arXiv:2302.06515v1 [math.CT] 13 Feb 2023

2-范畴上的带指标预函子

SORI LEE

Abstract. 我们定义了 2-范畴上的指标化预函子这一概念，并用它发展出一套极限的抽象理论。该理论涵盖（锥形）极限、加权极限、端和 Kan 扩张。所得结果包括这样一个定理的抽象版本：右伴随函子保持极限；还抽象地阐述了一种现象，即函子保持极限时所涉及的比较箭头，对于该函子所依赖的任意函子变量而言都是自然的。这些结果广泛运用了 2-范畴上的指标化预函子的资料与公理。

Contents

1. 引言 1 2. 预函子预备知识 3 3. 定义 6 4. 例子 9 5. 极限的保持、反映、提升与创造 13 6. 极限的函子性 16 7. 参数化极限保持的自然性 18 8. 右伴随 1-胞腔保持极限 20 9. 为什么全忠实函子反映极限 22 致谢 25 参考文献 26

1. Introduction

这些笔记定义了2-范畴上的指标化预函子，并开始对其进行研究。重点在于将其用于极限的抽象理论。该理论涵盖（锥式）极限、加权极限、端和 Kan 延拓。

一般而言，指标化预函子是预函子的指标化版本，正如指标化范畴是范畴的指标化版本。文献中有少数地方讨论了基于 1-范畴的指标化预函子。Wood（1982）简要提及了它们，并将其作为 proarrow 的一个例子。Koudenburg（2012）使用基于特定 1-范畴 $(0 \rightrightarrows 1)$ 的指标化预函子，将双范畴的弱变体描述为自由严格双范畴单子的相应弱代数。Shulman（2013）在发展富化指标化范畴理论时，定义了基于 1-范畴的指标化预函子的富化版本。基于 2-范畴的指标化预函子似乎尚未得到研究。

Date: 2023年2月13日。 https://orcid.org/0000-0002-3911-89091

下面概述基于 2-范畴的指标化预函子如何自然地成为抽象极限的框架。出发点是通常的预函子。回顾一下，若 R 和 S 是范畴，则 预函子 $R \to S$ 是一个函子 $R^{\mathrm{op}} \times S \to \mathrm{SET}$。给定预函子 $H\colon R \to S$ 和对象 $s \in S$，若对象 $r \in R$ 连同元素 $h \in H(r,\ s)$ 使得有序对 $(r,\ h)$ 是函子 $H(-,\ s)\colon R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{SET}$ 的泛元，我们就称其为 s 的一个 极限 。现在，若 I 和 X 是范畴，我们可以考虑预函子 $\mathsf{Cone}_X\colon X \to \mathrm{CAT}(I,\ X)$，其定义为 $\mathsf{Cone}_X(x,\ d) = \mathrm{CAT}(I,\ X)(\Delta_x,\ d)$。显然，该预函子中对象 $d \in \mathrm{CAT}(I,\ X)$ 的极限，恰好就是图表 d 的极限锥。我们将看到，这种预函子式的极限概念不仅涵盖锥形极限，也涵盖上文提到的其他极限概念。

然而，普通预函子很快便显露出局限性。当我们尝试推广一些关于（例如锥形）极限的关键定理时，便会发现需要更多的结构。例如，考虑这样一个定理：右伴随函子保持锥形极限。若要用预函子极限来表述这一陈述的抽象形式，我们需要处理的不是单个预函子，而是一族 $H_X\colon R_X \to S_X$ 个预函子，并且它们带有适当的函子作用，定义在 $X \in \mathrm{CAT}$ 中。若此处的 CAT 仅被视为一个 1-范畴，那么这样的一族就是以 1-范畴为底的指标化预函子。即使在这种情形下，我们也可以表述函子（或更一般地说，1-胞腔）保持预函子极限这一性质，从而得到该定理陈述的抽象版本。然而，1-范畴指标化缺少证明该结论所需的信息。

为了解决这个问题，我们需要 $R_{(-)}$ 和 $S_{(-)}$ 不仅能函子性地作用于函子（1-胞），还要作用于自然变换（2-胞腔）。更重要的是，这些作用必须与 $H_{(-)}$ 的函子作用相容。加入这些要求后，我们便得到 2-范畴上的指标化预函子这一概念。值得注意的是，2-范畴框架还使我们能够从特定的基底 CAT 中抽象出来，并以任意 2-范畴中的伴随 1-胞腔来表述该定理。但最重要的是，它使我们能够证明该定理。

“伴随保持”定理（第 8 节）是这些讲义中所证明的两个抽象定理之一；证明它需要 2-范畴上的指标化预函子的资料与公理。另一个定理则抽象地说明这样一种现象：函子保持极限时所涉及的比较箭头，对于该函子所依赖的任意函子变量都是自然的（第 7 节）。正是这个问题促使我们开展这项工作。尽管这两个定理数量不多，我们仍将它们作为示例，展示指标化预函子如何作为抽象极限的框架。

另一方面，我们也会遇到一些关于极限的抽象结果，而这些结果并不需要指标化预函子的结构。我们将用普通预函子的术语陈述并证明这些结果，并在适当时将指标化预函子化的表述推导为推论。这类结果包括极限的函子性（第6节），以及对“全忠实函子反映极限”这一事实进行预函子化分析（第9节）。

这些笔记目前的形式尚未涉及一些重要主题。目前，对 2-范畴上的指标化预函子这一概念的论证是自下而上的，完全基于其在抽象极限中的应用。为了对此加以补充，还需要进一步考察这一概念的结构。首先，应借助 proarrow 装备之类的框架，系统地确立 2-范畴上的指标化范畴、函子与 pr 函子之间的关系。另一个尚未讨论但值得一提的主题是指标化预函子的态射；更准确地说，是 2-范畴上的一对指标化范畴之间的态射，以及这对范畴之间的一个指标化预函子。范畴论中的经典结果表明，可以将一种极限概念（例如端）化归为另一种极限概念（例如锥形极限）。态射之所以值得关注，是因为其中一个自然的类刻画了这类化归的结构。

本文发展了严格 2-范畴上的严格索引范畴之间的指标化预函子理论。尽管在双范畴上采用完全弱化的伪索引范畴设定，不太可能影响该理论的总体框架，但伪索引本身确实会带来额外的技术难点，包括指标化预函子的定义。对于这项探索性工作，利用严格设定的简洁性似乎是合理的，因为它仍然涵盖了主要例子。

还可以从多个方向作进一步推广。一个颇具吸引力的方向是富化。例如，我们可以寻求本文工作与 Shulman 的工作的共同推广，并定义 2-范畴上的索引幺半范畴、富化索引范畴和富化索引预函子。另一个方向是使用预函子的抽象替代物，例如 proarrow。最后，我们还可以推广到更高维。本文的经验表明，要建立有效的 2-极限抽象理论，可能需要 3-范畴上的索引 2-预函子；要建立抽象的 $(\infty, 1)$-极限理论，则可能需要 $(\infty, 2)$-范畴上的预函子，诸如此类。这些理论会如何发展?

2. Profunctorial preliminaries

本节将讨论一些处理普通（即非指标化）预函子时的核心思想。这些思想尤其是我们在第 3 节首次讨论指标化预函子时所必需的，并且在后续各节中仍然十分重要。

在讨论预函子之前，有必要先说明我们将如何处理集合的大小问题。

关于大小的约定。在这些笔记中，我们将使用三种相对的集合范畴大小，以及基于集合范畴的结构大小：小、中和大[1]。所谓相对，是指我们不具体限定这些大小；唯一的要求是，若 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 依次表示相应的宇宙，则 $\mathcal{U} < \mathcal{V} < \mathcal{W}$。此外，我们将采用多态性约定，即这些宇宙

[1]我们避免使用形容词“large”，因为它已有约定俗成的含义（例如“非小”），而这些含义与我们的用法不相容。相比之下，典型的“小”概念（例如“集合，而非真类”）被认为大体上与我们的用法相容。

在每个可分解的语境中都被反复视为全称量化，而非始终固定不变。

凡涉及大小时，除非另有说明，结构（如集合、范畴等）都默认为中。事实上，未指定大小的结构定义，严格来说，是定义其中版本，并且根据多态性，也默认为该结构所有其他相对较小的版本（即小、大等版本）。

由于多态性，只要不与局部论述中其他实体的大小选择相矛盾，为新引入的实体选择何种大小都不会影响其含义。经验法则是，选择一种能尽量减少叙述中明确提及大小的方案。除非必要，也应避免明确提及宇宙。这样做是为了尽可能淡化大小问题。

表示结构总体的符号遵循以下模式。小结构的总体使用斜体字形。例如，集合范畴表示小集合的范畴。中结构的总体使用小型大写字形。例如，$\textsc{Set}$ 表示大集合的范畴。

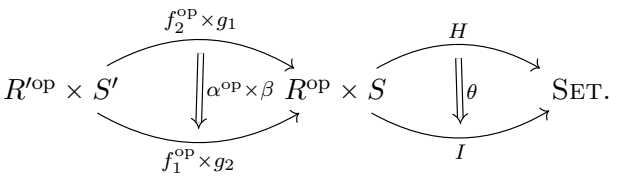
沿函子拉回预函子。 回忆一下，预函子$H\colon R \to S$是一个函子 $R^{\mathrm{op}} \times S \to \textsc{Set}$。在预函子语境中，我们分别将 R 和 S 称为 H 的定义域 和陪域 。

对预函子的一项重要操作，是沿着指向其定义域范畴和陪域范畴的函子将其拉回。具体而言，预函子 $H\colon R \to S$沿函子 $f\colon R' \to R$和 $g\colon S' \to S$的拉回 是预函子$H(f,g)\colon R' \to S'$，定义为复合函子

$$R'^{\mathrm{op}} \times S' \xrightarrow{f^{\mathrm{op}} \times g} R^{\mathrm{op}} \times S \xrightarrow{H} \textsc{Set}. \tag{1}$$

注记 2.1. 应当注意，不要将这个预函子 $H(f,g)$:$R' \to S'$与函数 $H(a,b)\colon H(r_2, s_1) \to H(r_1, s_2)$混淆；这里的箭头为 a:$r_1 \to r_2$（在 R中）和 $b\colon s_1 \to s_2$（在 S中）。注意， $H(f,g)$本质上——撇开迂腐的“op”不谈——是复合式（1）的多范畴记号；而复合式（1）本身又应借鉴复合函子取值的记号：当 $r' \in R'$和 $s' \in S'$时， $H(f,g)(r',s') = H(f(r'), g(s'))$。与 $H \circ (f^{\mathrm{op}} \times g)$相比，这种记号更直观、简洁，因而十分便利；它似乎在前箭理论中普遍使用（nLab 2022）。

推广而言，我们也可以沿着函子的自然变换拉回预函子的自然变换。令 $H, I\colon R \to S$为预函子， $\theta\colon H \to I$ 为预函子的自然变换。此外，令 f_1, $f_2\colon R' \to R$和 $g_1, g_2\colon S' \to S$为函子，并令 $\alpha\colon f_1 \to f_2$和$\beta\colon g_1 \to g_2$为自然变换。那么， θ 沿着 α 和β的拉回 是一个预函子的自然变换 $\theta(\alpha,\beta)\colon H(f_2, g_1) \to I(f_1, g_2)$，其定义为自然变换的水平复合



这些拉回常会出现在相关讨论中，尤其是指标化预函子的定义中。

异态射与异态射图表。

定义 2.2. 设 $H\colon R \to S$ 是范畴之间的一个预函子，且 $r \in R$ 和 $s \in S$ 是对象。元素 $h \in H(r,s)$ 可称为从 r 到 s的异态射[2]。我们可以写作 $h\colon r \to s$，以表示 h 是从 r 到 s的。

这些术语和记号暗示我们可以将预函子中的元素视作某种箭头。事实上，异态射是箭头的一般化，因为范畴 C 中的箭头，恰好就是特定预函子 $\mathrm{Hom}_C\colon C \to C$ 中的异态射。重要的是，这种一般化也包含复合：在 C 中，一个箭头与 C 中适当可复合的箭头进行前复合和后复合，是预函子 $H\colon R \to S$ 的逆变与协变作用分别施加于其异态射与 R 和 S 中适当箭头上的特例。这样，我们便将异态射视为与 R 和 S中的箭头进行“复合”。

这一观点的一个结果是可以进行广义的图表推理。我们可以考虑由若干态射构成、其中部分态射为异态射的图表，并讨论其交换性。这类图表可称为异态射图表。例如，我们可以考虑如下形式的方块

$$\begin{array}{ccc} r & \xrightarrow{h} & s \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ r' & \xrightarrow{h'} & s' \end{array}$$

其中，$h\colon r \to s$和 $h'\colon r' \to s'$是 H中的异态射，$a\colon r \to r'$是R 中的箭头，而 $b\colon s \to s'$ 是 S中的箭头。这个方块的交换性指的是从 r 到 s'的两个异态射相等，即 $a^*(h') = b_*(h)$。

使用异态射图表的好处一如往常：图示呈现能让等式更直观，往往还能凸显等式“类型”中所具有的对称性。在这些笔记中，异态射图表将频繁出现。

预函子对偶。对偶范畴是范畴上的一项基本操作，也是范畴对偶的基础。下文将定义一种作用于预函子上的操作，它推广了对偶范畴；而这一操作又将成为范畴对偶的预函子化推广的基础。

定义 2.3. 设 $H\colon R \to S$ 是一个预函子。H 的相反预函子是由下式给出的预函子 $H^{\mathrm{op}}\colon S^{\mathrm{op}} \to R^{\mathrm{op}}$

$$H^{\mathrm{op}}(s,r) = H(r,s)$$

对所有对象以及态射 $s \in S$ 和 $r \in R$均成立。

相反预函子推广了对偶范畴，因为如果 C 是一个范畴，则 $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}} = \mathrm{Hom}_C^{\mathrm{op}}$。取预函子的相反仍然是一个严格对合：

[2]这个术语似乎是由 Ellerman（2006）引入的。

命题 2.4. 设 $H\colon R \to S$ 是一个预函子。那么 $(H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = H$。 □

现在让我们用相反预函子来描述预函子对偶。对偶性可以组织成如下的元数学构造和定理。我选择以非正式的方式处理它们（具体而言，我不会精确定义什么是"陈述"）；即便如此，它们仍足以为本笔记中的应用提供实用的元算法和论证。

"定义"2.5。关于任意预函子 $\phi(H,\ r,\ s,\ h)$ 中任意异态射 $h\colon r \to s$ 的陈述，关联着一个对偶陈述

$$\phi^{\mathrm{op}}(H, r, s, h) := \phi(H^{\mathrm{op}}, s, r, h)$$

它仍然是关于任意预函子$H\colon R \to S$中任意异态射 $h\colon r \to s$ 的陈述。

"定理"2.6 (预函子对偶原理)。设 $\phi(H, r, s, h)$ 如上所述。那么 $\forall H, r, s, h.\phi(H, r, s, h)$ 当且仅当 $\forall H, r, s, h.\phi^{\mathrm{op}}(H, r, s, h)$。

"证明"。"仅当"：如果 $\forall H、\ r、\ s、\ h.\phi(H、\ r、\ s、\ h)$，那么对于任意 $H、\ r、\ s、\ h$，我们有 $\phi(H^{\mathrm{op}}、\ s、\ r、\ h)$，也就是说，$\phi^{\mathrm{op}}(H、\ r、\ s、\ h)$。"如果"：如果 $\forall H、\ r、\ s、\ h.\phi^{\mathrm{op}}(H、\ r、\ s、\ h)$，也就是说，$\forall H、\ r、\ s、\ h.\phi(H^{\mathrm{op}}、\ s、\ r、\ h)$，那么对于任意 $H、\ r、\ s、\ h$，我们有一个预函子 $H^{\mathrm{op}}\colon S \to R$ 和一个异态射 $h\colon\ s \to r$，其位于 H^{op} 中，因此我们有 $\phi((H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}、\ r、\ s、\ h)$，也就是说，根据命题 2.4，$\phi(H、\ r、\ s、\ h)$，如 desired。

我们将在这些笔记中不断遇到预函子对偶的例子。事实上，接下来我们讨论预函子极限和余极限时，马上就会看到一个例子。

预函子中的极限和余极限。正如我们现在将要定义的，预函子中的极限和余极限是传统范畴中的"锥形"极限和余极限，以及其他类似（余）极限的概念（如带权（余）极限、（余）端和 Kan 延拓）的一种抽象；在第 4 节讨论指标化预函子的例子时，我们将看到这些概念。

定义 2.7。设 $H\colon\ R \to S$ 是一个预函子。我们称 H 中的一个异态射 $h\colon\ r \to s$ 是一个极限，如果二元组 $(r,\ h)$ 是函子 $H(-,\ s)\colon\ R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 的一个泛元。

在这种情况下，我们称对象 s 在 H 中是收敛的，或具有一个极限，并称二元组 $(r,\ h)$ 是 H 中的一个极限。我们称 H 具有极限，如果每个对象 $s \in S$ 都有一个极限。

对偶地，H 中的一个异态射 $h\colon\ r \to s$ 是一个余极限，如果将其视为预函子 H^{op} 中的异态射 $s \to r$ 时，它是一个极限。也就是说，如果二元组 $(s,\ h)$ 是函子 $H(r,\ -)\colon\ S \to \mathrm{Set}$ 的一个泛元。在这种情况下，我们称对象 r 在 H 中是收敛的，或具有一个余极限，并称二元组 $(s,\ h)$ 是 H 中的一个余极限。我们称 H 具有余极限，如果每个对象 $r \in R$ 都有一个余极限。

3. Definition

下文中的 2-范畴均指严格 2-范畴，2-函子均指严格 2-函子，而 2-自然变换均指严格 2-自然变换。

回顾一下，范畴 C 上的指标范畴通常定义为拟函子 $C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAT}$，其中 CAT 表示范畴的大 2-范畴。我们需要将这一概念推广（采用其严格且协变的版本），使其基底为一个 2-范畴。为说明下文指标化预函子的定义，我将以一种较为冗长的方式给出其定义。

定义 3.1. 一个严格协变指标化范畴 R 在 2-范畴 $\mathcal{X}$由以下构成

(1) 对每个 0-胞腔 $X \in \mathcal{X}$，一个范畴 R_X；(2) 对每个 1-胞腔 $f\colon X \to Y$，一个函子 $R_f\colon R_X \to R_Y$，其中 $\mathcal{X}$；以及 (3) 对每个 2-胞 $\theta\colon f \to g$，一个自然变换 $R_\theta\colon R_f \to R_g$，其中 $\mathcal{X}$

使得赋值 $X \mapsto R_X$ 严格地具有 2-函子性。

在这些笔记中，我们将简称严格协变指标化范畴为指标范畴。

用简明的语言来说，这样的指标范畴就是一个 2-函子 $\mathcal{X} \to \mathrm{CAT}$。

在定义指标化范畴之间的指标化预函子之前，我们先来定义指标函子。

定义 3.2。设 R 和 S 是 2-范畴 $\mathcal{X}$上的指标化范畴。一个严格指标函子 $k\colon R \to S$ 由对每个 0-胞腔 $X \in \mathcal{X}$ 给出的一个函子 $k_X\colon R_X \to S_X$ 组成，且它关于 X是严格自然的。

在本文中，我们将严格指标函子简称为指标函子。

用简洁的语言来说，这样的指标函子就是一个 2-自然变换 $R \to S$。

下面给出本文的主要定义。

定义 3.3。设 R 和 S 是 2-范畴 $\mathcal{X}$上的指标化范畴。一个指标化预函子 $H\colon R \to S$ 由以下部分组成：

(1) 对每个 0-胞腔 $X \in \mathcal{X}$，一个预函子 $H_X\colon R_X \to S_X$；(2) 对 $\mathcal{X}$ 中的每个 1-胞腔 $f\colon X \to Y$，一个自然变换 $H_f\colon H_X \to H_Y(R_f,\ S_f)$

使得 H_X 关于 X 是“函子性的”，而 H_f 关于 f 是外自然的。

有必要澄清最后两个公理。首先，“函子性”包含以下两点。

(i) 对每个对象 $X \in \mathcal{X}$，$H_{\mathrm{id}_X}\colon H_X \to H_X(R_{\mathrm{id}_X},\ S_{\mathrm{id}_X}) = H_X$ 等于 $\mathrm{id}^{H_X}\colon H_X \to H_X$，其中二者都是预函子之间的自然变换。(ii) $H_{g\circ f}\colon H_X \to H_Z(R_{g\circ f},\ S_{g\circ f}) = H_Z(R_g \circ R_f,\ S_g \circ S_f)$ 等于（纵向）复合

$$H_g(R_f, S_f) \circ H_f\colon H_X \to H_Z(R_g, S_g)(R_f, S_f) = H_Z(R_g \circ R_f, S_g \circ S_f)$$

作为每个 1-胞 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$ 在 $\mathcal{X}$ 中的预函子自然变换。

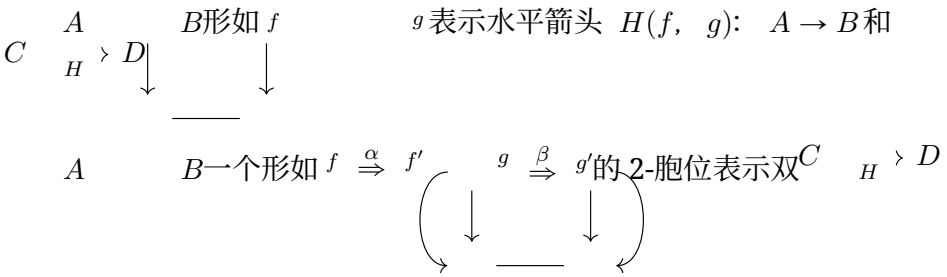
另一方面，外自然性指的是通常的外自然性：即图表

$$\begin{array}{ccc} H_X & \xrightarrow{H_f} & H_Y(R_f, S_f) \\ \downarrow{\scriptstyle H_{f'}} & & \downarrow{\scriptstyle H_Y(R_f, S_\theta)} \\ H_Y(R_{f'}, S_{f'}) & \xrightarrow{H_Y(R_\theta, S_{f'})} & H_Y(R_f, S_{f'}) \end{array} \tag{2}$$

对于每个 2-胞 $\theta\colon\ f \to f'$ 在 1-胞 $f,\ f'\colon\ X \to Y$ 中的交换。

注 3.4。指标化预函子的公理——其中函子性的条件尤其难以如上完整阐述——可以更自然地通过预函子的双范畴图来表示。

在这样的图中，一个节点表示一个范畴，节点之间的垂直箭头表示范畴之间的函子，节点之间的水平箭头表示范畴之间的预函子，垂直箭头之间的双箭头表示函子之间的自然变换，水平箭头之间的双箭头表示预函子之间的自然变换。它与通常的 2-范畴图的不同之处在于，一个形如



水平箭头之间的箭头 $H(\alpha,\ \beta)\colon H(f',\ g) \to H(f,\ g')$。

就预函子的双范畴图而言，函子性条件 (i) 即等式

$$\begin{array}{ccc} R_X & \xrightarrow{H_X} & S_X \\ {\scriptstyle R_{\mathrm{id}_X}}\downarrow & \Downarrow H_{\mathrm{id}_X} & \downarrow{\scriptstyle S_{\mathrm{id}_X}} \\ R_X & \xrightarrow[H_X]{} & S_X \end{array} = \begin{array}{ccc} R_X & \xrightarrow{H_X} & S_X \\ \| & \Downarrow \mathrm{id}_{H_X} & \| \\ R_X & \xrightarrow[H_X]{} & S_X, \end{array}$$

而条件 (ii) 即等式

$$\begin{array}{ccc} R_X & \xrightarrow{H_X} & S_X \\ {\scriptstyle R_{g\circ f}}\downarrow & \Downarrow H_{g\circ f} & \downarrow{\scriptstyle S_{g\circ f}} \\ R_Z & \xrightarrow[H_Z]{} & S_Z \end{array} = \begin{array}{ccc} R_X & \xrightarrow{H_X} & S_X \\ {\scriptstyle R_f}\downarrow & \Downarrow H_f & \downarrow{\scriptstyle S_f} \\ R_Y & \xrightarrow[H_Y]{} & S_Y \\ {\scriptstyle R_g}\downarrow & \Downarrow H_g & \downarrow{\scriptstyle S_g} \\ R_Z & \xrightarrow[H_Z]{} & S_Z. \end{array}$$

外自然性条件 (2) 即为以下等式

$$\begin{array}{ccc} R_X & \xrightarrow{H_X} & S_X \\ {\scriptstyle R_f}\Big(\Rightarrow{\scriptstyle R_\theta}\downarrow{\scriptstyle R_{f'}} & \Downarrow H_{f'} & \downarrow{\scriptstyle S_{f'}}{\scriptstyle S_{f'}}\Big) \\ R_Y & \xrightarrow[H_Y]{} & S_Y \end{array} = \begin{array}{ccc} R_X & \xrightarrow{H_X} & S_X \\ {\scriptstyle R_f}\downarrow & \Downarrow H_f & {\scriptstyle S_f}\downarrow\Rightarrow{\scriptstyle S_\theta} \\ R_Y & \xrightarrow[H_Y]{} & S_Y. \end{array}$$

注 3.5。 即便逐点考察，外自然性条件 (2) 也不过是一个简单的要求。具体来说，只要 $h\colon r \to s$ 是 H_X中的一个异态射，那么异态射图表

$$\begin{array}{ccc} f_*r & \xrightarrow{f_*h} & f_*s \\ {\scriptstyle \theta_*r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_*s} \\ f'_*r & \xrightarrow{f'_*h} & f'_*s \end{array}$$

在 H_Y交换（“异态射 $f_*h\colon f_*r \to f_*s$关于 f是自然的”）。

与指标范畴或指标函子的情形一样，我们可以将公式构造的负担转移到一个抽象概念上，从而得到对指标化预函子的清晰描述，如下所示。

定义 3.6。 设 $\mathcal{X}$为一个 2-范畴，且 $E_{(-)}\colon \mathcal{X}^{\mathrm{co,op}} \times \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAT}$为一个 2-函子。$E$ 的一个对角截面 H 由以下部分组成：

（1）对每个对象 $X \in \mathcal{C}$，有一个对象 $H_X \in E_{X,X}$；（2）对每个 1-胞腔 $f\colon X \to Y$，有一个箭头 $H_f\colon H_X \to E_{f,f}(H_Y)$，属于 $E_{X,X}$

使得 H_X关于 X具有函子性，并且态射 $H_f\colon H_X \to E_{f,f}(H_Y)$关于 f是外自然的。

现在，若 R 和 S 是 2-范畴 $\mathcal{X}$上的指标化范畴，那么一个指标化预函子 $H\colon R \to S$若是小的，也就是说，对每个 H_X而言，它都是一个小预函子，则它恰好是以下 2-函子的一个对角截面

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{\mathrm{co,op}} \times \mathcal{X}^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{CAT} \\ (X, X') &\mapsto \mathit{Prof}(R_X, S_{X'}), \end{aligned}$$

其中 $\mathit{Prof}(R_X, S_{X'})$表示小预函子 $R_X \to S_{X'}$范畴。

我们来引入一个术语，用来描述指标化预函子中极限的存在性；这个术语推广了范畴中极限情形下已有的说法。

术语 3.7. 设 $H\colon R \to S$ 是 2-范畴 $\mathcal{X}$上的一个指标化预函子。若预函子 H_X 有（余）极限，我们就说对象 $X \in \mathcal{X}$ 具有（余）极限（类型为 H）。

4. Examples

例 4.1（Hom 集）。 我们将把范畴中的 Hom 集表示为恒等 2-函子 $\mathrm{id}_{\mathrm{CAT}}\colon \mathrm{CAT} \to \mathrm{CAT}$ 上的一个指标化自预函子，并将其视为一个指标化范畴。

对于每个范畴 $X \in \mathrm{CAT}$，我们都有一个预函子 $\mathrm{Hom}_X\colon X \to X$。如果 $f\colon X \to Y$ 是 CAT 中的函子，那么我们就有一个自然变换

$$\mathrm{Hom}_f\colon \mathrm{Hom}_X = \mathrm{Hom}_X(-,-) \to \mathrm{Hom}_Y(f-, f-) = \mathrm{Hom}_Y(f, f)$$

由 f 的函子作用给出，显然它关于 f 具有函子性。最后，不难看出，在函子 f，$f'\colon X \to Y$ 之间的自然变换 $\theta\colon f \to f'$ 处，外自然性条件 CAT归结为 θ 的自然性。因此，$\mathrm{Hom}_{(-)}$ 是一个指标化预函子 $\mathrm{id}_{\mathrm{CAT}} \to \mathrm{id}_{\mathrm{CAT}}$。

让我们考察这个指标化预函子中的极限和余极限。若 $X \in \mathrm{CAT}$ 是一个范畴， $x \in X$ 是一个对象，那么任意同构 $x' \xrightarrow{\cong} x$ 都是指向 x 的极限异态射，任意同构 $x \xrightarrow{\cong} x'$ 都是从 x 出发的余极限异态射。特别地，恒等箭头 $\mathrm{id}_x\colon x \to x$ 既是极限异态射，也是余极限异态射。

例4.2（范畴中的锥极限）。设 $I \in \mathrm{CAT}$ 是一个范畴。考虑 2-函子 $\mathrm{id}_{\mathrm{CAT}}, \mathrm{CAT}(I, -)\colon \mathrm{CAT} \to \mathrm{CAT}$，并将其视为以 CAT为基的指标化预函子。我们将定义一个指标化预函子 $H\colon \mathrm{id}_{\mathrm{CAT}} \to \mathrm{CAT}(I, -)$ ，其中的极限是在范畴中形状为 I 的锥极限。

若 $X \in \mathrm{CAT}$ 是一个范畴， $x \in X$ 是一个对象，且 $d \in \mathrm{CAT}(I, X)$ 是一个函子，我们定义

$$H_X(x, d) := \mathrm{CAT}(I, X)(\Delta_x, d),$$

其中 $\Delta_x\colon I \to X$ 是常值-x 函子。这个 2-同态集[3] 是中，因为 CAT 中的每个 2-同态集都是中。由此公式显然可知，它在 x 和 d 中的函子作用应如何定义。

若 $f\colon X \to Y$ 是 CAT中的一个函子，我们将自然变换$H_f\colon H_X \to H_Y(f, \mathrm{CAT}(I, f))$ 定义为由侧复合给出的变换:

$$\begin{array}{rcl} (H_f)_{x,d}\colon \mathrm{CAT}(I, X)(\Delta_x, d) & \to & \mathrm{CAT}(I, Y)(\Delta_{f(x)}, f \circ d) \\ & & \| \\ & & \mathrm{CAT}(I, Y)(f \circ \Delta_x, f \circ d) \\ \gamma & \mapsto & f * \gamma. \end{array}$$

注意到， H_f 在 d 和 x 中的自然性都由自然变换的交换律推出，而 H 的函子性则由自然变换水平复合的结合律成立。

最后，让我们验证 H_f在 f中的外自然性。设 $\theta\colon f \to f'$是函子 f、$f'\colon X \to Y$之间的自然变换。我们需要证明图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAT}(I, X)(\Delta_x, d) & \xrightarrow{f*-} & \mathrm{CAT}(I, Y)(f \circ \Delta_x, f \circ d) \\ \downarrow{\scriptstyle f'*-} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{CAT}(I,Y)(f\circ\Delta_x, \theta * d)} \\ \mathrm{CAT}(I, Y)(f' \circ \Delta_x, f' \circ d) & \xrightarrow{\mathrm{CAT}(I,Y)(\theta*\Delta_x, f'\circ d)} & \mathrm{CAT}(I, Y)(f \circ \Delta_x, f' \circ d) \end{array}$$

交换。设 $\gamma \in \mathrm{CAT}(I、\ X)(\Delta_x、\ d)$。根据自然变换的交换律，

$$\hookrightarrow(\gamma) = (f' * \gamma) \circ (\theta * \Delta_x) = \theta * \gamma = (\theta * d) \circ (f * \gamma) = \quad (\gamma)$$

这正是所需的结论。至此， H的构造完成。

下面的例子实质上是前一个例子的重复，只是将 CAT 替换为任意的2-范畴 $\mathcal{X}$。

例4.3（2-范畴中0-胞腔的锥形极限）。设 $\mathcal{X}$ 是一个具有严格2-终对象的2-范畴。设 I 是 $\mathcal{X}$中的一个0-胞腔。我们将定义在 $\mathcal{X}$ 上的指标化范畴 R 和 S 以及一个指标化预函子 $H\colon R \to S$，使得当 $\mathcal{X} = Cat$（小范畴的2-范畴）时， H 中的极限是小范畴中形状为 I 的锥形极限。

[3] A *2-hom* set in a 2-category $\mathcal{X}$ denotes a set of the form $\mathcal{X}(X, Y)(f, g)$.

取 $R := \mathcal{X}(1,\ -)$ 以及 $S := \mathcal{X}(I,\ -)$，它们是2-函子 $\mathcal{X} \to \mathrm{CAT}$，因而是 $\mathcal{X}$ 上的指标化范畴。

若 $X \in \mathcal{X}$ 是一个 0-胞腔，且 $x \in \mathcal{X}(1,\ X)$ 和 $d \in \mathcal{X}(I,\ X)$ 1是 $\mathcal{X}$ 中的胞腔，则我们定义

$$H_X(x,d) := \mathcal{X}(I,X)(x \circ !, d).$$

从这个公式显然可以看出它在 x 和 d 上的函子作用应当是什么。

若 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个 1-胞腔，我们将自然变换 $H_f\colon H_X \to H_Y(\mathcal{X}(1,\ f),\ \mathcal{X}(I,\ f))$ 定义为通过侧复合给出的变换：

$$\begin{array}{rcl}(H_f)_{x,d}\colon \mathcal{X}(I,X)(x\circ !, d) & \to & \mathcal{X}(I,Y)(f\circ x\circ !, f\circ d)\\ \gamma & \mapsto & f * \gamma.\end{array}$$

注意，H_f 在 x 和 d 中的自然性都由 2-胞的交换律推出，而 H 的函子性则由 2-胞水平复合的结合律保证。

最后，让我们验证 H_f 在 f 中的外自然性。设 $\theta\colon f \to f'$ 是 1-胞腔 f，$f'\colon X \to Y$ 之间的一个 2-胞。我们需要考察图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X}(I,X)(x\circ !, d) & \xrightarrow{\quad f*-\quad} & \mathcal{X}(I,Y)(f\circ x\circ !, f\circ d)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'*-} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{X}(I,Y)(f\circ x\circ !, \theta * d)}\\ \mathcal{X}(I,Y)(f'\circ x\circ !, f'\circ d) & \xrightarrow{\mathcal{X}(I,Y)(\theta * x\circ !, f'\circ d)} & \mathcal{X}(I,Y)(f\circ x\circ !, f'\circ d)\end{array}$$

交换。令 $\gamma \in \mathcal{X}(I,X)(x \circ !\ d)$. 根据 2-胞腔的交换律，

$$\hookrightarrow(\gamma) = (f' * \gamma) \circ (\theta * (x \circ !)) = \theta * \gamma = (\theta * d) \circ (f * \gamma) = \quad (\gamma)$$

如所需。至此，H的构造完成。

例4.4（范畴中的加权极限）. 令 $I \in \mathrm{CAT}$ 为一个范畴。我们将定义一个指标范畴 S 和一个指标化预函子 $H\colon \mathrm{id}_{\mathrm{CAT}} \to S$ over CAT，其中极限是范畴中形状为 I 的加权极限。

我们取 $S := \mathrm{CAT}(I,$集合范畴$) \times \mathrm{CAT}(I,-)$，它是一个 2-函子 $\mathrm{CAT} \to \mathrm{CAT}$，因为 CAT中的每个同态范畴都是中。

若 $X \in \mathrm{CAT}$ 是一个范畴，$x \in X$ 是一个对象，$w\colon I \to$ 集合范畴 是一个函子，且 $d\colon I \to X$ 是一个函子，我们定义

$$H_X(x,(w,d)) := \mathrm{CAT}(I,Set)(w, X(x,d-)).$$

这个 2-同态集是中，因为 CAT 中的每个 2-同态集都是中。从这个公式可以明显看出，H_X 在 x、w 和 d 中的函子作用应当是什么。因此，H_X 是一个（中）预函子 $X \to \mathrm{CAT}(I,$集合范畴$) \times \mathrm{CAT}(I,X)$。

若 $f\colon X \to Y$ 是范畴之间的函子，我们将自然变换 $H_f\colon H_X \to H_Y(f, \mathrm{CAT}(I,$集合范畴 $) \times \mathrm{CAT}(I,f))$ 定义为由 f 的函子作用进行垂直后复合所给出的变换：

$$\begin{array}{rcl}(H_f)_{x,(w,d)}\colon \mathrm{CAT}(I,Set)(w, X(x,d-)) & \to & \mathrm{CAT}(I,Set)(w, Y(fx,fd-))\\ \gamma & \mapsto & f_{x,d-} \circ \gamma\end{array}$$

其中，$f_{x,d-}\colon X(x,d-) \to Y(fx,fd-)$ 是两个函子 $I \to$ 集合范畴 之间的自然变换，由 f的函子作用给出。这里，H_f 关于 w 的自然性由自然变换垂直复合的结合律保证，而它关于 x 和 w 的自然性则由 f的函子性得出。

H 的函子性源于自然变换垂直复合的结合律。

最后，让我们验证 H_f在 f中的外自然性。设 $\theta\colon f \to f'$是函子 $f, f'\colon X \to Y$之间的自然变换。我们需要证明图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAT}(I, Set)(w, X(x, d-)) & \xrightarrow{f_{x,d-}\circ -} & \mathrm{CAT}(I, Set)(w, Y(fx, fd-)) \\ \downarrow{\scriptstyle f'_{x,d-}\circ -} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{CAT}(I,Set)(w,Y(fx,\theta_{d-}))} \\ \mathrm{CAT}(I, Set)(w, Y(f'x, f'd-)) & \xrightarrow{\mathrm{CAT}(I,Set)(w,Y(\theta_x,f'd-))} & \mathrm{CAT}(I, Set)(w, Y(fx, f'd-)) \end{array}$$

交换。设 $\gamma \in \mathrm{CAT}(I, \text{集合范畴})(w, X(x, d-))$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$ 且 $r \in w(i)$。那么

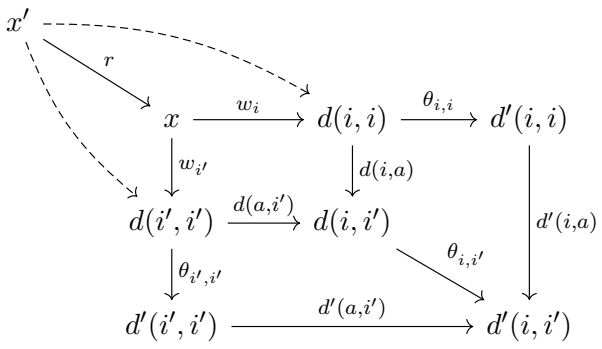
$$\hookrightarrow(\gamma)_i(r) = f'(\gamma_i(r)) \circ \theta_x = \theta_{d(i)} \circ f(\gamma_i(r)) = \quad (\gamma)_i(r)$$

根据 θ 关于箭头 $\gamma_i(r)\colon x \to d(i)$ 在 X中的自然性，结论如上。这就完成了 H的构造。

例 4.5（范畴中的端）。设 $I \in \mathrm{CAT}$ 是一个范畴。我们将定义一个在 CAT 上的指标范畴 S，以及一个指标化预函子 $H\colon \mathsf{id}_{\mathrm{CAT}} \to S$，其极限是在范畴中形状为 I 的端。

我们取 $S := \mathrm{CAT}(I^{\mathrm{op}} \times I, -)$, 这是一个 2-函子 $\mathrm{CAT} \to \mathrm{CAT}$，因为 CAT 中的每个同态范畴都是中范畴。

若 $X \in \mathrm{CAT}$ 是一个范畴， $x \in X$ 是一个对象且 $d\colon\ I^{\mathrm{op}} \times I \to X$ 是一个函子，则 $H_X(x,\ d)$ 定义为从 x 到 d的楔形集合，该集合显然是中函子性的。该集合关于 x 和 d具有函子性，这可借助图示直观地看出



图示说明了箭头 $r\colon\ x' \to x$ 的前复合，以及自然变换 $\theta\colon\ d \to d'$到楔形 $w\colon\ x \to d$的后复合，其中 $a\colon i \to i'$ 是 I中的一个箭头。

若 $f\colon\ X \to Y$是范畴之间的一个函子，我们定义自然变换 $H_f\colon H_X \to H_Y(f,\ \mathrm{CAT}(I^{\mathrm{op}} \times I,\ f))$，其分量为

$$\begin{array}{rcl} (H_f)_{x,d}\colon H_X(x,d) & \to & H_Y(fx, f \circ d) \\ w & \mapsto & f * w := (fx \overset{f(w_i)}{\to} fd(i,i) \mid i \in \mathrm{Ob}(I)). \end{array}$$

族 $f * w$ 的楔形性，以及 H_f 在 x 和 d中的自然性，都直接由 f的函子性推出；而 H 的函子性则立即来自函数复合与应用之间的相容性。

最后，让我们验证 H_f在 f中的外自然性。设 $\theta\colon f \to f'$是函子 $f, f'\colon X \to Y$之间的一个自然变换。我们需要证明该图表

$$\begin{array}{ccc} H_X(x,d) & \xrightarrow{\quad f*-\quad} & H_Y(fx, f\circ d) \\ \downarrow{\scriptstyle f'*-} & & \downarrow{\scriptstyle H_Y(fx,\theta * d)} \\ H_Y(f'x, f'\circ d) & \xrightarrow{H_Y(\theta_x, f'\circ d)} & H_Y(fx, f'\circ d) \end{array}$$

交换。设 $w \in H(X)(x,d)$ 和 $i \in \mathsf{Ob}(I)$。那么

$$\hookrightarrow(w)_i = f'(w_i)\circ\theta_x = \theta_{d(i,i)}\circ f(w_i) = \quad (\gamma)_i$$

由 θ 在箭头 w_i 处的自然性可得： $x \to d(i,\ i)$ 在 X 中，正如所需。至此完成了 H 的构造。

例4.6（2-范畴中的右 Kan 延拓）。令 $\mathcal{X}$ 为一个 2-范畴，且 $I,\ A \in \mathcal{X}$ 0为 2-胞腔。我们将定义 $\mathcal{X}$ 上的指标化范畴 $R,\ S$ 以及一个指标化预函子 $H\colon R \to S$，其极限是 $\mathcal{X}$ 中的右 Kan 延拓。

取 $R := \mathcal{X}(A,\ -)$ 和 $S := \mathcal{X}(I,\ A) \times \mathcal{X}(I,\ -)$，它们显然是 2-函子 $\mathcal{X} \to \textsc{Cat}$。

若 $X \in \mathcal{X}$ 是一个 0-胞腔，且 $r \in \mathcal{X}(A,\ X)$、$d \in \mathcal{X}(I,\ A)$ 和 $k \in \mathcal{X}(I,\ X)$ 1是 2-胞腔，则我们定义

$$H_X(r,(d,k)) := \mathcal{X}(I,X)(r\circ k, d).$$

从这个公式显然可知， H_X 在 r、d 和k 中的函子作用应当是什么。

若 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个 1-胞腔，我们定义自然变换 $H_f\colon H_X \to H_Y(\mathcal{X}(A,f), \mathcal{X}(I,A)\times\mathcal{X}(I,f))$ 为由侧复合给出的变换：

$$\begin{aligned} (H_f)_{r,(d,k)}\colon \mathcal{X}(I,X)(r\circ k, d) &\to \mathcal{X}(I,Y)(f\circ r\circ k, f\circ d) \\ \gamma &\mapsto f * \gamma. \end{aligned}$$

注意， H_f 在 r 和 (d,k) 中的两种自然性都由 2-胞腔的交换律推出，而 H 的函子性则由 2-胞腔水平复合的结合律保证。

最后，我们来验证 H_f 在 f 中的外自然性。设 $\theta\colon f \to f'$ 是 1-胞 $f, f'\colon X \to Y$ 之间的一个 2-胞。我们需要验证图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(I,X)(r\circ k, d) & \xrightarrow{\quad f*-\quad} & \mathcal{X}(I,Y)(f\circ r\circ k, f\circ d) \\ \downarrow{\scriptstyle f'*-} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{X}(I,Y)(f\circ r\circ k, \theta * d)} \\ \mathcal{X}(I,Y)(f'\circ r\circ k, f'\circ d) & \xrightarrow{\mathcal{X}(I,Y)(\theta*(r\circ k), f'\circ d)} & \mathcal{X}(I,Y)(f\circ r\circ k, f'\circ d) \end{array}$$

交换。设 $\gamma \in \mathcal{X}(I,X)(r\circ k, d)$。由 2-胞腔的交换律，

$$\hookrightarrow(\gamma) = (f' * \gamma)\circ(\theta * (r\circ k)) = \theta * \gamma = (\theta * d)\circ(f * \gamma) = \quad (\gamma)$$

正如所需。至此， H 的构造完成。

5. Preservation、 reflection、 lifting and creation of limits

本节旨在介绍基底 2-范畴中的一个 1-胞腔对指标化预函子中的极限的保持、反映、提升 和创造 等概念。然而，这样的 1-胞腔可视为（非指标化）预函子态射的一种特殊情形；关于极限保持等性质的许多基本结果，已有关于预函子态射的一般性结果可供使用。因此，我们将在更一般的情形下定义这些概念，同时将相应的带指标预函子概念视为特殊情形。

我们先定义预函子态射。下文中，我们可以将预函子 $H\colon R \to S$ 表示为三元组 (R, S, H)。

定义 5.1。设 (R, S, H) 和 (R', S', H') 是预函子。一个态射 $(R, S, H) \to (R', S', H')$ 是一个三元组 (ρ, σ, η)，其中 $\rho\colon R \to R'$ 和 $\sigma\colon S \to S'$ 是函子，而 $\eta\colon H \to H'(\rho, \sigma)$ 是一个自然变换。

下一个定义说明，指标化预函子中的极限由基底 2-范畴中的一个 1-胞腔保持等性质，是预函子态射保持极限等性质的特例。

定义 5.2。设 $H\colon R \to S$ 是 2-范畴 $\mathcal{X}$ 上的严格指标化范畴之间的一个指标化预函子。若 1-胞腔 $f\colon X \to Y$ 属于 $\mathcal{X}$ 保持,反映，（严格）提升，（严格）唯一地（严格地）提升 或（严格）创建（余）极限，则预函子态射

$$(R_f, S_f, H_f)\colon (R_X, S_X, H_X) \to (R_Y, S_Y, H_Y(R_f, S_f))$$

分别如此。

当然，后者各自的含义现在将逐一给出定义。

极限的保持与反映。

定义 5.3。预函子 $, \sigma, \eta)\colon (R, S, H) \to (R', S', H')$ 之间的一个态射若保持 （余）极限，则意味着：只要 $h\colon r \to s$ 在 H 中是一个（余）极限，那么异态射 $\eta(h)\colon \rho(r) \to \sigma(s)$ 在 H' 中也是一个（余）极限。

反过来，态射 (ρ, σ, η) 若反映 （余）极限，则意味着：只要 $h\colon r \to s$ 是 H 中的一个异态射，且异态射 $\eta(h)\colon \rho(r) \to \sigma(s)$ 在 H' 中是一个（余）极限，那么 h 就是一个（余）极限。

注意，若 H 是关于锥形（余）极限的、定义在 CAT 上的指标化预函子，那么由此得到的 H 中（余）极限的保持与反映概念，恰好就是函子保持与反映（余）极限的通常概念。

极限的提升。

定义 5.4。Profunctor 的一个态射 $(\rho, \sigma, \eta)\colon (R, S, H) \to (R', S', H')$ 若满足以下条件，则称其 严格提升 极限：只要 $s \in S$ 是一个对象，且 $\sigma(s) \in S'$ 在 H' 中有一个极限 $h'\colon r' \to \sigma(s)$，那么 s 在 H 中就有一个极限 $h\colon r \to s$，使得 $r' = \rho(r)$ 且 $h' = \eta(h)$。若此外这样的数对 r, h 至多只有一个，则称其 严格唯一地 满足这一性质。

对偶地，态射 $(\rho, \sigma, \eta)\colon (R, S, H) \to (R', S', H')$ 严格提升 余极限，若满足以下条件：只要 $r \in R$ 是一个对象，且 $\rho(r) \in R'$ 有一个余极限 $h'\colon \rho(r) \to s'$，那么 r 在 H 中就有一个余极限 $h\colon r \to s$，使得 $s' = \sigma(s)$ 且 $h' = \eta(h)$。若此外这样的数对 s, h 至多只有一个，则称其 严格唯一地 满足这一性质。

我沿用 Riehl (2017) §3.3 的术语体系，其中区分了锥形极限的严格创造与非严格创造（我们也将很快讨论创造）。Ad´amek 等人（1990）的早期文献将（锥形版本的）严格提升简称为“提升”，省略了“严格”一词。

提升的非严格变体基本上可以通过将对象相等的用法替换为同构的用法来得到。由此得到的定义显然等价于下面这个或许更简短的表述。

定义 5.5。 态射 $(\rho,\sigma,\eta)\colon (R,S,H)\to(R',S',H')$（Profunctor）提升 极限，如果对任意对象 $s\in S$，只要 $\sigma(s)\in S'$ 有极限，那么 s就有极限 $h\colon r\to s$，且该极限位于 H中，并且 $\eta(h)\colon \rho(r)\to\sigma(s)$位于 H'中是一个极限。

对偶地，态射 $(\rho,\sigma,\eta)\colon (R,S,H)\to(R',S',H')$ 提升 余极限，当且仅当对于任意满足 $r\in R$ 是一个对象且 $\rho(r)\in R'$ 有余极限的对象，都有 s 存在余极限 $h\colon r\to s$ 于 H，使得 $\eta(h)\colon \rho(r)\to\sigma(s)$ 于 H' 是一个余极限。

请注意，提升过程中未明言的非严格唯一性 条件是空洞的，因为（余）极限的泛性质所致。（尽管如此，出于与严格情形对称的考虑，在下文定义极限的非严格创造时，我们至少会有一次使用“非严格唯一提升”这一说法。）

我们注意到，提升（余）极限有以下显然的推论；它或许与陈述该推论时所用的日常语言颇为契合。

命题 5.6。 设 $(\rho,\sigma,\eta)\colon (R,S,H)\to(R',S',H')$ 是预函子之间的一个态射。若 (R',S',H') 有（余）极限，且 (ρ,σ,η) 将其提升，则 (R,S,H) 有（余）极限。□

推论 5.7. 设 H 是一个关于 *2*-范畴 $\mathcal{X}$的指标化预函子。设X、Y是 $\mathcal{X}$中的 *0*-胞腔。若 Y具有 H类型的（余）极限，且一个 *1*-胞腔 $X\to Y$提升了它们，则 X 具有 H类型的（余）极限。□

极限的创造。

定义 5.8. 若预函子态射反映（余）极限，并严格且唯一地严格提升（余）极限，则称其严格创造 （余）极限。若它反映（余）极限，并（唯一地[4]）提升（余）极限，则称其创造 （余）极限。

与提升一节一样，我们沿用 Riehl (2017) 的做法，区分严格与非严格变体。早期文献（如 Mac Lane (1998)）将严格创造简称为“创造”，不加“严格”一词。事实上，我们的定义是 同上所定义的锥形（余）极限创造（严格与非严格变体）的特例。

Creation 条件地 包含 preservat ion:

命题 5.9。 设 $(\rho,\sigma,\eta)\colon (R,S,H)\to(R',S',H')$ 是预函子之间的态射。若 (R',S',H') 具有（余）极限，且 (ρ,σ,η) 创建这些极限，则 (ρ,σ,η) 保持这些极限。

证明。 我们将对极限情形进行证明。余极限情形是对偶的。

设 $h\colon r\to s$ 是 H中的一个极限。我们需要证明 $\eta(h)\colon \rho(r)\to\sigma(s)$ 是 H'中的一个极限。由于 (R',S',H') 具有极限，因此存在一个极限 $h'\colon r'\to\sigma(s)$ of$\sigma(s)$。通过提升，存在一个极限 $h_2\colon r_2\to s$，使得 $\eta(h_2)\colon \rho(r_2)\to\sigma(s)$ 是一个极限。由于 h 和 h_2 都是 s的极限，因此存在一个同构$\phi\colon r\to r_2$ in R，将它们对应起来。由此可知， $\rho(\phi)\colon \rho(r)\to\rho(r_2)$ 是 R' 中的一个同构，将 $\eta(h)$ 和 $\eta(h_2)$对应起来。现在，由于 $\eta(h_2)$ 是一个极限，因此 $\eta(h)$也是一个极限，正如所需。这就证明了该命题。

推论 5.10。 设 H 是一个定义在 *2*-范畴 $\mathcal{X}$上的指标化预函子。设X、Y是 $\mathcal{X}$中的对象。若 Y具有（余）极限，且 *1*-胞腔 $f\colon X\to Y$生成这些极限，则 f 保留这些极限。□

[4]如前所述，这是空泛的

6. Functoriality of limit

本节原则上仍然讨论非指标化预函子。本节旨在证实这样一种观点：“取预函子极限是一个函子”。除了具有普遍意义之外，这一点在第 7 节中也会用到（以推论 6.3 的形式）。

我们先考虑函子性的一个参数化版本，非参数化版本将作为特殊情形由此推出。

引理 6.1 (参数化极限函子)。设 $H\colon R \to S$ 是一个预函子。设 C 是一个范畴，且 $\sigma\colon C \to S$ 是一个函子。对于每个 $c \in$ 对象(C)，设$\rho(c) \in$ 对象(R) 连同 $\lambda_c \in H(\rho(c), \sigma(c))$ 构成 $\sigma(c)$的一个极限。那么 ρ唯一地扩张为一个函子 $C \to R$，使得对于C中的每个箭头 $a\colon c' \to c$，异态射图表

$$\begin{array}{ccc} \rho(c') & \xrightarrow{\lambda_{c'}} & \sigma(c') \\ {\scriptstyle \rho(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(a)} \\ \rho(c) & \xrightarrow{\lambda_c} & \sigma(c) \end{array} \tag{3}$$

在 H 中交换，即 $\rho(a)^*(\lambda_c) = \sigma(a)_*(\lambda_{c'})$。 □

注 6.2。这个引理很好地展示了异态射图表的有效性。若没有它们，要看出 ρ 保持复合，就需要一番技术性推理。但借助图表 (3) 的直观帮助，这一点显然易见；我认为省略证明是传达这一点的好方法。

推论 6.3 (极限函子)。设 $H\colon R \to S$ 为一个预函子。对于每个$s \in$对象(S)，令 $\lim s \in$对象(R) 连同 $\lambda_s \in H(\lim s, s)$ 为 s的一个极限。则 $\lim$ 唯一延拓为一个函子 $S \to R$，使得对于 S中的每个箭头 $a\colon s' \to s$，图表

$$\begin{array}{ccc} \lim s' & \xrightarrow{\lambda_{s'}} & s' \\ {\scriptstyle \lim a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ \lim s & \xrightarrow{\lambda_s} & s \end{array}$$

在 H 中交换，即 $\lim(a)^*(\lambda_s) = a_*(\lambda_{s'})$。 □

接下来，我们将指出，作为这一函子性的结果，预函子中极限的存在性等价于其“可表示性”。

定义 6.4。预函子 $H\colon R \to S$ 称为可表的，如果存在一个函子 $\rho\colon S \to R$ 以及一个预函子同构 $H \cong R(1, \rho)$；如果存在一个函子 $\sigma\colon R \to S$ 以及一个预函子同构$H \cong S(\sigma, 1)$，则称其为余可表的。

由可表示性的定义可立即得出，若预函子$H\colon R \to S$ 可表示，则它具有所有极限。反过来则可由以下命题得出。

命题 6.5。设 $H\colon R \to S$ 是一个预函子，且 $\rho\colon C \to R$ 和 $\sigma\colon C \to S$ 是函子。对于每个 $c \in \mathrm{Ob}(C)$，令 $\eta_c \in H(\rho(c), \sigma(c))$。以下条件等价。

(1) 异态射 $\eta_c\colon\ \rho(c) \to \sigma(c)$ 关于 c 是自然的。也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc} \rho(c) & \xrightarrow{\eta_c} & \sigma(c) \\ {\scriptstyle \rho(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(a)} \\ \rho(c') & \xrightarrow{\eta_{c'}} & \sigma(c') \end{array}$$

在 H 中，对每个箭头 $a\colon\ \ c \to c'$，C交换。

(2) 对任意对象 $r \in R$，函数

$$(-)^*(\eta_c)\colon R(r, \rho(c)) \to H(r, \sigma(c))$$

在 c中是自然的。

证明。 设 $q\colon\ r \to \rho(c)$ 是 R中的一个箭头，并考虑异态射图表

$$\begin{array}{ccccc} r & \xrightarrow{q} & \rho(c) & \xrightarrow{\eta_c} & \sigma(c) \\ & & {\scriptstyle \rho(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(a)} \\ & & \rho(c') & \xrightarrow{\eta_{c'}} & \sigma(c') \end{array}$$

在 H中。显然，如果方块交换，那么在此图表中得到异态射 $r \to \sigma(c')$ 的两种方式相同，这证明了 (1) 蕴含 (2)。反过来，如果这两种方式相同，那么令 $q = \mathrm{id}^{\rho(c)}$，即可得出方块交换，从而证明 (2) 蕴含 (1)。命题得证。

推论 6.6。 设 H、 C、 σ、 ρ 和 λ 如引理 *6.1* 中所述。则存在一个典范同构

$$R(1, \rho) \xrightarrow{\cong} H(1, \sigma)$$

由拉回 λ_c 给出的预函子 $R \to C$ 。换言之，函子 $\rho\colon\ \ C \to R$ 表示预函子 $H(1,\ \sigma)\colon\ \ R \to C$。

证明。 对于任意对象 $r \in R$ 和 $c \in C$，函数

$$(-)^*(\lambda_c)\colon R(r, \rho(c)) \to H(r, \sigma(c))$$

是双射的，因为 λ_c 是一个极限；它关于 r 是自然的，因为此类函数总是如此。此外，根据前一个命题，它关于 c 也是自然的。这就证明了该推论。

推论 6.7。 设 H、 ρ 和 λ 如推论 *6.3* 中所述。则存在一个典范同构

$$R(1, \rho) \xrightarrow{\cong} H$$

由拉回 λ_s 给出的预函子 $R \to S$ 。换言之，函子 $\rho\colon\ \ S \to R$ 表示预函子 $H\colon\ \ R \to S$。□

我们进一步注意到，（参数化）极限函子实际上是一个“幂”预函子中的极限。

构造 6.8。 设 $H\colon\ R \to S$ 是一个预函子， C 是一个范畴。我们将定义一个预函子 $H^C\colon\ R^C \to S^C$ (*H*，其值落在幂 C)中。

注意，预函子 $H\colon\ R \to S$ 会导出函子

$$H(-,-)\colon (R^C)^{\mathrm{op}} \times S^C \to \textsc{Prof}(C, C)$$

并且，取具体的端是一个函子 $\int_C \colon \mathrm{Prof}(C,\ C) \to \mathrm{Set}$，其中$\mathrm{Prof}(C,\ C)$ 表示预函子 $C \to C$ 的大范畴。复合这两个函子定义了一个函子

$$H^C := \int_C H(-,-) \colon (R^C)^{\mathrm{op}} \times S^C \to \mathrm{Set},$$

这就是所需的预函子 $H^C \colon R^C \to S^C$。

引理 6.9。设 $H \colon R \to S$ 是一个预函子，C 是一个范畴，$\rho \colon C \to R$ 和 $\sigma \colon C \to S$ 是函子，且 $\lambda \in H^C(\rho、\ \sigma) = \int_C H(\rho、\ \sigma)$。若对每个 $c \in$对象(C)，$\lambda_c \in H(\rho(c)、\ \sigma(c))$ 是 $\sigma(c)$ 的一个极限，则 $\lambda \in H^C(\rho、\ \sigma)$ 是 σ 的一个极限。

对偶地，若对每个 $c \in \mathsf{Ob}(C)$，λ_c 是 H 中 $\rho(c)$ 的一个余极限，则 λ 是 H^C 中 ρ 的一个余极限。

证明。设 $\rho' \colon C \to R$ 是一个函子。我们需要证明函数

$$\begin{aligned} R^C(\rho', \rho) &\to H^C(\rho', \sigma) \\ \alpha \mapsto \alpha^*(\lambda) := H^C(\alpha, \sigma)(\lambda) &\overset{\text{def.}}{=} (\int_{c \in C} H(\alpha_c, \sigma c))(\lambda) \end{aligned} \tag{4}$$

是双射的，其中我们可以看到 $\alpha^*(\lambda)_c = H(\alpha_c,\ \sigma c)(\lambda_c)$.

推论 6.6 告诉我们，拉回 λ 的分量会给出一个同构 $R(1,\ \rho) \xrightarrow{\cong} H(1,\ \rho)$，它位于预函子 $R \to C$ 之间，并且限制后得到预函子 $C \to C$ 之间的一个同构 $R(\rho',\ \rho) \xrightarrow{\cong} H(\rho',\ \sigma)$。将典范端函子作用于 $\mathrm{Prof}(C,\ C)$ 中的这个同构，我们得到一个双射

$$\begin{gathered} R^C(\rho', \rho) = \int_C R(\rho', \rho) \xrightarrow{\cong} \int_C H(\rho', \sigma) = H^C(\rho', \sigma) \\ \alpha \mapsto \alpha^\star(\lambda) \end{gathered} \tag{5}$$

其中 $\alpha^\star(\lambda)_c = H(\alpha_c,\ \sigma c)(\lambda_c)$。从函数 (4) 和 (5) 的作用可以看出，它们是相同的。因此 (4) 是双射的。

引理 6.1 和 6.9 汇总如下，概括了本节的内容。

定理 6.10。求值态射

$$(\mathrm{ev}_c \colon (R^C, S^C, H^C) \to (R, S, H) \mid c \in \mathrm{Ob}C)$$

共同严格地创建极限。 □

对偶地，它们共同严格地创建余极限。

7. Parametrised limit preservation is natural

设 C 为一个（局部小）范畴，$c \in C$ 为一个对象。考虑反变同态函子保持锥形极限和端时的比较箭头。对于锥形极限，该箭头的形式为

$$C(\lim d, c) \to \lim C(d, c)$$

其中 $d \colon I \to C$ 是一个图表。对于端，箭头的形式为

$$C(\int_I d, c) \to \int_I C(d, c)$$

其中 $d\colon I^{\mathrm{op}} \times I \to C$ 是一个端图。假设我们想证明这两个态射关于 c 都是自然的，以此印证这两种自然性是同一现象的实例。

一种做法是利用端可以描述为锥形极限这一事实：证明在这种描述下，端的比较箭头就是锥形极限的比较箭头，并且后者在c中是自然的。

另一种做法——也是我们将在本节采用的做法——是进行抽象。这相当于证明（就一般性而言略弱于）以下定理，因为上面的两个具体自然性显然是它的特例（其中 $\mathcal{X} = \mathrm{CAT}$、 $X = C^{\mathrm{op}}$、 $Y =$ 集合范畴以及 $\phi(c) = C(-,\ c)$）。

定理 7.1。设 $H\colon\ R \to S$ 是一个定义在 2-范畴$\mathcal{X}$上的指标化预函子。设 C是一个范畴， X、$Y \in \mathcal{X}$是对象， $\phi\colon\ C \to \mathcal{X}(X、Y)$ 是一个函子。假设 X 和 Y 具有 H 类型的极限，并令 $s \in$对象(S)。则规范箭头

$$\phi(c)_*(\lim s) \to \lim \phi(c)_*(s)$$

在 R_Y 中， $c \in$ 对象(C)是自然的。

相应的对偶命题断言，典范箭头

$$\operatorname{colim} \phi(c)_*(s) \to \phi(c)_*(\operatorname{colim} s)$$

在 S_Y 中， $c \in \mathbf{Ob}(C)$ 是自然的。

接下来，我们将探讨该定理的一种模块化证明。首先，以下关于单态射概念的预函子化推广将很有用。

定义 7.2. 设 $H\colon\ R \to S$是一个预函子。若对于 R中的任意平行箭头 $a, b\colon\ r' \to r$，只要 $a^*(h) = b^*(h)$，就有 $a = b$，则称异态射 $h\colon r \to s$ in H是单态 的。

对偶地，若对于 S中的任意平行箭头 $a, b\colon\ s \to s'$，只要 $a_*(h) = b_*(h)$，就有 $a = b$，则称 h是满态射 。

显然，若对于范畴 C 有 $H = \mathbf{Hom}_C$，则这些定义给出的就是范畴 C 中传统意义上的单态射和满态射。

由泛性质可知，以下结论显然成立。

命题 7.3. 设 $H\colon\ R \to S$ 是一个预函子。 H 中的任意极限异态射 $\lambda_s\colon \lim s \to s$ 都是单态射。□

对偶地，任意余极限异态射 $\gamma_r\colon\ r \to \mathbf{colim}\, r$ 都是满态射。

接下来，我们定义异态射族的自然性，并据此将定理陈述中的箭头族的自然性归约到这一情形。

定义 7.4. 设 $H\colon\ R \to S$ 是一个预函子，且 $\rho\colon\ C \to R$ 和 $\sigma\colon C \to S$ 是函子。若异态射族 $\eta_c\colon\ \rho(c) \to \sigma(c)$ 在 H 中关于对象 $c \in C$ 满足以下异态射图表，则称其为自然的

$$\begin{array}{ccc} \rho(c) & \xrightarrow{\eta_c} & \sigma(c) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho(a)} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(a)} \\ \rho(c') & \xrightarrow{\eta_{c'}} & \sigma(c') \end{array}$$

对于每个箭头 a， $c \to c'$ 在 C中交换。

与自然变换的情形一样，我们可以口语化地说，异态射 η_c 在 c 中是自然的，以表示族 $(\eta_c \mid c \in C)$是自然的。

命题 7.5。设 $H\colon\ R \to S$ 为一个预函子。设 $\rho\colon\ C \to R$ 和 $\sigma\colon C \to S$ 为函子，并且对于每个 $c \in$ 对象C，$\sigma(c)$ 在 H 中的极限存在。则异态射族 $(\eta_c\colon\ \rho(c) \to \sigma(c) \mid c \in$ 对象$C)$ 是自然的，当且仅当相应的箭头 $\eta_c\colon\ \rho(c) \to$极限 $\sigma(c)$ 在 R 中关于 c是自然的。

证明。设 $a\colon\ c \to c'$ 为 C中的一个箭头。考虑异态射图表

$$\begin{array}{ccccc} \rho c & \xrightarrow{\overline{\eta_{\sigma c}}} & \lim \sigma c & \xrightarrow{\lambda_{\sigma c}} & \sigma c \\ \downarrow{\scriptstyle \rho a} & & \downarrow{\scriptstyle \lim \sigma a} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma a} \\ \rho c' & \xrightarrow{\overline{\eta_{\sigma c'}}} & \lim \sigma c' & \xrightarrow{\lambda_{\sigma c'}} & \sigma c' \end{array}$$

其右方块交换，因为异态射 λ_s: 极限 $s \to s$ 关于对象 $s \in S$ 是自然的（推论 6.3）。注意，水平复合为异态射 $\eta_c\colon\ \rho c \to \sigma c$。由于右下方的异态射 $\lambda_{\sigma c'}$: 极限 $\sigma c' \to \sigma c'$ 根据命题 7.3 是单态，左方块交换当且仅当整个矩形交换。这就证明了该命题。

接下来，我们证明一族异态射的自然性。借助上一命题，我们可以将所讨论的箭头族的自然性归结为此。由指标化预函子的外自然性公理可立即得到:

引理 7.6. 设 $H\colon\ R \to S$ 是定义在 2-范畴 $\mathcal{X}$ 上的指标化预函子。设 C 是一个范畴，X、$Y \in \mathcal{X}$ 是对象，且 $\phi\colon\ C \to \mathcal{X}(X, Y)$ 是一个函子。设 $h\colon\ r \to s$ 是 H_X 中的一个异态射。那么该异态射

$$\phi(c)_*(h)\colon\ \phi(c)_*(r) \to \phi(c)_*(s)$$

在 H_Y 中关于 $c \in$ 对象(C) 是自然的。

证明。由 H 的外自然性公理（见注 3.5），所讨论的异态射关于 $\phi(c)$ 是自然的，其中 $\phi(c)$ 是范畴 $\mathcal{X}(X, Y)$ 中的一个对象。特别地，由 ϕ 的函子性可知，它关于 c 是自然的。

现在我们可以推出定理 7.1。该异态射

$$\phi(c)_*(\lambda_s)\colon\ \phi(c)_*(\lim s) \to \phi(c)_*(s)$$

根据引理 7.6，H_Y 在 c 中是自然的。因此，相应的箭头

$$\phi(c)_*(\lim s) \to \lim \phi(c)_*(s)$$

根据命题 7.5，R_Y 在 c 中是自然的。这就证明了该定理。

8. Right adjoint 1-cells preserve limits

在本节中，我们将证明右伴随函子保锥形极限这一事实的带指标预函子化推广。首先，考虑相对于带指标预函子的伴随性这一概念。

定义 8.1. 设 $H\colon R \to S$ 是一个定义在 2-范畴$\mathcal{X}$上的指标化预函子。若存在一个双射 $H_Y(f_*r, s) \cong H_X(r, g_*s)$，它关于对象 $r \in R_X$ 和 $s \in S_Y$是自然的，则称 $g\colon Y \to X$中 $\mathcal{X}$的一个 1-胞腔右伴随 于 $\mathcal{X}$，相对于 H中 $f{:}X \to Y$的一个 1-胞腔。

注意，若 $\mathcal{X} = Cat$，那么相对于指标化预函子 $\mathrm{Hom}\colon \mathrm{id}_{Cat} \to \mathrm{id}_{Cat}$ 的伴随性，就是 Cat 中函子之间通常所说的“Hom-同构”伴随性。

定理 8.2. 设 $H\colon R \to S$ 是 *2*-范畴$\mathcal{X}$上的一个指标化预函子。若 $g\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个 *1*-胞腔，且在 *2*-范畴意义下右伴随于 $\mathcal{X}$中的 *1*-胞腔 $f\colon X \to Y$，那么相对于H， g 是 f 的典范右伴随。

也就是说，存在一个典范双射

$$H_Y(f_*r, s) \cong H_X(r, g_*s)$$

它关于对象 $r \in R_X$ 和 $s \in S_Y$是自然的。具体而言，考虑图表

$$\begin{array}{ccc} H_X(r, g_*s) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & H_Y(f_*r, f_*g_*s) \\ {\scriptstyle (\eta_*)^*_r}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle ((\epsilon_*)_s)_*} \\ H_X(g_*f_*r, g_*s) & \xleftarrow[\quad g_* \quad]{} & H_Y(f_*r, s) \end{array} \tag{6}$$

该定理断言，复合映射和 $\lrcorner$关于 r 和s是自然的，并且二者互为逆映射。

证明。 根据 (6) 的四条边关于 r 和 s均为自然的，这里的自然性显而易见。接下来，我将证明从 $H_X(r, g_*s)$ 出发又返回的回路是恒等的。从 $H_Y(f_*r, s)$ 出发又返回的回路也可用对称的论证证明为恒等回路。

从 $H_X(r, g_*s)$ 出发又返回的回路 (6) 与以下回路重合

$$\begin{array}{ccc} H_X(r, g_*s) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & H_Y(f_*r, f_*g_*s) \\ {\scriptstyle (\eta_*)^*_r}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ H_X(g_*f_*r, g_*s) & \xleftarrow[\quad (g_*(\epsilon_*)_s)_* \quad]{} & H_X(g_*f_*r, g_*f_*g_*s) \end{array}$$

根据 g_* 的自然性： $H_Y \to H_X(g_*, g_*)$。这个回路又显然与该图表的外回路重合

$$\begin{array}{ccc} H_X(r, g_*s) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & H_Y(f_*r, f_*g_*s) \\ {\scriptstyle (g_*(\epsilon_*)_s)_*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle ((\eta_*)_{g_*s})_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ H_X(r, g_*f_*g_*s) & \xleftarrow[\quad (\eta_*)^*_r \quad]{} & H_X(g_*f_*r, g_*f_*g_*s). \end{array}$$

由于内方块根据 H 在 $\eta\colon \mathrm{id}_X \to gf$ 处的外自然性而交换，并且在 $H_X(r, g_*s)$ 处的垂直往返是恒等的，如下所示

$$(g_*(\epsilon_*)_s)_* \circ ((\eta_*)_{g_*s})_* = (((g\epsilon)_*)_s)_* \circ (((\eta g)_*)_s)_* = \mathrm{id}$$

根据三角恒等式 $g\epsilon \circ \eta g = \mathrm{id}$，外部回路是一个恒等式。这就证明了定理。

推论 8.3。 右伴随 *1*-胞 g 保持 H 类型的极限。

对偶地，左伴随 1-胞 f 保持类型为 H 的余极限。

证明。 设 $s \in S_Y$ 是一个收敛对象。我们需要证明，异态射 $g_*(\lambda_s)\colon g_*(\lim s) \to g_*(s)$ in H_X 是一个极限。只需证明以下关于 r 自然的双射链

$$R_X(r, g_*(\lim s)) \xRightarrow{\cong} R_Y(f_*r, \lim s) \xRightarrow{\cong} H_Y(f_*r, s) \xrightarrow[(\eta_*)^*_r \circ g_*]{\cong} H_X(r, g_*s)$$

在 $r = g_*(\lim s)$ 处将 $\mathrm{id}_{g_*(\lim s)}$ 映射到 $g_*(\lambda_s)$。将 $\mathrm{id}_{g_*(\lim s)}$ 输入该双射链，可知这等价于断言

$$g_*(\lambda_s) = ((\eta_*)^*_{g_*(\lim s)} \circ g_* \circ (\epsilon_*)^*_{\lim s})(\lambda_s). \tag{7}$$

考虑图表

$$\begin{array}{ccc} H_Y(\lim s, s) & \xrightarrow{\qquad g_* \qquad} & H_X(g_*(\lim s), g_*s) \\ \downarrow{\scriptstyle (\epsilon_*)^*_{\lim s}} & & {\scriptstyle (g_*(\epsilon_*)_{\lim s})^*}\downarrow \uparrow {\scriptstyle (\eta_*)^*_{g_*(\lim s)}} \\ H_Y(f_*g_*(\lim s), s) & \xrightarrow{\qquad g_* \qquad} & H_Y(g_*f_*g_*(\lim s), g_*s) \end{array}$$

由于内层方块因 $g_*\colon H_Y \to H_X(g_*, g_*)$ 的自然性而交换，并且右上角处的垂直往返映射由三角恒等式可知是恒等映射，因此从左上角到右上角的两种路径相同。这证明了 (7)，从而得到该推论。

9. Why fully faithful functors reflect limits

本节将以预函子（并由此推论出指标化预函子）的视角，分析以下关于函子反映或保持锥形（余）极限的著名充分条件。

定理 9.1 （例如，Riehl (2017)，引理 3.3.5 和 3.3.6）。 设 $f\colon X \to Y$ 是范畴之间的一个函子。

1. 若 f 是全忠实的，则 f 反映锥形极限。 *2.* 若 f 本质满且全忠实，则 f 保持锥形极限。

对偶地：

3. 若 f 是全忠实的，则 f 反映锥形余极限。 *4.* 若 f 本质满且全忠实，则 f 保持锥形余极限。

回忆一下，指标化预函子 $H\colon R \to S$ 的基底 2-范畴中的一个 1-胞腔 $f\colon X \to Y$（例如，上一条陈述中的函子 f）决定了以下预函子态射

$$(R_f, S_f, H_f)\colon (R_X, S_X, H_X) \to (R_Y, S_Y, H_Y),$$

并且，根据定义，如果预函子态射 (R_f, S_f, H_f) 反映或保留（余）极限，那么相应的 1-胞腔 f 也会反映或保留（余）极限。在这种对应关系下，下面的定理是定理 9.1 的预函子化推广。证明这个一般定理之后，我们将逐步考察其带指标的预函子化特例，并依次由这些特例推出定理 9.1。

定理 9.2. 设 $(\gamma, \delta, \nu)\colon (A, B, M) \to (C, D, N)$ 是一个预函子的态射。

1. 若 γ 是全忠实的且 ν 是单态射，或者 γ 是分裂满的且 ν 是同构，则 $(\gamma、\delta、\nu)$ 反映极限。*2.* 假设 γ 是本质满的。若 γ 是全忠实的且 ν 是分裂满态射，或者 γ 是分裂忠实的且 ν 是同构，则 $(\gamma、\delta、\nu)$ 保持极限。

对偶地：

3. 若 δ 是全忠实的且 ν 是单态射，或者 δ 是分裂满的且 ν 是同构，则 $(\gamma、\delta、\nu)$ 反映余极限。*4.* 假设 δ 是本质满的。若 δ 是全忠实的且 ν 是分裂满态射，或者 δ 是分裂忠实的且 ν 是同构，则 $(\gamma、\delta、\nu)$ 保持余极限。

证明。 我们只需证明 1. 和 2.，因为 3. 和 4. 分别可由对偶性推出。

1. 令 $m\colon a \to b \text{in } M$，使得 $\nu(m)\colon \gamma(a) \to \delta(b) \text{in } M'$ 是一个极限。我们将证明 m 是一个极限。令 $a' \in A$ 为一个对象，并考虑方块

$$\begin{array}{ccc} A(a', a) & \xrightarrow{(-)^*(m)} & M(a', b) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ C(\gamma a', \gamma a) & \xrightarrow[(-)^*(\nu m)]{\cong} & N(\gamma a', \delta b), \end{array}$$

在 Set 中，我们需要证明其上方的水平箭头是一个双射。根据假设，下方的水平箭头是一个同构，并且左侧的垂直箭头是一个同构、右侧的垂直箭头是一个单态射；或者左侧的垂直箭头是一个分裂满态射、右侧的垂直箭头是一个同构。因此，只需证明这个方块交换；这样一来，根据一般结论可知，其中所有箭头都是同构。但将方块的交换性应用于箭头 $r \in A(a', a)$，恰好就是自然性方块满足的条件

$$\begin{array}{ccc} M(a, b) & \xrightarrow{\nu_{a,b}} & N(\gamma a, \delta b) \\ {\scriptstyle r^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\gamma r)^*} \\ M(a', b) & \xrightarrow[\nu_{a',b}]{} & N(\gamma a', \delta b) \end{array}$$

$\nu\colon M \to N(\gamma,\ \delta)$ 在第一变量中交换。这就证明了 1。

2. 设 $m\colon a \to b$ 是 M 中的一个极限。我们需要证明 $\nu(m)\colon \gamma(a) \to \delta(b)$ 在 N 中是一个极限。令 $c' \in \mathrm{Ob}C$。由本质满性，存在一个 $a' \in \mathrm{Ob}A$，以及一个同构 $\phi\colon c' \to \gamma a'$。考虑图表

$$\begin{array}{ccc} A(a', a) & \xrightarrow[\cong]{(-)^*(m)} & M(a', b) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ C(\gamma a', \gamma a) & \xrightarrow[(-)^*(\nu m)]{} & N(\gamma a', \delta b) \\ {\scriptstyle\phi^*}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\phi^*} \\ C(c', \gamma a) & \xrightarrow[(-)^*(\nu m)]{} & N(c', \delta b), \end{array}$$

在 SET 中，我们需要证明其中最下方的水平箭头是一个双射。根据假设，所有标记为 $\cong$ 的箭头都是同构；并且，要么左上方的垂直箭头是同构、右上方的垂直箭头是分裂满态射，要么左上方的垂直箭头是分裂单射、右上方的垂直箭头是同构。上方的方块如 1. 中那样交换，下方的方块则由 $N(-$ 的函子性而交换，$\delta b)\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{SET}$。根据一般原理，上方方块中的所有箭头都是同构，因此最下方的水平箭头也是同构。因此 νm 是一个极限。这就证明了 2. 和定理。

推论 9.3. 设 $H\colon R \to S$ 是一个关于 *2*-范畴$\mathcal{X}$的指标化预函子，且 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{X}$中的一个 *1*-胞腔。

1. 若 R_f 是全忠实的且 H_f 是单态射，或者 R_f 是分裂满的且 H_f 是同构，则 f 反映极限。*2.* 假设 R_f 是本质满的。若 R_f 是全忠实的且 H_f 是分裂满态射，或者 R_f 是分裂忠实的且 H_f 是同构，则 f保持极限。

对偶地：

3. 若 S_f 是全忠实的且 H_f 是单态射，或者 S_f 是分裂满的且 H_f 是同构，则 f 反映余极限。*4.* 假设 S_f 是本质满的。若 S_f 是全忠实的且 H_f 是分裂满态射，或者 S_f 是分裂忠实的且 H_f 是同构，则 f保持余极限。□

若 H 是余可表的（分别地，可表的），则上一推论中涉及 H_f的任何要求，都可以简化为对 S_f（分别地，R_f）的要求。这可由以下观察得出。

命题 9.4。设 M、$N\colon A \to B$ 为预函子，且 $\theta\colon M \to N$ 为自然变换。若函子 $\alpha\colon C \to A$ 是忠实的、满的或分裂满的，则 *whiskering* $\theta(\alpha, 1)\colon M(\alpha, 1) \to N(\alpha, 1)$ 分别是单态射、满态射或分裂满态射。

对偶地，若函子 $\beta\colon C \to B$ 是忠实的、满的或分裂满的，则 whiskering $\theta(1, \beta)\colon M(1, \beta) \to N(1, \beta)$ 分别是单态射、满态射或分裂满态射。

证明。 逐分量检查即可显然得出。

沿用推论 9.3 中的记号：

推论 9.5。若 $H\colon R \to S$ 是余可表的，且 S_f 是忠实、满或分裂满的，则相应地，H_f 是单态射、满态射或分裂满态射。

对偶地，若 $H\colon R \to S$ 是可表的，且 R_f 是忠实、满或分裂满的，则相应地，H_f 是单态射、满态射或分裂满态射。

证明。设 $\sigma\colon R \to S$ 是严格指标函子。若 $S_f\colon S_X \to S_Y$ 是忠实、满或分裂满的，或者等价地，自然变换

$$S_f(1,1)\colon S_X(1,1) \to S_Y(S_f, S_f)$$

是单态射、满态射或分裂满态射，则由命题可知，自然变换

$$S_f(\sigma_X, 1)\colon S_X(\sigma_X, 1) \to S_Y(S_f\sigma_X, S_f) = S_Y(\sigma_Y R_f, S_f)$$

分别是单态射、满态射或分裂满态射。这就证明了该推论。

若 H 是余可表的，我们便可将推论 9.3 表述为以下较弱的形式。

推论 9.6。设 $H\colon\ R \to S$ 是*2*-范畴 $\mathcal{X}$ 上的余可表指标化预函子，且 $f\colon\ X \to Y$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个*1*-胞腔。

1. 若 R_f 是全忠实的且 S_f 是忠实的，或者 R_f 是分裂满的且 S_f 是全忠实的，则 f 反映极限。*2.* 假设 R_f 本质满。若 R_f 是全忠实的且 S_f 是分裂满的，或者 R_f 是分裂忠实的且 S_f 是全忠实的，则 f 保持极限。

对偶地：

3. 若 S_f 是全忠实的，则 f 反映余极限。*4.* 假设 S_f 本质满。若 S_f 是全忠实的，则 f保持余极限。□

设 $(R,\ S,\ H)$ 是形状为 I的锥形极限的指标化预函子，按定义它是余可表的。容易验证，若函子$f\colon\ X \to Y\ (= R_f\colon\ R_X \to R_Y)$ 是忠实的或分裂满的，则函子$\textsc{Cat}(I,\ f)\colon\ \textsc{Cat}(I,\ X) \to \textsc{Cat}(I,\ Y)\ (= S_f\colon\ S_X \to S_Y)$ 分别是忠实的或分裂满的。因此，定理 9.1 的第1项和第2项分别由本推论的第1项和第2项推出。

对偶地，若 H 是可表的，则下面是推论 9.3 的相应较弱形式。

推论 9.7。设 $H\colon\ R \to S$ 是一个定义在 *2*-范畴 $\mathcal{X}$ 上的可表指标化预函子，且 $f\colon\ X \to Y$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个 *1*-胞腔。

1. 若 R_f 是全忠实的，则 f 反映极限。*2.* 设 R_f 是本质满的。若 R_f 是全忠实的，则 f 保持极限。

对偶地：

3. 若 S_f 是全忠实的且 R_f 是忠实的，或 S_f 是分裂满的且 R_f 是全忠实的，则 f 反映余极限。*4.* 设 S_f 是本质满的。若 S_f 是全忠实的且 R_f 是分裂满的，或 S_f 是分裂忠实的且 R_f 是全忠实的，则 f 保持余极限。□

设 $(R,\ S,\ H)$ 是形状为 I 的锥形余极限的指标化预函子，按定义它是可表的。和前面一样，若函子 $f\colon\ X \to Y\ (=S_f\colon\ S_X \to S_Y)$ 忠实（分别地，分裂满），则函子 $\textsc{Cat}(I,\ f)\colon\textsc{Cat}(I,\ X) \to \textsc{Cat}(I,\ Y)\ (= R_f\colon\ R_X \to R_Y)$ 忠实（分别地，分裂满）。因此，定理 9.1 的第 3 项和第 4 项可由本推论的第 3 项和第 4 项推出。

Acknowledgements

我感谢 Daniel van Dijk 与我讨论，尤其感谢他鼓励并帮助我完成 Kan 扩张的例子（例4.6）。他的关注使我得以完成这份文档。我也感谢 Herman Stel 对早期手稿提出的意见。

References

Ad´amek, Ji˘r´ı、Horst Herrlich 和 George Strecker（1990）。抽象范畴与具体范畴。美国：Wiley-Interscience。 ISBN：0471609226。Ellerman, David（2006）。“伴随函子理论——兼论其哲学意义”。载于：什么是范畴论？，Giandomenico Sica 编。数学与逻辑高级研究 3。意大利蒙扎：Polimetrica。 ISBN：88-7699-031-3。Koudenburg, Seerp Roald（2012）。“代数加权余极限”。博士论文。谢菲尔德大学。arXiv：1304.4079v1。Mac Lane, Saunders（1998）。工作数学家的范畴论。第2版。数学研究生教材 5。Springer。 DOI：10.1007/978- 1-4757-4721-8。nLab（2022年10月）。配备前箭头的二范畴。https://ncatlab.org/nlab/show/2-category+equipped+with+proarrows。修订版35。Riehl, Emily（2017）。语境中的范畴论。Courier Dover Publications。 ISBN：9780486809038。Shulman, Michael（2013）。“富化索引范畴”。载于：范畴论及其应用 28.21，第616–695页。Wood, R.J.（1982）。“抽象前箭头 I”。载于：拓扑与微分几何手册 ´几何 ´微分几何 ´ 23.3，第279–290页。