arXiv:2302.06487v1 [math.LO] 13 Feb 2023

Chang 模型中的决定性

TAKEHIKO GAPPO 和 GRIGOR SARGSYAN

Abstract. 假设存在某个 hod 对，其中包含一个作为伍丁基数极限的伍丁基数，我们证明 Chang 模型在任意集合泛扩张中都满足 AD^+ 。

1. Introduction

Chang 模型是包含所有序数类且对可数序列封闭的最小 ZF 内模型。

定义 1.1. Chang 模型定义为

$$\mathsf{CM} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} L(^{\omega}\alpha).$$

对于任意序数 α，我们也将 $\mathsf{CM} \restriction \alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L(^{\omega}\beta)$ 记作.....

根据伍丁的一个结果，假设存在一个由作为伍丁基数极限的伍丁基数组成的真类，那么连续统假设的理论不可能通过力迫改变。[1] 然而，人们对这一理论所知甚少，而且这个模型似乎难以捉摸。

尽管如此，关于连续统假设仍有两个引人注目的结果。首先，在 20 世纪 90 年代，伍丁证明，假设存在一个由作为伍丁基数极限的伍丁基数组成的真类，则连续统假设 $\models \mathsf{AD}^+$。[2] 作为伍丁上述两个结果的推论，我们得到：假设存在一个由作为伍丁基数极限的伍丁基数组成的真类，那么在任何集合泛扩张中，连续统假设 $\models\mathsf{AD}^+$ 都成立。

在另一项引人注目的研究中， [Mit17], Mitchell 在 Gitik 开发的力迫技术基础上，找到了一个出人意料地小的 $\mathbb{R}$-鼠，它不属于连续统假设。此类 $\mathbb{R}$-鼠的存在可由一个强基数真类的存在推出。上述两个结果为研究连续统假设的内在结构提供了工具。

在此，我们的目标是提供第三种研究 CM 内部结构的方法。我们的方法或许更加传统：找出一个典范的可迭代内模型，使得通过泛型性迭代，可以将 CM 泛型地添加到该模型中。这类似于内模型理论中的做法：例如， $L(\mathbb{R})$ 可以通过 $\mathbb{R}$-泛型性迭代，实现为具有无限多个伍丁基数的最小活跃鼠的导出模型。以下定理总结了我们的工作，并将在推论 3.5 中得到证明。

Date：2023年2月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E60，03E45，03E55。*Key words and phrases.* 决定性、内模型理论、Chang 模型、hod 对。[1]有关此结果的证明，请参见 [Lar04，第 3] 章。[2]本文将发表于 [Woo]。

定理 1.2. 设 $(\mathcal{P}, \Sigma)$ 是一个优秀最小分支 hod 对[3] ，满足

- Code(Σ) 是普遍 Baire 的，并且
- $\mathcal{P} \models$ ZFC ＋“存在一个作为 Woodin基数的极限的 Woodin 基数。”于是，在任意集合泛扩张中都有 CM $\models$ AD$^+$ 。

第二位作者最近证明了：具有一个 Woodin 基数的极限的优秀最小分支 hod 对的存在性，相对于一个位于 Woodin基数的极限之上的可测基数是一致的，但证明尚未写成论文。我们猜想，某个大基数假设可以直接推出这种最小分支 hod 对的存在性。

本文的主定理直接由作为定理 2.1 证明的 Σ^2_1 反射，以及 [Sar21] 的主定理推出，后者在本文中表述为定理 3.1。 Σ^2_1 反射是一个完全不涉及精细结构的结果，而我们的证明不需要对内模型理论有任何深入了解。本文所使用的基本概念的所有定义都可以在[Far20] 中找到。

致谢。第一作者感谢 Daisuke Ikegami 向他介绍伍丁关于 Chang 模型的早期结果。第一作者感谢 John Steel 在 2023 年 1 月第一作者于 Core Model Seminar 就这一主题作报告时提出的深刻见解和评论。第一作者感谢 Ernest Schimmerling 和 Benjamin Siskind 组织研讨会，并给予他展示研究成果的机会。第一作者获得了奥地利科学基金（FWF）的 Elise Richter 基金项目 V844 和国际项目 I6087 的资助。第二作者获得了 NCN WEAVE-UNISONO 基金（编号：567137）的资助。

2. Σ^2_1 reflection of the Chang model反射的 Chang 模型

定理 2.1。假设 V 在尖下封闭。设 M 是一个可数的$\vec{}$ZFC 传递模型。设 $E \in M$ 是 M 中的一个延伸子序列，且 δ 是 M 的一个基数，使得

$M \models$“δ 是一个 Woodin 基数，且在 $\vec{E}$ 的见证下是 Woodin基数的极限。”

假设 $(M, \vec{E})$ 具有一个 ω_1-迭代策略[4] Σ ，使得 Code(Σ) 是 $< (2^{\aleph_0})^+$-普遍 Baire。令 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < \delta)$ 为 M-泛型。那么，对于任意 Σ^2_1-句子ϕ,

$$\mathsf{CM} \models \phi \Longrightarrow (\mathsf{CM} \restriction \omega_2)^{M[g]} \models \phi.$$

证明。假设 CM $\models \phi$。令 $\alpha_0, \beta_0 \geq \omega$ 满足 $L_{\beta_0}(^\omega\alpha_0) \models \phi$。根据 Skolem hull 论证，我们可以假设 $|\max\{\alpha_0, \beta_0\}| \leq 2^{\aleph_0}$。现在通过 Add($\omega_1$, 1) 力迫 CH。由于这是一个大小为连续统的可数闭力迫，CM 不变，且定理的假设仍然成立。因此，我们可以假设 CH 在 V 中成立。令 $A \subseteq \mathbb{R}$ 编码一个双射 $f\colon \omega_1 \to \alpha_0$ 以及结构$L_{\beta_0}(^\omega\alpha_0)$。注意 $(A, \mathbb{R})^\#$ 存在。

根据连续统假设，我们可以固定一个 $\langle r_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$ of $\mathbb{R}$的枚举。对于任意 $\gamma < \omega_1$ 和$B \subseteq \mathbb{R}$，我们记作 $B \restriction \gamma = B \cap \{r_\xi \mid \xi < \gamma\}$。我们使用伍丁的延伸子

[3]关于最小分支 hod 对的定义，参见 [Ste23] ；关于卓越性的定义，参见 [Sar21] 。[4]本文中的“可迭代性”一词始终指正规可迭代性。

代数，它定义在一个具有 δ 个生成元的 Woodin 基数 δ 上（见（M， $\vec{E}$）），记为
$\mathrm{EA}_\delta^{M\,\vec{E}}$。我们利用“$\mathrm{EA}_\delta^{M\,\vec{E}}$具有 δ-c.c.”这一事实以及以下引理。

引理 2.2（[Far20，定理 4.6]）。设 M 是 ZFC 的一个可数传递模型。设 $\vec{E} \in M$ 是 M 中的一个延伸子序列，且 δ 是 M 的一个基数，使得
$M \models$“δ 是一个伍丁基数，且是由 $\vec{E}$见证的伍丁基数极限。”

假设 $(M, \vec{E})$ 是 $\omega_1 + 1$-迭代策略 Σ。此外，设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $(A, \mathbb{R})^\#$ 存在。则存在一个迭代映射 $i\colon M \to N$，它通过在 $(M, \vec{E})$ 上进行一次依据 Σ的可数长度正规迭代树得到，并且存在 N-泛型 $g \subseteq i(\mathrm{EA}_\delta^{M\,\vec{E}})$，使得

(1) $L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta)) \prec L(A, \mathbb{R})$，(2) $A \restriction i(\delta) \in N[g]$，(3) $\mathbb{R}^{N[g]} = \mathbb{R} \restriction i(\delta)$，(4) 对任意 $x \in \mathbb{R}^{N[g]}$，存在一个偏序集 $\mathbb{P} \in V^N_{i(\delta)}$，使得 x 在N上是 $\mathbb{P}$-泛型，并且 (5) $i(\delta) = \omega_1^{N[g]} = \sup\{\omega_1^{N[x]} \mid x \in \mathbb{R}^{N[g]}\}$。

注记 2.3. 我们只在第一个子句中需要 $(A, \mathbb{R})^\#$。

注意，我们的 $(M, \vec{E})$ 由于其迭代策略的 $< (2^{\aleph_0})^+$-普遍 Baire 性而是 $\omega_1 + 1$-可迭代的。我们将引理 2.2 应用于我们的 A，得到一个初等嵌入$i\colon M \to N$，以及满足上述子句 (1)–(5) 的 N-泛型 $g \subseteq i(\mathrm{EA}_\delta^{M\,\vec{E}})$。由 (1)，$\mathbb{R}^{L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta))} = \mathbb{R} \restriction i(\delta)$ 并且

$$L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta)) \models \exists \alpha, \beta\, [A \restriction i(\delta) \text{ codes the bijection } f \restriction i(\delta)\colon i(\delta) \to \alpha$$
以及 $\phi]$. 的模型 $L_\beta(^\omega\alpha)$

我们固定见证这一点的序数 α 和 β。

命题 2.4. $(^\omega\alpha)^{L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta))} = (^\omega\alpha)^{N[g]}$。

证明。由于根据 (2) 和 (3)，$A \restriction i(\delta) \in N[g]$，所以 $(^\omega\alpha)^{L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta))} \subseteq N[g]$。为了证明 $(^\omega\alpha)^{N[g]} \subseteq L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta))$，令 $x \in (^\omega\alpha)^{N[g]}$。注意，$f \restriction i(\delta)\colon i(\delta) \to \alpha$ 是由 $A \restriction i(\delta)$ 编码的双射。令

$$x_f := \langle f^{-1}(x(n)) \mid n < \omega \rangle \in (^\omega i(\delta))^{N[g]}.$$

由于根据 (5)，$i(\delta) = \omega_1^{N[g]}$，$x_f$ 可以编码为 $N[g]$中的一个实数。又由于根据 (3)，$\mathbb{R}^{N[g]} = \mathbb{R} \restriction i(\delta)$，$x_f$属于 $L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta))$。因此，$x \in L(A \restriction i(\delta), \mathbb{R} \restriction i(\delta))$。□

命题 2.5. $(^\omega\alpha)^{N[g]} = (^\omega\alpha)^{N(\mathbb{R} \restriction i(\delta))}$。

证明。我们几乎重复命题 2.4 的证明。只需证明 $(^\omega\alpha)^{N[g]} \subseteq N(\mathbb{R} \restriction i(\delta))$，因此设 $x \in (^\omega\alpha)^{N[g]}$。由于 $N[g] \models |\alpha| = i(\delta)$，且$N \models$“$i(\mathrm{EA}_\delta^{M\,\vec{E}})$具有 $i(\delta)$-c.c.，” $N \models |\alpha| = i(\delta)$。令 $\overline{f}\colon i(\delta) \to \alpha$ 为 N 中的一个双射，并设

$$x_{\overline{f}} := \langle \overline{f}^{-1}(x(n)) \mid n < \omega \rangle \in {}^\omega i(\delta).$$

由于 $i(\delta) = \omega_1^{N[g]}$，$x_{\overline{f}}$可以在 $N[g]$ 中编码为一个实数。根据 (3)，$\mathbb{R}^{N[g]} = \mathbb{R} \restriction i(\delta)$，$x_{\overline{f}} \in N(\mathbb{R} \restriction i(\delta))$，因此 $x \in N(\mathbb{R} \restriction i(\delta))$。□

现在我们使用塌缩扩张中对称实数的刻画。若对 X 的每个有限子集，都存在一个 X 中的单一实数对其进行递归编码，我们就称 $X \subseteq \mathbb{R}$ 对有限序列封闭。

引理 2.6（[Lar04，引理 3.1.5]）。设 N 是 ZFC 的一个传递模型，且η 是 N中的一个强极限基数。设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是一个在有限序列下封闭的实数集，使得 X 中的每个实数都是 N 上的泛型，且 $X = \mathbb{R} \cap N(X)$。那么$X = \mathbb{R}^*_h := \bigcup_{\xi<\delta} \mathbb{R}^{N[h\restriction\xi]}$ 当且仅当以下条件成立：存在某个 N-泛型 $h \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < \eta)$

- 对于任意 $x \in X$，存在一个偏序集 $\mathbb{P} \in V^N_\eta$，使得 x 是 N上的 $\mathbb{P}$-泛型，且
- $\eta = \sup\{\omega_1^{N[x]} \mid x \in X\}$。

我们将此引理应用于 $X = \mathbb{R} \restriction i(\delta)$ 和 $\eta = i(\delta)$。在我们的情形中，关于 X 的假设成立，因为根据（3），$\mathbb{R} \restriction i(\delta) = \mathbb{R}^{N(\mathbb{R}\restriction i(\delta))} = \mathbb{R}^{N[g]}$。根据（4）和（5），存在一个 N-泛型 $h \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < i(\delta))$，使得 $\mathbb{R} \restriction i(\delta) = \mathbb{R}^*_h = \mathbb{R}^{N[h]}$。

断言 2.7. $(^\omega\alpha)^{N(\mathbb{R}\restriction i(\delta))} = (^\omega\alpha)^{N[h]}$.

证明. 由于 $\mathbb{R}^{N[h]} = \mathbb{R} \restriction i(\delta)$，与命题 2.5 相同的证明即可成立。 □

由断言 2.4、命题 2.5 和断言 2.7，$(L_\beta(^\omega\alpha))^{N[h]} = (L_\beta(^\omega\alpha))^{L(A\restriction i(\delta), \mathbb{R}\restriction i(\delta))}$，这是由 $A \restriction i(\delta)$ 编码的结构。因此，$(L_\beta(^\omega\alpha))^{N[h]} \models \phi$。由 $\mathrm{Col}(\omega, < i(\delta))$ 的齐次性，

$$N \models \exists \alpha, \beta < i(\delta)^+ \Vdash_{\mathrm{Col}(\omega, <i(\delta))} \text{“}L_\beta(^\omega\alpha) \models \phi\text{.”}$$

由 i 的初等性：$M \to N$，

$$M \models \exists \alpha, \beta < \delta^+ \Vdash_{\mathrm{Col}(\omega, <\delta)} \text{“}L_\beta(^\omega\alpha) \models \phi\text{.”}$$

因此，对于任意 M-泛型 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < \delta)$，我们有 $(\mathrm{CM} \restriction \omega_2)^{M[g]} \models \phi$。 □

3. Determinacy in the Chang model

首先，回顾伍丁提出的导出模型定理。设 δ 是 Woodin 基数的极限，并令 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < \delta)$ 为 V-泛型。在 $V[g]$ 中，我们令$\mathbb{R}^*_g = \bigcup_{\xi<\delta} \mathbb{R}^{V[g|\xi]}$ 并

$$\Gamma^*_g = \{A^*_g \subset \mathbb{R}^*_g \mid \exists \xi < \delta (A \subseteq \mathbb{R}^{V[g\restriction\xi]} \wedge V[g \restriction \xi] \models \text{“}A \text{ is } < \delta\text{-universally Baire”})\}.$$

这里，我们记作 $A^*_g = \bigcup_{\xi<\eta<\delta} A^{g\restriction\eta}$，其中 $A^{g\restriction\eta}$ 是 A 在 $V[g\restriction\eta]$ 中通过其 $< \delta$-普遍贝尔表示得到的典范扩张。模型 $L(\Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$ 称为在 $V[g]$ 中计算的 δ 处的导出模型。伍丁证明了 $L(\Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g) \models \mathrm{AD}^+$.[5]

在 [Sar21]，中，第二位作者构造了一个新的决定性模型，它扩展了 hod 鼠的塌缩扩张中的一个导出模型。

定理 3.1（Sargsyan，[Sar21]）。假设 $(\mathcal{P}, \Sigma)$ 是一个优秀最小分支 hod 对，且 $\mathcal{P} \models$ZFC；并且 δ 是 Woodin 基数的极限，且满足以下条件之一：δ 是正则的，或者 $\mathrm{cf}(\delta)$ 在 $\mathcal{P}$ 中不是可测基数。令 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < \delta)$ 为 $\mathcal{P}$-泛型。令 $L(\Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$ 为在 $\mathcal{P}[g]$ 中计算的 δ 处的导出模型。那么，在 $\mathcal{P}[g]$ 中存在一个 ZFC – 幂集公理的传递模型 M，使得

- $M \cap \mathrm{Ord} = \omega_2 = (\delta^+)^{\mathcal{P}}$,

[5]参见 [Ste09]，其中给出了这一结论的证明。

- M 有一个最大基数 κ，使得如果 $\mathrm{cf}^{\mathcal{P}}(\delta) > \omega$，那么 $\mathrm{cf}^{\mathcal{P}[g]}(\kappa) > \omega$,
- $L(M, \cup_{\alpha<\kappa}{}^{\omega}\alpha, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g) \cap \wp(\mathbb{R}) = \Gamma^*_g$，以及
- $L(M, \cup_{\alpha<\kappa}{}^{\omega}\alpha, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g) \models \mathrm{AD}^+$.[6]

注记 3.2。此注记对我们的证明并非必要，但[Sar21]中给出了更多结果。令 $(\mathcal{P}, \Sigma)$ δ 和 g如上所述。在 $\mathcal{P}[g]$中，我们将 $\mathcal{M}_\infty$ 定义为 $\mathcal{P}|(\delta^+)^{\mathcal{P}}$ 所有不下降迭代的直极限；这些迭代是通过长度为 $<\delta$、基于 $\mathcal{P}|\delta$ 且位于某个 $\xi < \delta$中的正规迭代树进行的。另令 δ_∞ 为 δ 在 $\mathcal{M}_\infty$中的直极限像。则定理 3.1 的结论对 $M = \mathcal{M}_\infty$ 和$\kappa = \delta_\infty$成立。在 $\mathcal{P}[g]$中进行讨论时，我们写作

$$\mathrm{CDM} = L(\mathcal{M}_\infty, \cup_{\alpha<\delta_\infty}{}^{\omega}\alpha, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g).$$

此处，CDM 表示“导出模型上的 Chang 模型”。

已知 CDM 满足更强的决定性公理。Steel 在[Ste23] 中证明，Woodin基数的极限处的优秀最小分支 hod 鼠的导出模型满足 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$。此外，作者在 [GS22] 中证明，不可达极限处的 hod 鼠的导出模型满足“$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \Theta$ 是正则的”。由于 CDM 与导出模型具有相同的实数集，因此 CDM 总是 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 的模型，并且可能是“$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \Theta$ 是正则的”的模型。

现在我们已经准备好证明本文的主定理。

定理 3.3。设 V 在尖下封闭。令 $(\mathcal{P}, \Sigma)$ 为一个优秀最小分支 hod 对，使得

- $\mathrm{Code}(\Sigma)$ 是 $< (2^{\aleph_0})^+$-普遍 Baire 的，并且
- $\mathcal{P} \models$ ZFC + “存在一个 Woodin 基数，它是 Woodin基数的极限。”则 $\mathrm{CM} \models$ 满足 AD^+。

证明。设 M是定理 3.1 结论中满足 ZFC −幂集公理的一个模型。此外，设 κ 是 M 的最大基数。

断言 3.4。在 $\mathcal{P}[g]$中，$\mathrm{CM} \restriction \omega_2 \subseteq L(M, \cup_{\alpha<\kappa}{}^{\omega}\alpha, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$。

证明。我们在 $\mathcal{P}[g]$中进行论证。设 $\alpha < \omega_2 =$ 序数类$\cap M$ 且设 $x \in {}^{\omega}\alpha$。不妨假设 $\alpha \geq \kappa$。由于 κ 是 M中的最大基数，我们可以在 M中固定一个双射 $f\colon \kappa \to \alpha$。令 $x_f := \langle f^{-1}(x(n)) \mid n < \omega\rangle \in {}^{\omega}\kappa$。由于 κ具有不可数上余final性，$x_f \in {}^{\omega}\xi$对某个 $\xi < \kappa$ 成立。因此， x_f 是 $L(M, \cup_{\alpha<\kappa}{}^{\omega}\alpha, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$ 的一个元素，所以 x 也是。□

由于 $(\mathrm{CM} \restriction \omega_2)^{\mathcal{P}[g]}$ 包含 $\mathcal{P}[g]$中的所有实数，由定理 3.1 可知 $(\mathrm{CM} \restriction \omega_2)^{\mathcal{P}[g]} \models$ 满足 AD^+。由于 AD 的否定是 Σ^2_1，由定理 2.1 可知 $\mathrm{CM} \models$ 满足 AD。此外，在 AD 下，AD 的否定$^+$ 等价于一个 Σ^2_1 语句。因此，定理 2.1 再次意味着 $\mathrm{CM} \models$满足 AD^+。□

推论 3.5. 设 $(\mathcal{P}, \Sigma)$ 是一个优秀最小分支 hod 对，使得

- $\mathrm{Code}(\Sigma)$ 是普遍 Baire 的，并且
- $\mathcal{P} \models$ ZFC + “存在一个 Woodin 基数，它是 Woodin基数的极限。”于是，在任意集合泛扩张中，$\mathrm{CM} \models \mathrm{AD}^+$ 。

[6]根据导出模型定理，这由第三个子句推出。

证明。由于 $\mathcal{P}$ 具有普遍 Baire 迭代策略，因此它是完全可迭代的。由此可知，V 在尖之下封闭。于是，由定理 3.3 以及以下观察即可推出该推论：在任意集合泛扩张中，$V[g]$，令 Σ^g 为 Σ 在 $V[g]$中的典范扩张，则 $(\mathcal{P}, \Sigma^g)$ 仍是一个优秀最小分支 hod 对。□

Mitchell 从 [Mit17] 得出的结果表明，定理 3.3 无法加强为 CM $\models$AD$_{\mathbb{R}}$。这是因为 AD$_{\mathbb{R}}$ 蕴含 Mitchell 的 $\mathbb{R}$-鼠存在，因此它不属于 CM。事实上，由 Mitchell 定理可知，理论 AD$^+ + \theta_0 < \Theta$ 不可能在 CM 中成立。然而，Mitchell 的证明需要了解 Gitik 所发展的复杂强迫工具。这里我们给出一个较简单但较弱的结果，说明 CM 不可能太大。

定理 3.6。在定理 3.3 的相同假设下，$\Sigma \notin$CM。

证明。假设 $\Sigma \in$CM。出于与前面相同的原因，我们可以假设连续统假设成立。于是，定理 2.1 的证明论证表明，存在

- 一个迭代映射 i：$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，它由 Σ 所确定的、在 $\mathcal{P}$ 上进行的、长度可数的 $\mathcal{T}$ 正规迭代树导出，
- 序数 $\alpha, \beta < (i(\delta)^+)^{\mathcal{Q}}$，以及
- $\mathcal{Q}$-泛型 $h \subseteq \mathrm{Col}(\omega, < i(\delta))$

使得 $\Sigma \restriction \mathrm{HC}^{\mathcal{Q}[h]} \in (L_\beta({}^\omega\alpha))^{\mathcal{Q}[h]}$。那么在 $\mathcal{Q}[h]$ 中，断言 3.4 和定理 3.1 蕴含 Code($\Sigma \restriction \mathrm{HC}^{\mathcal{Q}[h]}$) 是 $< i(\delta)$-普遍 Baire。

现在我们可以用内模型理论中相当标准的方法得到矛盾。设 $(T, U) \in \mathcal{Q}[h]$ 是见证 Code($\Sigma \restriction \mathrm{HC}^{\mathcal{Q}[h]}$) 为 $< i(\delta)$-普遍 Baire 的、定义在 $\omega \times$序数类上的树对。令 $\gamma < i(\delta)$ 满足 $(T, U) \in \mathcal{Q}[h \restriction \gamma]$。那么对于任意满足 $\gamma < \eta < i(\delta)$ 的序数 η，

$$\Sigma \restriction V_{i(\delta)}^{\mathcal{Q}[h \restriction \eta]} \in \mathcal{Q}[h \restriction \eta].$$

现在取 η 为 $\mathcal{Q}$ 中大于 γ 且在 i 的值域中的最小正则基数：$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$。这是可能的，因为 $i(\delta) = \sup i[\delta]$。令 ξ 为 $\mathcal{T}$ 末分支中最小的序数，使得迭代映射 $i^{\mathcal{T}}_{\xi,\infty} \colon \mathcal{M}^{\mathcal{T}}_\xi \to \mathcal{Q}$ 的临界点至少为 η。注意，$\mathrm{crit}(i^{\mathcal{T}}_{\xi,\infty}) > \eta$，因为 η 在 i 的值域中。令 $\overline{\eta} := (i^{\mathcal{T}}_{\xi,\infty})^{-1}(\eta) = i^{-1}(\eta)$。那么 $\overline{\eta}$ 在 $\mathcal{P}$ 中是正则的，因此 $\eta = \sup i^{\mathcal{T}}_{\xi,\infty}[\overline{\eta}]$。由于 $\Sigma \restriction V_{i\,\delta}^{\mathcal{Q}[h \restriction \eta]}() \in \mathcal{Q}[h \restriction \eta]$，我们有 $\mathcal{T} \restriction \xi + 1 \in \mathcal{Q}[h \restriction \eta]$，且 $\overline{\eta}$ 在 $\mathcal{Q}[h \restriction \eta]$ 中是可数的。由此可知，η 在 $\mathcal{Q}[h \restriction \eta]$ 中具有可数余终性。于是 η 在 $\mathcal{Q}$ 中也具有可数余终性，这与 η 在 $\mathcal{Q}$ 中的正则性矛盾。□

许多问题仍悬而未决。能否从定理 3.3 的假设证明 CM 理论的泛型不变性？伍丁在 [Woo] 中引入了各种广义 Chang 模型。其中一个例子是：在对所有序数 α 的 $\wp_{\omega_1}({}^\omega\alpha)$ 上增添闭无界滤子的 Chang 模型。伍丁证明，假设存在一个由 Woodin 基数的 Woodin 极限组成的真类，该版本的广义 Chang 模型满足 AD$^+$ “ω_1 是超紧致”。[7]能否通过定理 3.3 的方法证明伍丁的结果？我们将在未来的出版物中讨论这类问题。

[7]这个结果在 [IT21]中也有提及。

References

[Far20] Ilijas Farah, 《大基数、决定性及其他主题》。阴谋集团研讨会，第 IV 卷，《逻辑讲义》，第 49 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020 年，第 141–176 页。[GS22] Takehiko Gappo 和 Grigor Sargsyan, 《》，《美国数学会会刊》150（2022），第 3 期，1321–1329 页。MR 4375724[IT21] Daisuke Ikegami 和 Nam Trang, 《》，《数学逻辑进展》，《施普林格数学与统计学论文集》，第 369 卷，施普林格，新加坡，2021 年，第 27–45 页。MR 4378920[Lar04] Paul B. Larson, 《》，《大学讲义丛书》，第 32 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004 年，W. Hugh Woodin 课程笔记。MR 2069032[Mit17] William J. Mitchell, 《》，《数学逻辑档案》56（ 2017 7 8, 935 982 3696073 ），第 - 期 – 。MR Sar Grigor Sargsyan, 《》，[21]《数学进展》384（ 2021 107717, 21 4237419 ），论文编号 。MR Ste J. [09] *The derived model theorem* R. Steel, 《》，2006 年逻辑学术研讨会，《逻辑讲义》，第 32 卷，符号逻辑协会，芝加哥，伊利诺伊州， 2009, 280 327 2562557 第 – 页。MR [23] *A comparison process for mouse pairs* Ste John R. Steel, 《》，《逻辑讲义》，第 51 卷，符号逻辑协会，伊萨卡，纽约州；剑桥大学出版社，剑桥，© 2023 4496338 。MR Woo W. Hugh Woodin, 《》，待出版。[ ]