arXiv:2302.06443v1 [math.GT] 13 Feb 2023

塞弗特三维轨形的多重纤维化问题

Oliviero Malech、Mattia Mecchia 和 Andrea Seppi

Abstract. 我们解决了闭可定向塞弗特三维轨形的多重纤维化问题，即确定此类轨形可能具有的所有不等价纤维化。本文研究几何结构为 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的几何轨形，以及坏轨形（因此是非几何的）；发生多重纤维化现象的唯一其他几何结构是 $\mathbb{S}^3$，此前已由第二和第三位作者研究。对于几何结构 $\mathbb{R}^3$，我们通过直接的几何论证，重新得到了 Conway、Delgado-Friedrichs、Huson 和 Thurston 借助计算机获得的结果。

Contents

1. 引言 2
1.1. 多重纤维化问题 2
1.2. 几何结构 $\mathbb{R}^3$ 3
1.3. 几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 5
1.4. 坏轨形 6
1.5. 工具概述 6
1.6. 一些推论 6
1.7. 论文结构 7
1.8. 致谢 8
2. 几何轨形 8
2.1. 初步定义 8
2.2. 平坦轨形与晶体群 10
2.3. 二维轨形 11
3. 三维塞弗特轨形 16
3.1. 局部模型 17
3.2. 塞弗特纤维化 17
3.3. 标准记号与Conway记号 22
4. 欧拉数为零 23
4.1. 对角作用 23
4.2. 水平部分与竖直平移 27
5. 平坦Seifert三维轨形 29
5.1. 点群 29
5.2. 平坦可定向轨形的多重纤维化。 32
5.3. 定理 A 证明的结尾 41
6. 几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 与坏塞弗特三维轨形 41
6.1. 轨形的显式微分同胚 42
6.2. 所有塞弗特纤维化 43
6.3. 基本群的结构 44
6.4. 定理 B 的证明 46
参考文献 49

1. Introduction

光滑轨形是局部同胚于$\mathbb{R}^n$ 在有限群 G的作用下所得商空间的拓扑空间，因此是光滑流形的一种自然推广，允许存在与 G的作用的不动点相对应的奇异点。光滑轨形可以自然地构造为光滑流形在恰不连续作用下的商空间。如果一个轨形可以表示为这样的整体商空间，则称其为良轨形；否则称为坏轨形。

在三维中，如果一个光滑轨形局部模仿八种瑟斯顿几何 $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$, Nil, Sol 和 SL_2中的一种，则称其为几何的 $\widetilde{\ }$。闭几何轨形都是好轨形。在诸多方面，它们都发挥着基础性作用，例如在 [BLP05]证明的轨形几何化定理中（另见 [CHK00]和 [BMP03]）。

1.1. 多重纤维化问题。 闭几何轨形的拓扑研究得非常有效，所涉$\widetilde{\ }$几何结构为 $\mathbb{R}^3$、 $\mathbb{S}^3$、 $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$、 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$、 Nil或 SL_2之一。研究中采用了轨形的塞弗特纤维化 概念，这是对经典流形塞弗特纤维化定义的推广，其中纤维可以是圆或区间。同胚于圆的纤维完全包含在轨形的奇异轨迹中，或完全位于其补集——正则轨迹中。同胚于区间的纤维则除端点外都位于正则轨迹中，而端点始终位于奇异轨迹中。

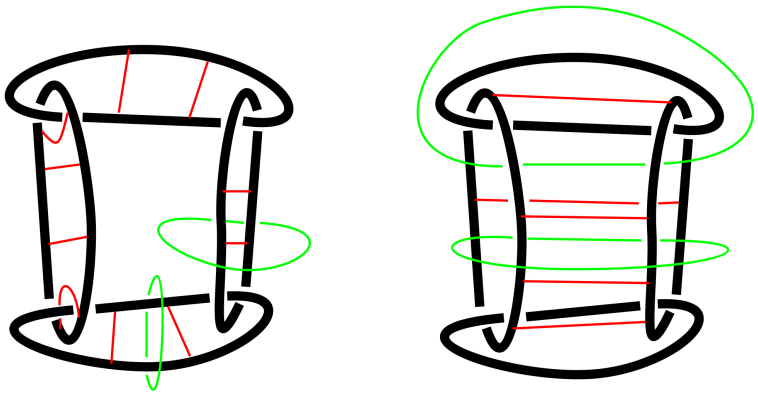


Figure 1. 一个闭平坦塞弗特轨形（其底空间为 S^3），具有两个不等价纤维化。绿色纤维是圆，红色纤维是区间，奇异轨迹以黑色标示。左图的底轨形是一个圆盘，其边界上有四个角点，每个角点的局部不变量为 $1/2$。右图的底轨形是一个圆盘，其内部有两个锥点，二者的局部不变量均为 $0/2$。这两种纤维化的边界不变量和欧拉数均为零。这些纤维化出现在定理 A 的第四行。

塞弗特纤维化轨形在保定向且保纤维化的微分同胚意义下由一组不变量唯一确定。这组不变量包括一个基底 （二维轨形 $\mathcal{B}$，其底层拓扑空间是带边界的二维流形）和若干有理数：与 $\mathcal{B}$的每个锥和角点相关的局部不变量 、与 $\mathcal{B}$底层拓扑空间的每个边界分支相关的边界不变量 ，以及一个整体欧拉数。

从这一角度来看，闭可定向几何轨道簇可以通过其塞弗特纤维化的不变量集合进行分类，但存在一个主要困难：同一个光滑轨形可能具有多个彼此不等价的塞弗特纤维化，正如下述定义所示。

定义 1.1。 3-轨道簇 $\mathcal{O}$ 的两个塞弗特纤维化称为等价的 ，如果存在一个 $\mathcal{O}$ 的保定向微分同胚，将其中一个映射到另一个。

等价地说，它们具有相同的不变量集合。同一轨形的彼此不等价的纤维化示例见图 1、图 2 和图 3。

在本文中，我们将给出所谓多重纤维化问题的结论，即确定哪些闭可定向几何轨形具有多个彼此不等价的塞弗特纤维化，以及这些纤维化是什么。这里我们只分析具有 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 几何结构的轨形，以及坏轨形。下面解释原因。 [BMP03] 中证明的以下结果给出了该问题的一种约化。

事实 1 ([BMP03，定理 2。15])。 设 $\mathcal{O}$ 是一个紧致可定向塞弗特纤维化良性 *3*-轨道簇（边界可以非空），且其基本群无限。如果 $\mathcal{O}$ 不被$S^2 \times \mathbb{R}$、 T^3 或 $T^2 \times I$ 覆盖，那么 $\mathcal{O}$ 上的塞弗特纤维化在同伦意义下唯一。

闭可定向良性 3-轨道簇的基本群有限，当且仅当它是具有几何结构 $\mathbb{S}^3$ 的几何轨形。此外，根据比伯巴赫定理，闭平坦三维轨形被 T^3 覆盖。因此，对于闭轨形，上述事实 1 蕴含以下结论：

事实 2。 如果一个闭可定向塞弗特纤维化 *3*-轨道簇 $\mathcal{O}$ 具有多个不等价的 *Seifert* 纤维化，那么它要么是具有几何结构 $\mathbb{S}^3$、 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的几何轨形，要么是坏轨形。

关于球面轨形的多重纤维化问题，第二和第三作者已在 [MS20], 中予以解决，其中部分依赖于此前在 [MS15、MS19] 中取得的结果。这促使我们在本文中分析其余的几何结构$\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ （以及坏轨形的情形）。

1.2. 几何结构 $\mathbb{R}^3$。具有几何结构 $\mathbb{R}^3$ （下文称为平坦）的闭轨形可表示为商空间 $\mathbb{R}^3/\Gamma$，其中 Γ 是一个空间群，即三维晶体群。关于闭平坦三维轨形的塞弗特纤维化的研究见 [CDFHT01]（其中包括不可定向情形，但本文不予讨论）。

特别是，对于闭平坦轨形，Conway、Delgado-Friedrichs、Huson 和 Thurston 解决了多重纤维化问题，他们在其研究中称之为别名问题 ，因为

他们使用一种紧致记法（“名称”）来表示塞弗特纤维化，而给定的轨形可能有多个“名称”。不过，在 [CDFHT01] 中，他们采用计算机辅助方法来解决这个问题。该方法基于比伯巴赫定理的一个推论，即两个闭平坦轨形微分同胚，当且仅当它们的基本群同构；因此，可以使用算法来确定以塞弗特纤维化形式表示的两个轨形是否具有同构的基本群。

我们证明的第一个主要定理如下，它通过直接证明恢复了[CDFHT01]的结果，而证明基于几何和拓扑论证。（关于证明的一些思路，见下文第 1.5 节。）

定理 A. 闭可定向平坦塞弗特三维轨形在等价意义下具有唯一的塞弗特纤维化，例外情形见下表：

$(S^2(2,\ 2,\ 2,\ 2);\ 0/2,\ 0/2,\ 0/2,\ 0/2;\ 0)$	$(S^1 \times I;\ ;\ ;\ ;\ 0;\ 0;\ 0)$
$(S^2(2,2,2,2);\ 0/2, 0/2, 1/2, 1/2;\ 0)$	$(S^1 \times I;\ ;\ ;\ ;\ 0;\ 1;\ 1)$ $(Mb;\ ;\ ;\ 0;\ 0)$
$(S^2(2,2,2,2);\ 1/2, 1/2, 1/2, 1/2;\ 0)$	$(Kb;\ ;\ 0)$
$(D^2(2,\ 2;\ )\ ;0/2,\ 0/2;\ ;\ 0;\ 0)$	$(D^2(;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2);\ ;\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2;\ 0;\ 0)$
$(D^2(2, 2;\ );0/2, 1/2;\ ;\ 0;\ 1)$	$(D^2(2;\ 2, 2);\ 1/2;\ 1/2, 1/2;\ 0;\ 0)$
$(D^2(2,\ 2;\ );1/2,\ 1/2;\ ;\ 0;\ 0))$	$(\mathbb{R}P^2(2, 2);\ 0/2, 0/2;\ 0)$
$(D^2(2;\ 2, 2);\ 0/2;\ 0/2, 0/2;\ 0;\ 0)$	$(D^2(;\ 2, 2, 2, 2);\ ;0/2, 0/2, 1/2, 1/2;\ 0;\ 1)$

表中的两个塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们出现在同一行中。特别地，七个平坦塞弗特三维轨形具有多个不等价纤维化；其中六个恰有两个不等价纤维化，另一个有三个。

表中，Mb 是莫比乌斯带，Kb 是克莱因瓶。第一行、第二行和第四行中出现的多重纤维化分别如图2、图3和图1所示。

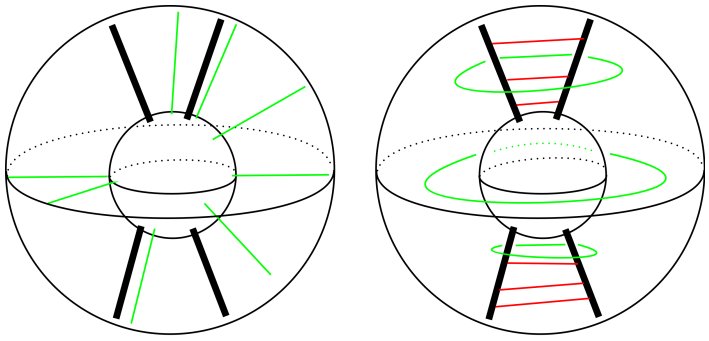


FIGURE 2. 定理 A 表格第一行所示的同一轨形的两种纤维化。如图 1 所示，绿色纤维是圆，红色纤维是区间，奇异轨迹以黑色表示。底层拓扑空间是$S^2 \times S^1$，由内球面和外球面经位似变换粘合而成。

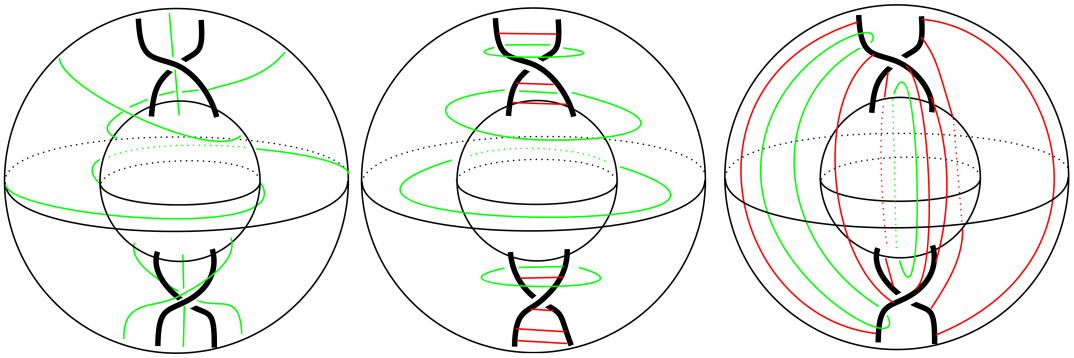


FIGURE 3. 定理 A 表格第二行中出现的同一轨形的三种纤维化。其底层拓扑空间再次为 $S^2 \times S^1$。

我们决定在本引言中使用经典记号来陈述所有定理，即关于（轨形）塞弗特纤维化的经典记号。为了解释这一记号，我们来看一个例子。

例 1.2：在定理 A 表格的第四行中（图 1 中也有 изображ），$(D^2(2,\ 2;\ );0/2,\ 0/2;\ ;\ 0\ ;\ 0)$ 是一种纤维化，其底轨形为一个圆盘，内部有两个锥点，二者的局部不变量均为 $0/2$，边界不变量和欧拉数均为零；而 $(D^2(\ ;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)\ ;\ ;\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2\ ;\ 0;\ 0)$ 是另一种纤维化，其底轨形为一个圆盘，边界上有四个角点，所有角点的局部不变量均为$1/2$，同样地，边界不变量和欧拉数均为零。同一轨形的这两种纤维化如图 1 所示。

不过，在全文中，我们将使用 Conway记号来表示塞弗特纤维化。虽然这种记号不太直观，但非常实用。我们将在第 3.3 节中解释这一记号，随后本文的所有结果都将采用该记号表述。

1.3. 几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$。 现在让我们转向几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$。下述定理给出了具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$的闭可定向轨形的多重纤维化分类：

定理 B。 具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的闭可定向*Seifert 3*-轨形，在等价意义下具有唯一的*Seifert*纤维化，但以下表格中所列的情形除外：

	for
$(S^2(d,d);0/d;0/d;0)$ $(S^2(n,n);m/n;(n-m)/n;0)$	$n \geq 1$ 和 $1 \leq m \leq n-1$ 其中 $d =$ 最大公约数(n,m)
$(D^2(;\ d,d);\ 0/d;\ 0/d;\ ;\ 0;\ 0)$ $(D^2(;\ n,n);\ m/n;\ (n-m)/n;\ ;1;\ 0)$	$n \geq 1$ 和 $1 \leq m \leq n-1$ 其中 $d =$ 最大公约数(n,m)

表中的两个塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们出现在同一行，且 $d = \gcd(n,m)$。

下面的例子将说明如何直观呈现第一行中的两个不等价纤维化。

例 1.3. 定理 B 表格第一行中具有多重纤维化的轨形 $\mathcal{O}$ 的底空间为 $S^2 \times S^1$。将 $S^2 \times S^1$ 视为两个实心环面 T_1 和 T_2 沿边界粘合而成，粘合所用的微分同胚将 T_1 的子午线映到 T_2 的子午线，则奇异轨迹由 T_1 和 T_2 的两条核心组成，两者的奇异指标均为 d。轨形 $\mathcal{O}$ 可由 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 关于等距变换群 Γ 取商得到；该群由沿 $\mathbb{R}$ 方向的纯平移（平移长度例如取 1）和 $\mathbb{S}^2$ 中阶为 d 的纯旋转生成。于是， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 中沿竖直直线的纤维化在商空间上诱导出第一个纤维化 $(S^2(d,d);0/d;\ 0/d;\ 0)$。要得到其他纤维化，我们可以考虑由 Γ 以及一个等距变换生成的群 Γ' ；该等距变换同时在 S^2 上作阶为 n 的旋转，并在 $\mathbb{R}$ 上作长度为 $1/n$ 的平移。商空间 $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma'$ 仍具有相同的微分同胚类型，而 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 中沿竖直直线的纤维化此时诱导出另一个纤维化 $(S^2(n,n);m/n;\ (n-m)/n;\ 0)$。

第二行中的轨形的底层拓扑空间为 S^3，它们是对上述轨形取双重商空间得到的。

1.4. **坏轨形　　形**。 最后，以下定理说明了坏轨形的情形 .

定理 C. 一个闭可定向 *Seifert* 坏 *3*-维轨形允许无穷多个彼此不等价的塞弗特纤维化。更确切地说，两个坏的塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们出现在下表的同一行中（对于 $c \neq d$）：

		for
$(S^2(c,d);0/c;0/d;0)$	$(S^2(c\nu,d\nu);c\mu/c\nu;d(\nu-\mu)/d\nu;0)$	$\nu \geq 1\ and\ 1 \leq \mu \leq \nu-1$ $where\ \gcd(\mu,\nu)=1,\ c \neq d$
$(D^2(;c,d);0/c;0/d;0;0)$	$(D^2(c\nu,d\nu);c\mu/c\nu;d(\nu-\mu)/d\nu;1;0)$	$\nu \geq 1\ and\ 1 \leq \mu \leq \nu-1$ $where\ \gcd(\mu,\nu)=1,\ c \neq d$

我们指出，定理 B 和定理 C 中出现的轨形具有非常相似的性质。引理6.1以统一的方式处理了它们。我们可以重复例 1.3 中的讨论；特别是，第一行中的轨形的底层空间为 $S^2 \times S^1$，且两个核心纤维的奇点指标分别为 c 和 d。

1.5. 工具概述。 现在我们暂停一下，简要讨论定理 A 和 B 的证明中的一些思路。

首先，我们建立一种适用于几何结构 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$的共同理论。我们证明（命题 4.5），在具有几何结构 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的轨形上构造塞弗特纤维化的一般方法如下。考虑 Isom(M) $\times$ Isom($\mathbb{R}$) 的一个离散子群，其中 M 为 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{S}^2$，且商空间 $\mathcal{O} := (M \times \mathbb{R})/\Gamma$ 紧致。与例 1.3 完全相同，由 $M \times \mathbb{R}$ 的平行直线 $\{pt\} \times \mathbb{R}$ 给出的纤维化随即诱导出一种

$\mathcal{O}$ 的塞弗特纤维化。根据构造，这种 $\mathcal{O}$ 纤维化的基底 2-维轨形是 M 的商空间（因此，当 $M = \mathbb{R}^2$ 时它是平坦的，当 $M = \mathbb{S}^2$ 时它是球面的），且欧拉数为零。事实上，已知这些是必要条件：每个具有几何结构 $\mathbb{R}^3$（分别为 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$）的闭定向轨形上的塞弗特纤维化，其基底都是平坦的（分别为球面的），且欧拉数为零。

更重要的是，我们证明了逆命题也成立（推论 4.7）：具有欧拉数为零且底轨形为平坦或球面的闭定向轨形上的每个塞弗特纤维化，都等价于通过上述构造得到的纤维化。

然而，几何结构 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的情形却大不相同；定理 A 和 B 的证明虽然部分依赖于上述一般性结果（命题 4.5 和推论 4.7），但所采用的论证完全彼此独立。一方面，根据比伯巴赫定理，两个平坦轨形 $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$ 和 $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ 微分同胚，当且仅当空间群 Γ_1 和 Γ_2 通过某个仿射变换共轭；该变换特别会将平行直线族映射为平行直线族。由于根据推论 4.7，闭平坦可定向轨形 $\mathcal{O}$ 上的每个塞弗特纤维化都由 $\mathbb{R}^3$ 中的一个平行直线族诱导，定理 A 的证明实质上包括对空间群 $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ 可能保持的 $\mathbb{R}^3$ 的不同平行直线族进行细致分析。

另一方面，与 $\mathbb{R}^3$ 中不同，在几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 中没有“仿射变换”的概念，而且存在一个“优先”的方向，即垂直方向，它在等距变换群作用下保持不变。类比比伯巴赫定理，人们或许会猜想：$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma_1$ 和 $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma_2$ 微分同胚（当 $\Gamma_1 < \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 时），当且仅当 Γ_1 和 Γ_2 可由一个在 $\mathbb{S}^2$ 上作等距变换、在 $\mathbb{R}$ 上作仿射变换的变换共轭。这个说法是错误的：事实上，它将意味着几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的塞弗特纤维化是唯一的。从某种意义上说，定理 B 描述了比伯巴赫定理在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 中的类似命题为何不成立。其证明表明，例 1.3 中的轨形 $\mathcal{O}$，连同 $\mathcal{O}$ 本身的一个二对一商空间，是唯一一种情形：两个等距变换离散群在商空间中诱导出相同的微分同胚类型，但 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的竖直纤维化却在商空间中产生不等价的纤维化。

1.6. **一些推论**。最后，让我们讨论一下这些结果的一些推论。

定理 A 的一个具体推论是，具有几何结构 $\mathbb{R}^3$的闭轨形至多允许三种不等价纤维化。由定理 B（以及定理 C）可知，对于几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$（以及坏轨形），这一结论并不成立，因为纤维化不唯一的闭轨形（即定理 B 表格中的那些轨形）允许无穷多种纤维化。对于球面几何，在 [MS20] 中，第二位和第三位作者证明了一个闭球面轨形可以允许无穷多种纤维化，也可以至多允许三种纤维化。结合这些结果，可立即得到以下推论。

推论 D. 如果一个闭塞弗特 *3*-轨道簇不允许无穷多种不等价的塞弗特纤维化，那么它至多允许三种不等价纤维化。

其次，我们刻画了那些存在无穷多个不等价塞弗特纤维化的闭三维轨形。在此之前，我们需要引入一些定义。

透镜空间是通过沿边界以保向反转微分同胚粘合两个实心环面而得到的三维流形。若允许环面的核心成为奇异曲线，则这种粘合会得到一个轨形，其底层拓扑空间是透镜空间，奇异集是两个核心并集的开闭子集（也可能为空）。我们称这类轨形为透镜空间轨形。此外，我们将 S^3中的*Montesinos*图 称为三价图，它由一个标记为 2 的蒙特西诺斯链环构成，并且每个有理辫还可能配有一根“撑杆”，即一个端点位于有理辫两个连通分支上的区间（可带任意标记）。详细描述请参见 [Dun88，第 4]节。

推论 E。 设 $\mathcal{O}$ 为闭塞弗特纤维化三维轨形。当且仅当以下条件之一成立时， $\mathcal{O}$ 具有无穷多个不等价纤维化：它是透镜空间轨形，或其底层拓扑空间为 S^3 且奇异集是至多含有两个有理缠结的*Montesinos*图。

1.7. **论文结构**。 在第2节中，我们介绍光滑轨形和几何轨形，研究它们与晶体群的关系，并详细描述二维轨形。在第3节中，我们研究三维轨形，特别是使用塞弗特纤维化进行研究，并讨论塞弗特纤维化的标准记号和Conway记号。在第4节中，我们给出关于具有几何结构 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的闭轨形的塞弗特纤维化的一些一般结果（特别是命题 4.5和推论 4.7）；等价地说，这些结果涉及具有平坦或球面底轨形且欧拉数为零的塞弗特纤维化。在第5节中，我们证明定理 A。在第6节中，我们证明定理 B 和定理 C以及推论 E。

1.8. **致谢**。 第三位作者获得了由法国“未来投资计划”资助的 LabEx PERSYVAL-Lab（ ANR-11-LABX-0025-01）的部分支持。第二位和第三位作者是国家研究组 GNSAGA 的成员。

2. Geometric orbifolds

我们先介绍任意维数下光滑轨形和几何轨形的一些基本概念。更多细节可见 [BMP 03], [Rat06] or [Cho12]。

2.1. **初步定义**。

定义 2.1. 一个光滑轨形 $\mathcal{O}$ （无边界）维数为 n 的对象，是一个旁紧~豪斯多夫拓扑空间 X，配备有一个图册 φ_i： $U_i \to U_i/\Gamma_i$，其中：

- U_i 构成 X 的一个开覆盖。

- U_i 是$\widetilde{\ }$ $\mathbb{R}^n$ 的开子集， Γ_i 是有限群，并且每个 Γ_i 都在 U_i 上光滑且有效地作用，$\widetilde{\ }$
- φ_i是同胚，并且对于每个 i 和 j，复合$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 可提升$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$为微分同胚 $\widetilde{\varphi}_{ij}$：$U_i \to U_j$。

拓扑空间 X 称为 $\mathcal{O}$的底层拓扑空间，记作 $|\mathcal{O}|$。本文中，我们的所有轨形都是连通的。若 $|\mathcal{O}|$ 是紧致的，我们称 $\mathcal{O}$ 为闭轨形。

请注意，闭轨形的底层拓扑空间 $|\mathcal{O}|$ 通常不一定是流形。在本文讨论的情形中， $|\mathcal{O}|$ 总是流形，但往往（特别是在二维情形下，见第2.3节）带有边界。

对每个点 $x \in \mathcal{O}$ ，都可以关联一个局部群，它是满足以下条件的最小群 Γ_x： $\widetilde{\ }$给出 x 附近的一个局部图 $\varphi : U \to U/\Gamma_x$ 。

注 2.2。 事实证明，有限群在 $\mathbb{R}^n$固定一点 x 的 $\mathbb{R}^n$开子集 x 上的任意光滑作用，都可以通过微分同胚共轭：在 x 的某个小邻域上，它共轭于一种固定 $0 \in \mathbb{R}^n$ 、并保持包含原点的 $\mathbb{R}^n$ 的开子集上的标准欧几里得距离的作用。因此，所有局部群 Γ_x 都同构于 $O(n)$ 的有限子群。

如果局部群 Γ_x 是平凡群，那么 x 就称为正则点。否则， x 称为奇点。由正则点组成的 $\mathcal{O}$ 子集按定义是一个光滑流形。特别地，每个流形都是一个所有点均为正则点的轨形。

定向拟流形。 当然，也可以在轨形上赋予其他附加结构。例如， $\widetilde{\ }$若在定义 2.1 中，每个 U_i 都赋予一个定向，且该定向在 Γ_i 的作用下保持不变，并且复合 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 的提升 $\widetilde{\varphi}_{ij}$： $\widetilde{U}_i \to \widetilde{U}_j$ 保持这种定向，则轨形 $\mathcal{O}$ 称为定向的 。如果能为 U_i 选择一组一致的 $\widetilde{\ }$定向，则轨形 $\mathcal{O}$ 称为可定向的 。

几何轨形。 本着类似的精神，我们来引入几何轨形。设 (M, g) 是一个黎曼流形，不失一般性，我们假设它是单连通的，并令 Isom(M, g) 表示其等距变换群。若在定义 2.1 中，将开子集 $U_i \subset \mathbb{R}^n$ 替换为 M 的开子集，群 Γ_i 的元素在 U_i 上的作用是 Isom(M, g) 中元素的限制，并且相应地，提升 $\widetilde{\varphi}_{ij}$： $U_i \to U_j$ 是 Isom(M, g) 中等距变换的限制，则称轨形 $\mathcal{O}$ 具有几何结构 (M, g)，称其为具有几何结构 (M, g) 的几何轨形。

本文建议读者牢记的 (M, g) 的基本例子如下：

- 欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ （具有几何结构 $\mathbb{R}^n$ 的轨形称为平坦）
- 球面 $\mathbb{S}^n$ （具有几何结构 $\mathbb{S}^n$ 的轨形称为球面）
- 上述两项的乘积，特别是三维流形 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$。

在三维中，几何化纲领所采用的著名八种瑟斯顿几何$\widetilde{\ }$有一些特例，即： $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$, Nil, Sol, SL_2。

微分同胚与等距变换。 轨形之间的微分同胚 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$ 是一个同胚 $f\colon |\mathcal{O}|\to|\mathcal{O}'|$，使得每个复合 $\varphi'_{j'}\circ f|_{U_i}\circ\varphi_i^{-1}$（在其有定义时）$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$都可提升为 U_i 到其在 $U'_{j'}$中的像上的微分同胚。

当 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$ 带有定向时，如果如上所述的提升$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$保持在 U_i 和$U'_{j'}$上选定的定向，则称 f 为保定向。当 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$ 具有几何结构（且具有相同的几何结构（M,g））时，如果这些提升是 Isom(M,g)中元素的限制，则称 f 为等距变换。

良轨形。 轨形自然地作为商空间出现 $\mathcal{O}=M/\Gamma$，其中 M 是一个流形，且 Γ 是在 M 上光滑、适当且不连续作用的群。在这种情况下，点 $[x]\in M/\Gamma$ 的局部群恰好是 x 的稳定子（由于该作用是适当不连续的，因此它是有限群）。如果 M 配备黎曼度量 g，且 Γ 还通过等距变换作用于 (M,g)，那么商空间 M/Γ 是具有几何结构 (M,g) 的几何轨形。同样，如果 Γ 保持 M 的定向，那么 M/Γ 就是定向的。

如果轨形微分同胚于上述商空间 M/G，则称其为良轨形；否则称为坏轨形。通过标准论证可知，具有几何结构 (M,g) 的闭良几何轨形与商空间 M/Γ 等距，其中 Γ 是等距变换群 Isom(M,g) 的一个子群，并在 M 上适当不连续地作用。

我们在此提及轨形基本群这一概念。我们不介绍其形式化定义；对我们而言，只需注意，对于良轨形 $\mathcal{O}\cong M/\Gamma$（其中 M 是单连通流形），轨形基本群$\pi_1(\mathcal{O})$同构于 Γ。

2.2. **平坦轨形与晶体群**。作为前述段落的特例，闭良平坦轨形同构于 $\mathbb{R}^n/\Gamma$，其中 Γ 是作用于 $\mathbb{R}^n$上的离散群。因此，下面的定义至关重要：

定义 2.3。群 Γ 称为维数 $n\in\mathbb{N}$ 的晶体群，如果它是 Isom($\mathbb{R}^n$) 的离散子群，并且 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ 是紧致的。壁纸群是维数为 2 的晶体群，而空间群是维数为 3 的晶体群。

下面给出晶体群的一些更详细性质。首先，众所周知，每个 $g\in$ Isom($\mathbb{R}^n$) 都具有 $g(x)=Ax+t$ 的形式，其中某个 $A\in O(n)$ 和 $t\in\mathbb{R}^n$满足条件。为简化记号，我们将 g 记作有序对 (A,t)。特别地，Isom($\mathbb{R}^n$) $\cong O(n)\ltimes T(n)$，其中 $T(n)\cong\mathbb{R}^n$ 是平移子群，并且有如下短正合列：

$$0\longrightarrow T(n)\longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\ \rho\ } O(n)\longrightarrow 0$$

其中 $\rho(g)=A$。

注 2.4. 给定一个晶体群 Γ，商空间 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ 可定向，当且仅当 Γ 保定向；也就是说，当且仅当 $\rho(\Gamma) \subseteq SO(n)$。

定义2.5. 设 Γ 是 Isom($\mathbb{R}^n$) 的一个子群。那么：

- Γ 的点群 是像 $\rho(\Gamma) \subset O(n)$;
- Γ 的平移子群 是 $T(\Gamma) = \text{Ker}(\rho|_\Gamma) = \{g \in \Gamma : \rho(g) = id\}$。

根据定义，我们由此得到以下短正合列：

$$0 \longrightarrow T(\Gamma) \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\rho|_\Gamma} \rho(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

以下是关于晶体群的一个非常经典的结果。例如参见 [Szc12]。

定理 2.6 (比伯巴赫)。 设 Γ 是一个维数为 n 的晶体群。则：

- 平移子群 $T(\Gamma)$ 同构于 $\mathbb{Z}^n$;
- 点群 $\rho(\Gamma)$是一个有限群。

两个晶体群抽象同构，当且仅当它们通过 $\mathbb{R}^n$ 的某个仿射变换共轭。

例 2.7。 维数为 1 的晶体群按同构分类（因此，根据定理 2.6，按仿射共轭分类）只有两个：

- 由 1 的平移生成的无限循环群;
- 由固定点 0 和 $1/2$ 的反射生成的无限二面体群。

显然，前者是后者的二重指标子群。

我们借助这个一维例子来引入一些有用的记号。任意$f \in$ Isom($\mathbb{R}$)都可用一对 (A, t) 描述，其中 $A \in \{\pm 1\}$；于是我们将使用记号$f = t\pm$。采用这一记号，例 2.7 中的两个晶体群分别为 $< 1+ >$ 和$< 0-, 1- >$。

此外， $\mathbb{R}$ 的任意等距变换都会在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ 上诱导一个等距变换，而$\mathbb{S}^1$ 的所有等距变换都能以这种方式得到。因此，对于 $O(2) \cong$ Isom($\mathbb{S}^1$) 的每个元素 g，我们将记作 $g = t\pm$ （这里稍微滥用一下记号），意指 g 由$\mathbb{R}$的一个等距变换 $f = t\pm$ 诱导而来。因此，将 $g \in O(2)$写作 $g = t\pm$时， t 仅在模 1 的意义下定义，即属于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。例如，角度为 $2\pi\alpha$ 的旋转记作 $\alpha+$，斜率为 $\pi\beta$ 的直线上的反射记作 $\beta-$。

注记 2.8。 这种记法的计算优势在于，两个元素的复合很容易表示。事实上，我们有

$$(\alpha+) \cdot (\beta\pm) = (\alpha + \beta) \pm \qquad (\alpha-) \cdot (\beta\pm) = (\alpha - \beta) \mp \ .$$

2.3. 二维轨形。现在我们来考察维数为 2 的轨形。在本节中，我们将用符号 $\mathcal{B}$ 表示所有二维轨形；正如第3.2节所解释的，二维轨形将表示塞弗特纤维化的底轨形。下文中，符号 $\mathcal{O}$ 因而主要用于表示三维轨形。

局部模型。在一个二维轨形 $\mathcal{B}$ 中，每个点都有一个邻域，该邻域以 D^2/Γ_0 为模型；根据备注 2.2，可以假设 Γ_0 是 $O(2)$ 的有限子群。于是有四种可能（见图 4）：

- 如果 Γ_0 是平凡群，那么 x 就是一个正则点；
- 如果 Γ_0 是旋转的循环群，那么 x 称为锥点，并标记为 Γ_0的阶；

- 如果 Γ_0 是由反射生成的二阶群，那么 x 称为镜像点；
- 如果 Γ_0 是二面体群，那么 x 称为角点，并标记为 Γ_0的二阶指标旋转子群的阶。

这些标记也称为奇点指标。注意，如果 x 是镜像点，那么在 $\mathcal{B}$的奇异轨迹中， x 有一个完全由镜像点构成的邻域。我们将由镜像点组成的奇异轨迹的连通子集称为镜面反射器。

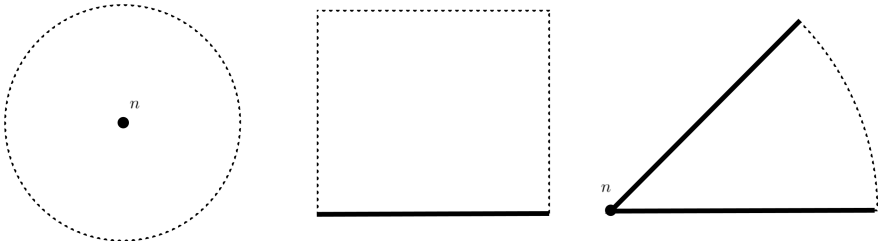


FIGURE 4. 二维轨形的局部模型。从左至右依次为锥点、镜面反射器和角点。

特别地，底层拓扑空间 $|\mathcal{B}|$ 是一个带边界流形。 $|\mathcal{B}|$ 边界上的点恰好是镜像点和角点。

标准记号与 *Conway* 记号。 闭（连通）二维轨形$\mathcal{B}$ 的微分同胚类型由其底层（紧致）带边界流形 $|\mathcal{B}|$、锥点的数量及其标签，以及 $|\mathcal{B}|$每个边界分支上的角点（连同其标签，以及按循环置换确定的顺序）唯一确定。

因此，在标准记号中， $\mathcal{B}$ 表示为符号

$$\mathcal{B} = S(n_1, \ldots, n_h; n_{11}, \ldots, n_{1h_1}; \ldots; n_{b1}, \ldots, n_{bh_b}) \ , \tag{1}$$

其中， S是带边界的底流形（曲面）， $n_1, \ldots, n_h$是锥点的标签，而 $n_{i1}, \ldots, n_{ih_i}$是位于 S 第 i个边界分支上的角点的标签。

采用 Conway记号会非常有用。虽然这种记号不太直观，但在实际使用中非常方便（参见 [CH02]）。首先，我们来介绍曲面（即二维流形）的 Conway记号。该曲面

$$S = S^2 \#(\#_t T^2) \#(\#_p \mathbb{R}P^2) - \bigsqcup_b B^2 \tag{2}$$

由 t 个环面和 p 个射影平面通过连通和构成，并具有 b 个边界分支，记作：

$$S = \underbrace{\circ \cdots \circ}_{t} \underbrace{* \cdots *}_{b} \underbrace{\times \cdots \times}_{p} \tag{3}$$

换言之，“圆环”符号表示 T^2 的连通和，“叉号”符号表示 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和，而“万花筒”符号表示边界分支。

当 $\mathcal{B}$ 是一个 2-维轨形时，我们可以在表示底流形的 Conway记号 (3) 中插入奇点指标，如下所示。轨形 (1)（其中 S 如 (2) 所示）表示为：

$$\mathcal{B} = \underbrace{\circ \cdots \circ}_{t} n_1, \ldots, n_h * n_{11}, \ldots, n_{1h_1} * \cdots * n_{b1}, \ldots, n_{bh_b} \underbrace{\times \cdots \times}_{p} \tag{4}$$

读者可以通过查看表 1 中的诸多示例，对照这两种记号。

基本群。这里总结闭二维轨形基本群的标准表示。有关证明的细节（其主要依据轨形的范坎彭定理（[BMP03，推论 2.3]）），请参见 [CDFHT01，附录 III] 或[CH02]。

命题 2.9。 设 $\mathcal{B}$ 是 (1) 和 (4) 中所述的闭二维轨形。那么 $\pi_1\mathcal{B}$ 有如下由生成元和关系给出的表示：

- 对于每个 $\circ$ 符号，有两个生成元 x_s, y_s（对应 $s = 1, \ldots, t$）；
- 对于每个 $\times$ 符号，有一个生成元 z_r（对应 $r = 1, \ldots, p$）；
- 对于每个阶为 n_k 的锥点（对应 $k = 1, \ldots, h$），有一个生成元 γ_k，满足关系 $\gamma_k^{n_k} = 1$;
- 对于 $|\mathcal{B}|$ 的每个边界分支（对应字符串 $*n_{i1}, \ldots, n_{ih_i}$（对应$i = 1, \ldots, b$）），有 $h_i + 2$ 个生成元 $\delta_i, \rho_{i0}, \rho_{i1}, \ldots, \rho_{ih_i}$，满足以下关系

$$\delta_i^2 = \rho_{i0}^2 = \cdots = \rho_{ih_i}^2 = 1$$
$$(\rho_{i0} \cdot \rho_{i1})^{n_{i1}} = (\rho_{i1} \cdot \rho_{i2})^{n_{i2}} = \cdots = (\rho_{i,h_i-1} \cdot \rho_{ih_i})^{n_{ih_i}} = \delta_i \cdot \rho_{ih_i} \cdot \delta_i^{-1} \cdot \rho_{i0} = 1 \ .$$

此外，还有一个全局关系：

$$\prod_{s=1}^{t} [x_s, y_s] \cdot \prod_{r=1}^{p} z_r^2 \cdot \prod_{k=1}^{h} \gamma_k \cdot \prod_{i=1}^{b} \delta_i = 1 \ . \tag{5}$$

这一表示的几何解释如下，如图5所示。

对于每个标记为 n_k 的锥点， γ_k 表示环绕该锥点的环路；关系 $\gamma_k^{n_k}$ 对应于相应局部群以阶为 n_k 的旋转作用这一事实。对于底流形的边界分支，我们先考虑不存在角点的情形。在这种情况下，上述表示给出两个生成元

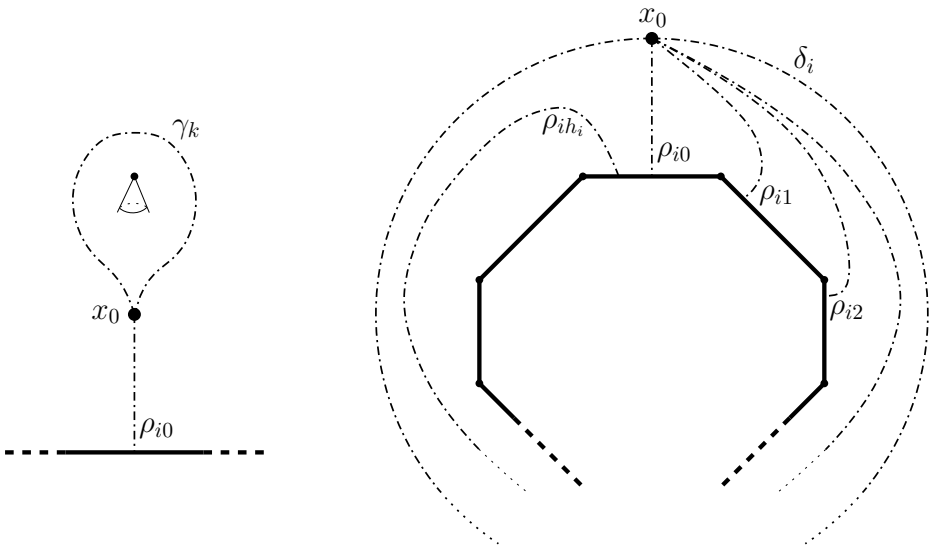


FIGURE 5. 左侧， γ_k 表示绕第 k个锥点旋转的环路；当镜面反射器没有角点时， ρ_{i0} 表示一条到达镜面反射器后返回基点 x_0的路径。右侧，对于包含 h_i 个角点的 $|\mathcal{B}|$ 的第 i个边界分支， δ_i 表示绕该边界分支的环路，而ρ_{ij} 表示到达连续角点之间所围成的镜面反射器的路径。

（设为 δ 和 ρ），以及关系 $\rho^2 = 1$ 和 $[\delta, \rho] = \delta \cdot \rho \cdot \delta^{-1} \cdot \rho = 1$。由 δ 和 ρ 生成的子群是边界分支邻域的基本群，其中 δ 表示环绕该边界分支的环路，而 ρ 表示到达镜像点后返回的路径。由于相应的作用是反射，它的阶为二。当边界分支具有角点时， ρ_{ij} 表示到达两个角点之间所围成的镜面反射器的路径；这些关系自然源于产生角点的作用是二面体作用这一事实。

欧拉示性数。 让我们回顾一下轨形的欧拉示性数定义。

定义2.10。 设 $\mathcal{B}$ 是一个闭二维轨形。 $\mathcal{B}$ 的欧拉示性数是有理数：

$$\chi(\mathcal{B}) := \chi(|\mathcal{B}|) - \sum_{k=1}^{h} \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{h_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right)$$

其中 $\chi(|\mathcal{B}|)$ 是带边界流形的欧拉示性数；与 (1) 和 (4) 一样，第一个求和遍及所有锥点， n_i 是第 k 个锥点的标签；第二个求和包含所有角点， n_{ij} 是第 i 个边界分支上第 j 个角点的标签。

平坦与球面二维轨形。下面简要介绍平坦与球面闭二维轨形的分类。闭平坦二维轨形都是良性的，且恰好是 $\mathbb{R}^2$ 关于某个壁纸群的商空间；类似地，闭球面二维轨形是 $\mathbb{S}^2$ 关于 Isom($\mathbb{S}^2$) 的某个有限子群的商空间。

注记 2.11。 根据轨形的高斯-博内公式，闭平坦 2-维轨形的欧拉示性数为零。闭球面 2-轨形的欧拉示性数为正，且恰好等于其面积的 2π 倍。另有公式$\chi(\mathbb{S}^2/\Gamma) = \chi(\mathbb{S}^2)/|\Gamma| = 2/|\Gamma|$。

下表列出了所有闭平坦与球面二维轨形，包括标准记号和 Conway 记号。平坦情形下，列表中有 17 个轨形；球面轨形有无穷多个，但可归为若干族，这些族可能依赖于一个整数参数。

Flat

标准	Conway
$S^2(6,3,2)$	632
$S^2(4,4,2)$	442
$S^2(3,3,3)$	333
$S^2(2,\ 2,\ 2,\ 2)$	2222
$D^2(;6,3,2)$	$*632$
$D^2(;4,4,2)$	$*442$
$D^2(;3,3,3)$	$*333$
$D^2(;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$	$*2222$
$D^2(4;2)$	$4*2$
$D^2(3;3)$	$3*3$
$D^2(2,\ 2;2)$	$22*$
$D^2(2;2,2)$	$2*22$
$\mathbb{R}P^2(2,2)$	$22\times$
T^2	$\circ$
Kb^2	$\times\times$
$S^1\times I$	$**$
Mb^2	$*\times$

球面

标准	Conway	
S^2		
$S^2(n,\ n)$	nn	$n\geq 2$
$S^2(2,2,n)$	$22n$	$n\geq 2$
$S^2(3,3,2)$	332	
$S^2(4,\ 3,\ 2)$	432	
$S^2(5,\ 3,\ 2)$	532	
D^2	$*$	
$D^2(n)$	$*n$	$n\geq 2$
$D^2(;\ n,\ n)$	$*nn$	$n\geq 2$
$D^2(2;\ n)$	$2*n$	$n\geq 2$
$D^2(;2,\ 2,\ n)$	$*22n$	$n\geq 2$
$D^2(3;2)$	$3*2$	
$D^2(;3,3,2)$	$*332$	
$D^2(;\ 4,\ 3,\ 2)$	$*432$	
$D^2(;5,3,2)$	$*532$	
$\mathbb{R}P^2$	$\times$	
$\mathbb{R}P^2(n)$	$n\times$	$n\geq 2$

TABLE 1. 所有具有几何结构 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{S}^2$的闭轨形列表。请记住， Mb^2 是 M¨obius 带，而 Kb^2 是克莱因瓶

注记 2.12。根据商平坦轨形的数据，重构壁纸群（在 $\mathbb{R}^2$ 的仿射变换共轭意义下）相对容易。回想一下，

$\mathbb{R}^2$ 的任意等距变换都是旋转、平移、反射或滑移反射。平移和滑移反射没有不动点，因此不会在商轨形中产生奇点。如果壁纸群 Γ 含有反射，那么 $\mathbb{R}^2/\Gamma$ 就有一个镜面反射器。最后，如果 Γ 含有旋转，那么 $\mathbb{R}^2/\Gamma$ 就有一个锥点或角点（即不动点 p 在商空间中的像）。当且仅当 Γ 中存在一个固定 p 的反射时，该点才是角点。

注记 2.13. 类似地， $\mathbb{S}^2$ （在此视为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面）上的等距变换包括旋转、反射，以及反射与绕垂直于反射不动平面的直线旋转的复合。反射在商空间中产生镜面反射器，而旋转则产生锥点或角点。同样，由商球面轨形可以轻易重构出 $O(3)$ 的一个有限子群（在 $O(3)$ 中相差共轭）。

一些例子。 下面简要看几个平坦和球面轨形的例子，实践注记 2.12 和 2.13，并计算基本群。

例 2.14. 与轨形 632 对应的壁纸群由绕欧几里得三角形顶点的旋转生成，该三角形的角度为 $\pi/2, \pi/3, \pi/6$，旋转角为 $\pi, 2\pi/3, \pi/3$。回忆一下，这个群与轨形基本群$\pi_1(632)$同构，其由命题 2.9 给出的表示确实为：

$$\pi_1(632) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \,|\, \gamma_1^2 = \gamma_2^3 = \gamma_3^6 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1 \rangle \ .$$

类似地，轨形 $22n$ 是 $\mathbb{S}^2$ 在由三个旋转生成的群作用下的商空间，这三个旋转的不动点位于球面三角形的顶点处，其角度为 $\pi/2$， $\pi/2$ 和 π/n，旋转角为 π， π 和 $2\pi/n$，并且具有完全类似的表示。

例 2.15。 与轨形 $*632$ 相关联的壁纸群由欧几里得三角形各边上的反射生成，该三角形的角度为 $\pi/2$， $\pi/3$， $\pi/6$。根据命题 2.9， $\pi_1(*632)$由 δ， ρ_0， ρ_1， ρ_2， ρ_3 生成，其关系为

$$\delta^2 = \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_3^2 = (\rho_0\rho_1)^2 = (\rho_1\rho_2)^3 = (\rho_2\rho_3)^6 = \delta\rho_0\delta^{-1}\rho_3 = \delta = 1 \ .$$

稍作化简后，我们得到：

$$\pi_1(*632) = \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3 \,|\, \rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_3^2 = (\rho_3\rho_1)^2 = (\rho_1\rho_2)^3 = (\rho_2\rho_3)^6 = 1 \rangle \ .$$

3. Three-dimensional Seifert orbifolds

现在我们转而讨论三维情形。本文只考虑可定向的三维轨形。

3.1. 局部模型。 根据备注 2.2，任意一点都存在一个局部图表，其形式为 D^3/Γ_0，其中 Γ_0 是 $SO(3)$ 的有限子群，因此局部模型是以球面可定向 2-维轨形 $\mathbb{S}^2/\Gamma_0$ 为底的锥。表 1 的右栏中，只有前 6 行包含可定向球面轨形。因此，局部模型（除无奇点的平凡模型 D^3 外）如图 6 所示：

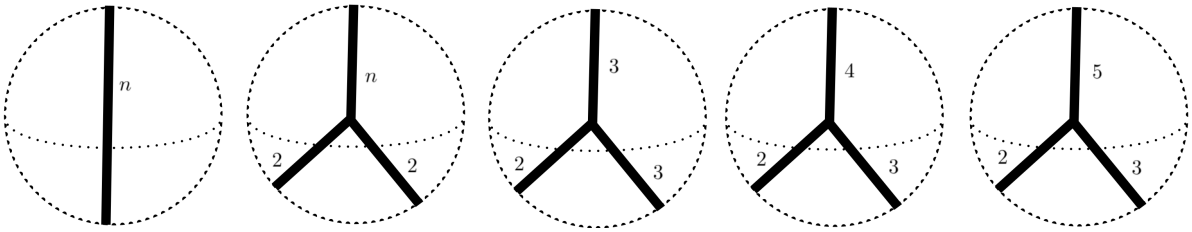


FIGURE 6. 可定向 3-轨形的局部模型。

因此，可定向3-轨形的底层拓扑空间是一个流形，奇异集是一个三价图；除了图的顶点处，局部群都是循环群。图的边通常标注局部（循环）群的阶。

3.2. 塞弗特纤维化。 我们现在通过塞弗特纤维化来关注可定向3-轨形的拓扑描述。

定义 3.1。 设 $\mathcal{O}$ 是一个可定向3-轨形。对于 $\mathcal{O}$，塞弗特纤维化是一个满射 $f\colon \mathcal{O} \to \mathcal{B}$，其像为一个 2-维轨形 $\mathcal{B}$，且对每个点 $x \in \mathcal{B}$，都存在：

- 一个轨形图册 $\varphi\colon U \cong U/\Gamma$，它是 $\mathcal{B}$ 在 x 周围的图册；
- Γ 在 S^1上的作用；
- 一个轨形微分同胚 $\phi\colon f^{-1}(U) \to (U \times S^1)/\Gamma$，其中 Γ 在 $U \times S^1$上的作用是对角的，并保持定向；

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & (\widetilde{U} \times S^1)/\Gamma \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{U}/\Gamma \end{array},$$

其中映射 $p\colon (U \times S^1)/\Gamma \to U/\Gamma$ 由投影 $pr_1\colon U \times S^1 \to U$ 到第一因子诱导。

注记 3.2。 在定义 3.1 中，假定 Γ 在 $U \times S^1$ 上的作用保持定向。因此，Γ 中的每个元素要么同时保持 U 和 S^1的定向，要么同时反转这两个定向。

投影到 $\mathcal{B}$ 的正则点上的纤维称为一般纤维；其他纤维称为例外纤维。保纤维化微分同胚 是一个轨形微分同胚 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$，它通过纤维化$f$： $\mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 和 f'： $\mathcal{O}' \to \mathcal{B}'$诱导底空间2-轨形的一个轨形微分同胚 $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 。

基本群。 这里汇集塞弗特三维轨形的轨形基本群的一种有用描述。

命题3.3。 设 f： $\mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 是一个可定向3-轨形的塞弗特纤维化。则 f诱导出一个正合列

$$1 \to C \to \pi_1(\mathcal{O}) \to \pi_1(\mathcal{B}) \to 1$$

其中 C 是循环的（有限或无限）。此外， C 是有限的，当且仅当 π_1（$\mathcal{O}$） 是有限的。

证明见 [BMP03，命题2.12]。

局部模型与不变量。 下面讨论可定向塞弗特三维轨形的局部模型。相关参考文献为 [BS85] 或 [Dun81]。显然，如果 $x \in \mathcal{B}$ 是一个正则点（即纤维 π^{-1}（x）是一般的），那么存在 x 的一个小邻域 U，使得 π^{-1}（U）是一个平凡圆丛。因此，我们来分析奇异点 $x \in \mathcal{B}$的情形。

如果 x 是标记为 n的锥点，局部群 Γ 是一个阶为 n 的循环群，它通过~旋转同时作用于 U 和 S^1。因此 $\pi^{-1}(x)$有一个实心环面邻域，其纤维化方式与流形的通常塞弗特纤维化相同，只是中心纤维~可能包含在奇异轨迹中。若 Γ 的一个生成元在 U 上作用为角度$2\pi/n$ 的旋转，在 S^1 上作用为角度 $-2\pi m/n$的旋转，则 $\pi^{-1}(x)$的局部不变量 定义为比值 $m/n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。实际上，可以选择 m 使得 $m/n \in [0, 1)$。在轨形的语境下，m 和 n 不一定互素；若最大公约数(m, n)等于最大公约数$(m, n) > 1$，则纤维 $\pi^{-1}(x)$的奇异指标等于该最大公约数；否则，该纤维是正则的。参见图7。

~如果 x 是镜像点，则局部群 $\mathbb{Z}_2$ 的生成元既在 U~上，也在 S^1上以反射方式作用，因此在实心环面 $U \times S^1$上作用为双曲型对合。商空间在拓扑上是一个 3-球，其中包含两条指数为 2 的奇异弧。纤维 $\pi^{-1}(x)$是一个区间，其两个端点各自位于一条奇异弧上。参见图8。

如果 x 是一个角点，则 Γ 是一个二面体群。二重指标循环子群的作用方式与上述~锥点情形完全相同； Γ中的非中心对合在 U 和 S^1上均通过反射作用，因此如上所述，通过一个双曲型对合发挥作用。局部模型仍然是一个拓扑三维球（称为实心枕头），其奇异集由两条弧组成，并且可能还有一条连接它们的奇异区间。事实上，纤维 π^{-1}（x）和之前一样是一个区间；当且仅当最大公约数（m， n） > 1时，它是奇异的，其奇异指标为最大公约数（m， n）。与 π^{-1}（x）相关联的局部不变量定义为二重指标循环子群的局部不变量。注意，如果 y 是一个镜像，则 π^{-1}（y）关于 $y \neq x$ 的纤维是一个端点位于奇异轨迹上的区间

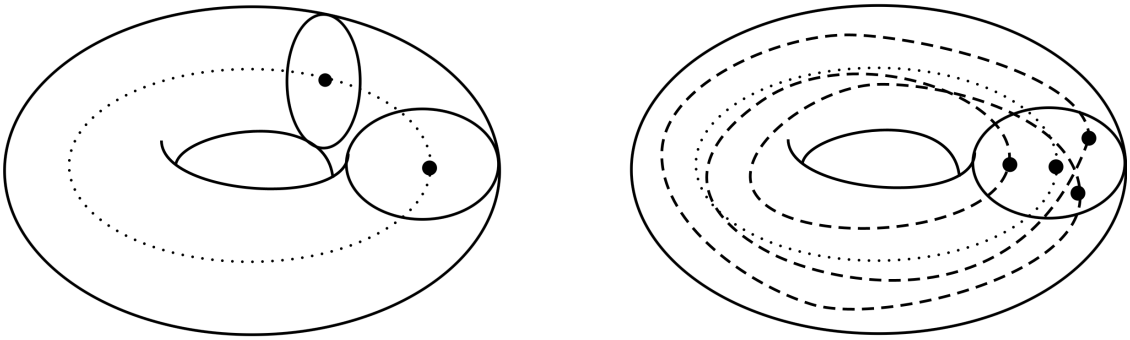


FIGURE 7. 左图：由两个子午圆盘围成的基本域，对应于 Γ 在由 $\widetilde{U}$ 和 S^1上的同步旋转生成的实心环面 $\widetilde{U} \times S^1$ 上的作用。右图：该作用的商空间。中心纤维以点线表示，其奇异指标为 $p = \gcd(m,\ n)$，前提是该数为 > 1。一般纤维以虚线表示，局部不变量为 $p/3p$。

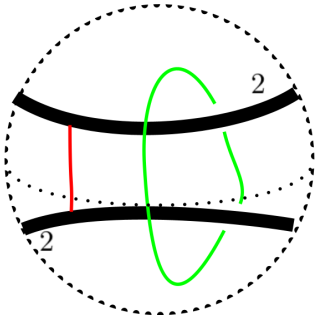


FIGURE 8. 镜面反射器上的局部模型。奇异轨迹由两条指数为 2 的平行弧组成。一般纤维（绿色）绕着奇异轨迹盘绕；例外纤维（红色）是端点位于奇异轨迹上的区间。

；如果 y 是一个正则点，则它是一个圆。然而，根据 x上的局部不变量，这些圆会绕奇异轨迹发生扭转。见图9。

然而，存在一个典范微分同胚，可以“解开”正则纤维，使其简单地绕奇异轨迹盘绕。这种变换的缺点是奇异轨迹会变成打结的。见图10。我们将原像 $\pi^{-1}(U)$的这一版本称为**标准局部模型**，其中 U 表示 x的一个邻域。

边界不变量和欧拉数。 除了上述局部不变量之外，为了对塞弗特纤维化轨形进行分类，还必须考虑另外两个不变量。

底流形 $|\mathcal{O}|$的每个边界分支都关联一个不变量 $\xi \in \{0, 1\}$ 。该不变量通过将边界分支的 h 个角点上的标准局部模型粘合在一起定义。为了封闭实心环面，可以进行若干次

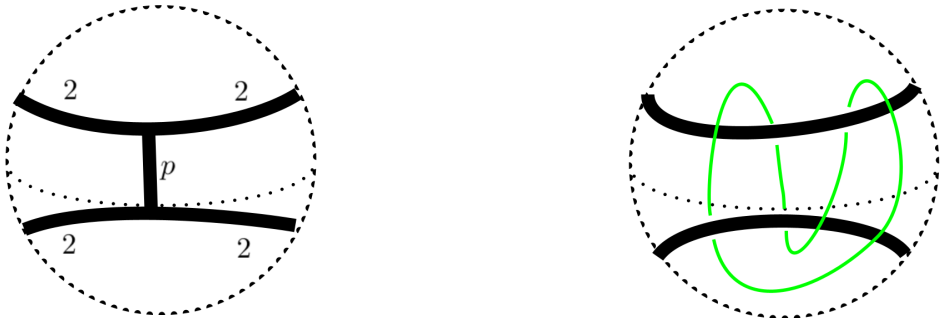
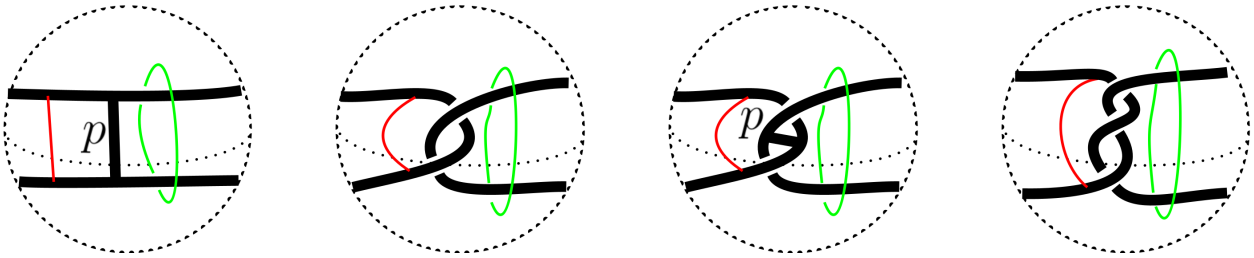


FIGURE 9. 左侧，$\pi^{-1}(U)$ 表示角点邻域，且当$p = \gcd(m, n) > 1$时，U 。右侧（在 $p = 1$的情况下），一般纤维以绿色显示，局部不变量等于 $1/2$。



(A) $0/p$ (B) $1/2$ (C) $p/2p$ (D) $1/3$

FIGURE 10. 角点上的标准局部模型示例。红色纤维（区间）是例外纤维；绿色纤维（圆）是常规纤维。每幅图下方的分数是局部不变量。

扭转。相差德恩扭转的微分同胚类型仅取决于扭转次数的奇偶性。因此，若实心环面是在未施加扭转的情况下得到的，则定义为 $\xi = 0$ ；若施加了一次扭转，则定义为 $\xi = 1$ 。参见图 11。

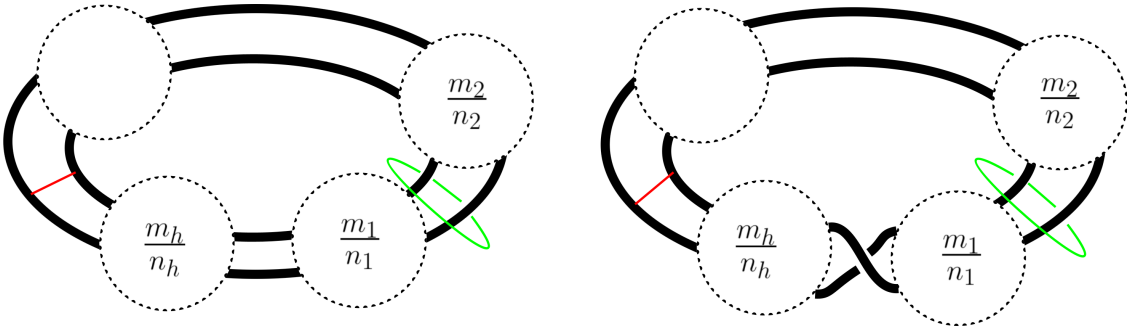


FIGURE 11. 与 $|\mathcal{B}|$ 的一个边界分支相关联的局部不变量，在左侧情形下为$\xi = 0$ ，在右侧情形下为 $\xi = 1$ 。

注 3.4。 对于仅由镜像点组成（没有角点）的边界分支，其邻域的原像是一个实心环面，奇异集是一个一维流形。如果奇异集有两个连通分支，则 $\xi = 0$；否则，若其连通，则 $\xi = 1$。见图12。

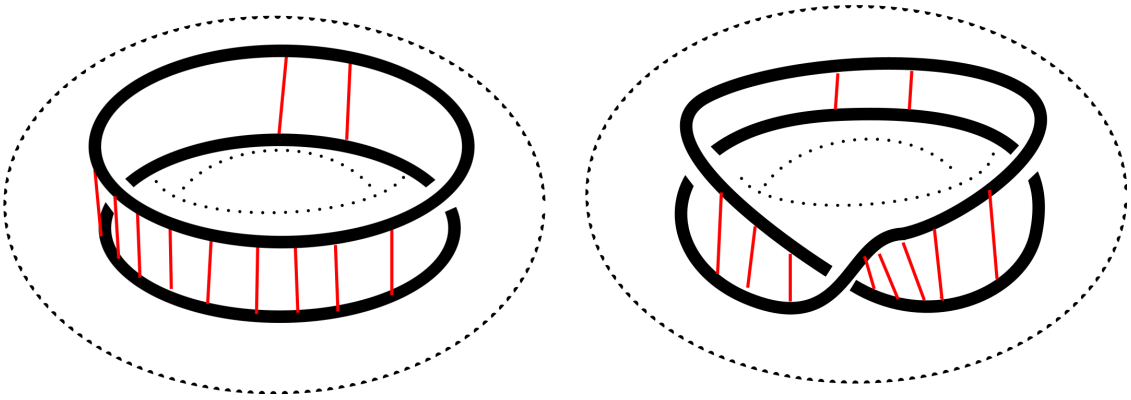


FIGURE 12. 没有角点的边界分支情形下的局部不变量。事实证明，若奇异轨迹有两个边界分支，则 $\xi = 0$ ；若其为连通的，则 $\xi = 1$ 。

最后，欧拉数 $e(f : \mathcal{O} \to \mathcal{B})$（我们通常简记为 $e(f)$）是与该纤维化相关的一个有理数。

底轨形连同局部不变量、边界分支不变量和欧拉数，按照以下意义完全分类塞弗特纤维化轨形。更多细节见[BS85]。

定理 3.5。 设 $f : \mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 和 $f' : \mathcal{O}' \to \mathcal{B}'$ 是塞弗特纤维化三维轨形。当且仅当 $e(f) = e(f')$ 成立，且存在一个轨形微分同胚 $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$，它保持 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 的每个锥点、角点及边界分支所关联的不变量时，存在一个保定向、保纤维化的轨形微分同胚 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ 。

还需指出，局部不变量、边界分支和欧拉数并非不受约束，而必须满足如下恒等式：

定理 3.6。 设 $f : \mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 是闭定向三维轨形的一个塞弗特纤维化，并设$e(f)$ 为其欧拉数。若 f 的标准化局部不变量在锥点处为 m_k/n_k，在第 i 个边界分支上的角点处为 m_{ij}/n_{ij}，且第 i个边界分支的边界不变量为 ξ_i，则

$$e(f) + \sum_{k=1}^{h} \frac{m_k}{n_k} + \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{h_i} \frac{m_{ij}}{2n_{ij}} + \sum_{i=1}^{b} \frac{\xi_i}{2} = 0 \quad in \quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

请注意，要使这个公式成立，角点处的局部不变量 m_{ij}/n_{ij} 必须经过标准化，也就是说，$0 \le m_{ij} < n_{ij}$。

最后，底轨形 $\mathcal{B}$ 的拓扑以及

定理 3.7. 设 $f : \mathcal{O} \to B$ 是闭可定向三维轨形的一个塞弗特纤维化。那么，当且仅当 $\mathcal{B}$ 是良轨形，或欧拉数 $e(f)$ 不为零时，$\mathcal{O}$ 具有几何结构，且其几何结构属于八种瑟斯顿几何之一。

在这种情况下，$\mathcal{O}$ 的瑟斯顿几何结构是唯一的，并由欧拉数和基空间的欧拉示性数决定，如下表所示。

	$\chi(\mathcal{B}) < 0$	$\chi(\mathcal{B}) = 0$	$\chi(\mathcal{B}) > 0$
$e(f) = 0$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$e(f) \neq 0$	$\widetilde{SL_2}$	Nil	$\mathbb{S}^3$

定理 3.7 的证明见 [Dun88]；另一个重要参考文献是 [Sco83]。特别是，对于本文所关注的几何结构 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$，我们得到如下刻画：

推论 3.8. 设 $f : \mathcal{O} \to B$ 是一个闭定向三维轨形的塞弗特纤维化。

- 当且仅当 $\mathcal{B}$ 是良平坦轨形且欧拉数 $e(f)$ 为零时，$\mathcal{O}$ 是平坦的。
- 当且仅当 $\mathcal{B}$ 是良球面轨形且欧拉数 $e(f)$ 为零时，$\mathcal{O}$ 具有几何结构，其几何结构为 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$。

3.3. 标准记号与 Conway记号。 最后，我们通过引入简洁的记号来表示塞弗特纤维化三维轨形，从而结束这些预备内容。根据推论 3.8，我们只考虑欧拉数为零的塞弗特纤维化三维轨形。因此，下面引入的记号中，我们总是省略欧拉数；隐含地，我们指的是 $e(f) = 0$。

标准记号如下。设底轨形 $\mathcal{B}$ 如方程 (1) 所示。那么，对于塞弗特纤维化 $f : \mathcal{O} \to \mathcal{B}$，我们记作：

$$\mathcal{O} = \left(\mathcal{B}; \frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_h}{n_h}; \frac{m_{11}}{n_{11}}, \dots, \frac{m_{1h_1}}{n_{1h_1}}; \dots; \frac{m_{b1}}{n_{b1}}, \dots, \frac{m_{bh_b}}{n_{bh_b}}; \xi_1, \dots, \xi_b\right) \tag{6}$$

其中所有局部不变量均采用与上文相同的记号，例如参见定理 3.6 的表述。

在 Conway记号中，我们只需使用表达式 (4) 表示底轨形，并在其下标中添加 m_k（分别为 m_{ij}），对应于锥点（分别为角点）的标签 n_k（分别为 n_{ij}）；此外，还在表示边界分支的符号 $*$ 下标中再次添加 ξ_i。因此，纤维化 (6) 表示为：

$$\mathcal{O} = \circ \cdots \circ\, n_{1m_1}, \dots, n_{hm_h} *_{\xi_1} n_{11m_{11}}, \dots, n_{1h_1m_{1h_1}} *_{\xi_2} \cdots *_{\xi_b} n_{b1m_{b1}}, \dots, n_{bh_bm_{bh_b}} \bar{\times} \dots \bar{\times} \tag{7}$$

注记 3.9。 在 [CDFHT01], 中，采用了一种更丰富的记号，也涵盖了不可定向轨形。为与 [CDFHT01], 保持一致，我们在（7）中使用符号 $\bar{\times}$ 而非 $\times$，尽管

在可定向情形下并无歧义。此外，在 [CDFHT01] 中，一般纤维为 S^1 的塞弗特轨形用圆括号括起，以便与一般纤维为区间的其他轨形区分开来。由于在可定向情形下，一般纤维总是S^1，因此我们有时会省略括号。最后，对于锥点和角点上的局部不变量，我们采用了与 [CDFHT01] 相反的符号约定。

例 3.10。 下表列出了一些例子。

$\mathcal{B}$ 标准	$\mathcal{B}$ Conway	$\mathcal{O}$ 标准	$\mathcal{O}$ Conway
$D^2(;2,2,2,2)$	$*2222$	$(D^2(;2,2,2,2);;\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{0}{2},\frac{1}{2};1)$	$(*_1 2_0 2_1 2_0 2_1)$
$S^2(6,3,2)$	632	$(S^2(6,3,2);\frac{16}{12},-\frac{13}{2},-)$	$(6_5 3_2 2_1)$
$\mathbb{R}P^2(2,2)$	$22\times$	$(\mathbb{R}P^2(2,2);02,-02)-$	$(2_0 2_0 \bar{\times})$

注记 3.11。注意，如果 $b=1$（即 $\mathcal{B}$ 只有一个边界分支），则可以省略不变量ξ_1，因为它由其他不变量决定（参见定理 3.6）。

4. Vanishing Euler number

本节讨论欧拉数为零的塞弗特纤维化轨形，特别关注几何结构 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$。更具体地说，我们将证明定理 4.2 和推论 4.7，它们提供了一种直接构造方法：给定几何可定向轨形 $\mathcal{O}$（其几何结构为 $\mathbb{R}^3$（分别为 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$））的塞弗特不变量，可以构造等距变换离散群，使其作用于 $\mathbb{R}^3$（分别为 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$），且其商空间与 $\mathcal{O}$ 微分同胚。

4.1. 对角作用。

我们先说明，具有几何结构 $\mathbb{R}^3$ 或$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ 且欧拉数为零的塞弗特轨形，可以表示为对角作用的商空间。

命题 4.1。 设 Γ 是 M的等距变换离散群，其中 $M\in\{\mathbb{S}^2,\mathbb{R}^2\}$，且 M/Γ是紧致的。此外，假设 Γ通过等距变换作用于 $\mathbb{S}^1$，并且 Γ 在 $M\times\mathbb{S}^1$ 上的对角作用保定向。

那么$(M\times\mathbb{S}^1)/\Gamma$ 是一个闭的定向拟流形，并且它具有一个以M/Γ为基底的塞弗特纤维化，该纤维化由 $M\times\mathbb{S}^1$ 的纤维为 $\{pt\}\times\mathbb{S}^1$的纤维化诱导而来。此外，该纤维化的欧拉数为零。

证明。 设 $\mathcal{O}=(M\times\mathbb{S}^1)/\Gamma$ 且 $\mathcal{B}=M/\Gamma$。我们可以唯一地定义 $f\colon\ \mathcal{O}\to\mathcal{B}$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} M\times\mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\pi_{\Delta\Gamma}} & \mathcal{O} \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M & \xrightarrow{\pi_\Gamma} & \mathcal{B} \end{array}$$

其中 $\pi_{\Delta\Gamma}$ 和 π_Γ 只是表示商映射，我们使用记号 $\Delta\Gamma$ 来提醒读者，Γ 在 $M\times\mathbb{S}^1$ 上的作用是对角的。由于 π_Γ，$\pi_{\Delta\Gamma}$是商映射，f是连续函数。

步骤 **1**： f 是塞弗特纤维化。

如果 $x \in \mathcal{B}$，那么根据定义，存在一个图表 $\varphi\colon U \to U/\Gamma_{\tilde{x}}$，其中 $\tilde{x} \in U \subset M$，并且我们可以假设 $\Gamma_{\tilde{x}}$ 是 Γ中 $\tilde{x}$ 的稳定子。如前所述，投影 $(pr_1)|_{\widetilde{U}\times\mathbb{S}^1}\colon U \times \mathbb{S}^1 \to U$诱导出一个映射 $p\colon (U \times \mathbb{S}^1)/\Gamma_{\tilde{x}} \to U/\Gamma_{\tilde{x}}$，并且有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \longrightarrow & (\widetilde{U} \times S^1)/\Gamma_{\tilde{x}} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \widetilde{U}/\Gamma_{\tilde{x}} \end{array},$$

如定义 3.1 所述。

步骤**2**： $\mathcal{O}$ 是闭的。

显然， $\mathcal{O}$ 是连通的，因为它是连通的 $M \times \mathbb{S}^1$的商空间。由于 M/Γ是紧致的，存在一个紧致的 K，包含于 M 中，使得 $\pi_\Gamma(K) = M/\Gamma$。因此， $\mathcal{O}$ 是 $K \times \mathbb{S}^1$经由 $\pi_{\Delta G}$ 的像； $K \times \mathbb{S}^1$是紧致的，故 $\mathcal{O}$ 是紧致的。

步骤 **3**： $e(f) = 0$。

我们断言，存在一个欧拉数为零的塞弗特纤维化轨形 $f'\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{B}'$，它以有限次数覆盖纤维化 f，也就是说，存在一个次数为 d 的商映射 $c\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$，并诱导底轨形之间的映射 $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ 。在这种情况下，根据 [Dun81，命题 2.1]， $e(f') = d \cdot e(f)$，因此我们将得到 $e(f) = 0$。

如果 $M = \mathbb{S}^2$，那么到第一因子的投影 $pr_1\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ 显然是欧拉数为零的塞弗特纤维化，且覆盖纤维化 f。

如果 $M = \mathbb{R}^2$，根据定理 2.6，平移子群 $T(\Gamma)$ 是 Γ 中的有限指数正规子群，因此 $\mathcal{O} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)/\Gamma$ 是 $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)/T(\Gamma)$ 关于$\Gamma/T(\Gamma)$ 作用的商空间。此外，注意到 $\mathbb{R}^2/T(\Gamma) \cong T^2$。还需证明 $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)/T(\Gamma)$ 与 $T^2 \times S^1$ 微分同胚，并且存在一个微分同胚，将 $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)/T(\Gamma)$ 的纤维化（其纤维由 $\{pt\} \times \mathbb{S}^1$ 的竖直纤维诱导）映到 $T^2 \times S^1$ 的标准竖直纤维化。

根据定理 2.6，经过仿射变换对 $T(\Gamma)$ 进行共轭（并保持对 $\mathbb{S}^1$ 的作用不变）后，我们可以假设 $T(\Gamma)$ 是标准格 $\mathbb{Z}^2 < \mathbb{R}^2$。设 a 和 b 为其标准生成元，即 $a(x,\ y) = (x+1,\ y)$ 和 $b(x,\ y) = (x,\ y+1)$。

回顾一下， Γ 的对角作用是保定向的，并记 $\alpha+$和 $\beta+$为分别与 a 和 b 在 $\mathbb{S}^1$上的作用相关联的旋转。容易验证，微分同胚 $h\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ 定义如下：

$$h(x, y, t) = (x, y, t - \alpha x - \beta y)$$

将 $\mathbb{Z}^2$ 的对角作用共轭为在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ 上的作用，该作用在 $\mathbb{R}^2$ 上是标准作用，在 $\mathbb{S}^1$上是恒等作用。事实上，

$$\begin{aligned} h \circ (a, \alpha+) \circ h^{-1}(x, y, t) &= h \circ (a, \alpha+)(x, y, t + \alpha x + \beta y) \\ &= h(x + 1, y, t + \alpha(x + 1) + \beta y) \\ &= (x + 1, y, t) = (a(x, y), t) = (a, \mathrm{id}_{S^1})(x, y, t) \ , \end{aligned}$$

类似地， $h \circ (b, \ \beta+) \circ h^{-1} = (b, \ \mathrm{id}_{S^1})$。证明至此结束。 □

其次，我们要证明，每个欧拉数为零且闭基轨形为 M/Γ 、其中有 $M = \mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{S}^2$ 的塞弗特纤维化，都可以通过命题 4.1 中的构造得到。回想一下，在这种情况下， $\mathcal{B}$ 的基本群同构于 Γ。

定理 4.2。设 $f: \ \mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 是一个闭可定向三维轨形的塞弗特纤维化，满足 $e(f) = 0$，且 $\mathcal{B}$ 是具有几何结构 $M \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2\}$ 的良轨形。那么存在一个表示 $\psi: \ \pi_1(\mathcal{B}) \to$ 等距变换群$(\mathbb{S}^1)$，使得$(M \times \mathbb{S}^1)/\pi_1(\mathcal{B})$ （其中 $\pi_1(\mathcal{B})$ 以对角方式作用），赋予由 $M \times \mathbb{S}^1$ 的圆周分划 $\{pt\} \times \mathbb{S}^1$ 诱导的塞弗特纤维化后，与纤维化 $f: \ \mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 等价。

证明。 我们将再次把证明分成几个步骤。

步骤 ***1*:** 构造 ψ。

定义 $\psi: \ \pi_1(\mathcal{B}) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)$。我们将使用命题 2.9 中描述的基本群表示。我们将为每个生成元定义 ψ，并验证这些关系均成立。对于 $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)$ 的元素，我们将采用第 2.2 节末尾引入的记号。

将与符号 $\circ$ 相关的生成元 x_s 和 y_s 映到 $0+$ （即恒等元），并将与符号 $\times$ 相关的每个生成元 z_r 映到 $0-$。将每个对应于局部不变量为 m_k/n_k 的锥点的生成元 γ_k 映到 $(-m_k/n_k)+$。关系 $\psi(\gamma_k)^{n_k} = \mathrm{id}$ 显然成立。

现在考虑底流形的边界分支，即符号 $*$。我们使用与命题 2.9 中相同的生成元记号，以及第 3.3 节中的局部不变量记号，定义 $\psi(\rho_{i0}) = 0-$ 和 $\psi(\rho_{i,\ j-1} \cdot \rho_{ij}) = (-m_{ij}/n_{ij})+$，其中 $j = 1, \ldots\ldots, \ h_i$。这样便对所有 i 唯一定义了 $\psi(\rho_{ij})$。最后，定义 $\psi(\delta_i) = (-(\sigma_i + \xi_i)/2)+$，其中令

$$\sigma_i := \sum_{j=1}^{h_i} \frac{m_{ij}}{n_{ij}} \ .$$

关系 $\psi(\rho_{ij})^2 = 1$ 显然成立，因为 $\psi(\rho_{ij})$ 是一个反射，而且显然也有$\psi(\rho_{i,j-1} \cdot \rho_{ij})^{n_{ij}} = 1$，其中 $j = 1, \ldots, h_i$。为检验关系 $\psi(\delta_i) \cdot \psi(\rho_{ih_i}) \cdot \psi(\delta_i^{-1}) \cdot \psi(\rho_{i0}) = 1$，注意到 $\rho_{ih_i} = \rho_{i0}^2 \cdot \rho_{i1}^2 \cdot \cdots \cdot \rho_{i,h_i-1}^2 \cdot \rho_{ih_i} = \rho_{i0} \cdot (\rho_{i0} \cdot \rho_{i1}) \ldots (\rho_{i,h_i-1} \cdot \rho_{i,h_i})$，因此（使用

注 2.8 来计算这些复合）：

$$\psi(\rho_{ih_i}) = (0-)\cdot\left(-\frac{m_{i1}}{n_{i1}}+\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{m_{ih_i}}{n_{ih_i}}+\right) = (0-)\cdot(-\sigma_i+) = \sigma_i - \ .$$

Then

$$\begin{aligned}\psi(\delta_i)\cdot\psi(\rho_{ih_i})\cdot\psi(\delta_i^{-1})\cdot\psi(\rho_{i0}) &= \left(-\frac{\sigma_i+\xi_i}{2}+\right)\cdot(\sigma_i-)\cdot\left(\frac{\sigma_i+\xi_i}{2}+\right)\cdot(0-)\\ &= \left(-\frac{\sigma_i+\xi_i}{2}+\sigma_i-\frac{\sigma_i+\xi_i}{2}\right)+ = -\xi_i+ = 0+\end{aligned}$$

因为 ξ_i 是一个整数。

最后，尚需检验由 (5) 导出的全局关系成立。这可直接由以下观察得出： $[\psi(x_s)\ \psi(y_s))$ $] = \psi(z_r)^2 = 1$ ，以及定理 3.6。

根据构造，由表示 ψ 定义的对角作用是保定向的。定义 $\mathcal{O}' = (M\times\mathbb{S}^1)/\pi_1(\mathcal{B})$，它是一个连通的可定向轨形。

步骤***2*：** $\mathcal{O}'$ 是一个闭的塞弗特纤维化轨形，其 $\mathcal{B}$ 为基空间，而 $e=0$。利用命题 4.1 和 $\Gamma=\pi_1(\mathcal{B})$，可得 $\mathcal{O}'$ 在 $M/\Gamma\cong\mathcal{B}$上具有一个欧拉数为零的塞弗特纤维化。该纤维化由 $M\times\mathbb{S}^1$的圆周分划所诱导。将此纤维化记为 $f'\colon \mathcal{O}'\to B$ 。我们将证明 $\mathcal{O}'$ 与 $\mathcal{O}$ 之间存在保定向且保纤维化的微分同胚，从而完成证明。根据定理 3.5，只需检验 $\mathcal{O}'$ 和 $\mathcal{O}$ 的所有塞弗特不变量均相同。

步骤***3*：** 只有一个边界分支的情形。
根据 ψ的构造， f' 在 $\mathcal{B}$ 的锥点（或角点）上的局部不变量与纤维化 f的局部不变量相同，并且根据步骤2，纤维化 f'的欧拉数为 0。如果 $\mathcal{B}$具有唯一的边界分支，则边界不变量由定理 3.6 确定，因此在这种情况下，所有不变量都会自动匹配。

步骤 ***4*：** 多个边界分支的情形。
根据表 1，具有多个边界不变量的唯一情形发生在 $\mathcal{B}=**=S^1\times I$中。其基本群具有如下群表示：

$$\begin{aligned}\pi_1(**) =&\langle\rho_1,\delta_1,\rho_1,\delta_2\,|\,\rho_1^2=\rho_2^2=[\rho_1,\delta_1]=[\rho_2,\delta_2]=\delta_1\cdot\delta_2=1\rangle\\ \cong&\langle\rho_1,\delta_1,\rho_2\,|\,\rho_1^2=\rho_2^2=[\rho_1,\delta_1]=[\rho_2,\delta_1]=1\rangle\ ,\end{aligned}$$

因此它同构于（D_2*D_2） $\times\mathbb{Z}$。它可以实现为（见注 2.12）由两个反射 $x\mapsto Ax$ 和 $x\mapsto Ax+$ 生成的壁纸群，这两个反射作用于平行直线（1，0）上，其中 $A=$diag$(-1,\ 1)$，并且有一个平移 $x\mapsto x+$(0，1)。回忆 $\psi(\rho_1)\ =0-$，作用（ρ_1，$\psi(\rho_1)$)的不动点集为 $L=\{0\}\times\mathbb{R}\times\{(\pm1,\ 0)\}$；其在商空间$\mathcal{O}'$ 中的像包含于奇异轨迹中，并且包含于 |$\mathcal{B}$|的一个边界分支的原像中。

如果 $\mathcal{O}$ 的边界不变量 ξ_1 等于 0，那么根据构造， $\psi(\delta_1)\ =\ 0+$，因此 $(\delta_1,\psi(\delta_1))$ 保持 L 的每个连通分支不变。这意味着 L 在 $\mathcal{O}'$ 中的像

有两个连通分支，因此根据注 3.4，不变量 ξ_1' 再次等于 0。类似地，如果 $\xi_1 = 1$，那么 $\psi(\delta_1) = (1/2)+$，因此 $(\delta_1, \psi(\delta_1))$ 的作用会交换这两个连通分支。在这种情况下，L 在 $\mathcal{O}'$ 中的像是连通的，因此 $\xi_1' = \xi_1 = 1$。

我们也可以对第二个边界不变量 ξ_2 重复同样的论证；不过，由于根据定理 3.6，它由其他所有不变量决定，因此没有必要这样做。这表明 $f\colon\ \mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 和 $f'\colon\ \mathcal{O}' \to \mathcal{B}$ 具有相同的 Seifert不变量，从而完成证明。□

备注 4.3. 我们指出，定理 4.2 证明中的构造部分也适用于 $M = \mathbb{H}^2$。然而，证明的第二部分很大程度上依赖于这样一个事实：平坦和球面闭二维轨形至多只有一个边界分支，只有一个例外情况，而我们已在步骤 4 中对其进行了处理。对于双曲轨形，边界分支可能更多，因此情况也更为复杂。

4.2. 水平部分和平移。 在命题 4.1 中，我们考察了通过对 $M \times \mathbb{S}^1$ 施加 M 的等距变换离散群的对角作用所得到的商空间，其中该群的商空间是紧致的；而在定理 4.2 中，我们证明了所有以平坦或球面轨形为基底且欧拉数为零的塞弗特轨形，均可由此方式得到。然而，在本文中，我们旨在研究 $M \times \mathbb{R}$ 的商空间。因此，我们需要一些额外的结果，以确保只考察上述 $M \times \mathbb{S}^1$ 的商空间并不会限制一般性。

定义 4.4。 设 $M \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2\}$，且 Γ 是 Isom(M) $\times$ Isom($\mathbb{R}$) <Isom($M \times \mathbb{R}$) 的子群。Γ 的水平部分 是群

$$\Gamma_H = \{g \in \mathrm{Isom}(M) : (g, h) \in \Gamma \text{ for some } h \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R})\}\ .$$

我们称 Γ含有垂直平移，如果它包含一个非平凡元素，形式为 (id_M，$c+$)，其中 $c+ \in$ Isom($\mathbb{R}$)。

下面的命题应与命题 4.1 进行比较；这里讨论的是 Isom(M) $\times$Isom($\mathbb{R}$) 的子群，而不是 Isom(M) $\times$Isom($\mathbb{S}^1$) 的子群。

命题 4.5。 设 Γ是$\mathrm{Isom}(M) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$的离散子群，其中 $M \in \{S^2, \mathbb{R}^2\}$，且 $(M \times \mathbb{R})/\Gamma$ 是紧致的。进一步假设 Γ 保定向且含有垂直平移。那么 Γ_H 是 M的等距变换离散群，M/Γ_H 是紧致的，并且 $(M \times \mathbb{R})/\Gamma$ 具有一个塞弗特纤维化，其基底为 M/Γ_H，该纤维化由 $M \times \mathbb{R}$ 的纤维化诱导，纤维为 $\{pt\} \times \mathbb{R}$。此外，该纤维化的欧拉数为零。

证明。 我们将证明分成两部分。

步骤 ***1***： Γ_H是一个离散群。

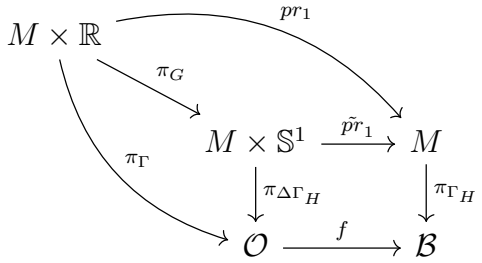
设 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Γ_H 中的一个序列，使得 $g_n \to g \in$ Isom(M)。由于 Γ 允许垂直平移，它包含一个形如 (id_M，$c+$) 的元素，其中 $c > 0$。因此，存在 Γ 中的一个序列 $h_n =$ (g_n，v_n+)，使得 $v_n \in [0, c]$。在抽取子序列后，我们可以假设 $h_n \to$ (g，$v+$)。由于 Γ 是离散的，h_n 最终为常数，因此 g_n 也是如此。

步骤*2*： 化归为 $M \times \mathbb{S}^1$ 的商空间。
设 $\mathcal{O} = (M \times \mathbb{R})/\Gamma$ 和 $\mathcal{B} = M/\Gamma_H$。与命题 4.1 中一样，我们可以唯一地定义f： $\mathcal{O} \to \mathcal{B}$，使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_\Gamma} & \mathcal{O} \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M & \xrightarrow{\pi_{\Gamma_H}} & \mathcal{B} \end{array}$$

由于 π_G， $\pi_{\Delta G}$是商映射， f是连续函数，且 $\mathcal{B} = f(\mathcal{O})$ 是紧致的。

令 $G = \{(\mathrm{id}_M,\ h) \in \Gamma\}$。由离散性可知， G 由单个元素生成；通过对 $\mathbb{R}$ 因子施加仿射变换，我们可以假设该元素（id_M， $1+$）。此外，注意到 G是 $\mathrm{Isom}(M) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 中的正规子群。给定 $g \in \Gamma_H$，根据定义，存在$h \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$，使得 $(g,\ h) \in \Gamma$。于是，我们可以将 $\psi(g)$ 定义为由 h 诱导的 $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)$ 中的元素。容易验证，这一定义与 h 的选择无关，因此定义了一个同态 ψ： $\Gamma_H \to \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)$。由于 G 是 Γ 的正规子群，我们可以将图分解如下



其中 Γ_H 通过同态 ψ 作用于 $\mathbb{S}^1$，并且 Γ/G 已与$\Delta\Gamma_H$等同。因此，我们可以使用命题 4.1 完成证明。□

注记 4.6。 在命题 4.5 中， Γ 具有垂直平移这一假设至关重要。事实上，我们断言，若 $\Gamma < \mathrm{Isom}(M) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$是一个离散的保定向子群，且垂直直线划分在商空间中诱导出一个塞弗特纤维化，那么Γ 具有垂直平移。

为说明这一点，根据塞弗特纤维化的定义，每条垂直直线 $\{pt\} \times \mathbb{R}$ 在商空间中的像都同胚于 S^1 或 I。特别地，商映射限制在任意一条垂直直线上时都不是单射。这意味着，对于每个点 $p \in M$，都存在 $(g, v) \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$，使得 $g(p) = p$。于是

$$M = \bigcup_{(g,v)\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}} Fix(g).$$

注意到 Γ是第二可数空间 $\mathrm{Isom}(M) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 的离散子集，因此它是可数的。由贝尔纲定理，存在 $(g,\ v) \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$，使得 $Fix(g)$ 在 M 中有非空内部。由于等距变换由其在一点处的微分唯一确定， $g = \mathrm{id}_M$。因此，$(g = \mathrm{id}_M,\ v)$ 是一个垂直平移。

推论 4.7。 设 $f\colon\ \mathcal{O}\to\mathcal{B}$ 是闭定向三维轨形上的一个塞弗特纤维化，满足$e(f)=0$，且 $\mathcal{B}$ 是具有几何结构 $M\in\{\mathbb{R}^2,\mathbb{S}^2\}$ 的良轨形。那么存在一个离散子群 $\Gamma<\mathrm{Isom}(M)\times\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$，它包含一个垂直平移，并且 $(M\times\mathbb{R})/\Gamma$ 配备由 $M\times\mathbb{R}$ 中直线的划分所诱导的塞弗特纤维化后，与纤维化 $f\colon\ \mathcal{O}\to\mathcal{B}$ 等价。特别地，$\mathcal{O}$ 具有几何结构 $M\times\mathbb{R}$，且 $\mathcal{B}$ 与 M/Γ_H 微分同胚。

证明。 考虑显然的同态 $q\colon\ \mathrm{Isom}(\mathbb{R})\to\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)$，并定义

$$\Gamma=\{(g,h)\in\mathrm{Isom}(M)\times\mathrm{Isom}(\mathbb{R}):g\in\pi_1(\mathcal{B})\text{ and }q(h)=\psi(g)\}$$

其中，ψ 的定义同定理 4.2。

由构造可知，Γ 是 $\mathrm{Isom}(M)\times\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 中 $\{(g,\psi(g))\in\pi_1(\mathcal{B})\times\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)\}$ 的原像，它是保定向的，并且包含垂直平移 $(\mathrm{id}_M,1+)$。由于 $\pi_1(\mathcal{B})$ 是离散的，因此它也是离散的。根据命题 4.5，$(M\times\mathbb{R})/\Gamma$ 具有由 $M\times\mathbb{R}$ 的直线 $\{pt\}\times\mathbb{R}$ 中的划分诱导的塞弗特纤维化。最后注意到，显然同态 $\mathrm{Isom}(M)\times\mathrm{Isom}(\mathbb{R})\to\mathrm{Isom}(M)\times\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)$ 的核 K 由 $(\mathrm{id}_M,1+)$ 生成，是 Γ 的正规子群，并且 Γ/K 同构于 $\{(g,\psi(g))\in\pi_1(\mathcal{B})\times\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^1)\}$。因此，$(M\times\mathbb{R})/\Gamma$ 与 $(M\times\mathbb{S}^1)/\pi_1(\mathcal{B})$ 微分同胚，且该微分同胚保定向并保纤维化，这等价于纤维化 $f\colon\ \mathcal{O}\to\mathcal{B}$。□

5. Flat Seifert 3-Orbifolds

本节的主要结果是引言中的定理 A，下面用 Conway记号重述如下。

定理 A. 闭可定向平坦塞弗特三维轨形在等价意义下具有唯一的塞弗特纤维化，但以下表格中列出的例外情况除外：

$(2_0 2_0 2_0 2_0)$	$(*_0 *_0)$	
$(2_0 2_0 2_1 2_1)$	$(*_1 *_1)$	$(*_0 \bar{\times})$
$(2_1 2_1 2_1 2_1)$	$(\bar{\times}\,\bar{\times})$	
$(2_0 2_0 *_0)$	$(*_0 2_1 2_1 2_1 2_1)$	
$(2_0 2_1 *_1)$	$(2_1\ *_0\ 2_1 2_1)$	
$(2_1 2_1 *_0)$	$(2_0 2_0 \bar{\times})$	
$(2_0\ *_0\ 2_0 2_0)$	$(*_1 2_0 2_0 2_1 2_1)$	

表中的两个塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们出现在同一行。特别是，七个平坦三维轨形存在多个不等价纤维化；其中六个恰有两种不等价纤维化，另一个则有三种。

5.1. 点群。设 Γ 是一个晶体群。回顾一下，其点群 $\rho(\Gamma)$ 已在定义2.5中定义，并且根据定理 2.6，它是离散的。

定义5.1。给定一个晶体群 Γ <Isom($\mathbb{R}^{n+1}$)，其点轨形是球面轨形 $\mathbb{S}^n/\rho(\Gamma)$。

稍微滥用一下记号，若 $\mathcal{O} \cong \mathbb{R}^{n+1}/\Gamma$ 是一个良平坦轨形，则我们将 $\mathcal{O}$ 的点轨形定义为 Γ 的点轨形；这在微分同胚意义下是良定义的。

定义 5.2. 给定一个晶体群 Γ <Isom($\mathbb{R}^{n+1}$)，若 Γ 保持一个方向 $[v] \in \mathbb{R}P^n$ （其中 $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$），即 Γ 中的每个元素都将一条平行于张成空间 v 的直线映到一条平行于张成空间 v 的直线上，则称其保持该方向。

这等价于条件： Γ 保持 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中由平行于张成空间 v 的直线构成的划分。

注 5.3. 方向 $[v]$ 被 Γ 保持，当且仅当 v 是 $\rho(\Gamma)$ 中所有元素的特征向量。

现在我们聚焦于三维情形。若一个方向 $[v] \in \mathbb{R}P^2$ 被空间群 $\Gamma <$ Isom($\mathbb{R}^3$) 保持，则 Γ 包含在子群 Isom($v^\perp$) ×Isom(张成空间(v)) $<$ Isom($\mathbb{R}^3$) 中。因此，我们将在此情境下扩展定义 4.4，定义如下

$$\Gamma_H^{[v]} := \{g \in \mathrm{Isom}(v^\perp) : (g, h) \in \Gamma \text{ for some } h \in \mathrm{Isom}(\mathrm{Span}(v))\} .$$

显然， $\Gamma_H^{[v]}$ 可视为等距变换群 Isom($\mathbb{R}^2$) 的一个子群，且该子群在共轭意义下是良定义的。

在此情形下，命题 4.5 告诉我们，若 Γ 含有一个平行于 v 的平移，则 $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 具有由 $\mathbb{R}^3$ 按平行于张成空间 Span(v) 的直线划分所诱导的塞弗特纤维化，其基底为 $v^\perp/\Gamma_H^{[v]}$ 。以下结果说明逆命题也成立，即所有闭平坦三维轨形上的塞弗特纤维化都可由此构造得到。

命题 5.4. 设 Γ 为一个空间群，且 f : $\mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathcal{B}$ 为一个塞弗特纤维化。则 f 等价于由 $\mathbb{R}^3$ 按平行直线纤维化所诱导的纤维化，其中这些直线的方向 $[v]$ 在群 Γ 作用下保持不变，且 Γ 含有一个平行于 v 的非平凡平移。此外， $\mathcal{B}$ 与 $v^\perp/\Gamma_H^{[v]}$ 微分同胚。

证明。 根据定理 3.7， $\mathcal{B}$ 是一个平坦轨形，且 f 的欧拉数为零。根据推论 4.7，存在一个离散子群 $\Gamma' <$ Isom($\mathbb{R}^2$)×Isom($\mathbb{R}$) $<$ Isom($\mathbb{R}^3$)，它包含垂直平移，使得 $\mathbb{R}^3/\Gamma$与($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$) /$\Gamma'$之间存在保定向且保纤维化的微分同胚；其中纤维化由 $\mathbb{R}^3$ 的垂直直线划分诱导。

根据定理 2.6， Γ 和 Γ' 在仿射变换 φ 下共轭： $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$因此， φ^{-1} 将 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$中在 Γ'作用下保持不变的垂直直线划分映为 $\mathbb{R}^3$ 中在 Γ作用下保持不变的平行直线分划。证明完毕。 □

在更一般的背景下，采用不同方法也得到了一个非常相似的结果，见 [RT10，定理 7]。

在 [Sco83] 中，已证明：如果空间群 Γ 具有一个不变方向 $[v]$，那么它还具有另一个不变方向 $[v']$（可能不同），使得 Γ 具有一个非平凡的

平行于 v'的平移。因此，如果闭平坦轨形 $\mathbb{R}^3/\Gamma$不是塞弗特纤维化的，那么它不具有任何不变方向。此外， Γ含有一个三阶元素，见 [Sco83，引理 4.2]。还需注意，如果 Γ 含有一个三阶元素，那么该元素会置换一个等边三角形的顶点，因此其重心是不动点。

由于对于平坦流形， Γ 在 $\mathbb{R}^3$上自由作用，因此可立即得到以下结论：

推论 5.5. 所有闭平坦三维流形都是塞弗特纤维化流形。

注 5.6. 平坦轨形并不满足类似的结论。事实上，点轨形为 432 和 332 的轨形恰好就是不能进行塞弗特纤维化的轨形。所有平坦轨形的列表及简要描述见 [Dun81]。图 13 给出了一个不能进行塞弗特纤维化的闭平坦三维轨形示例。

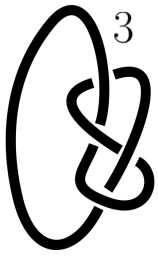


FIGURE 13. 一个不能进行塞弗特纤维化的闭平坦三维轨形示例。其底层拓扑空间为 S^3，奇异轨迹是奇异指数为 3 的八字结，其点轨形为 332，相关空间群为 $P2_13$ （采用赫尔曼–莫金记号）。

在证明定理 A 的过程中，我们将对含有多个不变方向的空间群的点群进行分类。这里先列出一份范围较窄的候选清单。

命题 5.7。 设 $\Gamma <$等距变换群$(\mathbb{R}^3)$ 是一个空间群。

- 若 Γ 在 $\mathbb{R}P^2$中具有多个不变方向，则 $\mathbb{S}^2/\rho(\Gamma)$ 与1、 ×、 ∗、22、 2∗、 ∗22、222、 ∗222、 2× 或 2∗2微分同胚。
- 此外，若 Γ 是保定向的，则 $\mathbb{S}^2/\rho(\Gamma)$ 与 1、22 或 222微分同胚。

这里的**“1”**仅指 S^2，也就是说， $\rho(\Gamma)$ 是平凡群。

证明。 首先，我们断言 $\rho(\Gamma)$ 的所有元素的阶都不超过 2。根据假设，存在两个线性无关的特征向量 $v, w \in \mathbb{R}^3$ ，它们是 $\rho(\Gamma)$ 中所有元素的特征向量。固定$g \in \rho(\Gamma)$。由于 g 是正交的，因此存在 $\lambda, \mu \in \{\pm 1\}$ 使得

$$g(v) = \lambda v \qquad g(w) = \mu w \ .$$

于是 $g^2(v) = \lambda g(v) = \lambda^2 v = v$ 并且 $g^2(w) = w$。因此， g^2 在一个平面上是恒等映射。由于它是一个正交线性映射，并且是保定向的， $g^2 =$id。

因此， $\mathbb{S}^2/\rho(\Gamma)$ 的所有锥和角点的奇异指标均为 2。直接检查表 1 即可得出结论。□

备注 5.8. 命题 5.7 可以通过从第一项的列表中删去 $2\times$ 和 $2*2$ 来进一步细化，但这对我们的研究目的而言并无必要。

5.2. **平坦可定向轨形的多重纤维化**。 根据命题 5.7，要研究商空间具有多个纤维化的保定向空间群 Γ ，只需考虑那些在 $\{1, 22, 222\}$中具有点轨形的空间群。

以下命题将有助于进一步简化这个问题。

命题 5.9. 设 Γ 是一个空间群， G 是一个壁纸群，且 $f : \mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathbb{R}^2/G$是一个塞弗特纤维化。若 G 具有两个线性无关的平移，且 G 保持它们的方向，则 Γ 具有三个线性无关的平移，并保持这三个方向。

证明。按照推论 4.7 中的方法，从塞弗特纤维化 f 出发构造空间群 Γ' 。根据定理 2.6，存在一个仿射映射，将 Γ 共轭到 Γ'。因此，只需证明关于 Γ' 的陈述即可。

设 a， $b \in G <$ Isom($\mathbb{R}^2$) 是两个线性无关平移。根据定理 4.2 的构造，存在元素 (a, $\alpha+$)，(b, $\beta+$)，使得 $\in \Gamma' \subseteq$ Isom($\mathbb{R}^2$) $\times$ Isom($\mathbb{R}$)，其中α， $\beta \in \mathbb{Q}$。于是存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $m \in \mathbb{Z}$ ，使得

$$(a, \alpha+)^n = (a^n, n\alpha+) = (a^n, m+) \ .$$

由于按构造， Γ' 有垂直平移 ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$， $1+$)，所以 (a^n， $0+$) 是 Γ' 的一个元素。同理，($b^{n'}$， $0+$) 属于 $\in \Gamma'$。显然，三个平移 ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$， $1+$)，(a^n， $0+$) 和 ($b^{n'}$， $0+$) 线性无关。

现在我们将证明，相应的三个方向在 Γ' 下保持不变。我们已经知道，垂直方向在群 Γ' 下保持不变。因此，令 $[v]$ 为由另外两个平移之一所确定的方向，并令 L 为具有此方向的一条直线，它的形式为 $L = L_0 \times \{z_0\}$ ，其中 L_0 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线，且 $z_0 \in \mathbb{R}$。我们要证明，对于所有的 $(g, h) \in \Gamma'$，直线 $(g, h)(L)$ 的方向为 $[v]$。但是 $(g, h)(L) = g(L_0) \times \{h(z_0)\}$。根据假设， L_0 的方向在 G 下保持不变，因此 $g(L_0)$ 具有 L_0 的方向，进而 $(g, h)(L)$ 的方向为 $[v]$。□

Po整轨形微分同胚于 1。 首先，我们来证明以下引理 .

引理 5.10。 一个闭可定向平坦塞弗特三维轨形的点群是平凡群，当且仅当它与 T^3 微分同胚。此外， T^3 的任意塞弗特纤维化都等价于到第一因子的投影 pr_1： $T^3 = T^2 \times S^1 \to T^2$。

证明。 设 Γ 是一个满足 $\rho(\Gamma) = \{1\}$ 的空间群。那么 $\Gamma = T(\Gamma)$ 仅由平移组成，根据定理 2.6，它等价于 $\mathbb{Z}^3$。这表明 $\mathbb{R}^3/\Gamma \cong T^3$。反过来，如果

$\mathbb{R}^3/\Gamma$ 与 T^3 微分同胚，根据定理 2.6 Γ 仿射共轭于平移的标准子群 $\mathbb{Z}^3$，因此其点群是平凡的。

第二部分由命题 5.4 得出。事实上，若 $f\colon\ T^3 \to \mathcal{B}$ 是一种塞弗特纤维化，那么我们可以假设 $\mathcal{B} = v^{\perp}/\Gamma_H^{[v]}$，其中 v。这意味着 $\Gamma_H^{[v]}$ 是一个仅由平移构成的壁纸群，因此等价于平移群 $\mathbb{Z}^2$。因此 $\mathcal{B} \cong T^2$，证明至此完成。□

点轨形微分同胚于 22。接下来，我们证明以下引理 .

引理 5.11。闭可定向平坦塞弗特三维轨形的点轨形微分同胚于22，当且仅当它属于下表。

$(2_0 2_0 2_0 2_0)$	$(*_0 *_0)$	
$(2_0 2_0 2_1 2_1)$	$(*_1 *_1)$	$(*_0 \bar{\times})$
$(2_1 2_1 2_1 2_1)$	$(\bar{\times}\,\bar{\times})$	

两个塞弗特纤维化轨形保向微分同胚，当且仅当它们位于表格的同一行。

证明。我们将证明分为四个步骤。

步骤 ***1*：** 底轨形必须是2222、$**$、$*\times$ 或 $\times\times$。

若 $f\colon\ \mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathcal{B}$ 是 Γ 空间群的塞弗特纤维化，根据命题 5.4，我们可以假设 $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[v]}$，其中 $[v]$ 是 Γ的不变方向。现在，若 $\mathbb{S}^2/\rho(\Gamma) = 22$，则$\rho(\Gamma)$在经过线性映射共轭后，可以取为群

$$\rho(\Gamma) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

不变方向 是 $\mathbb{R}P^2$ 中以下集合的等价类

$$(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \cup \{(0, 0, \pm 1)\} \subseteq \mathbb{S}^2.$$

因此有两种可能：

(1) 若不变方向为 $[e_3]$，则得到

$$\rho(\Gamma_H^{[e_3]}) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

在这种情况下，$\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_3]}$ 是可定向的，至少有一个锥点，且每个锥点的奇异指标均为 2。根据表 1，$\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_3]}$ 与 2222 型轨形微分同胚。

(2) 若不变方向为 $[v]$，其中 $v \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$，则得到

$$\rho(\Gamma_H^{[v]}) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \cong D_2.$$

在这种情况下， $\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[v]}$ 是不可定向的，且没有任何锥或角点。根据表 1， $\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[v]}$ 与以下轨形之一微分同胚： $**$、 $*\times$ 或 $\times\times$。

步骤*2*： $\mathcal{O}$ 的纤维化的所有可能的塞弗特不变量都列在表中。

利用欧拉数为零这一事实以及定理3.6中的恒等式进行直接计算，可验证陈述中列出了所有可能的塞弗特纤维化。

步骤 *3*： 轨形$(2_0 2_0 2_0 2_0)$、$(2_0 2_0 2_1 2_1)$ 和$(2_1 2_1 2_1 2_1)$ 并不同胚。

底轨形中每个具有塞弗特不变量 2_0 的锥点都会产生一个奇异纤维，而与不变量为 2_1 的锥点相关联的纤维则不是奇异纤维。通过计算奇异集的分支数，我们可以区分这三个轨形。

步骤 *4*： 同一行中的塞弗特轨形彼此保定向微分同胚。

我们首先断言，底空间为命题中表格所列的 $\mathcal{B} \in \{**, *\times, \times\times\}$ 的塞弗特纤维化轨形，也允许一种底空间为 2222 型轨形的塞弗特纤维化。

为此，设 Γ是一个空间群， $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 是这些塞弗特纤维化轨形之一，且f ： $\mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathcal{B}$ 是相应的塞弗特纤维化。与上文一样，在经过正交映射共轭后，不妨设 ρ(Γ) 由矩阵 diag$(-1, -1, 1)$生成，因为该点轨形与 22 微分同胚。

由于 $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2/G$ 与 $**$， $*\times$ 或 $\times\times$微分同胚，可以证明（见注 2.12），在这三种情形中， G 都有两个线性无关的平移，其方向在 G作用下保持不变。根据命题 5.9，群 Γ 有三个线性无关的平移，其方向在 Γ作用下保持不变。因此，根据命题 4.5， $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 允许由这些方向诱导的塞弗特纤维化。根据步骤 1，所有不变方向都位于同一个平面内，唯有方向 $[e_3]$例外。如步骤 1 所示，由方向$[e_3]$ 诱导的底轨形与 $\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_3]} \cong$ 2222微分同胚。

最后，我们可以通过考察奇异轨迹的连通分支数来确定正确的平坦轨形。

Orbifold $\mathcal{O}$	$(*_0 *_0)$	$(*_1 *_1)$	$(*_0 \bar{\times})$	$(\bar{\times}\,\bar{\times})$
Components of $\Sigma_{\mathcal{O}}$	4	2	2	0

证明至此结束。 □

点或 双叶流形与 222微分同胚。 最后，让我们考虑剩余的情况 e.

引理 5.12。 闭可定向平坦塞弗特三维轨形的点轨形与222微分同胚，当且仅当它出现在下列某个表中：

$(2_02_0*_0)$	$(*_02_12_12_12_1)$
$(2_02_1*_1)$	$(2_1\ *_0\ 2_12_1)$
$(2_12_1*_0)$	$(2_02_0\bar{\times})$
$(2_0\ *_0\ 2_02_0)$	$(*_12_02_02_12_1)$

$(*_02_02_02_02_0)$
$(*_12_02_12_02_1)$
$(2_1\ *_1\ 2_02_0)$
$(2_0\ *_1\ 2_12_1)$
$(2_12_1\bar{\times})$

两个塞弗特纤维化轨形保向微分同胚，当且仅当它们位于左侧表格的同一行。

证明。再次，我们将证明分为四个步骤。

步骤 ***1*：** 底轨形必须是 $*2222$、$2*22$、$22*$ 或 $22\times$。

若 $f:\ \mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathcal{B}$ 是 Γ 一个空间群的塞弗特纤维化，根据命题 5.4，我们可以假设 $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[v]}$，其中 $[v]$ 是 Γ的不变方向。现在，若 $\mathbb{S}^2/\rho(\Gamma) = 222$，则 $\rho(\Gamma)$可在一个线性映射的共轭下选为群

$$\rho(\Gamma) = \langle \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle$$

且不变方向为 $\{[e_1],[e_2],[e_3]\} \subseteq \mathbb{R}P^2$，其中 $e_1,\ e_2,\ e_3$是 $\mathbb{R}^3$的标准基。因此，对于 $v = e_1,\ e_2,\ e_3$，我们有：

$$\rho(\Gamma_H^{[v]}) = \langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle \cong D_4.$$

这意味着 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{[v]}$ 是不可定向的，至少有一个锥点或角点，并且每个锥点或角点的奇异指标均等于 2。根据表 1，$\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[v]}$ 与以下某个轨形微分同胚：

$$*2222 \quad 2*22 \quad 22* \quad 22\times$$

步骤***2*：** 表中列出了 $\mathcal{O}$ 的纤维化的所有可能的塞弗特不变量。

与前一种情形一样，利用定理 3.6 可以验证，陈述中列出的那些是所有以步骤 1 中所述底轨形为底的可能的塞弗特纤维化。

步骤 ***3*：** 前 *3* 行中的塞弗特轨形彼此保向微分同胚。我们首先证明以下三个等价关系

$$(2_02_0*_0) \cong (*_02_12_12_12_1) \qquad (2_02_1*_1) \cong (2_1\ *_0\ 2_12_1) \qquad (2_12_1*_0) \cong (2_02_0\bar{\times})$$

通过为每一对构造一个空间群 Γ，使其具有两个不变方向，从而诱导出正确的纤维化。下一步，我们将用类似的方法证明 $(*_02_02_02_12_1)$ 与 $(2_0\ *_0\ 2_02_0)$ 之间存在微分同胚。

构造空间群 Γ 的主要思路是具体应用推论 4.7 中的构造。设

$$G = \langle \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \rangle < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$$

是由两个旋转生成的壁纸群，旋转的不动点分别为 $(0,\ 1/4)$ 和 $(1/2,\ 1/4)$，并包含关于直线 $y = 0$ 的反射。图14展示了该群作用的一个基本域，且 $\mathbb{R}^2/G$ 与 $22*$ 微分同胚。对于固定的 $a,\ b \in \{0, 1\}$，我们可以应用

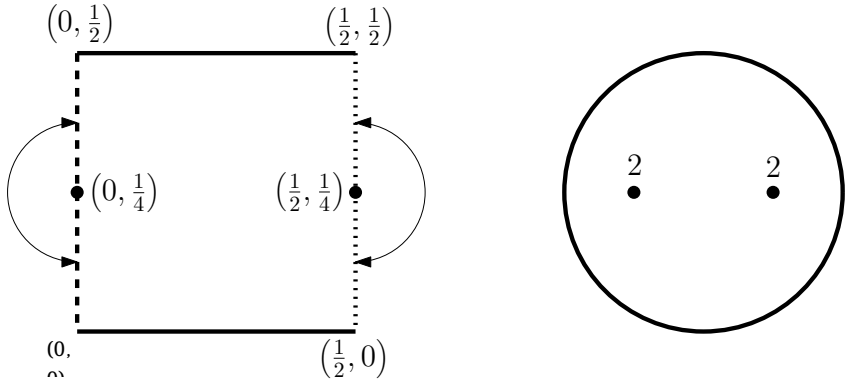


FIGURE 14. 左侧为该作用的一个基本域，右侧为商空间 $22*$。

推论 4.7 中的构造应用于纤维化 $(2_a 2_b *)$，其中边界不变量由前两者确定。由此得到空间群:

$$\Gamma = \langle \left(A, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ a/2 \end{bmatrix} \right), \left(A, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ b/2 \end{bmatrix} \right), \left(B, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rangle < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R}) \ ,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ .$$

根据构造， Γ 具有垂直平移， $[e_3]$ 是不变方向， $G = \Gamma_H^{[e_3]}$ 且由平行于 $[e_3]$ 的直线划分所诱导的纤维化 f_3： $\mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathbb{R}^2/G$ 等价于纤维化（$2_a 2_b *$）。

容易看出， G 在方向 $[e_1], [e_2] \in \mathbb{R}P^1$ 上有两种平移，且这些方向在 G作用下保持不变。根据命题 4.5， Γ有三种线性无关的平移，其方向在 Γ作用下保持不变。由于 Γ 只保持方向 $[e_1], [e_2], [e_3]$不变，因此 $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 有三种塞弗特纤维化 f_1, f_2, f_3，它们由以下划分诱导

为方向为 $[e_1],[e_2]$ 和 $[e_3]$ 的直线。此外， $f_i\colon \mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_i]}$ 的底轨形为$\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_i]}$ ，其中

$$\Gamma_H^{[e_1]} = \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/2\\ a/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/2\\ b/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle$$
$$\Gamma_H^{[e_2]} = \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ a/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ b/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle$$

现在我们区分三种情形。如果 $a=0$ 和 $b=0$，则该群

$$\begin{aligned}\Gamma_H^{[e_2]} &= \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle\\ &= \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle\end{aligned}$$

由正方形各边上的反射生成，该正方形的顶点坐标为 0 或 $1/2$。于是 $\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_2]}$ 与 $*2222$ 微分同胚。由于 $(2_02_0*_0)$ 没有顶点，因此在每个角点上，纤维化 f_2 的塞弗特不变量不可能等于$0/2$，所以必定等于 $1/2$。因此 $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 与 $(*_02_12_12_12_1)$ 微分同胚，其中边界不变量可由定理 3.6 确定（见注3.11）。这两个不等价纤维化如图 1 所示。

如果 $a=0$ 和 $b=1$，则该群

$$\begin{aligned}\Gamma_H^{[e_2]} &= \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 1/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle\\ &= \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 1/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle\end{aligned}$$

由三个反射和一个带有不动点 $(1/2,1/4)$ 的二阶旋转生成。

基本域如图15所示，且 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{[e_2]}$ 与 $2*22$微分同胚。与前一种情况一样，由于 $(2_02_1*_1)$ 没有顶点，角点处纤维化 f_2 的所有局部不变量都必须是 $1/2$。此外，$(2_02_1*_1)$ 的奇异轨迹有两个连通分支，这意味着锥点处 f_2 的局部不变量必须是 $1/2$。事实上，若其为 $0/2$，则纤维化 $(2_0*_12_12_1)$ 将有 3 个连通分支，见图18（E）。因此， $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 与 $(2_1*_02_12_1)$ 微分同胚，其中边界不变量与之前一样，由注3.11确定。

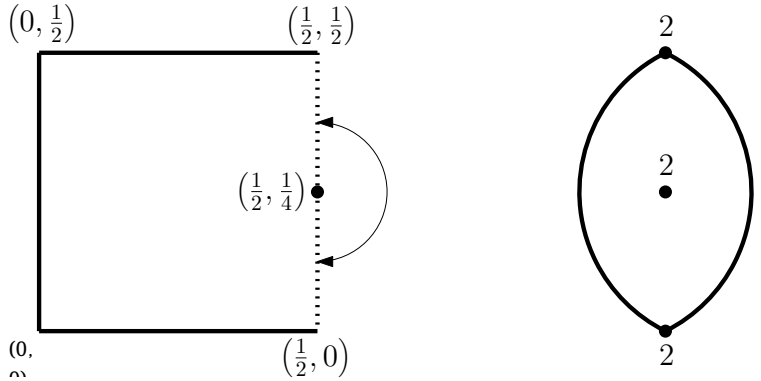


FIGURE 15. 左侧是该作用的一个基本域，右侧是商空间 $2*22$。

最后，如果 $a=1$ 和 $b=1$，群

$$\begin{aligned}\Gamma_H^{[e_1]} &= \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle \\ &= \langle \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)\rangle\end{aligned}$$

由一个竖直滑移反射和两个阶为 2 的旋转生成，其不动点分别为 $(0,\ 0)$ 和 $(0,\ 1/2)$。

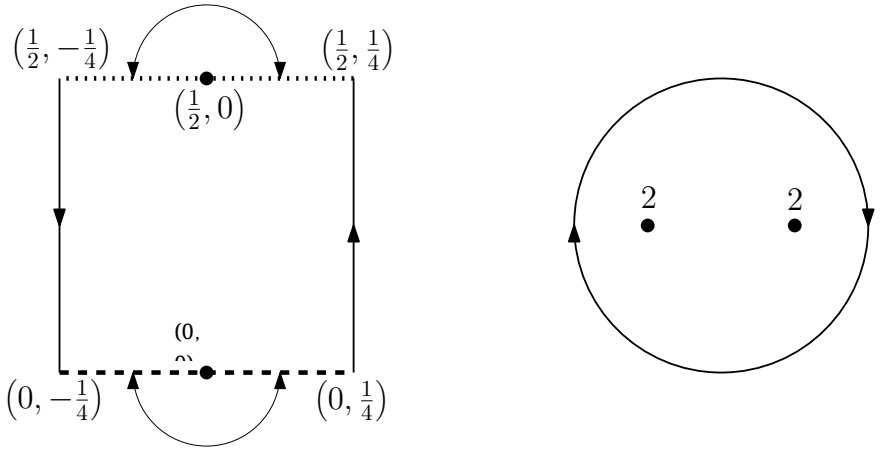


FIGURE 16. 左侧是该作用的一个基本域，右侧是商空间 $22\times$。

图16展示了一个基本域，并且 $\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_1]}$ 与 $22\times$微分同胚。由于奇异轨迹（$2_1 2_1 *_0$）有两个连通分支，纤维化 f_1 在锥点上的局部不变量必定是 $0/2$。因此，$\mathbb{R}^3/\Gamma$ 与（$2_0 2_0 \bar{\times}$）微分同胚。

步骤 *4*： 轨形（$*_1 2_0 2_0 2_1 2_1$）和（$2_0 *_0 2_0 2_0$）保向微分同胚。现在考虑壁纸群

$$G = \langle \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \rangle$$

由正方形边上的反射生成，该正方形的顶点坐标为 0 或 $1/2$，因此 $\mathbb{R}^2/G$ 与 $*2222$ 微分同胚。与上一步相同，通过将推论 4.7 的构造应用于纤维化（$*_1 2_0 2_0 2_1 2_1$），我们定义空间群:

$$\Gamma = \langle \left(A, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(B, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right), \left(A, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(B, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rangle.$$

此时

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

根据构造，Γ 在不变方向 $[e_3]$ 上有一个平移，$G = \Gamma_H^{[e_3]}$，而由方向为 $[e_3]$ 的平行直线诱导的纤维化 $f_3 : \mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_3]}$ 等价于纤维化（$*_1 2_0 2_0 2_1 2_1$）。

现在，注意到 $[e_2]$ 是 Γ 的一个不变方向，并且 Γ 包含沿方向 e_2 的平移，该平移由复合第一和第三个生成元得到。因此我们考虑纤维化

$$f_2 : \mathbb{R}^3/\Gamma \to \mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_2]}.$$

通过直接计算，我们得到:

$$\begin{aligned} \Gamma_H^{[e_2]} &= \langle \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\mathrm{Id}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rangle \\ &= \langle \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rangle . \end{aligned}$$

这个群由三个反射和一个不动点为 $(1/2, 1/4)$ 的二阶旋转生成，与图15中的情形相同。因此，商空间 $\mathbb{R}^2/\Gamma_H^{[e_2]}$ 微分同胚于 $2 * 22$。

由于 $(*_1 2_0 2_0 2_1 2_1)$ 有四个顶点（见图17），纤维化 f_2 中两个角点的局部不变量必须等于 $0/2$。根据定理 3.6，纤维化 f_2 只有 $(2_0 *_0 2_0 2_0)$ 和 $(2_1 *_1 2_0 2_0)$ 两种可能。然而，我们可以排除后一种可能，因为 $(*_1 2_0 2_0 2_1 2_1)$ 的奇异轨迹有两个连通分支（再次见图17），而 $(2_1 *_1 2_0 2_0)$ 的奇异轨迹是连通的，见图18（D）。这表明 $\mathbb{R}^3/\Gamma$ 与 $(*_1 2_0 2_0 2_1 2_1)$ 和 $(2_0 *_0 2_0 2_0)$ 保向微分同胚。

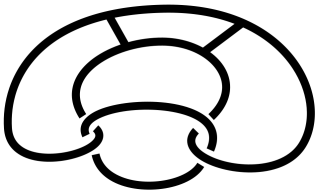
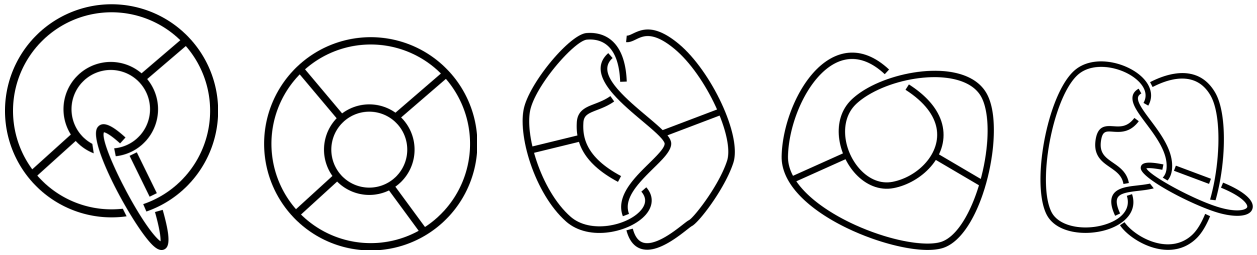


FIGURE 17. $(*_1 2_0 2_0 2_1 2_1)$的奇异轨迹，其底流形为 S^3 ，且所有边的奇异指标均为 2。



(A) $(2_0 *_0 2_0 2_0)$ (B) $(*_0 2_0 2_0 2_0 2_0)$ (C) $(*_1 2_0 2_1 2_0 2_1)$ (D) $(2_1 *_1 2_0 2_0)$ (E) $(2_0 *_1 2_1 2_1)$

FIGURE 18. (A)、(B)、(C)、(E) 中的轨形以 S^3 为底流形；(D) 中的轨形以 $\mathbb{R}P^3$ 为底流形。所有边的奇异指标均为 2。在 (E) 中，我们可以辨认出博罗米恩链环；另见 [Thu79，第 13.1 例。5]其中对这个轨形有很好的描述。

步骤 ***5*****：** 不同直线中的轨形并不微分同胚。

为了区分表中不同行的轨形，我们分析它们的奇异轨迹，这些轨迹很容易按照第3.2节确定。我们在表2中总结了奇异轨迹的结构；另见图18。

轨形 $\mathcal{O}$	$\Sigma_{\mathcal{O}}$的描述	$\Sigma_{\mathcal{O}}$的分支	顶点
$(2_0 2_0 *_0)$	四个奇异指标为= 2的圆	4	0
$(2_0 2_1 *_1)$	两个奇异指标为= 2的圆	2	0
$(2_1 2_1 *_0)$	两个奇异指标为= 2的圆	2	0
$(2_0 *_0 2_0 2_0)$	见图18a	2	4
$(*_0 2_0 2_0 2_0 2_0)$	见图18b	1	8
$(*_1 2_0 2_1 2_0 2_1)$	见图18c	2	4
$(2_1 *_1 2_0 2_0)$	见图18d	1	4
$(2_0 *_1 2_1 2_1)$	见图18e	3	0
$(2_1 2_1 \bar{\times})$	空	0	0

TABLE 2. 奇异轨迹的结构

表2第一列中的所有轨形都可以根据最后两列的信息加以区分，只有两个例外。

(1)$(2_0 *_0 2_0 2_0)$ 和 $(*_1 2_0 2_1 2_0 2_1)$ 的顶点数目及奇异轨迹的连通分支数目相同，但它们并非微分同胚，因为前者的所有顶点都位于奇异轨迹的同一个连通分支中，而后者的顶点则位于不同的连通分支中。参见图18 (A) 和 (C)。

(2)$(2_0 2_1 *_1)$ 和 $(2_1 2_1 *_0)$ 的顶点数和奇异轨迹分支数相同。反设它们保定向微分同胚。由于它们各自有 2 种不等价的纤维化，因此将存在一个点轨形为 222、具有 4 种不等价纤维化的平坦轨形。根据命题 5.4 和步骤 1，这是不可能的，因为这样的轨形至多有 3 种不等价的纤维化，分别对应每个不变方向。□

5.3. **定理 A 的证明结尾**。现在我们可以得出本节的主要结果了。

定理 *A* 的证明。根据定理5.7，如果一个紧致可定向平坦塞弗特轨形具有多种不等价的塞弗特纤维化，那么它的点轨形微分同胚于 1、22 或 222。因此，结合引理 5.10、引理 5.11 和引理 5.12，即可完成证明。特别地，根据引理 5.11 和引理 5.12，表格陈述中出现的两个塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们位于同一行。□

6. Geometry $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and bad Seifert 3-orbifolds

本节的目标是证明引言中的定理 B 和定理 C，我们在此用 Conway 记号重新表述它们。

定理 B. 具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的闭可定向塞弗特 *3*-轨道簇，除下表所列的例外情形外，在等价意义下具有唯一的塞弗特纤维化：

		for	*such that*
$(d_0 d_0)$	$(n_m n_{n-m})$	$n \geq 1$ *and* $1 \leq m \leq n-1$	$d = \gcd(n, m)$
$(*_0 d_0 d_0)$	$(*_1 n_m n_{n-m})$	$n \geq 1$ *and* $1 \leq m \leq n-1$	$d = \gcd(n, m)$

表中的两个塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们出现在同一行，且 $d =$ 最大公约数(n, m)。

定理 C. 闭可定向 *Seifert* 坏 *3*-维轨形具有无穷多个不等价的塞弗特纤维化。更精确地说，对于 $c \neq d$，两个坏的塞弗特纤维化轨形保定向微分同胚，当且仅当它们出现在下表的同一行中：

		for	使得
$(c_0 d_0)$	$((c\nu)c\mu(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$	$\nu \geq 1$ 和 $1 \leq \mu \leq \nu - 1$	最大公约数$(\nu, \mu) = 1$
$(*_0 c_0 d_0)$	$(*_1 (c\nu)c\mu(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$	$\nu \geq 1$ 和 $1 \leq \mu \leq \nu - 1$	最大公约数$(\nu, \mu) = 1$

6.1. 显式轨形微分同胚。 首先，在下面的引理中，我们证明塞弗特纤维化三维轨形之间的一些显式微分同胚。稍后我们将证明，这些实际上是坏的或具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的塞弗特纤维化三维轨形的不等价纤维化之间唯一的微分同胚。

引理6.1。 设 $\nu \geq 2$, $\mu \in \{1, \dots, \nu-1\}$ 满足 最大公约数$(\nu, \mu) = 1$，且 $d, c \geq 1$。 则：

- 轨形 $((c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$ 与 $(c_0 d_0)$保定向微分同胚；
- 轨形 $(*_1(c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$ 与 $(*_0 c_0 d_0)$ 保定向微分同胚。

特别地，两个轨形 $((c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$ 与 $((c'\nu')^{c'\mu'}(d'\nu')^{d'(\nu'-\mu')})$ 保定向微分同胚，当且仅当 $\{c, d\} = \{c', d'\}$；第二项也类似。

证明。为了证明第一项，我们必须说明每个轨形 $((c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$ 都与积轨道 $S^1 \times (cd)$ 微分同胚。

我们首先考虑 $c = d = 1$ 的情形。设 T_1 和 T_2 是两个实心环面。我们用l_i（分别用 m_i）表示 T_i的一条经线（分别表示一条子午线）。若沿着 T_1 和 T_2 的边界进行粘合，且所用的微分同胚将 m_1 映到 $-m_2$，则得到 $S^1 \times S^2$。

现在考虑 T_1（分别考虑 T_2）上的塞弗特纤维化，其中核心是唯一的异常纤维，其Seifert不变量为 μ/ν（分别为 $(\nu-\mu)/\mu$）。T_1（分别为 T_2）中的非异常纤维与 $\alpha m_1 + \nu l_1$（分别与 $-\alpha m_2 + \nu l_2$）同调等价，其中 $\alpha\nu \equiv 1$ 模 μ（纤维斜率与局部Seifert不变量之间的关系见 [Sei80，第361-364]页）。我们可以选取一个粘合微分同胚，将 m_1 映到 $-m_2$，使得 T_1 边界上的纤维化的像与 T_2边界上的纤维化相同。至此，我们已为轨形 $S^1 \times S^2$ 赋予了纤维化 $(\nu_\mu \nu_{\nu-\mu})$。

其他情形也可用非常类似的方法得到：考虑奇异核心指标分别为 c 和 d的实心环面，即可得到第一项。

对于第二项，注意到 T_i 的双曲型对合（同时反射子午线和经线）保留了 T_i的纤维化。（事实上，正如第3.2节所述，T_i 关于该对合的商空间是角点邻域原像的一个局部模型。）T_i 的对合相对于我们先前描述的粘合映射是等变的，因此得到 $S^1 \times (cd)$ 的一个对合，它保留了上面考虑的所有纤维化。根据构造，纤维化 $((c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$ 在商空间中诱导出一个纤维化，其底轨形为 $*(c\nu)\,(d\nu)$，局部不变量为 $c\nu/c\mu$ 和 $d(\nu-\mu)/d\nu$；根据定理 3.6和注3.11，边界不变量必为1。因此，商空间中的纤维化为 $(*_1(c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$，由此得到 $(*_1(c\nu)^{c\mu}(d\nu)^{d(\nu-\mu)})$ 与 $(*_0 c_0 d_0)$ 微分同胚。□

注记 6.2. 从证明中可以看出，引理6.1第一条和第二条中的轨形并不微分同胚。事实上，前者的底层拓扑空间是 $S^2 \times S^1$，后者则是 S^3。

根据引理6.1，我们可以立即证明定理 C。

定理 *C* 的证明。 首先，根据 [Dun88，命题 2] ，坏塞弗特三维轨形的纤维化必然以坏 2-轨形作为底轨形。然而，反之则不成立：事实上，如果底轨形是坏轨形且欧拉数非零，那么我们得到一个球面 3-轨形（再次参见 [Dun88，命题 2]）。因此，坏塞弗特三维轨形恰好是那些具有欧拉数为零的塞弗特纤维化，并且以坏 2-轨形作为底轨形的轨形。回顾一下，坏 2-轨形是带有一个锥点的球面、带有两个指标不同的锥点的球面、带有一个角点的圆盘，或带有两个指标不同的角点的圆盘。因此，利用定理 3.6，可以验证所有具有坏底 2-轨形且欧拉数为零的塞弗特三维轨形，都属于引理6.1项目列表中所出现的形式，因而它们都具有无穷多个纤维化。结合注 6.2，证明得证。 □

我们指出，引理6.1也涵盖具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$的轨形：事实上，如果基底2-维轨形是坏轨形，那么我们得到一个坏塞弗特3-轨形；否则，我们得到一个具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$的轨形。现在我们转而讨论具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$的情形。

6.2. **所有塞弗特纤维化**。 本节列举具有几何结构 $S^2 \times \mathbb{R}$的闭可定向塞弗特纤维化3-轨形的所有塞弗特纤维化。根据定理 3.7，我们知道这些纤维化的基空间是闭球面2-轨形，欧拉数等于0，并且具有相容的塞弗特不变量 （如定理 3.6所述）。

因此，如果 $f : (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma \to \mathcal{B}$ 是一个塞弗特纤维化，那么 $\mathcal{B}$ 微分同胚于表 1右栏中的某个轨形。利用定理 3.6找出所有相容的塞弗特不变量后，所有可能的纤维化均列于表3。同一表中还列出了每个纤维化轨形的底层拓扑空间，这些空间是根据以下事实计算得出的：

(1) 我们可以移除一个局部不变量等于 $0/p$ 的锥点或角点，而不影响底层空间的拓扑。(2) 我们可以将不变量为 m/n 的锥点或角点替换为局部不变量 $(m/\gcd(m,n))/(n/\gcd(m,n))$，而不改变底层空间。(3) 基空间为无锥点圆盘的纤维化，其底层拓扑空间为 S^3 （见 [Dun81，命题 2.11]）。(4) 纤维化 $(^{n}{}_{m}{}^{n}{}_{(n-m)})$ 的底层空间为 $S^2 \times S^1$ （根据下文引理6.1的证明）。(5) 纤维化 $(2_1 *_1)$ 的底层空间为 $\mathbb{R}P^3$ （见 [Dun81，命题 2.11]）。(6) 纤维化 $(n_0 \bar{\times})$ $= (\mathbb{R}P^2; 0/n; ; 0)$ 的底层空间为 $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$（利用事实 2 可将问题归约到流形情形；对于流形，即情形$n = 1$，结论见 [Sco83，第 457-459] 页）。

	$\mathcal{B}$	$\pi_1(\mathcal{B})$	$\pi_1^+(\mathcal{B})$	纤维化	$\lvert\mathcal{O}\rvert$	
1	532	$\mathbb{A}_5$	$\mathbb{A}_5$	$(5_0 3_0 2_0)$	$S^2 \times S^1$	
2	$*532$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$	$\mathbb{A}_5$	$(*_0 5_0 3_0 2_0)$	S^3	
3	432	$\mathbb{S}_4$	$\mathbb{S}_4$	$(4_0 3_0 2_0)$	$S^2 \times S^1$	
				$(4_2 3_0 2_1)$	$S^2 \times S^1$	
4	$*432$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_4$	$\mathbb{S}_4$	$(*_0 4_0 3_0 2_0)$	S^3	
				$(*_1 4_2 3_0 2_1)$	S^3	
5	332	$\mathbb{A}_4$	$\mathbb{A}_4$	$(3_0 3_0 2_0)$	$S^2 \times S^1$	
				$(3_1 3_2 2_0)$	$S^2 \times S^1$	
6	$*332$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_4$	$\mathbb{A}_4$	$(*_0 3_0 3_0 2_0)$	S^3	
				$(*_1 3_1 3_2 2_0)$	S^3	
7	$3*2$	$\mathbb{S}_4$	$\mathbb{A}_4$	$(3_0\ *_0\ 2_0)$	S^3	
8	$22n$	$\mathbb{D}_{2n}$	$\mathbb{D}_{2n}$	$(2_0 2_0 n_0)$	$S^2 \times S^1$	$n \geq 2$
				$(2_1 2_1 n_0)$	$S^2 \times S^1$	$n \geq 2$
				$(2_0 2_1 n_{n/2})$	$S^2 \times S^1$	$n \geq 4$ 甚至
9	$*22n$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{D}_{2n}$	$\mathbb{D}_{2n}$	$(*_0 2_0 2_0 n_0)$	S^3	$n \geq 2$
				$(*_1 2_1 2_1 n_0)$	S^3	$n \geq 2$
				$(*_1 2_0 2_1 n_{n/2})$	S^3	$n \geq 4$ 甚至
10	$2*n$	$\mathbb{D}_{4n}$	$\mathbb{D}_{2n}$	$(2_0\ *_0\ n_0)$	S^3	$n \geq 2$
				$(2_1\ *_1\ n_0)$	$\mathbb{R}P^3$	$n \geq 2$
11	nn	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$(n_0 n_0)$	$S^2 \times S^1$	$n \geq 1$
				$(n_m n_{(n-m)})$	$S^2 \times S^1$	$n \geq 2$ 和 $m \in \{1, \ldots, n-1\}$
12	$*nn$	$\mathbb{D}_{2n}$	$\mathbb{Z}_n$	$(*_0 n_0 n_0)$	S^3	$n \geq 1$
				$(*_1 n_m n_{(n-m)})$	S^3	$n \geq 2$ 和 $m \in \{1, \ldots, n-1\}$
13	$n*$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$(n_0 *_0)$	S^3	$n \geq 2$
				$(n_{(n/2)} *_1)$	$\mathbb{R}P^3$	$n \geq 2$ 甚至
14	$n\times$	$\mathbb{Z}_{2n}$	$\mathbb{Z}_n$	$(n_0 \bar{\times})$	$\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$	$n \geq 1$

TABLE 3. 所有具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的塞弗特纤维化。由于我们对参数 n和 m 的限制，表中的每一行都对应一种不同的纤维化。请注意，底轨形为 $*$、 $\times$ 或 **1**（即 S^2）的情形也包含在表中，只需允许 $n = 1$即可。

特别地，所有具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的闭可定向塞弗特轨形，其底层空间均为以下四种流形之一（它们两两不微分同胚）：

$$S^3 \qquad S^2 \times S^1 \qquad \mathbb{R}P^3 \qquad \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$$

6.3. 基本群的结构。命题3.3描述了涉及塞弗特纤维化轨形 f 的基本群的一个短正合列：$\mathcal{O} \to \mathcal{B}$ 其中

一般纤维 er 生成一个记为 C的正规循环子群，并且我们有 :

$$1 \to C \to \pi_1(\mathcal{O}) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathcal{B}) \to 1 \ . \tag{8}$$

根据推论 4.7 证明中的构造，若 $\mathcal{O}$ 具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$，则 $\mathcal{O} \cong (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$，且 C 可识别为 Γ 中由垂直平移组成的子群。$\pi_1(\mathcal{B}) \cong \Gamma_H$ 的元素可视为作用于 $\mathbb{S}^2$的元素；因此，我们将区分 $\pi_1(\mathcal{B})$中的保定向元素和反向元素。

引理 6.3. $\pi_1(\mathcal{O})$中在短正合列 (8) 下投影为 $\pi_1(\mathcal{B})$中保定向（分别为反向）元素的元素，与 C交换（分别在 C上作二面体作用）。

证明。令 $(g,h) \in \Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$。若 g在 $\mathbb{S}^2$ 上作用时保定向，那么 h 也保持 $\mathbb{R}$ 的定向，因为 Γ 是保定向的。由于 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 中的平移彼此交换，这意味着 (g,h) 与 C中的元素交换。反之，若 g反转定向，那么 h也会如此，因此 h 在 $\mathbb{R}$上作反射。在这种情况下，(g,h) 对 C 的作用是二面体的。□

我们用符号 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 表示 $\pi_1(\mathcal{B})$ 中保向元素构成的子群。其指数为一或二。

命题 6.4. 给定一个具有几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 的闭塞弗特轨形 $f\colon \mathcal{O} \to \mathcal{B}$，$\pi_1(\mathcal{O})$ 的每个极大阿贝尔正规子群都具有如下形式：$(f_*)^{-1}(M)$，其中 M 是 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 的极大阿贝尔正规子群。

此外，$|\pi_1(\mathcal{O}) : (f_*)^{-1}(M)| = |\pi_1(\mathcal{B}) : M|$。

证明。设 N 是 $\pi_1(\mathcal{O})$ 的一个极大阿贝尔正规子群，这意味着 N 不包含于 $\pi_1(\mathcal{O})$ 的任何其他极大阿贝尔正规子群中。首先，我们注意到 $f_*(N)$ 包含于 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 中。事实上，若 $N \cap C = \{1\}$，则由 N 和 C 生成的子群是正规子群；由于两个交集为平凡群的正规子群彼此交换，该子群还是阿贝尔的，这与 N 的极大性矛盾。因此 N 包含 C 的一个非平凡元素，于是根据引理 6.3，$f_*(N)$ 包含于 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 中。

其次，我们证明 $f_*(N)$ 是 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 的极大阿贝尔正规子群。它显然是阿贝尔的，并且由于 f_* 是满射，因此它是正规子群。最后，为了证明 $f_*(N)$ 是极大的，设 M 是 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 中包含 $f_*(N)$ 的阿贝尔正规子群。我们断言，$(f_*)^{-1}(M)$ 是 $\pi_1(\mathcal{O})$ 的阿贝尔正规子群，这将由 N 的极大性推出 $M = f_*(N)$。为证明这一断言，$(f_*)^{-1}(M)$ 显然是正规子群；它也是阿贝尔的，因为将 $\pi_1(\mathcal{O})$ 视为 $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 的子群时，$(f_*)^{-1}(M)$ 在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ 和 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 上的两个投影都是阿贝尔的。事实上，$(f_*)^{-1}(M)$ 在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ 上的投影与 M 同构，而在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ 上的投影只包含平移，因为 Γ 保持定向，且 M 包含于 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 中。

同样的论证结合 N 的极大性可推出 $N = (f_*)^{-1}(f_*(N))$，因为 $(f_*)^{-1}(f_*(N))$ 是阿贝尔正规子群。

最后，为了计算极大阿贝尔正规子群 $N = (f_*)^{-1}(M)$ 的指数，我们记 $\pi_1^+(\mathcal{O}) := (f_*)^{-1}(\pi_1^+(\mathcal{B}))$。注意到 $\pi_1^+(\mathcal{O})$ 在 $\pi_1(\mathcal{O})$ 中的指数等于 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 在 $\pi_1(\mathcal{B})$ 中的指数（并且二者都等于一或二），因此只需验证 $|\pi_1^+(\mathcal{O}) : (f_*)^{-1}(M)| = |\pi_1^+(\mathcal{B}) : M|$。现在，我们有 $\pi_1^+(\mathcal{O})/N = (\pi_1^+(\mathcal{O})/C)/(N/C) = \pi_1^+(\mathcal{B})/M$。□

注记 6.5。 命题 6.4 的显著性质在于，它在 $\pi_1(\mathcal{O})$ 的极大阿贝尔正规子群（它们是 $\mathcal{O}$ 的基本群的不变量，与所选纤维化 f 无关）和 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 的极大阿贝尔正规子群之间建立了一个双射对应，而后者先验地 取决于纤维化。我们将在定理 B 的证明中广泛使用这一观察。

6.4. 定理 B 的证明。 现在我们开始证明定理 B。作为预备步骤，我们在表4中列出一张表，计算一些将在证明中用于区分不同轨形微分同胚类的不变量。然而，这些不变量并不总是足以区分不同胚的轨形。因此，我们还需要一个引理，它将在定理 B 的证明中多次用到。

引理 6.6。 对于任意 $n \geq 2$，轨形 $(*_1 2_1 2_1 n_0)$ 与 $(2_0 *_0 n_0)$ 不同胚。

证明。 只需注意，从 $(2_0 *_0 n_0)$ 中移除一个点，可能会将奇异轨迹的一个连通分支分成两个；而在 $(*_1 2_1 2_1 n_0)$ 中，没有任何点能将奇异轨迹的一个连通分支分开。见图 19。□



(A) $(*_1 2_1 2_1 n_0)$　　(B) $(2_0 *_0 n_0)$

FIGURE 19. 图中的两个轨形根据其奇异轨迹的拓扑可知并不同胚。事实上，从（$*_1 2_1 2_1 n_0$）（左侧）移除一个点，永远不会使某个连通分支断开；而从（$2_0 *_0 n_0$）中移除区间上带有标签 n 的一个点（右侧），则会使其所在的连通分支断开。

现在我们可以给出证明了。

定理*B*的证明。 我们将首先根据表3中塞弗特轨形的极大阿贝尔

	纤维化	$\lvert\pi_1(\mathcal{O}):\ N\rvert$	$\lvert\mathcal{O}\rvert$	数量 顶点	数量 $\Sigma_{\mathcal{O}}$中的圆
8	$(2_0 2_0 n_0)$	若 $n=2$则为1	$S^2\times S^1$		3
	$(2_1 2_1 n_0)$	若 $n\notin\{2,4\}$则为2	$S^2\times S^1$		1
	$(2_0 2_1 n_{n/2})$		$S^2\times S^1$		2
9	$(*_0 2_0 2_0 n_0)$	如果 $n=2$，则为 2	S^3	6	
	$(*_1 2_1 2_1 n_0)$	如果 $n\notin\{2,4\}$，则为 4	S^3	2	
	$(*_1 2_0 2_1 n_{n/2})$		S^3	4	
10	$(2_0 *_0 n_0)$	如果 $n=2$，则为 2	S^3	2	
	$(2_1 *_1 n_0)$	如果 $n\notin\{2,4\}$，则为 4	$\mathbb{R}P^3$	2	
11	$(n_0 n_0)$	1	$S^2\times S^1$		如果 $n=1$，则为 0 如果 $n\neq 1$，则为 2
12	$(*_0 n_0 n_0)$	2	S^3	如果 $n=1$，则为 0 如果 $n\neq 1$，则为 4	如果 $n=1$，则为 2 如果 $n\neq 1$，则为 0
13	$(n_0 *_0)$	2	S^3	0	3
	$(n_{(n/2)} *_1)$		$\mathbb{R}P^3$	0	2
14	$(n_0\bar{\times})$	2	$\mathbb{R}P^3\#\mathbb{R}P^3$		

TABLE 4. 表3中第8至14族轨形的指数、底层拓扑空间、顶点数以及 S^1 数量。有些位置留空，因为在定理 B 的证明中不需要这些不变量。当极大正规阿贝尔子群 N 唯一时，计算其指数 $\lvert\pi_1(\mathcal{O}):\ N\rvert$。

正规子群的数量及指数，对其微分同胚类型作出区分。这显然是一个微分同胚不变量，因为它是基本群的等距变换群不变量。

因此，我们将分几种情况进行分析。

步骤 ***1*：** 多个极大阿贝尔正规子群。

唯一一种 $\pi_1^+(\mathcal{B})$ 有多个极大阿贝尔正规子群的情形，是群8、9和10中 $n=4$ 的情形，对于这些群，$\pi_1^+(\mathcal{B})\cong\pi_1(224)\cong\mathbb{D}_8$。因此，这些轨形与表3所列的任何其他轨形都不同胚。要证明它们只有一种纤维化，我们需要证明它们彼此不同胚。其中，底空间为 $S^2\times S^1$ 的那些轨形，是群8的三种可能情形（$2_0 2_0 4_0$）、（$2_1 2_1 4_0$）和（$2_0 2_1 4_2$），其奇异轨迹分别有3个、1个和2个连通分支，因此它们不同胚。底空间为 S^3 的那些轨形是（$*_0 2_0 2_0 4_0$）、（$*_1 2_1 2_1 4_0$）、（$*_1 2_0 2_1 4_2$）和（$2_0 *_0 4_0$）；它们分别有6个、2个、4个和2个顶点。因此，我们只需区分（$*_1 2_1 2_1 4_0$）和（$2_0 *_0 4_0$）；根据引理 6.6，它们不同胚。

所有其他轨形都只有一个极大阿贝尔正规子群，我们将其记为N，并将其指数 $|\pi_1(\mathcal{O}) : N|$ 用作区分不变量。

步骤***2*：** $|\pi_1(\mathcal{O}): N| > 4$或 $|\pi_1(\mathcal{O}): N| = 3$。

这对应于表3中的第1至7组。它们的指数依次为：60、120、6、12、3、6、6。此外，第3组中的两个轨形与第6组和第7组中的轨形并非微分同胚，因为它们的底层拓扑空间不同。因此，除第6组和第7组外，我们可以分别处理各组。第3组中的两个轨形可根据奇异轨迹的连通分支数加以区分，第5组中的两个轨形也是如此。第4组中的两个轨形可根据奇异轨迹的顶点数加以区分。（请回忆，对于每个具有塞弗特不变量 n_m 的角点，奇异集都包含一对顶点，且最大公约数$(n,\ m) \neq 1$。）最后，第6组和第7组中的三个轨形，其奇异轨迹内奇异指标为3的连通分支数依次为2、0、1。由此可知，它们两两之间都不是微分同胚。

步骤 ***3*：** $|\pi_1(\mathcal{O}): N| = 1$。

根据命题 6.4，$|\pi_1(\mathcal{O}): N| = 1$（也就是说，$\pi_1(\mathcal{O})$ 是阿贝尔群）当且仅当 $\mathcal{B}$ 可定向且 $\pi_1(\mathcal{B})$ 是阿贝尔群。因此，当且仅当 $\mathcal{O}$ 存在以下类型的纤维化之一时，这种情况才会发生：类型 $(n_m n_{(n-m)})$ 和 $(n_0 n_0)$（对于每个 n 和 m，均为第11组），或类型 $(2_a 2_a 2_0)$ 且 $a \in \{0, 1\}$（$n = 2$ 时为第8组），见表4。在所有情况下，$\mathcal{O}$ 的奇异集都是简单闭曲线（也可能为空）的并。对于 $(n_m n_{(n-m)})$ 和 $(n_0 n_0)$，奇异曲线的数量为零（若 $\gcd(n, m) = 1$）或为二（若 $\gcd(n, m) > 1$）；对于 $(2_0 2_0 2_0)$，数量为三；对于 $(2_1 2_1 2_0)$，数量为一。这意味着这两个轨形 $(2_a 2_a 2_0)$ 各自仅有一种纤维化。第11组的情况已在引理6.1中结合 $c = d$ 讨论过（另见注 6.2），并且正如所声称的，它在同一个轨形上给出了不等价纤维化。

步骤 ***4*：** $|\pi_1(\mathcal{O}): N| = 2$。

指数 2 可由以下群中包含纤维化的轨形实现：第8组（$n \notin \{2, 4\}$）、第9组（$n = 2$）、第10组（$n = 2$）、第12组、群 13 和群 14。见表4。我们指出，除第12组中的纤维化外，同一直线上的纤维化轨形（对应不同的 n 值）不可能微分同胚。这可以通过考察底层拓扑空间、奇点指标以及奇异轨迹中的顶点数量看出。现在考虑底层拓扑空间相同的轨形。

- 我们有带有 $n = 2$的第9组、带有 $n = 2$的第10组、第12组，以及其中 S^3作为底层拓扑空间出现的群 13。通过计算连通分支的数量和奇异轨迹的顶点数量，可以验证它们两两之间都不同胚，但 $(*_1 2_1 2_1 2_0)$ 和 $(2_0 *_0 2_0)$ 的情况除外。引理 6.6 中的 $n = 2$ 可以区分这两者。

•底层空间为 $\mathbb{R}P^3$ 的这两个轨形可通过顶点数量加以区分。

•唯一剩下的可能性是第8组中的轨形，其底层拓扑情形为 $S^2 \times S^1$ ；在这种情况下，连通分支的数量同样可以将它们区分开来。

我们可以得出，在这种情况下，两个纤维化轨形只有在被归入第12组时才可能微分同胚；这些微分同胚在引理6.1中进行了处理。

步骤*5*： $|\pi_1(\mathcal{O}) \colon \ N| = 4$。

指数4由具有纤维化且归入以下各组的轨形达到：第9组和带有 $n \notin \{2, 4\}$的第10组，见表4。同一组中纤维化轨形之间不可能存在微分同胚，理由与前一步中所使用的论证相同。通过计算顶点的数量，我们只需排除$(*_1 2_1 2_1 n_0)$与$(2_0 *_0 n_0)$之间的微分同胚。根据引理6.6，这是不可能的。证明至此完成。□

最后，我们通过讨论推论 D 和推论 E 作结。推论 D 的证明直接由本文的结果以及引言中所述的 [MS20], 的结果得出。下面给出推论 E 的证明。

推论 *E* 的证明。 [MS19] （针对几何结构 $\mathbb{S}^3$）的结果以及定理 B 和定理 C（针对几何结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 和坏轨形）的结果表明，若一个轨形存在无穷多个不等价纤维化，则它存在一种纤维化，其底轨形要么是至多有两个锥点的二维球面，要么是至多有两个角点的圆盘。底轨形满足这一条件等价于（见 [Dun81, Dun88]） $\mathcal{O}$ 要么是透镜空间轨形，要么其底层拓扑空间为 S^3 ，且奇异集是一个至多含有两个有理缠结的 Montesinos图。反过来，直接检查这些结果即可发现，所有底轨形为至多有两个锥点的二维球面或至多有两个角点的圆盘的塞弗特纤维化三维轨形，实际上都存在无穷多个纤维化。

□

注记 6.7。 作为推论 E 的结果，容易看出，如果一个闭3-轨道簇 $\mathcal{O}$具有无穷多个不等价纤维化，那么 $\mathcal{O}$ 的轨形基本群要么是秩至多为2的阿贝尔群（该群可能是有限群，也可能不是），要么是一个广义二面体群，且其指数为2的正规子群的秩至多为2。

然而，逆命题并不成立。事实上，轨形（$2_1 2_1 2_0$）（带有 $n = 2$ 的第8组，几何结构为 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$）在等价意义下仅具有唯一的纤维化，但其基本群同构于 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$，因此是秩2的阿贝尔群。

References

[BLP05] Michel Boileau、Bernhard Leeb 和 Joan Porti。《三维轨形的几何化》。《数学年刊》（第 *2* 辑），162(1):195–290，2005。

[BMP03] Michel Boileau、Sylvain Maillot 和 Joan Porti。《三维轨形及其几何结构》，《全景与综合》第 15 卷。法国数学会，巴黎，2003 年。[BS85] Francis Bonahon 和 Laurent Siebenmann。《Seifert 纤维化三维轨形的分类》。载于《低维拓扑》（Chelwood Gate，1982），《伦敦数学会讲义丛书》第 95 卷，第 19–85 页。剑桥大学出版社，剑桥，1985 年。[CDFHT01] John H. Conway、Olaf Delgado Friedrichs、Daniel H. Huson 和 William P. Thurston。《论三维空间群》。Beitr. Algebra Geom.，42(2):475–507，2001。[CH02] John H. Conway 和 Daniel H. Huson。《二维群的轨形记号》。Structural Chemistry，13(3):247–257，2002。[CHK00] Daryl Cooper、Craig D. Hodgson 和 Steven P. Kerckhoff。《三维轨形与锥流形》，MSJ Mem. 第 5 卷。东京：日本数学会，2000 年。[Cho12] Suhyoung Choi。《二维轨形上的几何结构：离散对称性的探索》，第 27 卷。东京：日本数学会，2012 年。[Dun81] William D. Dunbar。《纤维化轨形与晶体群》。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，1981 年。博士论文——普林斯顿大学。[Dun88] William D. Dunbar。《几何轨形》。Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid，1(1-3):67–99，1988。[MS15] Mattia Mecchia 和 Andrea Seppi。《纤维化球面三维轨形》。Rev. Mat. Iberoam.，31(3):811–840，2015。[MS19] Mattia Mecchia 和 Andrea Seppi。《球面三维轨形的等距变换群与映射类群》。Math. Z.，292(3-4):1291–1314，2019。[MS20] Mattia Mecchia 和 Andrea Seppi。《塞弗特纤维化球面 3-轨形的微分同胚类型》。Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste，52:525–563，2020。[Rat06] John G. Ratcliffe。《双曲流形基础》。数学研究生教材。Springer，纽约，2006。[RT10] John G. Ratcliffe 和 Steven T. Tschantz。《纤维化轨形与晶体群》。Algebraic & Geometric Topology，10(3):1627–1664，2010。[Sco83] Peter Scott。《三维流形的几何结构》。Bulletin of the London Mathematical Society，15(5):401–487，1983 年 9 月。[Sei80] Herbert Seifert。《三维纤维空间的拓扑》。载于《拓扑学教材》（纽约—伦敦，1980），Pure Appl. Math. 第 89 卷，第 139–152 页。Academic Press，纽约—伦敦，1980 年。[Szc12] Andrzej Szczepa´nski。《晶体群的几何》，Algebra Discrete Math. 第 4 卷，Hackensack。美国新泽西州哈肯萨克：World Scientific，2012 年。[Thu79] W. P. Thurston。《三维流形的几何与拓扑》。电子版 1.1，http://library.msri.org/nonmsri/gt3m，1979 年。

O. Malech: Scuola Internazionale Superiori di Studi Avanzati (SISSA), Via Bonomea 265, 34136, Trieste, Italy.
电子邮箱地址: omalech@sissa.it

M. Mecchia: Dipartimento Di Matematica e Geoscienze, Università degli Studi di Trieste, Via Valerio 12/1, 34127, Trieste, Italy.电子邮箱地址: mmecchia@units.it

A. Seppi: Univ. Grenoble Alpes, CNRS, IF, 38000 Grenoble, France.
电子邮箱地址: andrea.seppi@univ-grenoble-alpes.fr