arXiv:2302.06511v1 [math.OC] 13 Feb 2023

基于条件风险价值子集表示的双目标风险规避设施选址

Najmesadat Nazemi*[1]、Sophie N. Parragh†[1]和Walter J. Gutjahr‡[2]

[1]奥地利林茨约翰内斯·开普勒大学生产与物流管理研究所[2]奥地利维也纳大学统计与运筹学系

关键词：风险厌恶、条件风险价值、割平面、双目标优化

摘要：对于许多受不确定性影响的现实决策问题，在考虑决策者风险偏好的同时处理多个且往往相互冲突的目标可能至关重要。条件风险价值（CVaR）是一种广泛应用的风险度量，用于应对决策者的风险厌恶性。本文采用条件风险价值的基于子集的多面体表示，对 Nazemi 等（2021）提出的双目标两阶段随机设施选址问题重新建模。我们提出一种近似割平面法，以处理这一计算难度更高的基于子集的公式。随后，我们将割平面法嵌入 ϵ约束法、平衡盒方法以及一种近期开发的数学启发式方法，以处理问题的双目标特性。计算结果表明，所提出的方法有效。最后，我们讨论将基于子集的多面体公式近似化对所得解的影响。

发表于《第11届国际运筹学与企业系统会议论文集》（ICORES），第77–85页，2022年，
doi:10.5220/0010914900003117

1 引言

一方面，许多现实问题涉及多个相互冲突的目标，例如成本与客户满意度之间的权衡，或盈利能力与环境问题之间的权衡。另一方面，将所考虑参数的不确定性纳入决策过程十分重要。在过去几十年中，不确定性下的优化与多目标优化大多分别发展。然而，开发能够同时应对这两个领域的优化技术是值得期待的（Gutjahr 和 Pichler，2016）。

由于具有坚实的理论基础和经过验证的算法性能，随机规划是计算优化中处理数据不确定性的常用方法（参见 Birge 和 Louveaux（2011）、Shapiro 等人（2014）及其中的参考文献）。标准的两阶段随机规划问题将期望值作为性能度量。它假设决策者持风险中性态度，因此适用于重复性决策问题（Birge 和 Louveaux，2011）。然而，决策者可能具有其他风险偏好，尤其是在非重复性应用中，例如大规模金融投资或重大灾害管理。在关注更稳健解的情况下，近年来最广受推荐的风险度量之一是条件风险价值（CVaR）。它可以

*najmesadat.nazemi@jku.at
†sophie.parragh@jku.at
‡walter.gutjahr@univie.ac.at

通过指定置信水平 $\alpha(\alpha \in [0,1))$（CVaR(α)），根据决策者的实际风险厌恶程度进行调整。 α 的值越接近0，决策者的风险厌恶程度就越高。CVaR 已应用于优化文献中的多个领域，例如金融工程（如 Krokhmal 等人（2002年）、Roman 等人（2007）、Huang 等人（2021年）、Zheng 和 Zheng（2021））、灾害管理（如 Noyan（2012）、El‚ci 和 Noyan（2018年）、Nazemi 等人（2021））、水资源管理（如 Zhang 等人（2016）、Simic（2019）、Chen 等人（2021））以及可持续供应链（如 Rahimi 和 Ghezavati（2018）、Rahimi 等人（2019））。关于 CVaR 在金融工程之外多个优化领域的应用综述，参见 Filippi 等人（2020）。Huang 等人（2021年）针对两种不同的实际应用——多产品装配问题和投资组合选择问题——提出了一种将 CVaR 作为风险度量的两阶段分布鲁棒模型，并将该模型扩展为多阶段模型。他们开发了两种基于割平面法的分解算法来求解这些模型。最后，他们指出，与风险中性模型相比，所提出的模型表现出更强的稳健性。Noyan（2012）将经典条件风险价值表示纳入灾害管理中一个两阶段均值—风险随机问题的目标函数；该问题中的需求和交通网络损害程度均为不确定参数。她开发了分解算法，以应对该问题在计算上的挑战。与这项研究相一致，El‚ci 和 Noyan（2018年）研究了一个机会约束的两阶段均值—风险随机救援网络设计模型。他们还开发了一种基于 Benders 分解的算法，用于求解采用 CVaR 不同表示形式的模型。Zhang 等人（2016）提出了一个风险厌恶的多阶段随机水资源分配问题，并在问题的每个阶段考虑均值-CVaR 目标函数。最后，他们提出了一种嵌套L形法来求解该问题。除了上述研究单目标问题的工作，文献中也有一些研究探讨不确定性下的多目标优化，并将 CVaR 作为风险度量纳入两阶段随机规划。Zheng 和 Zheng（2021）研究了一个双目标投资组合优化模型，重点是将 CVaR 作为风险度量加以最小化，同时最大化期望收益率。他们还将交易成本纳入目标函数。为求解该双目标模型，他们开发了一种基于稀疏性策略（Zitzler 等人（2001））的 NSGA-II 元启发式方法（Deb 等人，2002）（SMP-NSGAII）。Rahimi 等人（2019）提出了一个风险厌恶的可持续供应链多目标混合整数非线性模型，将 CVaR 纳入两阶段随机模型，以在不确定性下设计供应链网络。其目标是最小化设计成本并最大化利润。Nazemi 等人（2021）在灾害管理背景下，将风险中性度量、风险厌恶度量和 CVaR 度量纳入双目标两阶段设施选址模型，以分析广泛的风险偏好，包括风险中性和最坏情形方法。他们将不同的不确定性两阶段模型整合到两种著名的精确多目标框架中，即ε约束法和平衡盒方法。此外，他们还开发了一种数学启发式方法，并分析评估了不同不确定性表示与多目标框架的组合。在上述大多数研究中，均采用 CVaR 的经典表示来刻画风险厌恶性。然而，如前所述，文献中还提出了 CVaR 的其他变体。本文聚焦于 Nazemi 等人（2021）提出的现有两阶段双目标模型，并通过使用基于子集的 CVaR 多面体表示，重新构建其两阶段风险厌恶模型，从而拓展这项工作。针对这一替代形式，我们提出了一种情景割平面算法。我们对 Nazemi 等人（2021）使用的测试实例进行计算分析，以说明在其模型中，基于子集的变体相较于经典形式的表现。

本文其余部分安排如下。第2节介绍 Nazemi 等（2021）提出的现有不确定条件下的双目标设施选址问题，以及相应的基于子集的多面体数学重构。第3节概述用于求解该问题的求解方法。第4节讨论计算结果。最后，我们在第5节总结全文，并探讨潜在的未来工作。

2 两阶段风险厌恶随机优化

Nazemi 等（2021）研究的问题是一个需求不确定条件下的双目标两阶段选址分配模型，其灵感源自缓发型灾害情境中的最后一公里网络设计。一个有限

个离散需求情景集（$s \in S$、 $S = \{1, ..., N\}$），各情景发生概率相同（$\frac{1}{N}$），用于纳入随机信息。该问题旨在确定灾害响应阶段临时地方配送中心（LDC设施）的最佳选址，使受影响人群能够步行前往这些中心领取救援物资。模型试图在两个相互冲突的目标之间寻求权衡，即最小化开设LDC设施的运营成本，同时最大化覆盖率，换言之，最小化未满足需求量。我们采用 Nazemi 等（2021）引入的相同符号来描述该模型。问题在一个网络上进行建模，其中表示需求节点和潜在配送中心位置的节点集合分别记为 I 和 J，并假设 $J \subseteq I$。模型假设，每个需求节点（$i \in I$）中的受影响人群只有在其与已开设LDC设施之间的距离（d_{ij}）小于某一距离阈值（d_{max}）时，才会步行前往该设施。假设每个节点的需求量（$q_i^{(s)}$）存在不确定性。第一阶段决策（此时决策）涉及选择开设LDC设施的地点。二元变量 $y_j \in \{0,1\}$ 表示是否在节点 $j \in J$ 开设LDC设施。假设每个LDC设施的容量有限，为 c_j，且具有给定的固定成本 γ_j。决策变量 $x_{ij}^{(s)} \in \{0,1\}$ 和 $u_j^{(s)}$ 分别表示第二阶段决策（等待观察），用于确定需求节点向已开设LDC设施的分配，以及向各设施配送的救援物资数量。第二阶段决策根据第一阶段决策值和已实现的不确定需求信息确定。接下来，我们将详细说明为何在随机模型的第二阶段中采用条件风险价值（CVaR）的替代的基于子集的多面体表示。

2.1 两阶段基于子集的条件风险价值（SSCVaR）

F´abi´an（2008）针对情景概率相等的特殊情况，得到了经典条件风险价值的基于子集的多面体表示，其中 $\alpha = 1 - \frac{k}{N}$； k 是任意情景子集的基数。所有情景的基数 $\bar{}$ $\bar{}$等于 N（即 $S \subseteq S$、 $|S| = k$ 和 $|S| = N$）：

$$\mathrm{CVaR}_{1-\frac{k}{N}}(X) = \frac{1}{k} \max_{\bar{S} \subseteq S : |\bar{S}| = k} \sum_{s \in \bar{S}} X^{(s)} \tag{1}$$

其中， $X^{(s)}$ 是随机变量 X 在情景 s下的取值。方程（1）得出条件风险价值的以下基于子集的多面体表示（F´abi´an，2008）：

$$\mathrm{CVaR}_{1-\frac{k}{N}}(X) = \{\min \varrho : \varrho \geq \frac{1}{k} \sum_{s \in \bar{S}} X^{(s)}, \forall \bar{S} \subseteq S : |\bar{S}| = k\} \tag{2}$$

我们利用基于子集的表示 (2)，得到两阶段模型 (MB) 的混合整数规划模型:

$$\min \sum_{j \in V} \gamma_j y_j \tag{3}$$

$$\min \ \mathrm{CVaR}_{\alpha}(\sum_{i \in I} q_i^{(s)} - \sum_{j \in J} u_j^{(s)}) = \varrho \tag{4}$$

$$\text{s.t. } \varrho \geq \frac{1}{k} \sum_{s \in \bar{S}} (\sum_{i \in I} q_i^{(s)} - \sum_{j \in J} u_j^{(s)}) \ \forall \bar{S} \subseteq S : |\bar{S}| = k \tag{5}$$

$$\sum_{j \in J} \psi(d_{ij}) x_{ij}^{(s)} \leq 1 \qquad \forall i \in I, s \in S \tag{6}$$

$$u_j^{(s)} \leq c_j y_j \qquad \forall j \in J, s \in S \tag{7}$$

$$u_j^{(s)} \leq \sum_{i \in I} q_i^{(s)} \psi(d_{ij}) x_{ij}^{(s)} \ \ \forall j \in J, s \in S \tag{8}$$

$$x_{ij}^{(s)} \leq y_j \qquad \forall i \in I, \forall j \in J, s \in S \tag{9}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \tag{10}$$

$$x_{ij}^{(s)} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J, s \in S \tag{11}$$

$$u_j^{(s)} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall j \in J, s \in S \tag{12}$$

$$\varrho \geq 0 \tag{13}$$

第一个目标函数 (3) 最小化 LDC设施的总开设成本。第二个目标函数 (4) 最小化受影响人群未满足需求的条件风险价值。辅助变量 ϱ 表示 (2) 右侧的解值，该值与 (1) 给出的条件风险价值一致。约束 (5) 确保将 ϱ设为正确的值。约束 (6) 确保节点 i 的需求最多只能由一个已开设的 LDC设施覆盖，且该设施必须位于 LDC设施 j 的覆盖阈值范围内（如果 $d_{ij} \leq d_{max}$，则为 $\psi(d_{ij})$=1；否则为 0）。约束 (7) 是容量约束，每个 LDC设施 j对应一个约束。约束 (8) 确保被视为由 LDC设施 j 覆盖的需求量，不超过该节点在其覆盖阈值范围内实际分配到的需求量。约束 (9) 确保需求节点只能分配给已开设的 LDC设施。约束 (10)-(13) 给出了决策变量的定义域。

3 求解方法

本节介绍我们设计的割平面（近似）方法，用于处理模型中可能数量庞大的情景子集。为应对问题的双目标特性，我们将割平面法嵌入 Nazemi 等（2021）采用的多目标框架中，即 ϵ-约束法（Laumanns 等，2006）、平衡盒法（Boland 等，2015）（BB），以及 Nazemi 等（2021）提出的一种特定数学启发式方法（Mat）。该数学启发式方法将两种启发式算法——局部分支（Fischetti 和 Lodi, 2003）与松弛诱导邻域搜索（RINS）（Danna 等，2005）——的双目标推广嵌入 ϵ-约束法中。RINS 是一种变量固定方案，在 ϵ-约束框架中沿帕累托前沿从一个解移动到另一个解时使用。此外，对于仅通过固定变量无法在限定时间内使问题达到最优的解，还采用局部分支方法。在双目标设置中，通常无法找到能够同时优化所有考虑目标的解，但存在一组最优或有效的折衷解；这些解彼此不可比较，并且共同支配所有其他可行解。有效解在目标空间中的映像称为非支配点（NDP），所有非支配点共同构成帕累托前沿。有关多目标优化的更多背景知识，请参阅 Ehrgott（2005）。

3.1 基于情景子集的近似

公式（MB）包含与 S 子集相对应的约束。这组约束的规模可能迅速增长，具体取决于子集的基数（k）以及情景集合 S。

如第1节所述，已有多种基于分解的技术被提出，用于求解具有单一目标的两阶段随机规划模型（例如，Shapiro 等人（2014年））。El.ci 和 Noyan（2018年）提出了一种基于 Benders 分解的框架，用于处理具有均值—风险目标函数的条件风险价值基于子集的变体。在单目标两阶段随机模型中，固定第一阶段变量后，模型按情景进行分解。

在我们的情景子集切平面方法中，我们通过迭代求解所谓的单目标问题来放松基于子集的约束（5），并使用延迟割生成算法动态生成这些约束。更准确地说，单目标问题将目标函数（4）作为主要目标，同时固定另一个目标（3）的取值。

在每次迭代中，给定松弛模型的一个最优解 ($\hat{}y, \hat{}\varrho, \hat{}u$)，我们检查是否存在任何形式为 (5) 的违反约束；如果存在违反，则确定一个子集 S 。求解这个所谓的分离问题只需进行几项简单计算（算法1的步骤 3–8）。在每次迭代中，我们都能获得与当前向量 ($\hat{}y, \hat{}\varrho, \hat{}u$) 相关的精确第二阶段目标值；具体而言，对于每个 $s \in S$，这些目标值都可表示为 $\varrho^s = \frac{1}{k}(\sum_{i \in I} q_i^{(s)} - \sum_{j \in J} \hat{}u_j^{(s)})$。令 $S^* = \{s \in S : \sum_{s \in S^*} \varrho^s > \hat{}\varrho\}$。若 $S^* = \{s \in S : \sum_{s \in S^*} \varrho^s \leq \hat{}\varrho\}$，则将该候选解标记为新的当前最优解。否则，将与之相关的、形式为 (5) 的已识别违反约束

与 S^* 一起作为割平面加入。延迟割生成算法的伪代码见算法1。

初始割 为初始化松弛模型，我们提出一种启发式算法。该过程基于以下步骤：

1. 根据各需求点对应的需求值（q_j^s），按升序排列情景 e-
序。2. 对每个情景在 I（需求点集合）上的排名求和。3. 根据情景的累计
总排名，按降序排列。4. 选取排序后集合中的前 k 个情景。

算法1 延迟割生成

1: 使用初始割初始化松弛模型， $t \leftarrow 1$2: 当 $\sum_{s\in\hat{S}} \varrho^s > \hat{}\varrho$
时3: 对每个 $s \in S$ 执行4: $\varrho^s \leftarrow \frac{1}{k}(\sum_{i\in V} q_i^{(s)} - \sum_{j\in V} \hat{}u_j^{(s)})$ 5:
（按降序排列 ϱ^s）6: 结束循环7: $S^* \leftarrow$ 排序后取前 k 个
（最大）值 ϱ^s ^8: $S \leftarrow S^*$9: $t \leftarrow t + 1$10: 结束循环

在我们的双目标设置中，由于整数变量不仅出现在第一阶段，也出现在第二阶段，因此对帕累托前沿上的每一个点都使用割平面技术，在计算上并无益处。然而，初步测试表明，采用割平面算法计算帕累托前沿的第一个极点，并据此将生成的子集割固定到模型中，可以高质量地近似整个帕累托前沿。以下将这种求解模型 MB 的方法称为 MB。

4 计算实验

本节针对 Nazemi 等（2021）使用的实例，展示计算结果，以说明与 CVaR 的经典表示相比，所提出方法相对于该模型另一种基于子集的多面体重构的性能。

所有实验均在单线程集群上执行，每个节点配备两颗 2.93 GHz 的 Intel Xeon X5570 CPU、8 个核心和 48 GB 内存。模型使用 C++ 和 CPLEX 12.9 实现。与 Nazemi 等（2021）一样，设定时间限制（TL）为 7200 秒。我们使用 CPLEX 的通用回调功能，在 MB 模型中生成割。与会阻止 CPLEX 使用“动态搜索”的惰性约束回调不同，通用回调允许 CPLEX 根据需要在动态搜索和经典分支定界割之间进行选择。

4.1 测试实例

这里简要介绍测试实例的关键要点，更多详情请参阅 Nazemi 等（2021）。这些实例源自 Tricoire 等（2012）介绍的塞内加尔西部蒂耶斯地区干旱案例的真实数据集。该地区划分为 32 个农村地区，每个地区有 9 至 31 个村庄。该地区总共包含 500 个节点。假设所有地点的 LDC设施开设成本均相同（5000 个成本单位）。此外，假设需求节点中受影响人群步行前往最近的 LDC设施，前提是距离小于 6 千米。对于每个实例，首先生成 10 个样本情景（$|S| = 10$），以应对需求不确定性。随后，为了比较算法在情景数量较多时的表现，生成规模为 $|S| = 100$、500 和 1000 的样本。

4.2 解的质量指标

文献中提出了多种不同的质量指标，用于评估双目标与多目标优化启发式方法的性能（参见 Zitzler 等（2003））。本研究没有采用 Nazemi 等（2021）使用的超体积指标（I_H），而是采用超体积差距（gH）和乘法型 ϵ-指标。

对于具有最小化目标函数的双目标框架，假设 X 是决策空间中的可行解集，$Z = f(X)$ 是该集合在目标空间中的映射。我们假设 $A \subseteq Z$ 是帕累托前沿的近似集，$R \subseteq Z$ 是参考集。

超体积差距 (gH) 的定义如下：

$$\mathrm{gH}\% = \frac{I_H(R) - I_H(A)}{I_H(R)} \cdot 100 \tag{14}$$

gH% 的值越接近 0，近似帕累托前沿的质量就越高。

乘法 ε 指标 (I_ϵ)（Zitzler 等人，2003）给出了最小因子 ϵ，即必须将目标空间中的近似集 (A) 乘以该因子，才能使其支配参考集 (R)。I_ϵ 的值越接近 1，近似帕累托前沿的质量就越好。此处计算的 ϵ 值可解释为目标空间中 A 与 R 之间的差距。

4.3 结果

我们比较了 Nazemi 等（2021）中使用的多目标准则空间方法（e、BB 和 Mat）与两种线性对应形式的组合：一种是经典两阶段条件风险价值模型的线性对应形式（MA），另一种是基于子集的多面体表示的近似形式（MB），并考察不同风险水平下的表现。{e-MA、BB-MA、Mat-MA、e-MB、BB-MB、Mat-MB} 表示本研究评估的所有方法。

表 1 报告了条件风险价值方法的两种不同表示 MA 和 MB 的运行时间。MA 求得了最优解，而 MB 则采用前文介绍的割平面技术求解，以近似其帕累托前沿。值得一提的是，割平面法能够求得帕累托前沿上的第一个极点的最优解，而其他所有非支配解均无需生成额外的割即可计算得出。表中报告了不同 α 水平下的结果：两个特殊情形分别与期望值（风险中性）和最坏情况（风险厌恶）的观点相同，另有一个“中间”水平及其对应的 k值（$\alpha = 1 - \frac{k}{N}$）。表中结果表明，BB 与 MB 的组合求解这些实例的速度略快于其与 MA 的组合。下文将比较使用 MA 和 MB 得到的解的质量。

在分析了两种精确多目标技术（e 和 BB）后，我们将 Mat 方法与 MA 和 MB 模型结合起来求解测试实例。如表2所示，MB-Mat 方法略快于 MA-Mat。此外，我们还求解了少数情景数量较多的实例。表3报告了运行时间和找到的非支配点（NDP）数量。结果表明，随着情景数量增加，近似求解条件风险价值方法（MB）的基于子集的表示能够带来优势。

表 4 和表 5 展示了 Mat 方法与 ϵ-约束方法在小型实例上的性能比较；对于这些实例，后者能够找到最优帕累托前沿。为衡量解的质量，我们报告了超体积差距（gH%）和 I_ϵ 指标的值。分析表 4 的结果可知，Mat 与 MA 的组合给出了帕累托前沿的上界（因为 Mat 是一种启发式算法），而 ϵ-约束方法与 MB 的组合则找到了帕累托前沿的下界。之所以得到下界，是因为 ϵ-约束方法计算的是近似问题的精确解，但它从下方近似 CVaR 目标函数，因为 MB 仅使用数量减少的子集，而这些子集对于每个非支配点而言不一定是最差的。因此，我们得到负的 gH% 值和 I_ϵ 值 ≤ 1。尽管如此，两种方法都能对帕累托前沿给出高质量的近似，因为 gH% 和 I_ϵ 都表示近似集与参考集之间的差距。

为衡量 Mat 方法与 MB 相结合的性能，我们通过求解 MA 模型重新评估 MB 的第二阶段，并将第一阶段决策固定为 MB 得出的值。换言之，为了评估其真实质量，我们使用 MA 得出的精确第二阶段目标值，对 MB 提供的解重新进行评估。如表5所示，e-MB 和 Mat-MB 框架生成了高质量的帕累托前沿。

表1：对于样本量为10、规模为21–500的实例，在不同 α水平/k值下，条件风险价值、MA和MB两种表示法的运行时间比较

	α/k 值											
	0/10				0.7/3				0.9/1			
#Node	e-MA	BB-MA	e-MB	BB-MB	e-MA	BB-MA	e-MB	BB-MB	e-MA	BB-MA	e-MB	BB-MB
21	1	2	1	2	2	1	1	2	2	2	1	1
44	16	22	15	19	17	23	13	14	20	26	10	17
56	24	31	19	23	18	22	15	23	19	33	14	16
72	36	51	29	35	45	48	30	41	64	103	36	40
90	62	110	59	80	73	78	59	75	99	179	64	73
106	123	229	118	133	151	161	111	132	210	380	141	175
120	143	241	135	163	144	158	121	160	138	262	100	115
163	445	818	392	552	417	506	369	503	636	1365	TL	596
182	577	1550	481	738	932	1053	701	776	1326	2548	1010	1192
203	956	2078	879	1208	616	699	552	716	515	TL	TL	558
254	6103	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
264	3903	6800	TL	2449	6453	TL	TL	TL	TL	TL	TL	4007
275	7133	TL	6585	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
295	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
326	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
355	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
388	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
410	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
436	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
449	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
472	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
482	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL
500	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL	TL

表2：运　　采用 ϵ-约束法 (e) 和所提出的数学启发式方法 (Mat) 方法进行的运行时间比较　　od
使用 MA 和 MB 对规模为 21–500、样本量为 10 个情景的测试实例，在不同的 α/k 值下进行比较。

	α/k 值											
	0/10				0.7/3				0.9/1			
#Node	e-MA	Mat-MA	e-MB	Mat-MB	e-MA	Mat-MA	e-MB	Mat-MB	e-MA	Mat-MA	e-MB	Mat-MB
21	1	0.51	1	0.42	2	0.43	1	0.43	2	0.58	1	0.46
44	16	3	15	3	17	3	13	2	20	3	10	3
56	24	4	19	4	18	4	15	3	19	5	14	3
72	36	11	29	8	45	9	30	6	64	11	36	7
90	62	18	59	16	73	23	59	19	99	21	64	14
106	123	32	118	37	151	36	111	28	210	44	141	29
120	143	37	135	40	144	39	121	36	138	43	100	38
163	445	183	392	102	417	132	369	98	636	167	392	104
182	577	212	481	140	932	178	701	128	1326	172	1010	136
203	956	206	879	198	616	217	552	172	515	210	TL	194
254	6103	414	TL	462	TL	589	TL	356	TL	568	TL	514
264	3903	479	TL	652	6453	470	TL	405	TL	478	TL	445
275	7133	686	6585	1082	TL	781	TL	711	TL	819	TL	636
295	TL	726	TL	1068	TL	729	TL	733	TL	836	TL	775
326	TL	893	TL	1027	TL	2407	TL	856	TL	1182	TL	914
355	TL	1447	TL	1378	TL	1499	TL	1339	TL	1619	TL	1333
388	TL	1611	TL	1711	TL	1835	TL	1726	TL	1931	TL	2115
410	TL	2133	TL	2251	TL	4062	TL	2167	TL	2847	TL	1901
436	TL	2439	TL	2413	TL	2531	TL	2340	TL	3608	TL	2220
449	TL	2633	TL	2857	TL	2953	TL	2546	TL	2903	TL	2534
472	TL	2955	TL	3185	TL	3167	TL	2971	TL	3194	TL	3155
482	TL	5054	TL	4044	TL	3715	TL	3216	TL	3885	TL	3162
500	TL	6238	TL	4442	TL	5653	TL	2955	TL	4278	TL	2358

随后，我们还评估了 Mat-MB（第二阶段经重新评估）在最优帕累托前沿未知的大规模实例上的性能。为此，我们将 e-MA、BB-MA 和 Mat-MA 得到的帕累托前沿（U）的并集作为参考集。表6展示了超体积差距（gH%）值。负值表示，第二阶段值经重新评估的 Mat-MB 所获得的近似解优于其他方法所得结果的并集。

表3：在情景数量较大时， ϵ-约束法 (e) 与所提出的数学启发式算法 (Mat)（包含 MA 和 MB）的性能比较，适用于 α-水平 0.7 及其对应的 k-值。T[s] 表示以秒为单位的运行时间。

α/k值：0.7/3

		e-MA		Mat-MA		**e-$\overline{\text{MB}}$**		Mat-$\overline{\text{MB}}$	
#Node	*#Scenario*	T[s]	#NDP	T[s]	#NDP	T[s]	#NDP	T[s]	#NDP
21	100	161	17	27	17	56	17	5	17
	500	6476	16	348	16	322	16	52	16
	1000	TL	6	1668	17	TL	13	282	17
44	100	1076	30	178	30	316	30	34	30
	500	TL	5	1374	32	TL	19	365	32
	1000	TL	3	TL	3	TL	7	1239	34
56	100	2267	39	234	39	583	39	51	39
	500	TL	3	2675	40	TL	22	776	38
	1000	TL	3	TL	2	TL	3	1747	41
72	100	4186	50	180	50	826	50	107	50
	500	TL	3	TL	2	TL	15	983	51
	1000	TL	2	TL	2	TL	2	TL	2

表4：质 量比较，使用 I_ϵ 和超体积差距（gH%）评估近似帕累托前沿，其中最优 al
帕累托前 沿已通过使用 ϵ-约束方法（e）求解已求解实例而得知，样本量为10个情景 os

α/k值：0.7/3

	e-MA（参考集）		Mat-MA		**e-$\overline{\text{MB}}$**	
节点数	**gH%**	I_ϵ	**gH%**	I_ϵ	**gH%**	I_ϵ
21	0	1	0.00	1.00	-0.01	0.99
44	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00
56	0	1	0.00	1.00	0.00	0.91
72	0	1	0.42	1.22	-0.02	0.95
90	0	1	0.05	1.32	0.00	0.87
106	0	1	0.06	1.33	-0.01	0.94
120	0	1	0.02	1.35	0.00	1.00
163	0	1	0.00	1.00	0.00	0.96
182	0	1	0.00	1.00	0.00	0.94
203	0	1	0.02	1.02	0.00	0.97

表5：使用 I_ϵ 和超体积差距（gH%）对 e-MB 和 Mat-MB 得到的重新评估后的近似帕累托前沿进行质量比较，其中最优帕累托前沿已知，是使用 ϵ-约束方法（e）求解已求解实例所得，情景样本量为 10

α/k值：0.7/3

	e-MA（参考集）		**e-$\overline{\text{MB}}$**		Mat-$\overline{\text{MB}}$	
节点数	**gH%**	I_ϵ	**gH%**	I_ϵ	**gH%**	I_ϵ
21	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00
44	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00
56	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00
72	0	1	0.01	1.03	0.01	1.03
90	0	1	0.00	1.04	0.00	1.04
106	0	1	0.01	1.00	0.01	1.00
120	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00
163	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00
182	0	1	0.00	1.04	0.00	1.04
203	0	1	0.00	1.00	0.00	1.00

5 结论

本文研究了基于子集的条件风险价值多面体表示，用于在 Nazemi 等（2021）提出的两阶段双目标选址—分配模型中刻画风险，其目的在于

表6：Mat-MB 在大规模实例上的性能，此时最优帕累托前沿尚不可知。将 e-MA、BB-MA 和 Mat-MB 获得的帕累托前沿的并集视为参考集。情景的样本量为 10

	α/k值：0.7/3	
	U（参考集）	Mat-MB
节点数	**gH%**	**gH%**
254	0.00	0.00
275	0.00	0.00
295	0.00	-0.02
326	0.00	-0.06
355	0.00	0.01
388	0.00	-0.10
410	0.00	-0.05
436	0.00	-0.02
449	0.00	-0.03
472	0.00	-0.08
482	0.00	-0.02
500	0.00	0.00

是救灾网络的最优设计。该模型旨在寻找确定性目标（最小化选址成本）与不确定性目标（最小化未满足需求）之间的权衡，其中不确定性存在于需求值中。我们提出了一种近似割平面法，用于处理包含条件风险价值的两阶段随机优化问题的、计算上具有挑战性的基于子集的公式。

我们通过对 Nazemi 等（2021）所使用的实例开展计算实验，评估了所提出方法的性能。实验结果表明，对于大量情景，所提出的近似割平面法具有良好的效果；同时，实验还说明了引入基于子集的公式的近似会如何影响所得解的质量。在未来的研究中，我们希望探究通过采用额外的改进措施，是否能够进一步提升割平面法的性能。

致谢

作者感谢 Tricoire 等（2012）提供真实世界数据集。本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF） [P 31366]资助。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿版本采用知识共享署名许可。

参考文献

Birge, J. R. 和 Louveaux, F.（2011）。 *Introduction to stochastic programming*。Springer Science & Business Med ia.

Boland, N.、Charkhgard, H. 和 Savelsbergh, M.（2015）。用于双目标整数规划的准则空间搜索算法：平衡盒方法。 *INFORMS Journal on Computing*，27(4):735–754。

Chen, Y耦合系统动力学分析与双阶段鲁棒规划，（2021）优化混合噪声驱动的页岩气-水供应链。 *Journal of Cleaner Production*，278:123209。

Danna, 探索松弛诱导邻域以改进 MIP 解。 *Mathematical Programming*，102(1):71–90。

Deb, K 快速精英多目标遗传算法：NSGA-II。 *IEEE transactions on evolutionary computation*，6(2):182–197。

Ehrgott, M.（2005年）。 *Multicriteria optimization*，第491卷。Springer Science & Business Media。

El.ci, ¨O. 和 Noyan, N.（2018）。用于人道主义救援网络设计的机会约束两阶段随机规划模型。 *Transportation research part B: methodological*，108:55–83。

F´abi
´ 2008 *European Journal of Operational Research* 191 3 888 911

an, C. I.（）。两阶段随机模型中的CVaR目标与约束处理。, ( ): – 。Filippi, C., Guastaroba, G., 和 Speranza, M. G.（2020）。金融领域之外的条件风险价值：综述。*International Transactions in Operational Research*, 27(3):1277–1319。Fischetti, M. 和 Lodi, A.（2003）。局部分支。 *Mathematical programming*, 98(1-3):23–47。Gutjahr, W. J. 和 Pichler, A.（2016）。随机多目标优化：非标量化方法综述。 *Annals of Operations Research*, 236(2):475–499。Huang, R., Qu, S., Yang, X., 和 Liu, Z.（2021）。风险规避型多阶段分布鲁棒优化。 *Journal of Industrial & Management Optimization*, 17(1):233。Krokhmal, P., Palmquist, J., 和 Uryasev, S.（2002年）。采用条件风险价值目标函数和约束的投资组合优化。 *Journal of risk*, 4:43–68。Laumanns, M., Thiele, L., 和 Zitzler, E.（2006）。一种基于ε-约束法、适用于元启发式算法的高效自适应参数变化方案。 *European Journal of Operational Research*, 169(3):932–942。Nazemi, N., Parragh, S. N., 和 Gutjahr, W. J.（2021）。不确定性下的双目标设施选址及其在最后一公里灾害救援中的应用。 *Annals of Operations Research*, https://doi.org/10.1007/s10479-021- 04422-4。Noyan, N.（2012）。风险规避型两阶段随机规划及其在灾害管理中的应用。*Computers & Operations Research*, 39(3):541–559。Rahimi, M. 和 Ghezavati, V.（2018）。不确定条件下可持续多周期逆向物流网络的设计与规划：利用条件风险价值（CVaR）回收建筑与拆除废弃物。 *Journal of Cleaner Production*, 172:1567–1581。Rahimi, M., Ghezavati, V., 和 Asadi, F.（2019）。考虑多重不确定性来源和数量折扣的随机风险规避型可持续供应链网络设计问题。 *Computers & Industrial Engineering* 130 430 449 , : –

。Roman, D., Darby-Dowman, K., 和 Mitra, G. （ 2007 ）。采用两种风险度量的均值 - 风险模型：一种多目标方法。 *Quantitative Finance*, 7(4):443–458。Shapiro, A., Dentcheva, D., 和 Ruszczy
´ 2014 *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*

nski, A.（）。. SIAM。Simic, V.（2019）。用于报废车辆管理的区间参数条件风险价值两阶段随机规划模型。 *Environmental Modeling & Assessment*, 24(5):547–567。Tricoire, F., Graf, A., 和 Gutjahr, W. J.（
2012 *Computers* ）。 *& operations research* 39 7 1582 1592
双目标随机覆盖路径问题。, ( ): – 。Zhang, W., Rahimian, H., 和 Bayraksan, G.（2016）。风险规避型多阶段随机规划的分解算法及其在不确定条件下水资源分配中的应用。 *INFORMS Journal on Computing*, 28 3 385 404( ): – 。Zheng, Y. 和 Zheng, J.（2021）。一种结合多目标优化与多属性决策的全新投资组合优化模型。 *Applied Intelligence*, 第 1–12 页。Zitzler, E., Laumanns, M., 和 Thiele, L. （ 2001 ）。SPEA2：改进强度帕累托进化算法。*TIK-report*, 103。Zitzler, E., Thiele, L., Laumanns, M., Fonseca, C. M., 和 Da Fonseca, V. G.（2003）。多目标优化器的性能评估：分析与综述。 *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 7(2):117–132。