arXiv:2302.06538v1 [math.DG] 13 Feb 2023

凸实体锥中具有自由边界的紧致各向异性稳定超曲面

C´ESAR ROSALES

Abstract. 我们考虑一个凸实体锥 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其顶点位于原点，且边界 $\partial\mathcal{C}$除 0 点外光滑。我们的主要结果表明，浸入$\mathcal{C}$的紧致双侧超曲面 Σ 若在 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 中具有自由边界，并且在体积约束下使各向异性面积泛函在二阶意义下达到最小，则该超曲面包含于一个沃尔夫形状内。

1. Introduction引言

本文研究与某种能量泛函相关的欧几里得超曲面的变分问题。该泛函具有各向异性特征。这意味着，能量是通过对一个椭圆型参数函数（或表面张力）积分来计算的，该函数取决于超曲面沿线的法向方向。正如 Taylor 的引言中所述[35] 这些泛函为研究固体晶体提供了数学模型。在表面张力为常数这一特殊情形下，我们得到各向同性情形，此时能量与欧几里得面积成正比。

本文所考虑的表面张力是非对称范数，由光滑严格凸体 $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的支撑函数 h_K 给出；该凸体的内部包含原点。具有单位法向量 N 的双侧超曲面 Σ 所对应的各向异性面积可表示为 $A_K(\Sigma) := \int_\Sigma h_K(N)\, d\Sigma$，其中 $d\Sigma$ 是欧几里得面积元。利用到 K 的度量投影，还可以定义超曲面外蕴几何中一些经典概念的各向异性对应概念，详见 Reilly [29] 和第 2 节。当 K 是以原点为中心的圆单位球时，有 $h_K(N) = 1$，因此可恢复各向同性情形。值得指出的是，超曲面的各向异性几何通常通过函数 $F\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^+$ 来引入，而非通过凸体 K；更多细节见注 2.3。

众所周知，圆球面是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的等周问题的唯一解。在各向异性情形下，严格凸超曲面 ∂K 在以原点为中心的平移和膨胀变换意义下唯一极小化了相对于外单位法向量计算的各向异性面积，在围成相同欧几里得体积的超曲面中取最小值。关于这一结论有不同的证明，分别采用了分析和几何技术，参见 Taylor [34, 35], Fonseca 和 M¨uller、 [10],Brothers 和 Morgan、 [3], Milman 和 Rotem， [25], 以及 Cabr´e、Ros-Oton 和 Serra [4]。该极小化者∂K 通常被称为沃尔夫形状，以纪念晶体学家 Georg Wulff；他首次为给定的被积函数构造了最优晶体 [40]。

与各向同性情形一样，研究体积约束下各向异性面积的临界点（平稳超曲面）和二阶极小值（稳定超曲面）颇有意义。根据一阶变分公式，超曲面 Σ 是各向异性平稳的当且仅当其各向异性平均曲率 H_K （定义见（2.6）为常数，例如参见 Palmer [28] 或

Date: 2023年2月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 49Q20, 53C42。*Key words and phrases.* 凸实体锥、各向异性面积、自由边界、稳定超曲面。作者获得了由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2020-118180GB-I00研究基金以及 Junta de Andaluc´ıa 资助的 PY20-00164。

Clarenz [6]。这促使人们将一些关于常平均曲率超曲面的经典结果推广到各向异性情形 $\mathbb{R}^{n+1}$。沿着这一思路，Morgan 得到了一个 Alexandrov 型定理（相应地，一个 Hopf 型定理），该定理刻画了具有 H_K 常值[26] 的 $n = 1$紧致嵌入超曲面（相应地，浸入球面）中的沃尔夫形状；该结果适用于 [12]，更高维情形则由 He、Li、Ma 和 Ge 得到（相应地，He 和 Li [14], 以及 Koiso 和 Palmer [22]）。另一方面，Palmer [28] 和 Winklmann [39] 利用各向异性面积的二次变分证明，除平移和位似外，沃尔夫形状 ∂K 是浸入于 $\mathbb{R}^{n+1}$的唯一紧致、双侧各向异性稳定超曲面。这是 Barbosa 和 do Carmo 著名定理的各向异性推广 [2]，Wente 也曾对此进行讨论 [38]。

当我们考虑光滑真区域 Ω 而非整个空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 时，自然会转而研究各向异性分割问题。在此，我们寻求泛函 A_K 的极小化者，其定义域为 Ω 内的超曲面；这些超曲面可以具有非空边界，且边界包含于 $\partial\Omega$ 中，并将固定的欧几里得体积分隔开。该问题的临界点称为具有自由边界的各向异性驻定超曲面，且其自由边界位于 $\partial\Omega$ 中。根据 $A'_K(0)$ 的微积分，并仿照 Koiso 和 Palmer [19], 的推理可知，超曲面 Σ 在 $\partial\Omega$ 中具有自由边界且为各向异性驻定超曲面，当且仅当 H_K 在 Σ 上为常数，并且式 (2.2) 中引入的各向异性法向量 N_K 沿着 $\partial\Sigma$ 与 $\partial\Omega$ 相切。当 H_K 和 N_K 与 $\partial\Omega$ 的内单位法向量之间的夹角均为常数时，便得到更一般的各向异性毛细超曲面。这些超曲面是某个能量泛函的临界点，该泛函不仅涉及 $A_K(\Sigma)$，还涉及 $\partial\Sigma$ 在 $\partial\Omega$ 中所围区域的润湿面积。值得注意的是，$\mathbb{R}^{n+1}$ 的凸区域中的各向同性毛细超曲面已得到广泛研究，参见例如 Ros 和 Souam [31], 、Wang 和 Xia [36], 以及其中的参考文献。

若在保持由 Σ 和 Ω 的边界分隔出的体积不变的变分下，$A''_K(0)$ 非负，则在 $\partial\Omega$ 中具有自由边界的各向异性驻定超曲面是稳定的。关于 $A''_K(0)$ 的计算以及对各向异性稳定超曲面的后续分析，已有多项先前研究予以探讨。在 [19, 20, 21], Koiso 和 Palmer 研究了 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 的带状区域，且沃尔夫形状关于一条垂直于 $\partial\Omega$ 的直线旋转对称时的稳定毛细曲面。在 [16, 18], Koiso 对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的楔形区域中与棱边不相交的紧的各向异性稳定毛细超曲面进行了分类。在光滑旋转区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内，对于某些旋转对称的表面张力，Barbosa 和 Silva [1] 证明，垂直于旋转轴的全测地圆盘，是具有自由边界且与 $\partial\Omega$ 正交相交的唯一紧致驻定曲面。通过假设 Ω 具有凸性，他们还讨论了这些曲面的稳定性。最近，Jia、Wang、Xia 和 Zhang [15] 运用 Heintze-Karcher 不等式和 Minkowski 公式证明，开半空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中任意紧致嵌入的各向异性毛细超曲面都是某个沃尔夫形状的一部分。在 [11], 中，除推导出一个非常一般的二次变分公式外，Guo 和 Xia 还推广了 Winklmann [39] 在 Barbosa 和 do Carmo [2] 之后提出的论证，证明浸入欧几里得半空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的紧致双侧各向异性稳定毛细超曲面是一个截断的沃尔夫形状。

本文关注环境区域为实心锥$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$、顶点位于原点且边界 $\partial\mathcal{C}$ 除 0 外光滑时的稳定性问题。在各向同性情形下，已知以顶点为中心的圆球是凸锥 $\mathcal{C}$中分割问题的唯一解（在保持 $\mathcal{C}$ 不变的平移意义下），参见 Lions 和 Pacella [23], 以及 Figalli 和 Indrei [9]。当 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 光滑时，Ritor´e 与作者 [30] 结合存在性结果和对 $\partial\mathcal{C}$中具有自由边界的紧致稳定超曲面的分类，解决了这一问题。此外还需提及 Choe 和 Park [5], 以及 Pacella 和 Tralli [27], 的论文，其中证明了关于凸锥中紧致嵌入平稳超曲面的 Alexandrov 型定理。

在各向异性情形下，很容易验证截断沃尔夫形状$\partial K \cap \overline{\mathcal{C}}$ 是 $\partial\mathcal{C}$中的一个具有自由边界的各向异性驻定超曲面，见例4.2。在 [37], Weng 找到了一些条件，确保该超曲面在平移和位似意义下是唯一的紧致嵌入

超曲面，在 $\mathcal{C}$中具有常各向异性平均曲率。当锥 $\mathcal{C}$ 为凸时，Milman 和 Rotem [25], 以及 Cabr´e、Ros-Oton 和 Serra [4] 关于具有齐次权重的各向异性面积泛函的结果表明，$\partial K \cap \overline{\mathcal{C}}$ 在体积固定时可使各向异性面积（相对于外单位法向量计算）达到最小。我们指出， [25] 和 [4] 中的方法在对锥 $\mathcal{C}$ 和表面张力采用较弱的正则性假设时仍然成立。通过扩展 Figalli 和 Indrei 的论证，Dipierro、Poggesi 和 Valdinoci [9], 最近讨论了 $\partial K \cap \overline{\mathcal{C}}$ 作为 $\mathcal{C}$中分割问题解的唯一性（定理[8, 4.2]）。$\partial K \cap \overline{\mathcal{C}}$ 是极小化者这一事实尤其意味着一个较弱的性质：它是 $\partial\mathcal{C}$中具有自由边界的各向异性稳定超曲面。我们的主要结果定理4.7给出了以下唯一性结论：

> 除以顶点为中心的平移和膨胀外，任何浸入凸实体锥 $\mathcal{C}$ 、具有自由边界 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 的紧致、连通、双侧各向异性稳定超曲面，都是沃尔夫形状的一部分。

我们必须注意到，一般而言，不能指望 $\partial K \cap \overline{\mathcal{C}}$ 是唯一的各向异性稳定超曲面（相差平移和位似），参见例4.6。这促使我们寻找锥上的附加条件，以便得出更强的刚性结论。基于这一想法，在推论4.8 中，我们证明，位于锥 $\mathcal{C}$ 内、且该锥由球面上的光滑严格凸域 $\mathbb{S}^n$ 生成的紧致各向异性稳定超曲面，必定是 $\partial K \cap \overline{\mathcal{C}}$ 的膨胀。另一方面，对于欧几里得半空间 $\mathcal{H}$这一情形，Guo 和 Xia 最近对此进行了研究 [11], ，我们可以得出结论： $\partial K \cap \overline{\mathcal{H}}$ 除沿边界超平面平移外，它是唯一的紧致各向异性稳定超曲面。

我们对定理 4.7 的证明不同于 [30] 和 [11], 中的证明；后者主要受 Barbosa 和 do Carmo [2, 定理 (1.3)]的启发。相反，我们将 Wente [38] 用于刻画圆球面为唯一浸入 $\mathbb{R}^{n+1}$的紧致、双侧、稳定超曲面的思路，调整后应用于我们的情形。Wente 将稳定性不等式应用于一种特殊的保体积变形：通过平行超曲面并对其进行膨胀，使体积保持不变。在计算这种特定变分的二阶变分公式后，他发现，除非超曲面是圆球面，否则面积会严格减小。Palmer [28] 通过对各向异性平行超曲面进行膨胀，证明了沃尔夫形状是浸入 $\mathbb{R}^{n+1}$的紧致、双侧、各向异性稳定超曲面的唯一性。超曲面 Σ 沿各向异性平行超曲面的变分定义为 $\psi_t(p) := p + t\,N_K(p)$，其中 $p \in \Sigma$、 $t \in \mathbb{R}$ 和 N_K 是式 (2.2) 中引入的各向异性法向量。采用类似的论证，Koiso [16, 定理 4], [18, 定理 1] 对楔形域 Ω 中与棱边不相交的紧致各向异性稳定超曲面进行了分类。此外，经过适当平移后，同一变分也可用于处理毛细情形。我们指出，这种变形之所以可行，是因为 $\partial\Omega$ 由有限个超平面片组成。

在一个不同于半空间的凸锥 $\mathcal{C}$ 中，Palmer 变形一般不起作用。事实上，尽管 N_K 沿着 $\partial\Sigma$ 与 $\partial\mathcal{C}$ 相切，但我们无法确保 $\partial\mathcal{C}$ 在任意点 $p \in \partial\Sigma$ 处都包含一条以该点为中心的小各向异性法向线段 $p + t\,N_K(p)$。为了解决这一困难，我们用一个变分 $\Sigma_t := \psi_t(\Sigma)$ 替换 Σ 的各向异性平行变形；该变分与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上向量场 X 的单参数群 $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 相关，并满足 $X(0) = 0$，且 X 在 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 上与 $X_{|\Sigma} = N_K$ 相切。之后，由于 $\partial\mathcal{C}$ 在以 0 为中心的膨胀变换下保持不变，我们可以对 Σ_t 施加适当的膨胀变换，从而构造出同时保持 $\partial\mathcal{C}$ 和 Σ 体积不变的变形。为完成证明，我们计算该变分下各向异性面积的二阶导数，并发现除非 Σ 包含在沃尔夫形状内（相差一个平移和位似），否则该导数严格为负。

我们强调，为了证明定理4.7，我们只需计算 A''_K由光滑向量场 X 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上切向于 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 且满足 $X_{|\Sigma} = N_K$的变形所对应的 (0)。对于3.3 中任意具有非空边界的紧超曲面，这一点已在命题 $\mathbb{R}^{n+1}$中证明。与各向异性平行变形不同，这里会出现一个涉及加速度向量场 Z 的边界项。对于 $\mathcal{C}$ 中的各向异性驻定超曲面，我们在命题4.4 中看到，该项与 $\partial\mathcal{C}$的外在欧几里得几何有关。由于命题 A''_K4.4 中关于 (0) 的公式适用于任意光滑区域 Ω，这表明稳定性条件在 Ω 为凸区域时更为严格。

在 Ω 为凸区域时，稳定性条件的限制更为严格。值得一提的是，在前述大多数关于欧几里得区域 Ω 中各向异性毛细超曲面的研究中，这个边界项并不重要，因为 $\partial\Omega$ 是全测地的。

最后，我们指出，定理 4.7 的证明在非光滑凸锥中仍然成立，前提是各向异性稳定超曲面 $\partial\Sigma$ 的边界 Σ 位于 $\partial\mathcal{C}$ 的一个光滑开区域内。

除本引言外，本文分为三节。第 2 节回顾超曲面各向异性几何的一些基本事实。第 3 节计算具有非空边界的紧超曲面在某些变形下各向异性面积的二阶导数。最后，在第 4 节证明我们关于凸实体锥中各向异性稳定超曲面的分类结果。

2. Preliminaries

本节汇集本文中将用到的一些定义和结果。从一个欧氏凸体出发，我们将利用其支撑函数和度量投影，引入各向异性面积以及双侧超曲面的各向异性外在几何概念。关于这一观点与先前方法之间的关系，见注 2.3。

我们将包含原点且原点位于其内部的紧凸集 $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 称为（关于原点的）凸体。相应的支撑函数 $h_K\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h_K(w) := \max\{\langle u, w\rangle;\, u \in K\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的标准标量积。由此在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义了一个非对称范数（当 K 关于 0 中心对称时，它就是一个范数），参见 [32, 第 1.7 节1]。对于任意 $w \neq 0$， K 上外法向量为 w 的支撑超平面是集合 $\Pi_w := \{p \in \mathbb{R}^{n+1};\ \langle p, w\rangle = h_K(w)\}$。相应的支撑集为 $\Pi_w \cap K$。由于 K 是紧的，该集合非空。若 $\Pi_w \cap K$ 是单点 p，则 h_K 在 w处可微，且其梯度满足 $(\nabla h_K)(w) = p$，参见 [32, 推论 1.7.3]。

今后，我们假设 K 是边界 ∂K 光滑的严格凸体。因此，对于任意 $w \neq 0$，存在一点 $\pi_K(w)$，使得 $\in \partial K$ 满足 $\Pi_w \cap K = \{\pi_K(w)\}$。由此可定义映射 $\pi_K\colon \mathbb{R}^{n+1}_* \to \partial K$，称为 K-投影，并且它满足以下恒等式

$$\begin{aligned} \langle \pi_K(w), w\rangle &= h_K(w), \quad \text{for any } w \neq 0,\\ (\nabla h_K)(w) &= \pi_K(w), \quad \text{for any } w \neq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

另一方面，若 η_K 是 ∂K 上的外单位法向量，则对于任意 $w \in \mathbb{S}^n$，有 $(\eta_K \circ \pi_K)(w) = w$。结合这一等式以及对任意 $w \neq 0$ 和 $\lambda > 0$ 均有 $\pi_K(\lambda w) = \pi_K(w)$ 这一事实，可得对于任意 $w \neq 0$， $\pi_K(w) = \eta_K^{-1}(w/|w|)$（这里 $|\cdot|$ 表示欧几里得范数）。由于 $\eta_K\colon \partial K \to \mathbb{S}^n$ 是一个微分同胚，支撑函数 h_K 在 $\mathbb{R}^{n+1}_*$ 上光滑。注意，当 K 是以 0 为中心的圆单位球时，对于任意 $w \neq 0$，有 $h_K(w) = |w|$ 且 $\pi_K(w) = w/|w|$；而对于任意 $p \in \partial K = \mathbb{S}^n$， $\eta_K(p) = p$。

设 $\varphi_0\colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个光滑双侧浸入超曲面，可能带有光滑边界$\partial\Sigma$。大多数情况下，我们将省略映射 φ_0。我们还将任意集合 $S \subseteq \Sigma$ 与 $\varphi_0(S)$等同，并将点 $p \in \Sigma$ 处的切空间 $T_p\Sigma$ 与 $(d\varphi_0)_p(T_p\Sigma)$等同。对于 Σ上的一个固定光滑单位法向量场 N，点 p 处的相应形算子是自同态 $B_p\colon T_p\Sigma \to T_p\Sigma$，由 $B_p(w) := -D_w N$引入。其中， D 表示欧几里得度量的列维-奇维塔联络。众所周知，关于由 $\mathbb{R}^{n+1}$中的标量积诱导的度量， B_p 是自伴的。

T Σ 中的各向异性高斯映射或各向异性法向量是映射 $N_K\colon \Sigma \to \partial K$，其定义为

$$N_K := \pi_K \circ N. \tag{2.2}$$

通过设定 $\varphi_K := h_K(N)$，我们由（2.1）推得

$$\langle N_K, N\rangle = \varphi_K \quad \text{on } \Sigma. \tag{2.3}$$

当 $\partial\Sigma \neq \emptyset$ 时，我们通过等式引入各向异性余法向量

$$\nu_K := \varphi_K\,\nu - \big\langle N_K, \nu\big\rangle\, N, \tag{2.4}$$

其中 ν 是沿着 $\partial\Sigma$ 的内余法向。注意， ν_K 是 $\partial\Sigma$ 的法向量，其中 $\big\langle N_K, \nu_K\big\rangle = 0$。

对于任意 $p \in \Sigma$，我们有 $T_{N_K(p)}(\partial K) = T_p\Sigma$，因此微分 $(dN_K)_p$ 是$T_p\Sigma$的自同态。在 p 处的各向异性形状算子定义为

$$(B_K)_p := -(dN_K)_p = (d\pi_K)_{N(p)} \circ B_p. \tag{2.5}$$

p 处的各向异性平均曲率为

$$H_K(p) := \frac{\operatorname{tr}((B_K)_p)}{n} = -\frac{(\operatorname{div}_\Sigma N_K)(p)}{n}, \tag{2.6}$$

其中 $\operatorname{div}_\Sigma$ 是相对于 Σ 的散度，而 $\operatorname{tr}(f)$ 是自同态 f 的迹： $T_p\Sigma \to T_p\Sigma$。众所周知，参见 Palmer [28, 第 3666],页：

$$\operatorname{tr}\big((B_K)_p^2\big) \geqslant nH_K(p)^2, \quad \text{for any } p \in \Sigma, \tag{2.7}$$

且当且仅当 p 是一个各向异性脐点时等号成立，即在 $T_p\Sigma$中，$(B_K)_p$ 是恒等映射的倍数。为完整起见，我们在此给出这一事实的简短证明。由于 $\nabla h_K = \pi_K$ 属于 $\mathbb{R}^{n+1}_*$且 K 是一个严格凸体，因此$(d\pi_K)_{N(p)}$ 可以表示为一个 n阶正定对称矩阵。因此，存在$T_p\Sigma$ 的一个标准正交基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 以及 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$，使得对于任意 $j = 1, \dots, n$，均有$(d\pi_K)_{N(p)}(e_j) = \lambda_j\, e_j$。由（2.5）可得$(B_K)_p(e_i) = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}\,\lambda_j\, e_j$，其中$\sigma_{ij} := \big\langle B_p(e_i)\ e_j\big\rangle$。在$\mathbb{R}^n$ 中对向量$(\sigma_{11}\lambda_1, \dots, \sigma_{nn}\lambda_n)$和$(1, \dots, 1)$应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\operatorname{tr}(B_K^2) - nH_K^2 = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}^2\,\lambda_i\,\lambda_j - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{ii}\,\lambda_i\right)^2 \geqslant \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}^2\,\lambda_i\,\lambda_j - \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}^2\,\lambda_i^2 = \sum_{i\neq j} \sigma_{ij}^2\,\lambda_i\,\lambda_j \geqslant 0.$$

当且仅当对任意 $i \neq j$， $\sigma_{ij} = 0$，且对任意 i， $j = 1$，.....， n， $\sigma_{ii}\,\lambda_i = \sigma_{jj}\,\lambda_j$时，等号成立。令 $\alpha := \sigma_{ii}\,\lambda_i$，这等价于对任意 $w \in T_p\Sigma$，$(B_K)_p(w) = \alpha\, w$，如所求。

例2.1。(i). 若 K 是以 0 为球心的圆单位球，则 $N_K = N$、 $B_K = B$，且 H_K 等于 Σ 的欧氏平均曲率。

(ii). 对于取单位法向量 N 为定向的超平面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$，映射 N_K 为常值，因此 $B_K = 0$，且 $H_K = 0$ 在 Σ 中。

(iii). 考虑外单位法向量为 $N = \eta_K$ 的超曲面 $\Sigma = \partial K$。则对任意 $p \in \Sigma$ 和 $w \in T_p\Sigma$，有 $N_K(p) = p$、$(B_K)_p(w) = -w$，且 $H_K(p) = -1$。注意，若 K 不关于 0 中心对称，并且我们在 Σ 上取内法向量 $N = -\eta_K$，则类似的等式未必成立，且 H_K 可能不是常值。因此，所选单位法向量 N 对计算非常重要。

前面的例子表明 ∂K 和欧氏超平面都是 各向异性脐点超曲面，也就是说，其所有点都是各向异性脐点。接下来，我们给出 Palmer [28, 第 3666]页和 Clarenz [7, 第 358]页之后的一个逆命题。

命题 2.2. 设 Σ是浸入于$\mathbb{R}^{n+1}$中的双侧、连通的各向异性脐点超曲面，且满足 H_K 为常数。若 $H_K = 0$，则 Σ 包含于一个超平面内。若 $H_K \neq 0$，则经过以 0 为中心的平移和膨胀后，有 $\Sigma \subset \partial K$。

证明。 对于任意 $p \in \Sigma$，存在 $\alpha(p) \in \mathbb{R}$ 使得 $(B_K)_p(w) = \alpha(p)\, w$ 对于任意 $w \in T_p\Sigma$。根据定义（2.6），显然 $\alpha(p) = H_K$ 对于任意 $p \in \Sigma$。由方程（2.5）可推得微分

在 Σ 上消失。在 $H_K = 0$ 的情况下，这意味着 N_K 是一个常向量 n，因此 Σ 位于一个单位法向量为 η_K（n）的超平面内。当 $H_K \neq 0$ 时，我们可以找到满足以下条件的 $c \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$p = \frac{c}{H_K} - \frac{1}{H_K} N_K(p), \quad \text{for any } p \in \Sigma.$$

由此我们推得 $\Sigma \subseteq (c/H_K) - (1/H_K)(\partial K)$，正如我们所声称的。 □

我们以双侧超曲面 Σ（其单位法向量为 N）的各向异性面积和代数体积的概念结束本节。若 $d\Sigma$ 表示 Σ的面积元，则 $A_K(\Sigma)$ 定义为

$$A_K(\Sigma) := \int_\Sigma \varphi_K \, d\Sigma = \int_\Sigma h_K(N) \, d\Sigma.$$

当 K 是以 0 为中心的圆单位球时，这与 Σ 的欧几里得面积一致。当 K 不关于 0 中心对称时，$A_K(\Sigma)$ 的值可能取决于 N 在 Σ上的法向量。另一方面，对于紧超曲面 Σ，我们遵循 Barbosa 和 do Carmo [2, 式 (2.2)] 来定义

$$V(\Sigma) := \frac{1}{n+1} \int_\Sigma \langle p, N(p) \rangle \, d\Sigma. \tag{2.8}$$

当 Σ 嵌入且足够小时，散度定理保证 $|V(\Sigma)|$ 等于以 0 为顶点、以 Σ 为底的锥的勒贝格测度。若 Σ 是浸入的，则可能出现 $V(\Sigma) = 0$。

考虑膨胀 $\delta_\lambda(p) := \lambda p$，其中 $\lambda > 0$ 且 $p \in \mathbb{R}^{n+1}$。超曲面$\delta_\lambda(\Sigma)$上的单位法向量 N_λ 由 $N_\lambda(\delta_\lambda(p)) := N(p)$ 确定，其中任意 $p \in \Sigma$均成立。因此，变量替换公式以及微分同胚 $\delta_{\lambda|\Sigma} : \Sigma \to \delta_\lambda(\Sigma)$ 的雅可比行列式等于 λ^n 这一事实，推出

$$\begin{aligned} A_K(\delta_\lambda(\Sigma)) &= \lambda^n \, A_K(\Sigma), \\ V(\delta_\lambda(\Sigma)) &= \lambda^{n+1} \, V(\Sigma). \end{aligned} \tag{2.9}$$

这些恒等式将在第4节证明我们的主要结果时发挥重要作用。

注2.3. 通常会引入与任意函数F: $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^+$相关联的各向异性面积 A_F。其表达式为 $A_F(\Sigma) := \int_\Sigma F(N) \, d\Sigma$。对 F的凸性假设，是推导 A_F 及 F-拉普拉斯算子良好性质所必需的，参见 Maggi [24, 第 20] 章或 Palmer [28]。将 F 扩展为 1 次齐次函数，可得到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的非对称范数 Φ。关于 Φ 的沃尔夫形状是由 Φ支撑的凸体 $\mathcal{W}_\Phi$，参见 [24, 式 (20.8)]。正如我们在引言中提到的，$\mathcal{W}_\Phi$ 在所有欧几里得体积相同的集合中使各向异性周长最小。在我们的语境下，$F = h_{K|\mathbb{S}^n}$、$\Phi = h_K$ 且 $\mathcal{W}_\Phi = K$。因此，初始凸体 K 是由其支撑函数 h_K定义的各向异性面积 A_K 的最优形状。在 Palmer [28, 第 1] 节中，F 的沃尔夫超曲面是如下定义的严格凸超曲面：$\phi(\mathbb{S}^n)$，其中 $\phi(w) := F(w)\, w + (\nabla_{\mathbb{S}^n} F)(w)$。当 $F = h_{K|\mathbb{S}^n}$时，由方程 (2.1) 可知，在 $\mathbb{S}^n$上有 $\phi = \pi_K$，因此相应的沃尔夫超曲面 $\phi(\mathbb{S}^n)$ 等于 ∂K。

3. A second variation formula for the anisotropic area

本节将计算具有非空边界的浸入超曲面在某些变形下的各向异性面积的二阶导数。所得公式将用于证明我们的主要结果，即定理4.7。我们先给出一些预备定义。

$\mathbb{R}^{n+1}$ 上的（微分同胚）流是一个光滑映射 $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$，满足对于任意 $p \in \mathbb{R}^{n+1}$，$\phi(p, 0) = p$；并且对于任意 $t \in \mathbb{R}$，由 $\phi_t(p) := \phi(p, t)$ 定义的映射 $\phi_t : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个微分同胚。通常我们用 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 表示一个流。与之关联的速度向量场定义为

$$X(p) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t(p), \quad \text{for any } p \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

当 Y 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的光滑完备向量场时，相应的微分同胚单参数群 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个速度为 Y 的流。

对于浸入 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面 Σ，由流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 诱导的 Σ 的变分是族$\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，其中对于任意 $t\in\mathbb{R}$，$\Sigma_t := \phi_t(\Sigma)$。如果存在紧集 $C\subseteq\Sigma$，使得对于任意 $p\in\Sigma\setminus C$和 $t\in\mathbb{R}$，$\phi_t(p) = p$，则称该流在 Σ 上具有紧支撑。如果 Σ是一个具有单位法向量 N 的双侧超曲面，那么沿着变分 $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，可以找到一个光滑向量场$\overline{N}$，其在 Σ_t 上的限制给出一个满足 $N_0 = N$的单位法向量 N_t。对于具有支撑函数 h_K的固定光滑严格凸体 $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$，变分 $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的各向异性面积泛函是函数

$$A_K(t) := A_K(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} h_K(N_t)\,d\Sigma_t = \int_\Sigma h_K(\overline{N}\circ\phi_t)\,\operatorname{Jac}\phi_t\,d\Sigma, \tag{3.1}$$

其中，$\operatorname{Jac}\phi_t$ 是微分同胚 $\phi_{t|\Sigma}\colon\Sigma\to\Sigma_t$ 的雅可比行列式。

我们的目标是为某些变分给出 $A_K''(0)$ 的一个实用表达式。为此，我们必须先计算 $A_K'(0)$。我们需要进行一些预备计算，汇总如下。

引理 3.1. 设 $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是支撑函数为 h_K 的光滑严格凸体。对于浸入 $\mathbb{R}^{n+1}$ 且单位法向量为 N 的双侧超曲面 Σ，函数 $\varphi_K := h_K(N)$ 满足

$$\nabla_\Sigma\varphi_K = -B(N_K^\top), \tag{3.2}$$

其中，∇_Σ 是相对于 Σ 的梯度，$N_K^\top$ 是各向异性法向量N_K的切向投影。此外，对于在 Σ 上具有紧支撑且法向分量$u := \langle U, N\rangle$的任意光滑向量场 U，我们有

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(\varphi_K\,U)\,d\Sigma = -\int_\Sigma nH_K\,u\,d\Sigma + \int_\Sigma \langle N_K, \nabla_\Sigma u\rangle\,d\Sigma - \int_{\partial\Sigma}\langle U,\nu_K\rangle\,d(\partial\Sigma), \tag{3.3}$$

其中，H_K 是各向异性平均曲率，ν_K 是各向异性余法向量。

证明。取一点 $p\in\Sigma$ 和一个向量 $w\in T_p\Sigma$。利用（2.1）、（2.2）以及形算子B_p 是 $T_p\Sigma$上的自伴自同态这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\big\langle(\nabla_\Sigma\varphi_K)(p), w\big\rangle &= \big\langle(\nabla h_K)(N(p)), D_wN\big\rangle = -\big\langle\pi_K(N(p)), B_p(w)\big\rangle\\ &= -\big\langle N_K(p), B_p(w)\big\rangle = -\big\langle B_p(N_K^\top(p)), w\big\rangle.\end{aligned} \tag{3.4}$$

这意味着（3.2）。下面证明（3.3）。对于任意 $w\in\mathbb{R}^{n+1}$，记 $w^\top$ 和 $w^\perp$ 为 w 相对于 $T_p\Sigma$ 和 $(T_p\Sigma)^\perp$的投影，分别为。对于 U 上的光滑向量场 Σ，注意到

$$\varphi_K\,U = \varphi_K\,U^\top + \varphi_K\,u\,N = \varphi_K\,U^\top + u\,N_K^\perp = \varphi_K\,U^\top + u\,N_K - u\,N_K^\top,$$

其中，第二个等式使用了（2.3）。相对于 Σ 取散度，并结合（2.6），可得

$$\operatorname{div}_\Sigma(\varphi_K\,U) = \operatorname{div}_\Sigma(\varphi_K\,U^\top) - nH_K\,u + \langle N_K, \nabla_\Sigma u\rangle - \operatorname{div}_\Sigma(u\,N_K^\top).$$

所需公式由使用（2.4）并在 Σ上应用散度定理得到。□

接下来，我们计算 A_K的一阶变分。许多作者此前已经推导过该结果，例如见 Clarenz [6, 第 1], 节，或 Koiso 和 Palmer [19, 命题 3 的证明。1]正如 Koiso [17, 引理 9 中所述，1],我们的公式对具有非空边界的欧氏超曲面的任意变形均成立。我们给出一个简短证明，这将有助于随后对 A_K''（0）

命题 3.2. 设 $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 为光滑严格凸体，Σ 为具有边界的双侧浸入超曲面，且 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个流，其在 Σ上具有紧支撑。则有

$$A_K'(0) = -\int_\Sigma nH_K\,u\,d\Sigma - \int_{\partial\Sigma}\langle X,\nu_K\rangle\,d(\partial\Sigma),$$

其中， H_K为各向异性平均曲率， $u:=\langle X,\ N\rangle$为速度向量场 X 的法向分量，而 ν_K 为沿 $\partial\Sigma$的各向异性余法向量。

证明。回顾一下，我们记 $\varphi_K:=h_K(N)$。对于一个固定的点 $p\in\Sigma$，我们定义

$$h_p(t):=h_K(N_t\circ\phi_t)(p),\quad j_p(t):=(\operatorname{Jac}\phi_t)(p),\quad \text{for any } t\in\mathbb{R}. \tag{3.5}$$

通过 对积分号下的（3.1）求导，并注意到 ϕ_0 =Id，可得

$$A_K'(0)=\int_\Sigma \big(h_p'(0)+\varphi_K(p)\,j_p'(0)\big)\,d\Sigma. \tag{3.6}$$

另一方面，众所周知，参见 Simon [33, §9], 有

$$j_p'(0)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\operatorname{Jac}\phi_t)(p)=(\operatorname{div}_\Sigma X)(p). \tag{3.7}$$

另一方面，由方程（2.1）和（2.2），可得

$$h_p'(0)=\big\langle(\nabla h_K)(N(p)),D_{X(p)}\overline{N}\big\rangle=\big\langle N_K(p),D_{X(p)}\overline{N}\big\rangle.$$

的计算 $D_{X(p)}\overline{N}$ 见 [31, 引理 4.1(1)]。我们得到

$$D_{X(p)}\overline{N}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(N_t\circ\phi_t)(p)=-(\nabla_\Sigma u)(p)-B_p(X^\top(p)), \tag{3.8}$$

其中 $X^\top(p)$ 是 $X(p)$ 在 $T_p\Sigma$上的投影。将此信息代入前面关于 $h_p'(0)$ 的表达式，并注意到 (3.4) 中的第三个等式，可得

$$h_p'(0)=-\big\langle N_K,\nabla_\Sigma u\big\rangle(p)+\big\langle\nabla_\Sigma\varphi_K,X^\top\big\rangle(p). \tag{3.9}$$

因此，(3.6) 中的被积函数是函数在 p 处的取值

$$-\big\langle N_K,\nabla_\Sigma u\big\rangle+\big\langle\nabla_\Sigma\varphi_K,X^\top\big\rangle+\varphi_K\ \operatorname{div}_\Sigma X=-\big\langle N_K,\nabla_\Sigma u\big\rangle+\operatorname{div}_\Sigma(\varphi_K\,X).$$

将 $U=X$代入 (3.3) 中的公式，即完成证明。 □

在 Σ 和变形的不同假设下，各向异性面积的二阶变分公式见 Koiso 和 Palmer [19, 命题 3。3], [20, 命题 3。3], Barbosa 和 Silva [1,命题 3], 以及 Guo 和 Xia [11, 命题 3。5]。本文只需计算 $A_K''(0)$ 在通过某些特殊流移动一个 Σ 具有非空边界的超曲面时的情形。

命题 3.3. 设 $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个光滑严格凸体， Σ 是一个带边界的紧致双侧浸入超曲面，且 X 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上满足 $X_{|\Sigma}=N_K$ 的光滑完备向量场。那么，对于与 X 相关联的单参数微分同胚群 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，有

$$A_K''(0)=\int_\Sigma\big(n^2H_K^2-\operatorname{tr}(B_K^2)\big)\,\varphi_K\,d\Sigma-\int_\Sigma nH_K\,v\,d\Sigma-\int_{\partial\Sigma}\langle Z,\nu_K\rangle\,d(\partial\Sigma),$$

其中， H_K 是各向异性平均曲率， B_K 是各向异性形状算子， ν_K 是各向异性余法向量，而 $v:=\langle Z,N\rangle$ 是向量场 $Z:=D_XX$ 的法向分量。

证明。 对于任意 $w\in\mathbb{R}^{n+1}$ 记号 $w^\top$ 和 $w^\perp$ 分别表示 w 在 $T\Sigma$ 和 $(T\Sigma)^\perp$上的投影。给定一点 $p\in\Sigma$，我们定义 $h_p(t)$ 和 $j_p(t)$，定义方式与 (3.5) 中相同。在 (3.1) 中对积分号下求导两次，并考虑到 ϕ_0 =Id，得到

$$A_K'(0)=\int_\Sigma\big(h_p''(0)+2h_p'(0)\,j_p'(0)+\varphi_K(p)\,j_p''(0)\big)\,d\Sigma. \tag{3.10}$$

现在来计算上述被积函数中的所有导数。

关于 $j_p'(0)$ 和 $j_p''(0)$ 的微积分，请参阅 Simon [33, §9]。由（3.7）、（2.6）以及 $X_{|\Sigma}=N_K$这一事实，我们得到

$$j_p'(0)=(\operatorname{div}_\Sigma X)(p)=(\operatorname{div}_\Sigma N_K)(p)=-nH_K(p). \tag{3.11}$$

另一方面，我们有

$$j_p''(0) = (\mathrm{div}_\Sigma Z)(p) + (\mathrm{div}_\Sigma X)^2(p) + \sum_{i=1}^n |(D_{e_i}X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n \langle D_{e_i}X, e_j\rangle \langle D_{e_j}X, e_i\rangle,$$

其中 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $T_p\Sigma$的一组标准正交基。方程（2.5）以及 $X_{|\Sigma} = N_K$ 这一事实可得

$$D_{e_i}X = D_{e_i}N_K = -(B_K)_p(e_i),$$

因此，对于任意 $i = 1$，.....， n，均有 $(D_{e_i}X)^\perp = 0$。显然，

$$\sum_{i,j=1}^n \langle D_{e_i}X, e_j\rangle \langle D_{e_j}X, e_i\rangle = \mathrm{tr}\big((B_K)_p^2\big).$$

结合（3.11），以上结果表明

$$j_p''(0) = \big(\mathrm{div}_\Sigma Z + n^2H_K^2 - \mathrm{tr}(B_K^2)\big)(p). \tag{3.12}$$

接下来，我们计算 $h_p'(0)$ 和 $h_p''(0)$。注意到 $\langle X,\ N\rangle = \langle N_K,\ N\rangle = \varphi_K$根据（2.3）。因此，方程（3.9）推出

$$h_p'(0) = -\langle N_K, \nabla_\Sigma\varphi_K\rangle(p) + \langle \nabla_\Sigma\varphi_K, N_K^\top\rangle(p) = 0. \tag{3.13}$$

在或为了计算 $h_p''(0)$，我们需要一个关于 $h_p'(t)$ 的表达式。根据（3.5）中的定义，我们推得 e

$$h_p'(t) = \big\langle (\nabla h_K)((N_t\circ\phi_t)(p)), (D_X\overline{N})(\phi_t(p))\big\rangle = \big\langle \pi_K((N_t\circ\phi_t)(p)), (D_X\overline{N})(\phi_t(p))\big\rangle$$

由方程（2.1）可知。因此

$$h_p''(0) = \big\langle (d\pi_K)_{N(p)}(D_{X(p)}\overline{N}), D_{X(p)}\overline{N}\big\rangle + \big\langle N_K(p), D_{X(p)}D_X\overline{N}\big\rangle.$$

由于 $\langle X,\ N\rangle = \varphi_K$在 Σ上，方程（3.8）和（3.2）可得

$$D_{X(p)}\overline{N} = -(\nabla_\Sigma\varphi_K)(p) - B_p(N_K^\top(p)) = 0. \tag{3.14}$$

另一方面，由下文的引理 3.4 可知

$$D_{X(p)}D_X\overline{N} = -(\nabla_\Sigma v)(p) - B_p(Z^\top(p)),$$

因此

$$h_p''(0) = -\langle N_K, \nabla_\Sigma v\rangle(p) - \big\langle N_K(p), B_p(Z^\top(p))\big\rangle = -\langle N_K, \nabla_\Sigma v\rangle(p) + \langle \nabla_\Sigma\varphi_K, Z^\top\rangle(p), \tag{3.15}$$

这里用到了方程（3.4）中的第三个等号。

现在，结合 3.15）、（3.13）和（3.12），我们得出（3.10）中的被积函数是在 p 处对函数的取值

$$-\langle N_K, \nabla_\Sigma v\rangle + \mathrm{div}_\Sigma(\varphi_K\, Z) + \big(n^2H_K^2 - \mathrm{tr}(B_K^2)\big)\,\varphi_K.$$

至此，应用（3.3）中的公式并取 $U = Z$，证明便告完成。 □

引理 3.4。 在命题 *3.3*的条件下，对于任意 $p \in \Sigma$，有

$$D_{X(p)}D_X\overline{N} = -(\nabla_\Sigma v)(p) - B_p(Z^\top(p)).$$

证明。取 $T_p\Sigma$ 的一组标准正交基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$。我们利用与 X 相关联的流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，对任意 $i = 1$，..., n，构造 p 周围的一个光滑向量场 E_i，该向量场在任意 $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$ 上均为切向的，同时满足 $E_i(p) = e_i$ 和 $[X, E_i] = [\overline{N}, E_i] = 0$（此处 $[\cdot,\cdot]$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中向量场的李括号）。显然，

$$D_{X(p)}D_X\overline{N} = \sum_{i=1}^n \big\langle D_{X(p)}D_X\overline{N}, e_i\big\rangle\, e_i + \big\langle D_{X(p)}D_X\overline{N}, N(p)\big\rangle\, N(p). \tag{3.16}$$

我们将计算前一个方程中的各项。

由于 $|\overline{N}|^2 = 1$ 我们得到 $\langle D_X\overline{N},\ \overline{N}\rangle = 0$。通过求导并应用方程（3.14），我们推得

$$0 = \langle D_{X(p)}D_X\overline{N}, N(p)\rangle + |D_{X(p)}\overline{N}|^2 = \langle D_{X(p)}D_X\overline{N}, N(p)\rangle. \tag{3.17}$$

另一方面，我们对等式 $\langle \overline{N}、\ E_i\rangle = 0$ 关于 X 求两次导数。考虑到 $D_{X(p)}\overline{N} = 0$ 和 $[X, E_i] = 0$，可得

$$\langle D_{X(p)}D_X\overline{N}, e_i\rangle = -\langle N(p), D_{X(p)}D_X E_i\rangle = -\langle N(p), D_{X(p)}D_{E_i}X\rangle.$$

由于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中标准度量的黎曼曲率张量为零，我们推得

$$0 = D_X D_{E_i}X - D_{E_i}D_X X - D_{[X,E_i]}X = D_X D_{E_i}X - D_{E_i}Z$$

因为 $D_X X = Z$。这表明 $D_{X(p)}D_{E_i}X = D_{e_i}Z$。因此

$$\begin{aligned}\langle D_{X(p)}D_X\overline{N}, e_i\rangle &= -\langle N(p), D_{e_i}Z\rangle = -e_i\big(\langle Z, N\rangle\big) + \langle Z(p), D_{e_i}N\rangle \\ &= -\big\langle (\nabla_\Sigma v)(p), e_i\big\rangle - \big\langle Z^\top(p), B_p(e_i)\big\rangle \\ &= -\big\langle (\nabla_\Sigma v)(p), e_i\big\rangle - \big\langle B_p(Z^\top(p)), e_i\big\rangle. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

代入式（3.17）和（3.18）到式（3.16即可完成证明。 □

注 3.5. (i). 若 $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是以 0 为中心的圆单位球，则各向异性面积与欧几里得面积一致，所得公式也广为人知。

(ii). 值得注意的是，除非 K 关于 0 中心对称，否则$A'_K(0)$ 和 $A''_K(0)$ 的公式可能取决于固定在 Σ上的单位法向量 N。

(iii). 在命题 4.4 中，我们将看到，在某些附加条件下， $A''_K(0)$ 中的边界被积函数具有几何解释。

4. Anisotropic stable hypersurfaces in solid cones

本节中，我们考虑一个欧几里得实心锥，并研究浸入该锥中的紧超曲面：在保持超曲面体积和锥边界不变的变形下，这些超曲面使各向异性面积达到二阶极小值。在这种情形下，我们将证明，第 3 节中计算的变分公式可以略作简化。随后，我们将证明主定理，在锥为凸锥时对这些二阶极小值进行刻画。值得一提的是，除这一分类结论外，本节的所有结果在将锥替换为任意光滑欧几里得开集时仍然成立。

We b首先介绍一些记号和定义。对于一个具有光滑边界 的区域 $\mathcal{D}$，其上的实心锥为集合

$$\mathcal{C} := \{\lambda p\,;\, \lambda > 0,\, p \in \mathcal{D}\}.$$

这是一个区域 $\mathbb{R}^{n+1}$，其边界 $\partial\mathcal{C}$ 除 0 外光滑。我们将 ξ 称为沿着 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$的内单位法向量。注意， $\mathcal{C}$ 和 $\partial\mathcal{C}$ 在以 0 为中心的膨胀变换 δ_λ 下保持不变。还显然可见，当 $\mathcal{D}$ 为开半球时， $\mathcal{C}$ 与开半空间重合。

设 Σ 是浸入于 $\overline{\mathcal{C}}$ 中的光滑、紧的双侧超曲面，其光滑边界 $\partial\Sigma$ 位于 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 中。我们假设 $\Sigma\cap\partial\mathcal{C} = \partial\Sigma$，因此 $\Sigma\setminus\partial\Sigma \subseteq \mathcal{C}$。固定定义在 Σ 上的光滑单位法向量场 N。 $\partial\Sigma$ 在 Σ 中的内余法向量表示为 ν。在平面分布 $T(\partial\Sigma)^\perp$ 中，我们选择由 $\{\nu, N\}$ 诱导的定向。因此，对于任意 $p \in \partial\Sigma$，存在唯一的 $\mu(p) \in T_p(\partial\Sigma)^\perp$，使得 $\{\xi(p)\ \mu(p)\}$ 构成一个正向标准正交基。注意， μ 与 $\partial\mathcal{C}$ 相切，且与 $\partial\Sigma$ 垂直。容易验证，这些等式在 $\partial\Sigma$ 上成立

$$\begin{aligned}\nu &= (\cos\theta)\,\xi - (\sin\theta)\,\mu, \qquad \mu = -(\sin\theta)\,\nu + (\cos\theta)\,N, \\ N &= (\sin\theta)\,\xi + (\cos\theta)\,\mu, \qquad \xi = (\cos\theta)\,\nu + (\sin\theta)\,N,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 θ 是 ν 与 ξ 在 $T(\partial\Sigma)$ 之间的定向角函数$^{\perp}$。因此，对于固定的光滑严格凸体 $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$，定义在 Σ 上的各向异性法向量 N_K 以及沿 $\partial\Sigma$ 的各向异性余法向量 ν_K，由式 (2.2) 和 (2.4) 给出，满足

$$\langle N_K,\mu\rangle=\langle\nu_K,\xi\rangle,\qquad \langle N_K,\xi\rangle=-\langle\nu_K,\mu\rangle. \tag{4.2}$$

微分同胚流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ 对于 $\mathcal{C}$ 是可容许的，当且仅当 $\phi_t(\partial\mathcal{C})=\partial\mathcal{C}$ 且 $\phi_t(0)=0$，对任意 $t\in\mathbb{R}$均如此。$\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 对 Σ 的诱导变分满足 $\partial\Sigma_t\subset\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 和 $\Sigma_t\cap\partial\mathcal{C}=\partial\Sigma_t$，对任意 $t\in\mathbb{R}$均如此。此外，速度向量场 X 在 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 上切向，并且在 0 处消失。我们考虑在 (3.1) 中引入的各向异性面积泛函 $A_K(t)$ 和体积泛函 $V(t)$；后者将由 Σ_t 围成的代数体积赋予任意 $t\in\mathbb{R}$，其定义见 (2.8)。我们已在命题 3.2 中计算了$A_K'(0)$。另一方面，众所周知（[2, 式 (2.3)]），

$$V'(0)=\int_\Sigma u\,d\Sigma, \tag{4.3}$$

其中 $u:=\langle X,N\rangle$。我们称该流保持 Σ的体积，若对任意足够小的 t，$V(t)$ 为常数。这意味着 $\int_\Sigma u\,d\Sigma=0$。反过来，对于任意满足 $\int_\Sigma u\,d\Sigma=0$的光滑函数 $u:\Sigma\to\mathbb{R}$，存在一个流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，它对 $\mathcal{C}$是可容许的，保持 Σ的体积，并且在 Σ上满足$\langle X,N\rangle=u$，参见 Barbosa 和 do Carmo [2, 引理（2.4）]。

在先前条件下的超曲面 Σ 称为各向异性驻定的，若 $A_K'(0)=0$ 对任意关于 $\mathcal{C}$ 保持 Σ体积的可容许流均成立。一阶变分命题3.2中的一阶变分公式和方程（4.3），结合前述保体积流的构造，得出了各向异性驻定超曲面的刻画。事实上，我们可以仿照 Koiso 和 Palmer [19, 命题 3.1]进行推导，从而得到以下结果，它推广了各向同性情形。

命题 4.1. 若双侧超曲面 Σ 浸入于 $\overline{\mathcal{C}}$，其边界 $\partial\Sigma$ 位于 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 中，则当且仅当各向异性平均曲率 H_K 在 Σ 上为常数，且 $\langle N_K、\xi\rangle=0$ 沿 $\partial\Sigma$ 时，它是各向异性平稳的。

例 4.2. 取超曲面 $\Sigma=\partial K\cap\overline{\mathcal{C}}$，其单位法向量为 $N=\eta_K$（指向 K 外部的那个）。注意，由于 K 是凸的，且其内部包含 0，因此 ∂K 与 $\partial\mathcal{C}$ 横截相交。因此，Σ 是一个紧超曲面，其边界为 $\partial\Sigma$，并满足 $\Sigma\cap\partial\mathcal{C}=\partial\Sigma$。在例 2.1 (iii) 中，我们看到，对于任意 $p\in\Sigma$，$H_K(p)=-1$，且 $N_K(p)=p$。由于 $\partial\mathcal{C}$ 在以 0 为中心的膨胀变换下不变，因此对于任意 $p\in\partial\Sigma$，$N_K(p)\in T_p(\partial\mathcal{C})$，从而 $\langle N_K、\xi\rangle=0$。根据前一个命题，我们得出结论：Σ 是各向异性平稳的。

在各向同性情形下，平稳超曲面 Σ 的正交条件意味着 $\nu=\xi$ 沿着 $\partial\Sigma$。在下一个引理中，我们为各向异性余法向量 ν_K 建立一个类似的等式，这将在后续结果中发挥作用。

引理 4.3. 设 Σ 是浸入于 $\overline{\mathcal{C}}$、边界为 $\partial\Sigma$ 且位于 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$中的双侧超曲面。若$\langle N_K,\xi\rangle=0$属于 $\partial\Sigma$，则 $\cos\theta$ 恒不为零，且

$$\nu_K=\frac{\varphi_K}{\cos\theta}\,\xi\quad along\ \partial\Sigma,$$

其中 $\varphi_K:=h_K(N)$，且 θ是 $T(\partial\Sigma)^{\perp}$中 ν与 ξ之间的定向角函数。

证明。回顾 $\nu_K:=\varphi_K\nu-\langle N_K,\ \nu\rangle N$，它垂直于 $\partial\Sigma$。由方程（4.2）可得$\langle\nu_K,\ \mu\rangle=-\langle N_K,\ \xi\rangle=0$。这表明 ν_K垂直于 $\partial\mathcal{C}$，因此 $\nu_K=\langle\nu_K,\ \xi\rangle\xi$沿着 $\partial\Sigma$。

让我们计算 $\langle\nu_K,\ \xi\rangle$。考虑 N_K^*到 N_K在 $T(\partial\Sigma)^{\perp}$上的投影。利用（4.2）、等式$\langle N_K,\ \xi\rangle=0$以及 $\{\nu,N\}$和 $\{\xi,\mu\}$是 $T(\partial\Sigma)^{\perp}$的标准正交基这一事实，我们得到

$$\langle\nu_K,\xi\rangle^2=\langle N_K,\mu\rangle^2=|N_K^*|^2=\langle N_K,\nu\rangle^2+\varphi_K^2,$$

这是一个正数。因此，$\langle \nu_K,\ \xi\rangle$ 沿着 $\partial\Sigma$永不为零。另一方面，将 ξ 在（4.1）中的表达式代入等式 $\langle N_K,\ \xi\rangle = 0$可得

$$\sin\theta = -\frac{\langle N_K, \nu\rangle \cos\theta}{\varphi_K} \quad \text{along } \partial\Sigma.$$

ν_K 的定义和前两个关系式可得

$$\langle \nu_K, \xi\rangle = \varphi_K \cos\theta - \langle N_K, \nu\rangle \sin\theta = \frac{\varphi_K^2 + \langle N_K, \nu\rangle^2}{\varphi_K} \cos\theta = \frac{\langle \nu_K, \xi\rangle^2}{\varphi_K} \cos\theta,$$

因此

$$\frac{\langle \nu_K, \xi\rangle}{\varphi_K} \cos\theta = 1 \quad \text{along } \partial\Sigma.$$

Th这意味着 cos θ永不为零，并可据此推出 ν_K的上述表达式。 □

现在，当考虑 Σ 中 $\mathcal{C}$上的各向异性驻定超曲面时，我们可以给出各向异性面积导数的新表达式。一方面，对于任意 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 适用于 $\mathcal{C}$的流，由命题 3.2 所得公式 $A'_K(0)$ 中的边界项均为零。这是因为命题 4.1 和引理 4.3 表明，速度向量场 X 与 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$相切。因此

$$A'_K(0) = -nH_K \int_\Sigma u\, d\Sigma, \tag{4.4}$$

其中 $u := \langle X,\ N\rangle$ 在 Σ上。注意，对于流 $\phi_t(p) := e^t p$，方程（2.9）中的第一个方程意味着$A'_K(0) = nA_K(\Sigma)$。因此，结合（4.4）和方程（2.8），可得

$$A_K(\Sigma) = -(n+1)\, H_K\, V(\Sigma). \tag{4.5}$$

该恒等式是关于 $\mathcal{C}$ 中紧致各向异性驻定超曲面的闵可夫斯基型公式。

另一方面，A''_K（0）中出现的边界被积函数（见命题 3.3）可以用 $\partial\mathcal{C}$的欧几里得外蕴几何来表示。我们将在下一个命题中证明这一点，并计算某些流下体积的二阶导数。

命题 4.4. 设 Σ 是浸入 $\overline{\mathcal{C}}$ 的双侧各向异性驻定超曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 位于 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 中。考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的光滑完备向量场 X，满足 $X_{|\Sigma} = N_K$,$X(0) = 0$，且 X 与 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 相切。那么，对于由与 X 相关联的微分同胚单参数群所定义的容许流 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，有

$$A''_K(0) = \int_\Sigma \left(n^2H_K^2 - \operatorname{tr}(B_K^2)\right)\varphi_K\, d\Sigma - \int_\Sigma nH_K\, v\, d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \frac{\mathrm{II}(N_K, N_K)}{\cos\theta}\,\varphi_K\, d(\partial\Sigma), \tag{4.6}$$

$$V''(0) = \int_\Sigma (-nH_K\,\varphi_K + v)\, d\Sigma, \tag{4.7}$$

其中，B_K 是 Σ 的各向异性形状算子，II 是关于内法向量的 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 的第二基本形式，θ 是 ν 与 ξ 在 $T(\partial\Sigma)^\perp$ 中的定向角函数，而 $v := \langle Z, N\rangle$ 是 $Z := D_X X$ 的法向分量。

注 4.5。注意到 N_K 沿着 $\partial\mathcal{C}$ 与 $\partial\Sigma$ 相切，Σ 因为它是各向异性平稳的。这保证存在满足命题条件的向量场 X，并且项 II(N_K, N_K) 定义良好。还要注意，根据引理 θ，cos4.3永不为零。

证明 命题 4.4。我们先验证 (4.6) 成立。根据命题 3.3，只需证明

$$\langle Z, \nu_K\rangle = \frac{\mathrm{II}(N_K, N_K)}{\cos\theta}\,\varphi_K \quad \text{along } \partial\Sigma.$$

由引理 4.3 可知

$$\langle Z, \nu_K\rangle = \frac{\varphi_K}{\cos\theta}\langle Z, \xi\rangle \quad \text{along } \partial\Sigma.$$

显然，$\langle X,\xi\rangle = 0$ 沿着 $\partial\mathcal{C}$，因为 X 与 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 相切，且 $X(0) = 0$。对 X 求导，得到

$$0 = \langle D_X X,\xi\rangle + \langle X, D_X\xi\rangle = \langle Z,\xi\rangle - \mathrm{II}(X,X),$$

使得沿着 $\partial\Sigma$，$\langle Z,\xi\rangle = \mathrm{II}(X,X) = \mathrm{II}(N_K,N_K)$。

现在我们计算 $V''(0)$。方程（4.3）给出

$$V'(t) = \int_{\Sigma_t}\langle X, N_t\rangle\, d\Sigma_t = \int_\Sigma \big(\langle X, N_t\rangle\circ\phi_t\big)\,\mathrm{Jac}\,\phi_t\, d\Sigma.$$

对其求导，并结合（3.8）、（3.7）、（3.14）、（2.6）和（2.3），可得

$$V''(0) = \int_\Sigma \big(\langle D_X X, N\rangle + \langle X, D_X\overline{N}\rangle + \langle X, N\rangle\ \mathrm{div}_\Sigma X\big)\, d\Sigma = \int_\Sigma (v - nH_K\,\varphi_K)\, d\Sigma.$$

证明至此完成。 □

现在我们转向本文的主要结果：对欧几里得实心锥中的各向异性稳定超曲面进行分类。若双侧超曲面 Σ 浸入于 $\overline{\mathcal{C}}$ 且其边界 $\partial\Sigma$ 位于$\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$中，则称其为各向异性稳定的，如果 $A'_K(0) = 0$且 $A''_K(0) \geqslant 0$对于任何适用于 $\mathcal{C}$且保持 Σ体积不变的流。当锥为凸锥时，超曲面$\partial K\cap\overline{\mathcal{C}}$ 是各向异性稳定的，因为它在 $\mathcal{C}$ 中、与相同体积区域分隔开的紧超曲面中，使各向异性面积（相对于外单位法向量计算）最小，参见 [25, 推论 1。2] 和 [4, 定理 1。3]因此，自然会问，这一性质是否能在以 0 为中心的平移和膨胀变换意义下刻画$\partial K\cap\overline{\mathcal{C}}$。下一个例子表明，一般而言，答案是否定的。

例4.6。设 $\mathcal{C}$ 是一个不同于欧几里得半空间的凸锥，并且 $\partial\mathcal{C}$ 包含一个半超平面 P（例如，$\mathbb{R}^2$ 中的任意实心锥都满足这一性质）。如上所述，若 P^+ 是满足 $\mathcal{C}\subset P^+$的开半空间，则对于固定体积，$\partial K\cap\overline{P^+}$ 在 P^+中使各向异性面积最小。特别地，沿 P 进行适当的平移后，我们得到 $\mathcal{C}$ 中的一个各向异性稳定超曲面，它不具有 $p_0 + \lambda(\partial K\cap\overline{\mathcal{C}})$的形式，其中 $p_0\in\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\lambda > 0$取某些值。

这个例子说明，对于 $\mathcal{C}$ 中的各向异性稳定超曲面 Σ，所能得出的最佳结论是：除平移和位似外，$\Sigma\subset\partial K$。在对 Σ、$\mathcal{C}$ 和 K施加正则性条件的前提下，我们将在下一个唯一性命题中证明这一事实。

定理 4.7. 设 $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上光滑区域的实心凸锥。考虑浸入于 $\overline{\mathcal{C}}$ 中的一个紧致、连通、双侧超曲面 Σ，其在 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 中具有光滑边界 $\partial\Sigma$，并且满足 $\Sigma\cap\partial\mathcal{C} = \partial\Sigma$。如果 Σ 关于由光滑严格凸体 $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 定义的面积 A_K 是各向异性稳定的，那么存在 $p_0\in\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\lambda > 0$，使得 $\Sigma\subset p_0 + \lambda(\partial K)$。

证明。我们将遵循引言中阐述的思路。由于 Σ 是各向异性平稳的，命题 4.1 蕴含 H_K 在 Σ 上为常数，并且 $\langle N_K、\xi\rangle = 0$ 沿 $\partial\Sigma$。因此，我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上找到一个光滑完备向量场 X，使得 $X_{|\Sigma} = N_K$、$X(0) = 0$，并且 X 与 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$ 相切。显然，在 Σ 上有 $u = \varphi_K$，其中 $u{:}= \langle X、N\rangle$，以及 $\varphi_K{:}= h_K(N)$。令 $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为与 X 相关联的单参数微分同胚群。对于变分 $\Sigma_t := \psi_t(\Sigma)$，我们取泛函 $A_K(t){:}= A_K(\Sigma_t)$ 和 $V(t){:}= V(\Sigma_t)$。由方程（4.5）中的 Minkowski 公式，我们有 $H_K\neq 0$ 和 $V(\Sigma)\neq 0$。因此，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 $t\in(-\varepsilon、\varepsilon)$，$V(t)$ 与 $V(\Sigma)$ 具有相同的符号。接下来，我们对 Σ_t 应用膨胀 $\delta_{\lambda(t)}(p){:}= \lambda(t)\,p$，其中 $\lambda(t) > 0$，从而 $\delta_{\lambda(t)}(\Sigma_t)$ 的体积等于 Σ 的体积。由于 $V(\delta_{\lambda(t)}(\Sigma_t)) = \lambda(t)^{n+1}V(t)$，见（2.9），我们得到

$$\lambda(t) := \left(\frac{V(\Sigma)}{V(t)}\right)^{\frac{1}{n+1}},\quad \text{for any } t\in(-\varepsilon,\varepsilon). \tag{4.8}$$

I特别地，$\lambda(0) = 1$。我们将 $\lambda(t)$ 延拓为定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑正函数。如果定义

$$\phi_t := \delta_{\lambda(t)}\circ\psi_t,\quad \text{for any } t\in\mathbb{R},$$

则我们得到一个容许流，它满足 $\mathcal{C}$ 并保持 Σ的体积不变。因此， Σ 的各向异性稳定性意味着泛函 $a_K(t) := A_K(\phi_t(\Sigma))$ 满足 $a_K''(0) \geqslant 0$。为了证明该定理，我们需要计算 $a_K''(0)$。由方程（2.9）可知

$$a_K(t) = A_K(\delta_{\lambda(t)}(\Sigma_t)) = \lambda(t)^n\, A_K(t). \tag{4.9}$$

因此， $a_K''(0)$ 的微积分取决于 $\lambda'(0)$、 $\lambda''(0)$、 $A_K'(0)$ 和 $A_K''(0)$ 的值。

利用方程（4.3）、（4.4）以及 $u = \varphi_K$ 在 Σ 上这一事实，我们得到

$$V'(0) = A_K(\Sigma), \tag{4.10}$$

$$A_K'(0) = -nH_K A_K(\Sigma). \tag{4.11}$$

另一方面，由（ λ（t）在（4.8）中的表达式可得

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{n+1}\, V(\Sigma)^{\frac{1}{n+1}}\, V(t)^{\frac{-n-2}{n+1}}\, V'(t), \tag{4.12}$$

因此，由方程（4.5）可知

$$\lambda'(0) = -\frac{1}{n+1}\,\frac{A_K(\Sigma)}{V(\Sigma)} = H_K. \tag{4.13}$$

现在我们计算 $A_K''(0)$ 和 $\lambda''(0)$。由（4.7）和（4.6），由于 H_K 为常数，得到

$$V''(0) = -nH_K A_K(\Sigma) + \alpha, \tag{4.14}$$

$$A_K''(0) = n^2 H_K^2\, A_K(\Sigma) - \int_\Sigma \operatorname{tr}(B_K^2)\,\varphi_K\, d\Sigma - nH_K\,\alpha - \int_{\partial\Sigma} \frac{\mathrm{II}(N_K, N_K)}{\cos\theta}\,\varphi_K\, d(\partial\Sigma), \tag{4.15}$$

其中 $\alpha := \int_\Sigma v\, d\Sigma$且 $v := \langle D_X X,\ N\rangle$。回忆一下，II 是 $\partial\mathcal{C}\setminus\{0\}$关于内法向量 ξ的第二基本形式。另一方面，由（4.12）可推得

$$\lambda''(t) = \frac{-1}{n+1}\, V(\Sigma)^{\frac{1}{n+1}} \left(-\frac{n+2}{n+1}\, V(t)^{\frac{-2n-3}{n+1}}\, V'(t)^2 + V(t)^{\frac{-n-2}{n+1}}\, V''(t)\right).$$

在 $t = 0$ 处取值并化简后，方程（4.10）和（4.14）给出

$$\lambda''(0) = \frac{n+2}{(n+1)^2}\,\frac{A_K(\Sigma)^2}{V(\Sigma)^2} + \frac{n}{n+1}\,\frac{H_K A_K(\Sigma)}{V(\Sigma)} - \frac{1}{n+1}\,\frac{\alpha}{V(\Sigma)}.$$

将恒等式（4.5）代入上面的三个加项后，得到

$$\lambda''(0) = 2H_K^2 + \frac{H_K}{A_K(\Sigma)}\,\alpha. \tag{4.16}$$

最后，对方程（4.9）进行微分可得

$$a_K'(t) = n\,\lambda(t)^{n-1}\,\lambda'(t)\,A_K(t) + \lambda(t)^n\, A_K'(t).$$

因此
$a_K''(t) = n\left\{(n-1)\,\lambda(t)^{n-2}\,\lambda'(t)^2\,A_K(t) + \lambda(t)^{n-1}\,\lambda''(t)\,A_K(t) + 2\lambda(t)^{n-1}\,\lambda'(t)\,A_K'(t)\right\} + \lambda(t)^n\, A_K''(t)$。
将上文中的表达式代入（4.13）、（4.16）、（4.11）、（4.15）并化简，得到

$$a_K''(0) = -\int_\Sigma \left(\operatorname{tr}(B_K^2) - nH_K^2\right)\varphi_K\, d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \frac{\mathrm{II}(N_K, N_K)}{\cos\theta}\,\varphi_K\, d(\partial\Sigma). \tag{4.17}$$

由 (2.7) 可知，前一个公式中的第一个被积函数非负。 $\mathcal{C}$ 的凸性意味着 $\mathrm{II}(N_K, N_K) \geqslant 0$ 沿着 $\partial\Sigma$。由 (4.1) 中的第一个方程可得 $\cos\theta = \langle \nu, \xi\rangle$，它沿着 $\partial\Sigma$ 为正，因为 $\mathcal{C}$ 是凸的，且 ν 指向 $\Sigma \subset \overline{\mathcal{C}}$ 内部。因此，稳定性不等式 $a_K''(0) \geqslant 0$意味着 $\operatorname{tr}(B_K^2) = nH_K^2$ 在 Σ 上成立（这意味着 Σ 是各向异性脐点），并且 $\mathrm{II}(N_K, N_K) = 0$沿着 $\partial\Sigma$。由于 $H_K \neq 0$，由命题 2.2 即得证明。□

例 4.6 中描述的情形促使我们寻求关于锥的附加条件，以便得出更强的唯一性结论。沿着这一思路，我们可以证明以下结论。

推论4.8. 设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上光滑严格凸域的实心锥。考虑浸入 $\overline{\mathcal{C}}$ 中的一个紧致连通双侧超曲面 Σ，其边界 $\partial\Sigma$ 光滑且位于 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 中，并满足 $\Sigma \cap \partial\mathcal{C} = \partial\Sigma$。如果 Σ 对由光滑严格凸体 $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 定义的面积 A_K 是各向异性稳定的，那么对于某个 $\lambda > 0$，有 $\Sigma = \lambda(\partial K \cap \overline{\mathcal{C}})$。

证明. 根据定理 4.7，我们知道对于某个 $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\lambda > 0$，有 $\Sigma \subset p_0 + \lambda(\partial K)$。如果我们在 Σ 上定义单位法向量 $N(p) := \eta_K\big((p - p_0)/\lambda\big)$，那么利用 (2.2) 以及等式 $(\pi_K \circ \eta_K)(w) = w$，对于任意 $w \in \partial K$，可得 $N_K(p) = (p - p_0)/\lambda$，对于任意 $p \in \Sigma$。

锥 $\mathcal{C}$ 的基集 $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^n$ 是严格凸域，这意味着作为 $\mathbb{S}^n$ 中超曲面的 $\partial\mathcal{D}$ 的第二基本形式相对于内单位法向量始终正定。这表明，对于任意 $p \in \partial\Sigma$ 以及任意与 p 正交的 $w \in T_p(\partial\mathcal{C})$，都有 $\mathrm{II}_p(w, w) > 0$。根据定理 4.7 证明末尾的恒等式 $\mathrm{II}(N_K, N_K) = 0$，可知对于任意 $p \in \partial\Sigma$，$(p - p_0)/\lambda$ 与 p 成比例。由此得到 $p_0 = 0$，证明完毕。□

凸锥的一个特殊例子是半空间 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$。由于 $\partial\mathcal{H}$ 是光滑的，我们不需要假设 $\partial\Sigma \subset \partial\mathcal{H} \setminus \{0\}$。在这种情况下，我们可以推出 $\partial K \cap \overline{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$中唯一的紧致各向异性稳定超曲面（除去沿 $\partial\mathcal{H}$的平移）。Guo 和 Xia 已给出了 $\mathcal{H}$ 中的各向异性稳定毛细超曲面的类似结果 [11, 定理 1。1]，其证明方法不同。

推论4.9. 设 Σ 是浸入开半空间 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致连通双侧超曲面，其光滑边界为 $\partial\Sigma \subset \partial\mathcal{H}$，且满足 $\Sigma \cap \partial\mathcal{H} = \partial\Sigma$。若 Σ 是各向异性稳定的，则存在 $p_0 \in \partial\mathcal{H}$ 和 $\lambda > 0$，使得 $\Sigma = p_0 + \lambda(\partial K \cap \overline{\mathcal{H}})$。

证明. 应用定理 4.7 后，只需证明 $p_0 \in \partial\mathcal{H}$。按照推论4.8的证明中的推理，我们得到：对任意 $p \in \Sigma$，$N_K(p) = (p - p_0)/\lambda$。沿 $\partial\Sigma$ 的正交条件 $\langle N_K, \xi\rangle = 0$意味着，对任意 $p \in \partial\Sigma$，$p - p_0 \in T_p(\partial\mathcal{H})$。由于 $\partial\mathcal{H}$ 是一个欧氏超平面，从点 $p \in \partial\Sigma$ 出发、满足 $p \neq p_0$ 且方向由向量 $p - p_0$ 确定的直线完全包含在 $\partial\mathcal{H}$中。这表明 $p_0 \in \partial\mathcal{H}$，正如我们所声称的那样。□

注 4.10 （非光滑锥）。 定理 4.7 的证明在 $\mathcal{C}$ 为任意开凸锥（底域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^n$ 不必光滑），且边界 $\partial\Sigma$ 包含于 $\partial\mathcal{C}$的某个光滑开部分时，仍然成立。例如，对于一个与由两个横截超平面围成的区域 Σ 的棱边不相交的紧致各向异性稳定超曲面 $\mathcal{C}$，结论成立。在这方面，Koiso [16, 定理 4]，[18, 定理 1] 刻画了 $\mathbb{R}^{n+1}$中的楔形区域内的紧致各向异性稳定毛细超曲面。

注 4.11 （平面锥）。 对于实心锥 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$，边界 $\partial\mathcal{C}$ 是从 0 出发的两条闭半直线的并。因此，沿 $= 0$ 有 II $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$，且（4.17）中的边界项消失。因此，即使锥不是凸的，定理 4.7 的结论仍然成立。

注 4.12 ($\mathcal{C}$中的 Minkowski 公式)。 对于实心锥 Σ 中的紧致各向异性驻定超曲面 $\mathcal{C}$，我们可以利用（2.8）将（4.5）写成

$$\int_\Sigma \big(\varphi_K + H_K\langle p, N(p)\rangle\big)\, d\Sigma = 0.$$

我们对（4.5）的证明表明，前述恒等式对任意紧超曲面都成立 Σ 浸入于 $\mathcal{C}$ 且其边界为 $\partial\Sigma$ 位于 $\partial\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 并满足 $\langle N_K, \xi\rangle = 0$ 沿着 $\partial\Sigma$。He 和 Li [13, 定理 11], 以及 Jia、Wang、Xia 和 Zhang [15, 定理 13]此前也得到了类似公式。

References

[1] E. Barbosa 和 L. C. Silva, *Surfaces of constant anisotropic mean curvature with free boundary in revolution surfaces* **169** 2022 3 4, 439 459 , Manuscripta Math. 4493646
（）, 第 - – 期。MR [2] J. L. Barbosa 和 M. P. do Carmo,
Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, Math. Z. 185（1984）, 第 3 期, 339–353。MR MR731682（85k:58021c）[3] J. E. Brothers 和 F. Morgan, *The isoperimetric theorem for general integrands*, Michigan Math. J. 41（1994）, 第 3 期, 419–431。MR 1297699[4] X. Cabr´e、X. Ros-Oton 和 J. Serra, *Sharp isoperimetric inequalities via the ABP method*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** 2016 12, 2971 2998 3576542 （）, 第 – 期。MR J. Choe 和 S.-H. Park, *Capillary surfaces in a convex cone*, [5]
Math. Z. 267（2011）, 第 3-4 期, 875–886。MR 2776063（2012j:53009）[6] U. Clarenz,
Enclosure theorems for extremals of elliptic parametric functionals, Calc. Var. Partial Differential Equations **15** 2002 3, 313 324 1938817 （）, 第 – 期。MR,
[7] ———
The Wulff shape minimizes an anisotropic Willmore functional **6** 2004 3, , Interfaces Free 351 359 2095337
Bound. （）, 第 – 期。MR[8] S. Dipierro、G. Poggesi 和 E. Valdinoci, *Radial symmetry of solutions to anisotropic and weighted diffusion equations with discontinuous nonlinearities* **61** 2022 2, , Calc. Var. Partial
Differential Equations（）, 第 72 号论文, 31 页。MR 4380032[9] A. Figalli 和 E. Indrei,
A sharp stability result for the relative isoperimetric inequality inside convex cones, J. Geom. Anal. **23** 2013 2, 938 969 3023863 （）, 第 – 期。MR I. Fonseca 和 S. Muller,
[10]
A uniqueness proof for the Wulff theorem, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 119（1991）, 第 1-2 期, 125–136。MR 1130601[11] J. Guo 和 C. Xia, *Stable anisotropic capillary hypersurfaces in the half-space*, arXiv:2301.03020, 2023年1月。[12] Y. He、H. Li、H. Ma 和 J. Ge, *Compact embedded hypersurfaces with constant higher order anisotropic mean curvatures* **58** 2009 868 , Indiana Univ. Math. J.
（）, 第 2, 853 2514391 – 期。MR Y. J. He 和 H. Z. Li,
[13]
Integral formula of Minkowski type and new characterization of the Wulff shape, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **24** 2008 4, 697 704 2393162 （）, 第 – 期。MR, , Ann. Global Anal. Geom. 35（2009）, 第 3 期,
[14] ———
Anisotropic version of H. Hopf
243–247。MR 2495974[15] X. Jia、G. Wang、C. Xia 和 Y. Zhang, *Alexandrov's theorems for anisotropic capillary hypersurfaces in the half-space* 2211 02913, 2022 , arXiv: 。11月。[16]
Uniqueness of closed equilibrium hypersurfaces for anisotropic surface energy and application to a
M. Koiso, *capillary problem* **24** 2019 4, 88, 15 4059741 , Math.
Comput. Appl.（）, 第 号论文。MR[17] ,
Uniqueness of stable closed non-smooth hypersurfaces with constant anisotropic curvature, arXiv:1903.03951, 2019年3月。[18] , *Stable anisotropic capillary hypersurfaces in a wedge*, Math. Eng. 5（2023）, 第 2 期, 论文编号 029, 22 页。MR 4431669[19] M. Koiso 和 B. Palmer, *Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes*, Calc. Var. Partial Differential Equations **25** 2006 3, 275 298 2201674 （）, 第 – 期。MR, , Calc. Var. Partial Differential Equations 29（
[20] ——— *Anisotropic capillary surfaces with wetting energy*
2007）, 第 3 期, 295–345。MR 2321891[21] ,
——— *Uniqueness theorems for stable anisotropic capillary surfaces* **39** 2007 3, , SIAM J. Math. Anal. 721 741 2349864
（）, 第 – 期。MR[22] , *Anisotropic umbilic points and Hopf's theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **59** 2010 1, 79 90 2666473 （）, 第 – 期。MR P.-L. Lions 和 F.
[23] *Isoperimetric inequalities for convex cones*
Pacella, , 《Proc. Amer. Math. Soc.》109 2, 477 1990 485 1000160 90 52021（）, 第 – 期。MR（i:）[24] F. Maggi,
Sets of finite perimeter and geometric variational problems, 剑桥高级数学研究丛书, 第 135, 2012 2976521 卷, Cambridge University Press, 剑桥, 。MR E.
[25] *Complemented Brunn-Minkowski inequalities and isoperimetry for homogeneous and*
Milman 和 L. Rotem, *non-homogeneous measures* **262** 2014 867 908 , 3228444
Adv. Math.（）, –。MR [26] *Planar Wulff shape is unique equilibrium* F. Morgan, 《Proc. Amer. Math. Soc.》133（2005）, 第 3 期, 809–813。MR 2113931[27] F. Pacella 和 G. Tralli,
Overdetermined problems and constant mean curvature surfaces in cones, Rev. Mat. Iberoam. **36** 2020 3, 841 867 4109828 （）, 第 – 期。MR B. Palmer, 《Proc. Amer. Math. Soc.》126（1998）, 第 12 期,
[28] *Stability of the Wulff shape*
3661–3667。MR 1473676（99b:58055）[29] R. C. Reilly,
The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces **43** 1976 4, , Duke Math. J.（）, 第 – 705 721 425847
期。MR[30] M. Ritor´e 和 *Existence and characterization of regions minimizing perimeter under a volume con-*
straint inside Euclidean cones **356** 2004 11, 4601 4622 2067135 2005 49076
C. Rosales, , 《Trans. Amer. Math. Soc.》（）, 第 – 期。MR（g:）

[31] A. Ros 和 R. Souam, *On stability of capillary surfaces in a ball*, 《太平洋数学杂志》178（1997），第 2 期，345–361。MR 1447419（98c:58029）[32] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, 增订版，《数学及其应用百科全书》第 151 卷，Cambridge University Press，剑桥，2014 年。MR 3155183[33] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, 《数学分析中心论文集》，澳大利亚国立大学，第 3 卷，澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983 年。MR 756417（87a:49001）[34] J. E. Taylor, *Unique structure of solutions to a class of nonelliptic variational problems*, 《微分几何》（《纯数学专题讨论会论文集》第 XXVII 卷，第 1 部分，斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州，1973 年），美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1975 年，第 419–427 页。MR 0388225[35] ——— *Crystalline variational problems* **84** 1978 4, 568 588 493671 , , [36] *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball* **374** 2019 《美国数学会通报》（），第 期，–。MR G. Wang 和 C. Xia, ，《数学年刊》（），第 3 4 期，1845 1882 3985125 - –。MR[37] L. Weng, *An overdetermined problem of anisotropic equations in convex cones*, 《微分方程杂志》268（ 2020 7, 3646 3664 4053600 ），第 – 期。MR H. C. Wente, [38] *A note on the stability theorem of J. L. Barbosa and M. Do Carmo for closed surfaces of constant* , 《太平洋数学杂 *mean curvature* **147** 1991 2, 375 379 1084716 92 53010 志》（），第 – 期。MR（g:）[39] S. Winklmann, *A note on the stability of the Wulff shape*, 《数学档案》（巴塞尔）87（ 2006），第 3 期，272–279。MR 2258927[40] G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Kristallflächen*, 《晶体学与矿物学杂志》34（1901），449–530。

Departamento de Geometría y Topología and Excellence Research Unit “Modeling Nature” (MNat) Universidad de Granada E-18071 Spain. , ,

Email address: crosales@ugr.es