会导致较高的欧姆损耗。

$L_{\max} = 4$。因此，本研究预测的上界与 Harrington 的估算值（或类似地，Kildal 等人 [12]，给出的估算值）之间存在显著差异，其原因是反应性电流很强。如分析所示

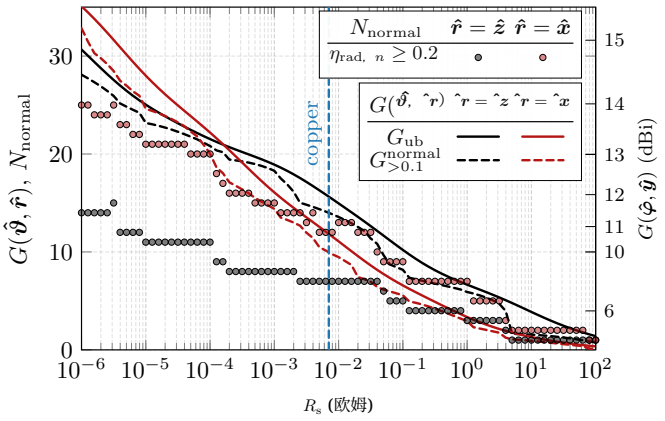

图 7. 最大天线增益随电阻率变化 R_{s}。对两个辐射方向进行优化和分析；黑色曲线和标记对应$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{z}}$，红色曲线和标记对应$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{x}}$。采用极化$\hat{\boldsymbol{e}}=\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$。实线表示天线增益上界。圆圈标记表示参与上界计算、模态增益为 $G_n>0.1$的常规模态数量 N_{normal}。仅对这些模态的模态增益求和，得到 $G_{>0.1}^{\text{normal}}$，如虚线所示。

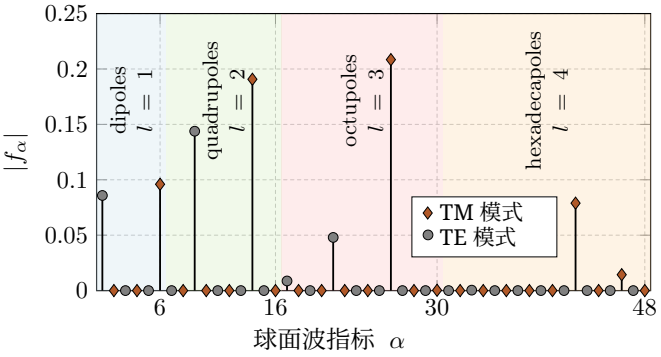

图 8. 最优电流的球面波展开。每个球面波分量辐射的功率为 $|f_\alpha|^2/2$，其中 α 是球面波多重指标 [38], [39]。这些分量按阶数 l 和类型（TM/TE）分类。

上文，见图3，它们要么具有较高的品质因数，要么辐射效率极低，因此在实践中通常不会采用。因此，此处给出的上界[4] 是真正的上界，尽管在大多数情况下它看起来可能过于乐观，但它始终高于天线的实际性能。这与Harrington估算不同；熟练的天线设计师 [4], [36] 或自动化逆向设计流程 [37]都可能超越该估算。

在考虑品质因数（其与分数带宽 [40]近似成反比）后，还可以重新审视估算值（29）与增益上界（16）之间的差异。如图 2所示，将前 20 个特征模与图（ β3）中的系数相乘后求和。增益 G 表示为模态增益的累积和，按照模态品质因数 cf，逐个加入各模态并依次求和。见图 3。从

[4]同样的结论也适用于 [17], ，其上界相同 G_{ub}；不过，这采用了另一种计算方法，无法直接对模态增益求和，也无法利用模态分析提供的额外信息。

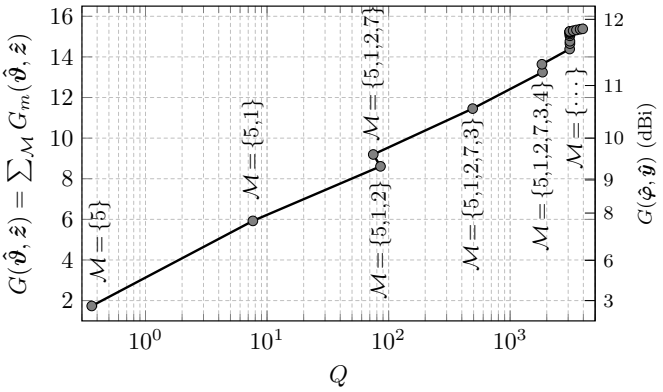

图 9. 天线增益 G 表示为特征模态增益之和，并采用其最优系数 $\boldsymbol{\beta}$ 以达到上界 G_{ub}。求和仅包括集合 $\mathcal{M}$ 所指示的模式。根据其模态品质因数按累积方式求和，从模态 Q_n 最低的模式开始（第 5 个模式，见图 3下图）。

低品质因数模态开始，两个 Q_n最低的解（及增益 G）分别采用第 5 模态，以及第 5 模态与第 1 模态的求和。总和的内容由一组 $\mathcal{M}=\{m\}$表示。图 9 展示了高增益 G 在品质因数方面的代价。混合方案 $\mathcal{M}$ 并未针对低 Q 进行优化，因为混合系数 $\boldsymbol{\beta}$ 取自（20）。因此，高增益可能对应较高的品质因数。这证实了（无论设计区域的形状如何），高于常规增益（29）的天线增益 G （超增益）是以窄带宽 [11]为代价的。

达到上界（ G_n 16）所需的模态增益分布，对于每种给定的设计区域形状、材料和频率都是唯一的。有损特征模分解可能会指出应用天线（逆向）设计时可用的主要自由度。当将天线的拓扑限制在经分析物体的子区域内时，例如，通过切割槽缝，上界只会降低，但模态增益分布或其他模态参数（激励系数、辐射效率、品质因数）可能会改善。不过，当整体电尺寸 ka 减小时，预计不会出现这种情况。

VII. 端射阵列的性能

高指向性端射阵列的设计在文献中已有广泛论述 [41], [42], [43], [4], [44], [45]。然而，大多数研究都试图优化方向性，并事后考虑欧姆损耗的影响事后， [7]。关于这一主题的详细论述，包括最优激励和上限，见 [41, 第 5]章中有关均匀阵列的内容。本节将运用模态法提供的见解，探讨二元和三元阵列问题，并考察特定形状及欧姆损耗。此外，还将研究辐射体的最佳数量、馈电位置以及适当的激励。

A. 设计区域的上界

下文中，我们考虑位于 x–y 平面内的平面结构，并向$\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向辐射

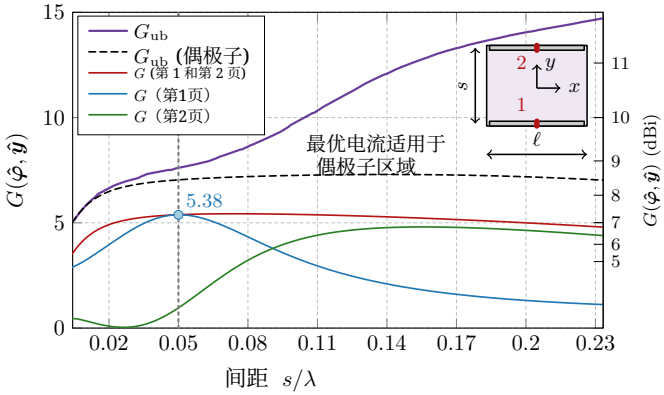

图10. 设计区域的天线增益上界 $G_{\rm ub}$，该区域的尺寸为 $\ell \times (s+w)$，其中 $\ell = \lambda/2 = 1\text{m}$，且 $w = \ell/60$。紫色曲线表示该上界。其他曲线对应于两个宽度为 w、间距为 s、长度为 0.945ℓ的偶极子，它们分别放置在该设计区域的两侧。当仅使用偶极子区域时，使增益最大的最优电流的性能由黑色虚线表示。两个偶极子均在中心处 [46] 进行最优馈电时，得到红色曲线。蓝色和绿色曲线分别表示单独馈电第一个或第二个偶极子的情形。插图展示了偶极子的布局及编号。电流支撑区域由铜制成。

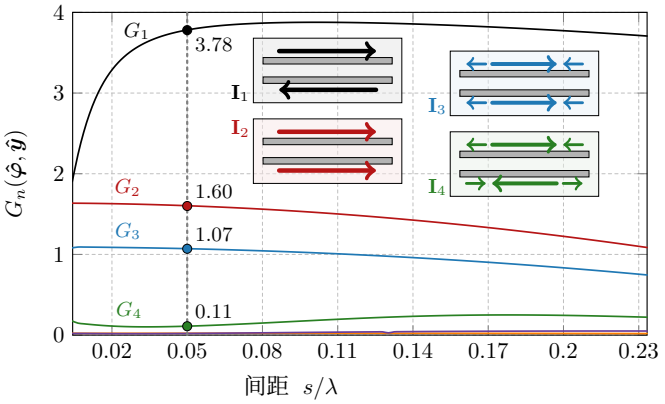

图11. 对于图10中的设置，相同设置下黑色虚线表示的增益增益10，仅有四个模式具有不可忽略的贡献。相应的模态电流$\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_4$ 如插图所示。

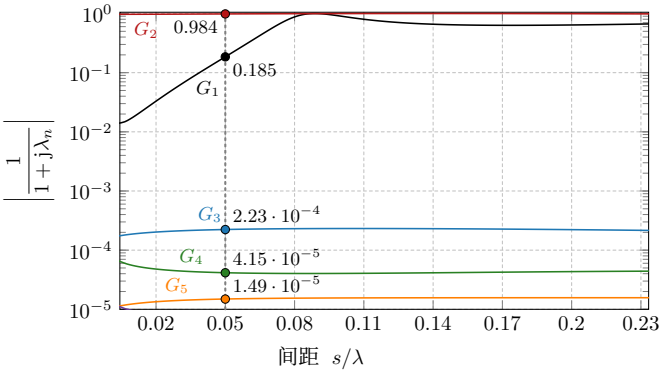

图12. 图中所示模式的模态显著性 11。曲线的排序和颜色编码与前文相同。只有两个模式（模态增益为 G_1 和 G_2）具有不可忽略的模态显著性，即 具备被激励的能力。

$(\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2)$，其场极化为 $\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$。与前一个示例一样，材料为铜。

首先，假设一个宽度为 $\ell = \lambda/2$、高度可变的矩形区域 $s+w$，其中 $w = \ell/60$。图 10中的紫色曲线展示了增益上界 $G_{\rm ub}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{y}})$的基本界限。允许的最大高度为 $\ell/2$，对应的增益上界为 $G_{\rm ub} \approx 14.7$ (11.7 dBi)。在 $\ell \times (s+w)$区域内实现的任何设计都无法超过相应的极限值。

B. 双偶极子端射阵列

为更贴近天线工程实践，假设在 $\ell \times (s+w)$ 设计区域内仅放置两个长度为 0.945ℓ （自谐振长度）、宽度为 $w = \ell/60$ 的带状偶极子，两者的中心间距为 s，如图 10的插图所示。偶极子中心处设有离散的狄拉克δ间隙，分别将后方和前方的偶极子编号为 1 和 2 。本文考虑了若干种情形。

图10中的黑色虚线表示：在仅使用偶极子所覆盖的导电区域来求取最优电流时的天线增益上界。红色、蓝色和绿色曲线分别表示：两个偶极子均采用最优馈电时的性能；仅对偶极子1 馈电时的性能；以及仅对偶极子2 单独馈电时的性能。可以看出，存在一个特定的间距 $s/\lambda \approx 0.05$，如垂直虚线所示，在此处仅需一个馈电器即可达到相对较高的增益性能 $G \approx 5.38$ （7.31dBi）。

C. 双偶极子排列的模态分析

模态增益如图 11所示。将它们相加，即可得到偶极子区域内最优电流的上界，如图 10中的黑色虚线所示。图 11中只有四个模态增益 G_1–G_4对上界的贡献达到至少 1%。相关电流密度绘于图 11的插图中。再次考虑间距 $s/\lambda = 0.05$，可以看出，在位置 1 处馈电的偶极子所实现的增益（$G \approx 5.38$）恰好在模态 1 和 2（$G_1 \approx 3.78$、$G_2 \approx 1.60$）被完全激励时达到。这一事实进一步得到了图 12中模态显著性研究的支持，其中可以看到，只有模态 1 和 2 的模态显著性较高，其评估结果为 $|1/(1+\mathrm{j}\lambda_n)|$。

已知只有两个模式可以被激励，且这些模态增益给出 $G = 5.38$，我们回到偶极子的最优激励问题。为获得足够的自由度，两个端口均采用最优馈电方式 [46]。图 13的上图显示 $v_2 = 0\text{V}$，位于 $s/\lambda = 0.05$，因此可以移除2号端口。利用最优模态激励系数 $\boldsymbol{\beta}$，从下图可以看出，它们与模式 $\boldsymbol{\alpha}$ 的激励系数 1和 2相同，即 也 即，$\beta_1 = \alpha_1$ 和 $\beta_2 = \alpha_2$。

上述研究展示并解释了为什么长度为 $\ell \approx 0.473\lambda$ 、间距为 0.05λ 的两个偶极子，仅馈电后方偶极子就能够达到 $G \approx 5.38$ 的增益。原因在于偶极子模式和四极子模式得到了

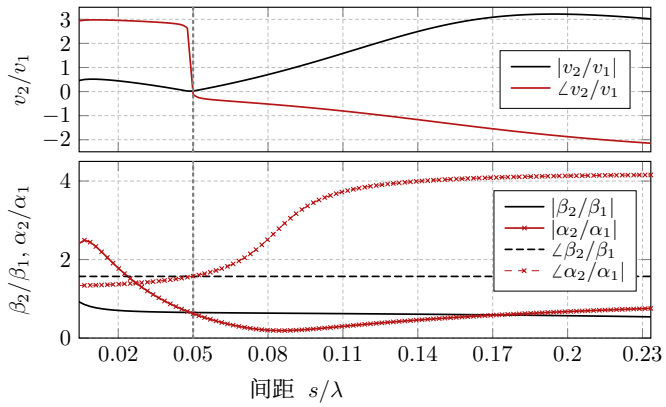

图13. 施加在第一个和第二个偶极子中间电压差隙上的最优电压，见图10中的插图。对于间距 $s = 0.05\lambda$，可以缩短第二个偶极子的差隙，见上图。在这种情况下，只需连接到第一个偶极子的一个差隙，便足以实现前两个模式的最优激励，见下图。最优激励系数 β_1 和 β_2 严格遵循对第一个偶极子的激励，如系数 α_1 和 α_2所示，从而得到增益 $G = G_1 + G_2 \approx 5.38$ （7.31 dBi），见图10，当 $s = 0.05\lambda$时。

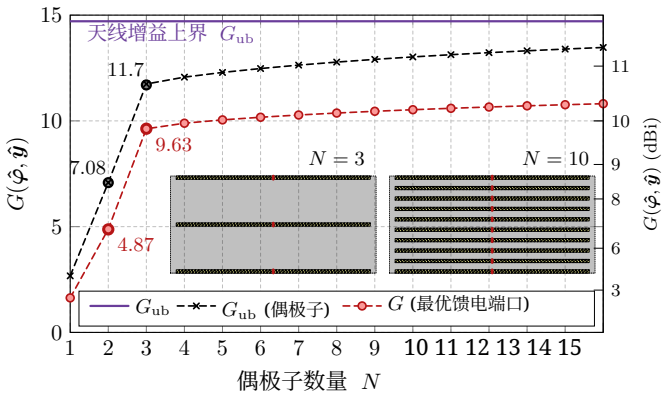

图14. 置于尺寸为以下的设计区域内的偶极子性能——
尺寸为 $\ell \times \ell/2$。偶极子的长度为 0.945ℓ，宽度为 $\ell/60$。偶极子等间距排列，由铜制成。整个设计区域的上界以（恒定的）紫色线表示，达到 $G_{\mathrm{ub}} = 14.7$ (11.7 dBi)。仅在偶极子所界定的区域内求得最优电流时，所得增益以黑色十字标记表示（由黑色虚线勾勒）。在每个偶极子中间施加最优激励时的天线增益以红色圆圈标记表示（由红色虚线勾勒）。插图中展示了偶极子阵列的两个示例。

理想激励。由此引出一个问题：增加偶极子数量是否会带来显著更好的结果?

D. *N*个偶极子的最优性能

为提升性能，将偶极子数量（几何形状和激励与之前相同）在 2 至 15 之间变化，并等间距地布置在设计区域内 $\ell \times \ell/2$。使用占据整个区域的最优电流密度计算得到的上界以紫色曲线显示于图 14 中，而仅以偶极子填充该区域时对应的上界则以黑色叉号标示。偶极子（均在中点馈电）的最优差隙激励以红色圆圈标示。黑色曲线与红色曲线之间的差异，是因为仅有 N 个馈电器（分别置于每个偶极子的中点）无法模拟最优电流密度。尽管如此，最优激励仍能带来令人满意的性能。

正如预期，增加偶极子的数量可提升增益性能，并逐渐趋近整个设计区域的增益上界。值得注意的是，三个偶极子的性能明显优于两个偶极子，即。也就是， $G = 7.08$ （最优电流密度为 8.50 dBi）对比 $G = 11.7$（最优电流密度为 10.7 dBi），以及 $G = 4.87$ （最优馈电为 6.88 dBi）对比 $G = 9.63$（最优馈电为 9.84 dBi）。使用四个及更多偶极子只能略微提升性能；当偶极子数量达到 $N > 3$ 个时，收益显著递减， [41, 第 5]。

E. 三偶极子端射阵列

本节将详细讨论三偶极子的情况，从第VII-B 节所述的设计开始，该设计包含两个间距为 $s = 0.05\lambda$ 的偶极子和一个馈电器。现增加第三个长度和材料（铜）相同的偶极子，并将其间距设为 s_2，见图15插图。对图10 中所进行的相同分析，在三偶极子的情况下重复进行，并扫描间距 s_2 。

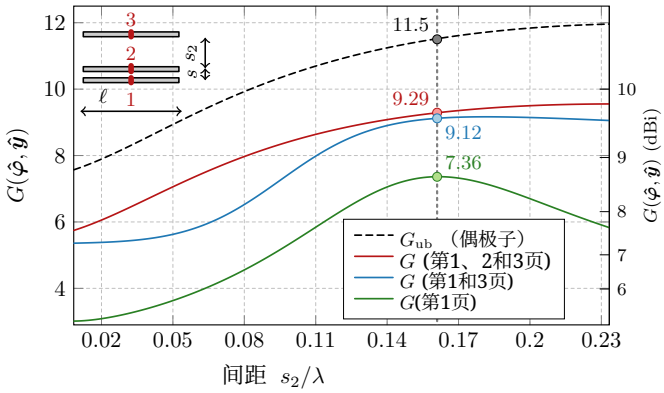

图15。三偶极子端射阵列的性能。双偶极子配置取自图10，即。，中心间距为 $s = 0.05\lambda$。第三个偶极子以中心间距 s_2 添加（沿辐射方向）；详情及偶极子编号见插图。黑色虚线表示三个偶极子所在整个区域的上界。在中间施加最优激励时的天线增益以红色曲线（所有偶极子均采用最优激励）、蓝色曲线（第一个和第三个偶极子采用最优激励，第二个偶极子为无源）和绿色曲线（仅第一个偶极子受激励，第二个和第三个偶极子为无源）表示。

最大增益上界对应的最优电流通过（16）进行评估，电流支撑区域限制在三个偶极子所在的区域内。上界 G_{ub} 由图15 中的黑色虚线表示，并且随着间距 s_2的增大而增大。在接近$s_2/\lambda \approx 0.25$处存在一个饱和点。第二项研究考虑了在每个偶极子中部放置最优δ间隙馈电的偶极子。电流密度必须遵循本构关系（14），优化变量为激励向量，而激励向量完全由端口电压决定。研究展示了三种情况：所有端口（见图15的插图）、仅两个端口（第1和第3个）以及仅一个端口（第1个）进行最优馈电。图中15的曲线分别以红色、蓝色和绿色表示这三种情形。端口电压可以任意选择

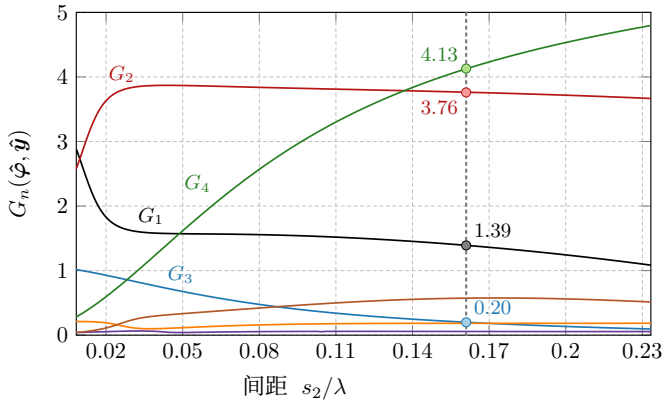

图16. 电流支撑区域的模态增益 G_n，该区域受尺寸为 $0.945\ell \times w$、中心间距为 $s = 0.05\lambda$（第一个和第二个偶极子之间）以及 s_2（第二个和第三个偶极子之间）的三个偶极子限制，参见图 15中的插图。模态增益求和后得到增益上界 G_{ub}，如图 15中的黑色虚线所示。

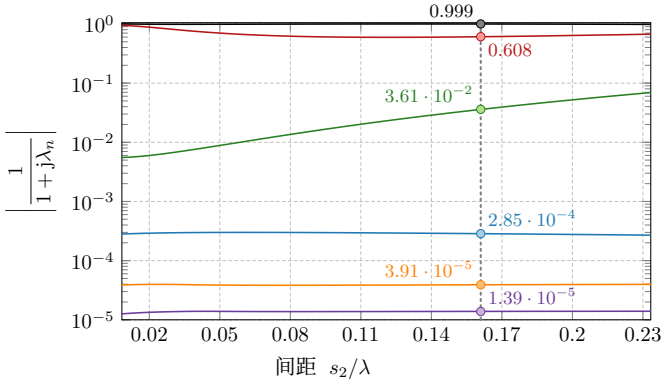

图17。图16所示模式的模态显著性。曲线的排序和颜色编码与前文相同。只有三个模式具有
模态增益 G_1， G_2和 G_4，参见图16，具有不可忽略的模态显著性，即，也就是说，能够被激励。

，如果仅有一个端口受到激励。对于其他情况，端口电压之间存在特定比例，可提供最大增益 [46]，[47]。正如预期，对激励拥有更多控制权可获得更高增益。综合这三种情况，在约为 $s_2 = 0.16\lambda$处存在一个间距，在该处无论端口数量多少，都能实现较高增益。该间距由竖直虚线标出，我们将在下一节重点研究这一间距。

F. 三偶极子阵列的模态分析

从模态角度研究了间距 s_2 变化时的三偶极子阵列。模态增益如图 16所示。主要贡献于增益上界的模式有三个 G_{ub}，分别是 G_1（黑色）、 G_2 （红色）和 G_4 （绿色）。曲线按照模态增益 G_n 在最小间距 s_2时的数值排序。

图中显示了模态显著性17。只有模态增益最高的模式才能被充分激励（显著性高于0.01）。因此，在实际情况下，我们应预计增益的最佳性能约为 $G_1 + G_2 + G_4 \approx 9.28$ （9.68 dBi）。图15证实了这一点，其中 $G \approx 9.29$ 三个偶极子均在中心以最优方式馈电。然而，实际应用中应尽量减少馈电器的数量，因为馈电网络较为复杂。也可使用无功加载来替代 [7]，[48]，但由于电抗必须为无源，因此会损失自由度。

考虑到不使用电抗元件并减少馈电点数量会不可避免地降低性能，见图15。一种较好的折衷方案是使用两个馈电器（分别馈电给第 1 个和第 3 个偶极子）。对于距离 $s_2 = 0.16\lambda$，如竖直虚线所示，其性能接近所有偶极子均馈电的情况（$G \approx 9.12$）。将馈电器数量限制为一个（第 1 个偶极子），性能会降至 $G \approx 7.36$，但仍显著优于两个偶极子共用一个馈电器的情况（$G \approx 5.38$，见图 10），代价是结构的总高度显著增加，即， 0.227λ（三个偶极子）与 0.066λ （两个偶极子）相比。

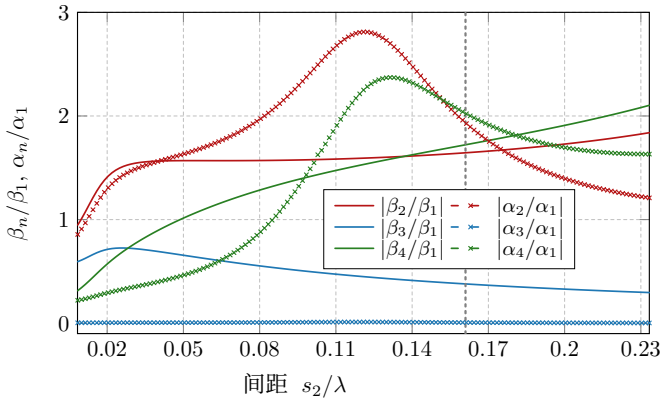

图18. 归一化的最优激励系数 $\boldsymbol{\beta}$，由式（20）求得；以及归一化的激励系数 $\boldsymbol{\alpha}$，由式（13）计算得出，适用于以最优方式馈电的第1和第3个偶极子 [46]。曲线的含义与图13相同，但为减少曲线数量，仅显示绝对值。

最后，图 $\boldsymbol{\beta}$ 展示了激励增益最高的前四种模式所需的最优激励系数G_1–G_4与由两个馈电器（第1和第3个偶极子）实现的激励系数 $\boldsymbol{\alpha}$的比较。18。激励时，最优电压取为$v_1 = 1\text{V}$，且 $v_3 = 0.79/-32°$。所示结果为相对于第一种模式系数的比值，*i.e.*， $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量分别按其第一个分量重新归一化 β_1，且 α_1也是如此。可以看出，只有第一、第二和第四种模式得到了近似最优激励（实线与带叉号的虚线接近），而第三种模式完全未被激励（$\alpha_3 = 0$）。因此，为了获得更好的性能，必须增加更多偶极子；并且，考虑到图14 ，还必须采用更大的设计区域。

VIII. 任意极化的最大增益

在第II节中，已经求得固定$\hat{}\,\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\vartheta}$ 或$\hat{}\,\boldsymbol{e} = \hat{}\,\boldsymbol{\varphi}$ 极化下天线增益的上界。这里，将该过程推广至任意极化。这通常会带来

更高的天线增益，因为通过最优组合极化状态，可以提高上界。

一个特殊但有趣的情形是：在优化之前，椭圆极化已固定。为求得上界，远场矢量$\mathbf{K}$ 由两种主极化共同构成，如下所示：

$$\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=w_{\vartheta}\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}},\hat{\boldsymbol{r}})\pm\mathrm{j}w_{\varphi}\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}},\hat{\boldsymbol{r}}\right),\tag{30}$$

其中 $\pm$ 符号表示左旋/右旋极化，且$|w_{\vartheta}/w_{\varphi}|$ 定义轴比 [23]。矩阵 $\mathbf{K}$ 仍为秩 1，第二节中的处理过程II仍然适用。

当极化状态先验未知时，远场矩阵由两种极化组成，分别为 $\mathbf{K}_{\vartheta}$、$\mathbf{K}_{\varphi}$，最优性能由特征值问题 [17, (13)]求得

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\vartheta}^{\mathrm{H}} & \mathbf{K}_{\varphi}^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\vartheta}\\ \mathbf{K}_{\varphi}\end{bmatrix}\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}=\frac{G_{\mathrm{ub}}Z_0}{4\pi}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}.\tag{31}$$

按照第二节 II中的相同推理，并假设

$$\mathbf{I}_{\mathrm{ub}}=\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\right)^{-1}\left(w_{\vartheta}\mathbf{K}_{\vartheta}^{\mathrm{H}}+w_{\varphi}\mathbf{K}_{\varphi}^{\mathrm{H}}\right),\tag{32}$$

其中 w_{ϑ}，w_{φ} 为任意权重，解由一个 2×2 特征值问题给出

$$\sum_n\begin{bmatrix}F_{\vartheta n}F_{\vartheta n}^{*} & F_{\vartheta n}F_{\varphi n}^{*}\\ F_{\varphi n}F_{\varphi n}^{*} & F_{\varphi n}F_{\varphi n}^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{\vartheta}\\ w_{\varphi}\end{bmatrix}=\frac{G_{\mathrm{ub}}Z_0}{4\pi}\begin{bmatrix}w_{\vartheta}\\ w_{\varphi}\end{bmatrix}.\tag{33}$$

(33) 的特征向量假设按以下方式归一化

$$\begin{bmatrix}w_{\vartheta}\\ w_{\varphi}\end{bmatrix}^{\mathrm{H}}\sum_n\begin{bmatrix}F_{\vartheta n}F_{\vartheta n}^{*} & F_{\vartheta n}F_{\varphi n}^{*}\\ F_{\varphi n}F_{\varphi n}^{*} & F_{\varphi n}F_{\varphi n}^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{\vartheta}\\ w_{\varphi}\end{bmatrix}=1.\tag{34}$$

同时考虑两种极化并将其混合作为优化对象时，天线增益上界始终最高，即。，（33）所示。不过，对于主方向，上界通常由主导极化实现。第 VI 节中的示$e=\vartheta$例即属此种情况：通过（16）计算得到的极化上界，等于总极化上界（33）。

IX. 自谐振的影响

自谐振是一项重要的附加约束，对于电小天线尤其如此 [16]。问题表述如下

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{I}}{\text{maximize}}\quad & G(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\\ \text{subject to}\quad & \mathbf{I}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}\mathbf{I}=0.\end{aligned}\tag{35}$$

问题（35）的解中，$\mathbf{I}$ 作为优化变量，已在 [17, 式（16）–（18）]中说明，具体如下

$$G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}}\left(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}\right)=\min_x\max_{\mathbf{I}}\frac{4\pi}{Z_0}\frac{\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\mathbf{K}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{I}}{\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}+x\mathbf{X}\right)\mathbf{I}}\tag{36}$$

在参数 x 受限于$x\in[-1/$最大值 $\{\lambda_n\}$、$-1/$最小值$\{\lambda_n\}]$时，详见 [17, 附录 C]，其中给出了详细推导。应注意，对于 $x=0$，该问题可归结为第二节II所处理的问题。

如果电流 $\mathbf{I}$ 通过式（13）展开为有损特征模，参见附录 B，则自谐振约束下的最大增益仍可表示为模态增益之和

$$G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}}=\sum_n\frac{G_n}{1+x_{\mathrm{sr}}\lambda_n},\tag{37}$$

其中，分子包含模态增益（16），分母包含用于满足自谐振约束 $x_{\mathrm{sr}}\lambda_n$ 的修正系数 $\mathbf{I}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}\mathbf{I}=0$。

（35）中的自谐振电流附加约束对于电小天线十分重要，因为这类天线的电流在其他情况下会呈现强容性或感性。对于电大天线，该约束通常不起作用。考虑第 VI 节中的示例（电尺寸 $ka=1.80$），当要求电流自谐振时，天线增益上界 $G_{\mathrm{ub}}\approx15.6$（11.9dBi）会降至 $G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}}\approx14.4$ （11.6dBi）。

X. 结论

天线增益上界在有损特征模基中表示为模态增益的简单求和。使用任何处理特征模分解的软件，都可以轻松计算该上界值。该表达式适用于任意形状的障碍物、任意材料分布以及任意工作频率。对于任意极化向量，均可建立该上界。文中还考虑了对自谐振最优电流的附加约束，主要针对电小天线，这会降低上界。研究确定了天线品质因数和辐射效率方面的代价，结果表明，具有可接受模态参数的模式数量较少，从而降低了天线增益性能，正如上界所预测的那样。

将天线增益中交叉项为零的模式展开，使得能够将显著模式的数量与 Harrington 经典研究所预测的自由度数量进行比较。与他对常规增益的估计相比，本文提出的上界可能显著更高。这避免了现有天线设计超过该上界这一不理想的情况；而在常规增益估计中，这种情况确实会发生。尽管如此，本文仍提出对模式进行类似的区分，将其分为常规模式和超指向性模式。

本研究可通过多种方式加以应用。除了直接提供有关天线性能上界的信息外，相关模态参数还能进一步揭示障碍物的辐射机制及其局限性。可根据模态电流、模态显著性、激励系数、模态品质因数或模态辐射效率来评估这些信息，并据此通过进一步修改天线结构及其有效激励来改进天线设计。最后，研究表明，采用现实的激励无法达到该上界。不过，通过恰当的天线设计流程，可以使性能接近这一上界。

致谢

作者谨此感谢 Richard W. Ziolkowski 在丹佛举行的 IEEE APS/URSI 2022 年会上发表演讲后，就基本界限有效性所进行的初步讨论。

附录 A
天线增益上界的可行性

不等式 $G(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}) \le G_{\mathrm{ub}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 可利用（1）、（13）、（2）改写为特征模基底下的形式，结果为

$$\frac{4\pi}{Z_0}\frac{\left|\sum_n \alpha_n \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{I}_n\right|^2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}} \le \frac{4\pi}{Z_0}\sum_n \left|\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{I}_n\right|^2. \tag{38}$$

关系式（38）对任意激励系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$均成立。采用简写 $\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}) = \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})[\mathbf{I}_n]$，公式（38）可进一步改写为

$$\left|\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{\alpha}\right| \le |\boldsymbol{\alpha}|\left|\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\right|, \tag{39}$$

这是一个普遍成立的柯西–施瓦茨不等式。

Appendix B
Self-resonant Bound As a Sum of Lossy Characteristic Modes

将电流$\mathbf{I}$ 展开为有损特征模（13）后，关系式（36）可写为

$$G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}) = \min_x \max_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{4\pi}{Z_0}\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}[\mathbf{I}_n]^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}+x\mathbf{X}\right)[\mathbf{I}_n]\boldsymbol{\alpha}}, \tag{40}$$

其中，向量 $\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$ 汇集了特征远场 $F_n(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})$。进一步利用正交关系式（11）和（12），关系式（40）可写为

$$G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{4\pi}{Z_0}\min_x \max_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{1}+x\boldsymbol{\lambda}\right)\boldsymbol{\alpha}}, \tag{41}$$

其中，$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 为单位矩阵，而 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 为特征数对角矩阵。与第II节类似，内层最大化问题通过以下方式求解：

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\left(\mathbf{1}+x\boldsymbol{\lambda}\right)^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})}{\left|\left(\mathbf{1}+x\boldsymbol{\lambda}\right)^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\right|}, \tag{42}$$

需要注意的是，此处求逆的是一个对角矩阵。代入（41）得

$$G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}}) = \min_x \left\{\frac{4\pi}{Z_0}\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\left(\mathbf{1}+x\boldsymbol{\lambda}\right)^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{H}}(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})\right\}, \tag{43}$$

这是第 IX节中的结果（37）。

待最小化的函数 $\kappa(x)$，即（43）中的函数，其导数还可进一步改写为

$$\kappa(x) = \frac{4\pi}{Z_0}\sum_n \frac{|F_n(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})|^2}{1+x\lambda_n} \tag{44}$$

and

$$\frac{\partial\kappa(x)}{\partial x} = -\frac{4\pi}{Z_0}\sum_n \frac{\lambda_n |F_n(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{r}})|^2}{(1+x\lambda_n)^2} \tag{45}$$

并代入优化算法中，例如，使用二分法找到合适的二分区间，参见图19。当找到一个解 $x = x_{\mathrm{sr}}$时，有 $G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}} = \min_x \kappa(x) = \kappa(x_{\mathrm{sr}})$，并根据式（42）取最优激励系数 $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{sr}} = \boldsymbol{\alpha}(x_{\mathrm{sr}})$。

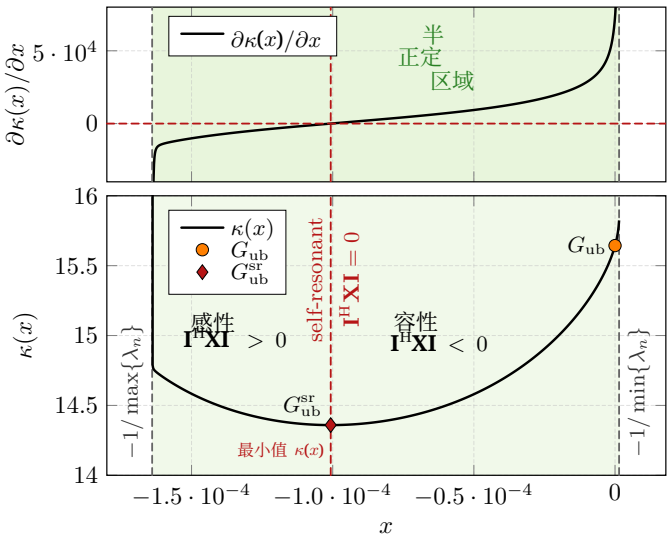

图19. 示意通过凸优化过程，寻找有损特征模的最优组合，以最大化自谐振电流的天线增益。数据取自第 VI节中的示例。下图显示待最小化的参数 $\kappa(x)$，（44），上图则显示用于加速优化过程的导数（45）。优化域以填充区域突出显示，其边界由最小和最大特征值确定。两个区域分别归类为感性（左侧）和容性（右侧）。

最后，一旦解存在，即，也就是说，当其中一个特征值 λ_n 与其他特征值异号时（对于良好的网格划分，这一条件总是满足），可以证明 $G_{\mathrm{ub}}^{\mathrm{sr}} \le G_{\mathrm{ub}}$。这源于式（35）中的附加约束，该约束使参数 x需要进一步最小化。

参考文献

[1] R. W. Ziolkowski, 《多极子混合——它们是否应纳入你的电磁工具箱? 》, IEEE《天线与传播开放期刊》, 第3卷, 第154–188页, 2022年。[2] K. Fujimoto 和 H. Morishita, 《现代小型天线》。大不列颠剑桥：剑桥大学出版社, 2013年。[3] J. L. Volakis、C. Chen 和 K. Fujimoto, 《小型天线: 小型化技术与应用》。麦格劳-希尔, 2010年。[4] A. D. Yaghjian、T. H. O'Donnell、E. E. Altshuler 和 S. R. Best, "电小型超增益端射阵列", 《无线电科学》, 第43卷, 第3期, 第1–13页, 2008年5月。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1029 2007 003747 。/ rs H.
[5] Jaafar、S. Collardey 和 A. Sharaiha, "采用特征模方法设计带宽增强的紧凑型超指向性阵列", 《IEEE天线与传播汇刊》, 第66卷, 第12期, 第6986–6996页, 2018年12月。[6] Y. Karasawa, "紧密排列偶极子单元的阵列天线最大增益", IEEE《天线与无线传播快报》, 第21卷, 第8期, 第1674–1677页, 2022年8月。[7] A. Debard、A. Clemente、A. Tornese 和 C. Delaveaud, " 基于电偶极子和惠更斯源的紧凑型天线阵列的最大端射方向性", 《IEEE天线与传播汇刊》, 第71卷, 第1期, 第299–308页, 2023年1月。[8] M.-C. Tang、D. Li、Y. Wang、K.-Z. Hu 和 R. W. Ziolkowski, "采用定制馈电探针结构实现的紧凑型低剖面线极化和圆极化滤波天线", 《IEEE天线与传播汇刊》, 第68卷, 第7期, 第5247–5256页, 2020年。[9] Z. Chen、M.-C. Tang、M. Li、D. Yi、D. Mu 和 R. W. Ziolkowski, "宽带高密度圆极化阵列：降低互耦并增强实现增益", 《IEEE天线与传播汇刊》, 第70卷, 第2期, 第1132–1143页, 2022年。

[10] R. Gaponenko、A. Moroz、I. L. Rasskazov、K. Ladutenko、A. Shcherbakov 和 P. Belov，“利用介质球形多层天线实现超方向性”，《物理评论B》，第104卷，第19期，2021年11月。[11] R. F. Harrington，《时谐电磁场》，第2版。Wiley – IEEE Press，2001年。[12] P.-S. Kildal、E. Martini 和 S. Maci，“天线的自由度与最大方向性：非超反应性天线最大方向性的上界”，《IEEE天线与传播杂志》，第59卷，第4期，第16–25页，2017年。[13] R. W. Ziolkowski，“利用惠更斯多极子阵列实现单向针状辐射”，《物理评论X》，第7卷，031017，2017 3，第 p. 期 .[14] R. Li、D. A. McNamara 和 G. Wei，“根据辐射结构的特征模组成评估其可实现的方向性”，《IEEE天线与传播汇刊》，第67卷，第10期，第6686–6691页，2019年10月。[15] L. Polo-Lopez、J. Corcoles、J. A. Ruiz-Cruz、J. R. Montejo-Garai 和 J. M. Rebollar，“基于模态场展开的辐射孔径理论最大方向性研究”，《IEEE天线与传播汇刊》，第67卷，第4期，第2781–2786页，2019年4月。[16] L. Jelinek 和 M. Capek，“任意形状表面上的最优电流”，《IEEE天线与传播汇刊》，第65卷，第1期，第329–341页，2017年1月。[17] M. Gustafsson 和 M. Capek，“最大增益、有效面积与方向性”，《IEEE天线与传播汇刊》，第67卷，第8期，第5282–5293页，2019年8月。[18] M. Uzsoky 和 L. Solym´ar，“超方向性线性阵列理论”，《匈牙利科学院物理学学报》，第6卷，第2期，第185–205页，1956年12月。[19] R. F. Harrington 和 J. R. Mautz，“通过无功加载控制雷达散射”，《IEEE天线与传播汇刊》，第20卷，第4期，第446–454页，1972年7月。[20] R. F. Harrington、J. R. Mautz 和 Y. Chang，“介质体和磁性体的特征模”，《IEEE天线与传播汇刊》，第20卷，第2期，第194–198页，1972年3月。[21] K. Schab、B. Yang、B. Hughes 和 J. J. Adams，“子结构天线品质因数下界”，《IEEE天线与传播汇刊》，第66卷，第7期，第3278–3285页，2018年。 *Q*R. F. Harrington 和 J. R. Mautz，“导体特征模理论”，《IEEE天线与传播汇刊》，第19卷，第5期，第622–628页，1971年9月。[22] C. A. Balanis，《天线理论：分析与设计》，第3版。Wiley，2005年。[23] M. Capek、J. Lundgren、M. Gustafsson、K. Schab 和 L. Jelinek，“利用散射二阶张量在任意全波求解器中进行特征模分解”，《IEEE天线与传播汇刊》，第71卷，第1期，第830–839页，2023年1月。[24] A. F. Peterson、S. L. Ray 和 R. Mittra，《电磁学计算方法》。Wiley – IEEE Press，1998年。[25] T. B. A. Senior 和 J. L. Volakis，《电磁学中的近似边界条件》。IEE，1995年。[26] R. F. Harrington，《矩量法场计算》。美国新泽西州皮斯卡塔韦：Wiley – IEEE Press，1993年。[27] G. Kristensson，《电磁波被障碍物散射》。新泽西州埃迪森：SciTech Publishing（IET旗下品牌），2016年。[28] M. Gustafsson、K. Schab、L. Jelinek 和 M. Capek，“吸收与散射上界”，《新物理学杂志》，第22卷，第7期，073013，2020年9月。[29] S. M. Rao、D. R. Wilton 和 A. W. Glisson，“任意形状表面的电磁散射”，《IEEE天线与传播汇刊》，第30卷，第3期，第409–418页，1982年5月。[30] (2019) MATLAB天线工具箱（AToM）。布拉格捷克理工大学。www.antennatoolbox.com。[31] 在线 [。可访问：www.antennatoolbox.com]M. Capek、P. Hazdra 和 J. Eichler，“一种基于模态方法评估辐射品质因数的方法”，《IEEE天线与传播汇刊》，第60卷，第10期，第4556–4567页，2012年10月。[32] G. A. E. Vandenbosch，“辐射结构的反应性能量、阻抗与品质因数”，《IEEE天线与传播汇刊》，第58卷，第4期，第1112–1127页，2010年4月。[33] A. Bloch、R. Medhurst 和 S. Pool，“超方向性天线阵列设计的新方法”，《IEE会议录》，第100卷，314，1953 67，303，第 pp. – 期。[34] R. F. Harrington，“定向天线的增益与波束宽度”，《IRE天线与传播汇刊》，第6卷，第3期，第219–225页，1958年7月。

[36] T. Shi、M.-C. Tang、R. Chai 和 R. W. Ziolkowski，“基于多极子的电小型单向天线，具有极高的实现增益”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第70卷，第7期，第5288–5301页，2022年7月。[37] R. Li 和 G. Wei，“趋近最大可实现指向性的电小天线形状综合”，*IEEE*《天线与无线传播快报》，第21卷，第6期，第1198–1202页，2022年6月。[38] J. E. Hansen，编，《球面近场天线测量》。英国：工程技术学会，2008年。[39] D. Tayli、M. Capek、L. Akrou、V. Losenicky、L. Jelinek 和 M. Gustafsson，“特征模的精确高效评估”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第66卷，第12期，第7066–7075页，2018年12月。[40] A. D. Yaghjian 和 S. R. Best，“天线的阻抗、带宽与品质因数”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第53卷，第4期，第1298–1324页，2005年4月。[41] R. E. Collin 和 F. J. Zucker，《天线理论》第一部分。麦格劳-希尔，1969年。[42] A. Clemente、M. Pigeon、L. Rudant 和 C. Delaveaud，“利用球面波展开设计超指向性四单元紧凑天线阵列”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第63卷，第11期，第4715–4722页，2015年11月。[43] P. Hazdra、J. Kracek 和 T. Lonsky，“由两个基本偶极子和各向同性辐射体组成的阵列的端射超指向性”，*IET*《微波、天线与传播》，第13卷，第14期，第2405–2411页，2019年。[44] A. Haskou、A. Sharaiha 和 S. Collardey，“小型寄生加载超指向性端射天线阵列的设计”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第63卷，第12期，第5456–5464页，2015年12月。[45] E. E. Altshuler、T. H. O’Donnell、A. D. Yaghjian 和 S. R. Best，“单极子超指向性阵列”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第53卷，第8期，第2653–2661页，2005年8月。[46] M. Capek、L. Jelinek 和 M. Masek，“多端口有耗天线总有源反射系数和实现增益的最优值求解”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第69卷，第5期，第2481–2493页，2021年10月。[47] M. T. Ivrlac 和 J. A. Nossek，“高效率超增益天线阵列”，载于*2010*年国际*ITG*智能天线研讨会（*WSA*），2010年2月。[48] A. Georgiadis 和 N. B. Carvalho，“采用凸优化方法设计由寄生电抗加载单元组成的超增益电小型天线与整流天线阵列”，*IEEE*《天线与传播汇刊》，第70卷，第6期，第4674–4682页，2022年6月。



Miloslav Capek（M’14，SM’17）于2009年获得捷克共和国布拉格捷克理工大学电气工程硕士学位，2014年获得博士学位，并于2017年受聘为副教授。

他负责开发 AToM（Matlab 天线工具箱）软件包。他的研究兴趣包括电磁理论、电小天线、数值技术、分形几何和优化。他以独著或合著的身份发表了130多篇期刊论文和会议论文。

Capek 博士是 IET《微波、天线与传播》的副编辑。2015年至2020年间，他曾担任 EurAAP 区域代表。他获得了 IEEE 天线与传播 Edward E. Altshuler 论文奖（2023年）。



Lukas Jelinek 于2006年获得捷克共和国布拉格捷克理工大学博士学位。2015年，他受聘为该校电磁场系副教授。

他的研究兴趣包括复杂介质中的波传播、电磁场理论、超材料、数值技术和优化。