arXiv:2302.06624v1 [hep-th] 13 Feb 2023

几何流与超对称性

Anthony Ashmore、[a] Ruben Minasian[b] 和 Yann Proto[c]

[a]恩里科·费米研究所与 Kadanoff理论物理中心，芝加哥大学，美国伊利诺伊州芝加哥 60637

[b]理论物理研究所，巴黎萨克雷大学，法国国家科学研究中心，法国原子能和替代能源委员会，F-9119，法国吉夫叙尔伊韦特

[c]索邦大学，法国国家科学研究中心，理论物理与高能物理实验室，LPTHE，F-75005，法国巴黎

摘要

我们研究异质超引力中由三形式通量 H 的 Bianchi 恒等式驱动的超对称性与几何流之间的关系。我们描述了如何从一个泛函推导出流方程；该泛函出现在将玻色作用量改写为超对称算子平方和的过程中。在复三维流形上，所得方程与数学文献中所谓的“反常流”相吻合。我们将其推广到具有 G_2 或 Spin(7) 结构的七维和八维流形，并讨论流形为 K3 曲面上的环面纤维化的实例。在后一类情形中，流可简化为单个标量方程；只要该流具有长时间存在性和收敛性，就能推出超引力解的存在性。我们还对α' 展开发表评论，并强调在 Bianchi 恒等式中使用适当联络的重要性，以确保流的不动点满足超引力运动方程。

ashmore@uchicago.edu, ruben.minasian@ipht.fr, yproto@lpthe.jussieu.fr

目录

1 引言 **2**

2 异质弦超引力与超对称性 **5**

3 反常流 **10**

3.1 运动方程.12 3.2 使用 Hull联络的反常流.14 3.3 α' 展开.15

4 来自泛函的反常流 **16**

4.1 反常流的另一种写法.17 4.2 异质超引力中的 Lichnerowicz 恒等式.19 4.3 变分 I .22

5 不同维度上的反常流 **24**

5.1 T^2 在 K3 上的纤维化的反常流.25 5.2 G_2 结构流形上的反常流.28 5.3 $K3 \times S^3$ 上的反常流.33 5.4 T^3 在 K3 上的纤维化的反常流.35 5.5 Spin(7) 结构流形上的反常流.39

6 作为梯度流的反常流 **41**

7 讨论 **45**

A 约定 **48**

A.1 异质弦理论.49 A.2 联络与超对称性.50 A.3 旋量与伽马矩阵.51 A.4 G-结构.53

B 度量的流方程 **55**

B.1 流方程的积分.55 B.2 改写为运动方程.56 B.3 一段关于超对称性的旁逸.60

1 引言

理论物理与数学之间有着悠久而富有成效的历史渊源。这一点在弦理论中尤为明显：对超对称真空的探索既受到复几何、辛几何和卡¨ahler 几何发展的影响，也推动了这些领域的发展。数学中的一个著名例子是，佩雷尔曼利用里奇流证明了瑟斯顿几何化猜想 [1]。其中的关键在于，他引入了一个泛函，其梯度流与里奇流规范等价。颇为有趣的是，这个泛函实际上就是度量和膨胀子的弦框架有效作用量 [2–5]。

里奇流只是几何流的一个例子——几何流是一种描述几何结构随时间演化的偏微分方程。如今，物理学和数学中已有种类繁多的几何流。其中包括假设底层流形具有额外结构的例子，例如 K¨ahler–里奇流 [6] 或 G_2 流 [7–10], ，以及里奇流的高阶变体，例如卡拉比流 [11]。写下一个几何流时，至少有两个目标。首先，流的不动点应对应于有意义的几何方程的解；其次，流本身应是（弱）抛物型的，从而使演化方程的解具有唯一性，并至少在一段短时间内存在。[1] 第一个条件不禁令人思考：给定的几何流是否具有物理解释，或者说，在物理系统的描述中出现的流是否具有几何解释，例如将 σ模型的重整化群流解释为靶空间上的里奇流 [13–15]。

本工作的目标是从物理学角度分析一种称为“反常流”的几何流。反常流是在复三维流形上定义的、作用于共形平衡厄米度量和杨–米尔斯规范场的耦合流，最初由 [16] 引入，并在 [17–20] 中进一步研究。度量流的首项就是里奇张量，其高阶修正由曲率和挠率构造而成，因此反常流是一种修正里奇流，具体来说，是 K¨ahler–Ricci 流的非 K¨ahler 推广。[2] 事实上，该流与 Hull–Strominger 系统的解密切相关；[23, 24], 这是一组偏微分方程，其来源是要求带有度量、挠率和规范场的三维流形作为闵可夫斯基背景保留 $N = 1$ 超对称性，且处于

[1]如果驱动流的偏微分算子具有正定的主符号，则称该流为强抛物型／严格抛物型。若相关算子具有规范对称性，例如微分同胚对称性，则主符号会存在零方向，此时称该流为弱抛物型。可以利用“德特克技巧”固定规范冗余，从而得到强抛物型流，进而推出其短时存在性。（例如，参见 [12,第 6] 节。）[2]关于厄米度量（带挠率）的流的另一个例子，参见 [21, 22] 。

异质超引力中。事实上，“反常流”这一名称源于这样一种观察：该流由异质弦理论中的反常抵消条件驱动[25], ，该条件表现为挠率/三形式通量的非平凡 Bianchi 恒等式 H。

反常流是分析非K¨ahler几何的少数工具之一。迄今为止，异质弦理论中的非K¨ahler真空实例仍然寥寥无几：其中包括数学文献中所称的 Fu–Yau 解 [26], ，这些解最初由 Dasgupta、Rajesh 和 Sethi [27] 通过一系列 T 对偶和 S 对偶发现；物理学文献中对此的变体 [57–65], ；可平行化流形上的一些实例 [28–30], ；以及广义Calabi–Gray流形上的解 [31]。[3] 从更根本的层面来说，与卡拉比–丘度量不同，给定某些拓扑数据，并不能保证非K¨ahler解必然存在。若没有这类存在性证明或显式度量，就难以将这些背景用于唯象学或模型构建。

对于任何椭圆方程组，例如 Hull–Strominger 系统，都存在无穷多个抛物流，其不动点是该椭圆方程组的解。因此，流的短时间存在性并不能提供太多限制。相较之下，判断一种抛物流是否值得进一步研究，更好的依据是其收敛性和长时间存在性。尽管目前尚未证明反常流在一般情形下具有长时间存在性，但对于称为 Goldstein–Prokushkin 纤维化 [17]的几何结构，这一点已经得到证明。这些三复形是以 K3 曲面 [32], 为底空间的二维环面纤维化，其纤维化结构带来了增强的 $N = 2$ 超对称性。在这种情形下，流的长时间存在性为 Fu 和 Yau 关于 Hull–Strominger 解存在性的证明 [26, 33]提供了一个更简洁的版本。这些结果表明，反常流独具特色，值得进一步研究。

考虑反常流时，会想到两个问题。首先，按照最初的定义，由于反常抵消条件中联络的选择存在微妙之处，流的不动点实际上并不能给出异质超引力的运动方程的解。其次，这种特定的流为何具有如此理想的性质，似乎没有明确的物理原因，因此难以将其推广到更高维流形。我们将论证，解决这两个问题的关键在于超对称性。正如我们将回顾的，异质超引力满足一个 Lichnerowicz型恒等式，该恒等式将玻色作用量与超对称算符的平方以及 Bianchi 恒等式联系起来[34], ，并相应地分解运动方程。基于此，我们揭示了反常流与超对称性之间的直接联系。此外，通过直接从

[3]由于异常消除条件中联络的选择，这些解似乎并不能真正满足运动方程。

超引力推导反常流，便可清楚地看出，在反常抵消条件中使用正确的联络至关重要，并且必须仔细考察运动方程和反常流本身的 α' 展开。

理解反常流作为一种修正里奇流的关键，在于注意到异质弦运动方程可以写成某些作用于处处非零旋量上的超对称算符的形式。这在完整的十维理论中成立，在将其约化到具有 $\mathbb{R}^{1,\,9-n}\times X_n$ 形式的几何上时也成立。对于后一种情形，爱因斯坦方程——即关于 X_n 上度量的运动方程 —— 可以表示为 [35–38]

$$\begin{aligned} &R_{mn}+2\nabla_m\nabla_n\varphi-\tfrac{1}{4}H_m{}^{p_1p_2}H_{np_1p_2}\\ &=\left(\epsilon^\dagger\gamma_{(m}\not{D}D_{n)}\epsilon-\epsilon^\dagger\gamma_{(m}D_{n)}\not{D}\epsilon+\tfrac{1}{2}H_{(m}{}^{pq}\,\epsilon^\dagger\gamma_{n)}\gamma_pD_q\epsilon+\text{c.c.}\right)\\ &\quad+\tfrac{1}{12}\mathrm{d}H_{(m}{}^{p_1\ldots p_3}\,\epsilon^\dagger\gamma_{n)p_1\ldots p_3}\epsilon, \end{aligned}\tag{1.1}$$

其中， ϵ是一个不变旋量，用以刻画 X_n 上的 G结构。为简洁起见，我们仅纳入了 α' 中的零阶项。最后那个依赖于 $\mathrm{d}H$ 的项，恰好就是反常流中度量演化方程所出现的项，因此度量的流由爱因斯坦方程以及依赖于超对称算符D_m 和 $\not{D}$的项驱动。这也解释了反常流为何在 SU(3) 结构流形上尤其值得研究——事实证明，如果初始时满足超对称性条件 $D_m\epsilon=\not{D}\epsilon=0$，那么流动过程中这些条件会继续保持。由 $\mathrm{d}H$ 驱动的流随后化为由爱因斯坦方程驱动的流，不含任何修正项。纳入首阶α' 修正后，也有类似结果。

我们还分析了反常流向具有 G_2 或 Spin(7) 结构的七维或八维流形的自然推广。这些流通常不保持超对称性，其流方程由运动方程以及至多二次依赖于挠率 H 的修正项驱动。这些流方程本身可能就具有数学上的趣味。[4] 不过，在某些背景下， G结构可进一步约化为 SU(3) 或 SU(2)，且该流确实保持超对称性。这在精神上类似于 [40]：在适当选择初始数据的情况下， G结构的流可简化为约化后的 G结构的流。特别是，在约化为 SU(2) 后，该流简化为关于膨胀子的标量演化方程。例如，在七维流形上，这给出了作为 K3 上 T^3 纤维化的解，并在三维中保持 $N=2$ 或 $N=4$ 超对称性。[5]这一例子可以推广，从而在 $\mathrm{K3}\times\mathrm{S}^3$, 上得到 AdS 解，其中

[4]关于 [39] G-结构的流的近期研究，参见[5]。这些方程似乎还具有更大的自由度，从而可能允许存在 $N=1$ 超对称性。

反常流再次约化为单个方程。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们回顾时空异质弦理论中关于 α' 的一些事实，以及背景具有 $N=1$ 形式 $\mathbb{R}^{1,3}$ 乘以一个六维流形时满足的超对称性条件。在第 3 节中，我们回顾最初定义的反常流，并说明为何 Bianchi 恒等式中的联络选择至关重要。随后，我们利用 Hull联络重新表述反常流，并展示这种做法如何直接建立流方程与超引力运动方程之间的联系。我们还讨论 α' 展开对于理解异质通量解的重要性。在第 4 节中，我们引入一个泛函，由此可以导出反常流；并说明该泛函如何通过异质弦理论版的 Lichnerowicz 恒等式与玻色超引力作用量相关联，而无需施加 Bianchi 恒等式。在第 5 节中，我们利用这个泛函将反常流推广到 G_2 和 Spin(7) 结构流形。我们给出若干例子，其中包括两个例子：流方程简化为关于膨胀子的单个标量方程，从而得到 Fu–Yau 解的三维环面和四维环面类比。在第6 节中，我们说明如何在对偶化三形式通量 H 后，将反常流解释为某个泛函的梯度流。最后，我们在第 7 节讨论尚待解决的问题和未来工作。附录 A 和 B 给出了异质超引力、伽马矩阵和 G-结构的约定，并通过超对称性详细推导流方程与运动方程之间的联系。

2 异质超引力与超对称性

异质超引力是时空理论，它源自将异质弦理论截断到 α' 的一阶，其中 α' 是弦长的平方。该理论的玻色场包括度量 g、标量膨胀子场 φ、带有局部二形式势 B 的三形式 H，以及规范场 A。费米场包括引力微子 ψ、膨胀微子 λ 和规范微子 χ。若超引力运动方程得到满足、 H 满足一个非平凡的 Bianchi 恒等式，且费米场消失，则称存在一个异质超引力的玻色解。具体而言，玻色运动方程为 [6]

$$\begin{aligned}\mathrm{eom}[g]_{MN} \equiv R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\varphi - \frac{1}{4}H_{MPQ}H_N{}^{PQ} \\ -\frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}\, F_{MP}F_N{}^P - \mathrm{tr}\, R^+_{MP}R^{+\,P}_N) + \mathcal{O}(\alpha'^2),\end{aligned} \tag{2.1a}$$

[6]作用量和变分请参见附录 A.1 。我们的约定与 [34]相同。或者，在将 [37] 发送至 H 后，我们的约定与 $-H$相同。

$$\begin{aligned}\mathrm{eom}[\varphi] \equiv{}& \frac{1}{4}R + \nabla^2\varphi - (\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{48}H_{MNP}H^{MNP} \\ &- \frac{\alpha'}{32}(\operatorname{tr} F_{MN}F^{MN} - \operatorname{tr} R^{+}_{MN}R^{+MN}) + \mathcal{O}(\alpha'^2),\end{aligned} \tag{2.1b}$$

$$\mathrm{eom}[B]_{MN} \equiv \nabla^P(\mathrm{e}^{-2\varphi}H_{PMN}) + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{2.1c}$$

$$\mathrm{eom}[A]_M \equiv \mathcal{D}^{-N}(\mathrm{e}^{-2\varphi}F_{NM}) + \mathcal{O}(\alpha'), \tag{2.1d}$$

其中 R^+ 是 Hull联络 ∇^+的曲率二形式，定义见（A.11）； ∇^- 是 Bismut联络，定义见（A.10）； F 是 A的场强；而 $\mathcal{D}^-$ 是规范协变的 Bismut联络。[7] 对于H ， Bianchi 恒等式或“反常抵消条件”为

$$\mathrm{d}H - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr} F\wedge F - \operatorname{tr} R^+\wedge R^+) = 0. \tag{2.2}$$

该理论本身具有超对称性，费米场的超对称变换为

$$\delta\psi_M = \nabla_M\varepsilon + \tfrac{1}{8}H_{MNP}\Gamma^{NP}\varepsilon + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{2.3a}$$

$$\delta\lambda = \big(\Gamma^M\partial_M\phi + \tfrac{1}{12}H_{MNP}\Gamma^{MNP}\big)\varepsilon + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{2.3b}$$

$$\delta\chi = -\tfrac{1}{2}F_{MN}\Gamma^{MN}\varepsilon + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{2.3c}$$

其中， $\mathcal{O}(\alpha')$ 对这些超对称变分的修正完全由对 H 的修改所涵盖，从而得到（2.2）。如果理论的玻色解使费米场的超对称变分均为零，则称该解为超对称解。我们尤其关注四维闵可夫斯基时空与六维流形 X的乘积形式的超对称解。此时，超对称参数可分解为闵可夫斯基空间上的旋量与 X上的旋量。要使解具有超对称性，至少需要存在一个处处非零旋量 ϵ ，它定义在 X 上，并使上述超对称变分为零。结合 Bianchi 恒等式，所得方程组称为 Hull–Strominger 系统 [23, 24]。

更具体地说，十维弦框架度量具有如下形式

$$\mathrm{d}s^2_{10} = \mathrm{d}s^2(\mathbb{R}^{1,3}) + \mathrm{d}s^2(X). \tag{2.4}$$

其解 只有当四维度量为闵可夫斯基度规时，形式才能保持庞加莱不变性

[7] 直接比较这些方程中 α' 的阶数时应谨慎，因为规范联络在作用量及其他所有地方都已低了一个 α' 因子。

$\mathbb{R}^{1,3}$ 即闵可夫斯基度规，膨胀子 φ 在 $\mathbb{R}^1$上为常数，^{3}且三形式 H 和规范场 A 在 $\mathbb{R}^1$方向上没有分量，^{3}。于是，是否存在形式为（2.4）的解，就归结为关于 X 的几何以及其上张量／规范场的问题。正因如此，在下文中，我们稍微滥用一下记号，将 g，φ，H 和 A 视为限制在 X上。

规范场 A 是向量丛 V 上的联络，其曲率为 F。处处非零旋量 ϵ 在 X 上定义了一个 SU(3) 结构，这等价于一个非退化实二形式 ω 和一个满足以下条件的复三形式 Ω

$$\omega \wedge \Omega = 0, \qquad \frac{\mathrm{i}}{\|\Omega\|^2}\Omega \wedge \bar{\Omega} = \frac{1}{3!}\omega \wedge \omega \wedge \omega. \tag{2.5}$$

特别是，ω 定义了一个厄米度量，而 Ω 在 X上定义了一个几乎复结构。在附录A.3中给出的约定下，它们的表达式为

$$\omega_{mn} = -\mathrm{i}\epsilon^\dagger\gamma_{mn}\gamma_*\epsilon, \qquad \Omega_{mnp} = -\mathrm{i}\epsilon^\dagger\gamma_{mnp}(1+\gamma_*)\epsilon. \tag{2.6}$$

十维超对称条件（2.3）化为内流形 X上的一组条件。超对称条件变为

$$D_m\epsilon = 0, \qquad \not{D}\epsilon = 0, \qquad \not{F}\epsilon = 0, \tag{2.7}$$

其中 $\not{F} = \frac{1}{2}F_{mn}\gamma^{mn}$，超对称算子定义为 [8]

$$D_m\epsilon := \nabla_m\epsilon + \tfrac{1}{8}H_{mnp}\gamma^{np}\epsilon \equiv \nabla^-_m\epsilon, \tag{2.8a}$$

$$\not{D}\epsilon := \gamma^m\nabla_m\epsilon + \tfrac{1}{24}H_{mnp}\gamma^{mnp} - \gamma^m\partial_m\varphi. \tag{2.8b}$$

这些条件意味着 $\epsilon^\dagger\epsilon$ 在 X上为常数，因此可以设为 1，对应于通常的归一化 $\|\Omega\|^2 = 8$。由超对称变分消失得到的其余条件

[8]注意，$\not{D} \neq \gamma^m D_m$，而是来自式（2.3）中引力微子和膨胀微子变分的某种组合。

等价于[9]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega)=0, \qquad & \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega)=0, \\ H=\mathrm{i}(\bar\partial-\partial)\omega, \qquad & \Omega\wedge F=\omega\lrcorner F=0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

第一个条件告诉我们，X 是一个典范丛全纯平凡的复流形。第二个条件等价于 X 上的厄米度量是共形平衡的。第三个条件唯一确定三形式场强H 为 Bismut 联络的挠率。最后两个条件意味着 V 是一个全纯丛，其曲率为 (1,1) 型，并满足厄米–杨–米尔斯方程。

仅有超对称条件并不足以确保背景满足超引力运动方程。还需要满足三形式通量的 Bianchi 恒等式，见 (2.2)。请注意，联络 ∇^+ 的选择在此至关重要：正如 [35] 所示并在 [30, 38], 中讨论的，超对称条件加上 Bianchi 恒等式，当且仅当 Bianchi 恒等式中出现的、作用于 ∇^+ 上的 TX 联络是 SU(3) 瞬子时，才蕴含异质弦运动方程；也就是说，其曲率二形式满足$R^+\epsilon=0$。在 $\mathcal{O}(\alpha')$阶近似下，给定超对称条件和 Bianchi 恒等式，Hull 联络 ∇^+ 会 自动 成为瞬子，因此没有额外约束。然而，如果在 Bianchi 恒等式中选择使用其他 联络 ，那么除非该联络是 SU(3) 瞬子，否则由此得到的运动方程就不是异质超引力的运动方程。不过，在 $\mathcal{O}(\alpha')$阶近似下，由于超对称性与运动方程的相容性，Hull 联络在所有可能的选择中脱颖而出。特别是，作用于 TX 上的 Chern 联络通常 并非 瞬子，因此如果在 Bianchi 恒等式中使用 Chern 联络，就 无法 得到正确的运动方程。[10]

上述讨论同样适用于形如 $\mathbb{R}^{1,\,p}\times X_{9-p}$ 的时空。在所有情况下，Bianchi 恒等式中的联络必须是瞬子，才能得到正确的运动方程，而 Hull联络自动满足这一条件。对于本文，

[9]为了与其他 G-结构进行比较，超对称条件（2.9）可以用 SU(3) 结构的内禀挠率改写为

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\varphi\wedge\omega+\mathrm{i}(H^{(2,1)}_{\mathbf{6}}-H^{(1,2)}_{\mathbf{6}}), \qquad \mathrm{d}\Omega=2\mathrm{d}\varphi\wedge\Omega, \qquad H=\star\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega)=-i(\partial-\bar\partial)\varphi\wedge\omega+H_{\mathbf{6}}.$$

[10]如果背景具有大体积极限，或者等价地具有一个光滑的 $\alpha'\to 0$ 极限，那么零阶背景必定是卡拉比–丘流形。此时 Hull 联络和 Chern 联络的曲率二形式仅在 α' 阶上有所不同；而曲率只需在零阶时为瞬子，因此可以使用任一联络 [41]。然而，对于具有挠率的非 K¨ahler 解，情况并非如此，而这正是本文关注的重点。

除非另有说明，我们始终取 ∇^+ 为 Hull联络，以确保（2.9）中的超对称条件加上 Bianchi 恒等式能够给出正确超引力运动方程的解。

下文中，区分超对称几何与超对称解将很有用。超对称几何满足（2.9）中的超对称条件：

$$\text{Supersymmetric geometry} \equiv \begin{array}{ll} \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega)=0, & \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega)=0, \\ H=\mathrm{i}(\bar\partial-\partial)\omega, & \Omega\wedge F=0. \end{array} \tag{2.10}$$

这等价于 $D_m\epsilon = \not{D}\epsilon = 0$ 以及丛 V 是全纯的。超对称解是同时满足 Bianchi 恒等式（2.2）和（2.9）中的厄米–杨–米尔斯方程的超对称几何：

$$\text{Supersymmetric solution} \equiv \text{Supersymmetric geometry} + \text{Bianchi} + \text{HYM}. \tag{2.11}$$

超对称解之所以得名，是因为它自动满足超引力运动方程。

当 $F = H = 0$ 时，位于 $\mathbb{R}^{1,3}\times X$ 上的异质弦允许存在这样的解：X 是卡拉比–Yau 流形，即 Ricci 平坦的 K¨ahler 三维流形。在这种情况下，Yau 对卡拉比猜想的证明保证了：对于一个具有 $c_1(X) = 0$ 的三维流形，给定初始 K¨ahler 度量，就存在一个解。目前尚不清楚异质弦的 Hull–Strominger 系统解是否也有类似的存在性保证。具体而言，对于具有平凡典范丛和共形平衡厄米度量的紧致复三维流形，目前尚不清楚还需要哪些条件才能确保 Hull–Strominger 系统存在解。显然必须满足两个条件。首先，由于 H 是规范不变的，$\mathrm{d}H$ 是恰当形式，因此 Bianchi 恒等式 (2.2) 的右端在限制到 X 时必须在上同调中平凡。这要求 X 的切丛与其上的向量丛 V 的第一庞特里亚金类相等。其次，全纯丛 V 上的联络应满足厄米–杨–米尔斯方程；当且仅当 V 是 [42–44]（多重）稳定时，该方程才成立。人们曾猜想这些条件实际上足以保证解的存在 [45], ，不过现在看来，还需要进一步的稳定性概念 [46, 47]。

3 反常流

已知的 Hull–Strominger 系统紧致解寥寥无几，主要困难在于存在非 K¨ahler 几何，其体现为共形平衡条件以及通量满足的非平凡 Bianchi 恒等式。

反常流 最初定义的反常流，是复三维流形 [16]上厄米度量的一种几何流。除了联络选择上的一个微妙之处外，该流的不动点满足异质弦理论的 Bianchi 恒等式，即“反常抵消条件”，故得此名称。用 X上的 SU(3) 结构表示时，最初定义的流为[11]

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega\big) = \mathrm{d}H - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr} F\wedge F - \operatorname{tr} R^{\mathrm{Ch}}\wedge R^{\mathrm{Ch}}), \tag{3.1a}$$

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega\big) = 0, \tag{3.1b}$$

$$h^{-1}\partial_t h = -\omega\lrcorner F, \tag{3.1c}$$

其中，三形式 H 固定为 $H = \mathrm{i}(\bar\partial - \partial)\omega$, R^{Ch} 是 TX上 Chern 联络的曲率，而定义曲率 F 的规范场 A 由 V 纤维上的厄米度量 h 通过 $A = h^{-1}\partial h$确定。[12] 按此写法，该流的不动点满足

$$\mathrm{d}H - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr} F\wedge F - \operatorname{tr} R^{\mathrm{Ch}}\wedge R^{\mathrm{Ch}}) = 0, \qquad \omega\lrcorner F = 0, \tag{3.2}$$

这对应于异质超引力的 Bianchi 恒等式（不过采用的是 Chern 联络而非 Hull联络），且曲率 F 为原始的。

更具体地，考虑一个复三维流形 X，其典范丛平凡，并配有一个向量丛 V，使得 $p_1(X) = p_1(V)$。选取一个处处不为零的全纯 (3, 0)-形式 Ω、一个标量膨胀子场 φ 和一个厄米形式 ω，它们满足

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega) = 0, \qquad \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega) = 0, \tag{3.3}$$

[11]与物理学文献中对 Hull–Strominger 系统的描述相比，[16] 所用的记号略显非标准。我们的记号与 [16]（以下标 AF 表示）的记号之间的关系为

$$\mathrm{e}^{-2\varphi} = \|\Omega_{\mathrm{AF}}\|, \qquad \Omega = \sqrt{8}\frac{\Omega_{\mathrm{AF}}}{\|\Omega_{\mathrm{AF}}\|}, \qquad \omega = \omega_{\mathrm{AF}}, \qquad \alpha' = -2\,\alpha'_{\mathrm{AF}}, \qquad t = \tfrac{1}{2}t_{\mathrm{AF}}.$$

[12] h 的流称为 Donaldson 热流 [43]。这与 Yang–Mills 流 [48],规范等价，其中联络通过 $\partial_t A = -\mathrm{d}_A^\dagger F$ 演化，右端为 Yang–Mills 泛函梯度的负值。（概要见 [49] 。）

从而 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega$ 是全纯的，且厄米度量是共形平衡的。[13] (3.1) 中的流保持这两个条件。三形式 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega$ 完全不随流演化，因此如果它最初是闭的，那么沿流演化时仍保持闭合。四形式 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega$ 按闭四形式演化，因此如果它在流开始时是闭的，那么沿流演化时仍保持闭合。此外，给定丛 h 上的初始厄米度量 V，相应的曲率 F 是全纯的，$\Omega\wedge F=0$。由于规范场 A 的流是根据 h定义的，该流也保持 F的全纯性。因此，给定满足 (3.3) 的初始数据，若 (3.1) 中的流存在，则其终点是 Bianchi 恒等式和 Hermitian–Yang–Mills 方程的解。因此，反常流似乎能够在初始厄米度量的共形平衡类中，为 Hull–Strominger 系统提供解。由此，我们应将反常流视为广义里奇流，其初始数据为超对称几何，而流本身保持超对称性。

注意，由于 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega$ 不随流演化，与之相关的复结构（仅利用 Ω [51]即可定义）沿流保持不变。若 Ω 和 ω 要在流动过程中继续定义一个 SU(3) 结构（理应如此），这意味着 $\omega\wedge\omega$ 应保持为一个 (2，2)-形式。观察 (3.1) 中第一个流方程，$\mathrm{d}H=2\mathrm{i}\partial\bar\partial\omega$ 和 $\operatorname{tr}F\wedge F$ 显然都是 (2，2)-形式；此外，得益于 Chern 联络的性质，最后一项 $\operatorname{tr}R^{\mathrm{Ch}}\wedge R^{\mathrm{Ch}}$ 也是 (2，2) 型，因此没有问题。

如[18], 所示，得益于 n维流形上厄米形式的性质，给定一个初始共形平衡度量，(3.1) 中四形式的流方程蕴含厄米度量和膨胀子的流方程：

$$\partial_t g_{mn}=\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\omega_m{}^{p_1}\omega^{p_2p_3}\mathcal{B}^{\mathrm{Ch}}_{np_1p_2p_3},\qquad \partial_t\varphi=\tfrac{1}{32}\mathrm{e}^{2\varphi}\omega^{m_1m_2}\omega^{m_3m_4}\mathcal{B}^{\mathrm{Ch}}_{m_1m_2m_3m_4},\tag{3.4}$$

其中

$$\mathcal{B}^{\mathrm{Ch}}=2\mathrm{i}\partial\bar\partial\omega-\frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr}F\wedge F-\operatorname{tr}R^{\mathrm{Ch}}\wedge R^{\mathrm{Ch}})\tag{3.5}$$

就是式（3.2）中的 Bianchi 恒等式，其中 H 替换为 $\mathrm{i}(\partial-\bar\partial)\omega$。于是，度量的流可以写成如下形式的修正里奇流：

$$\partial_t g_{mn}=-\mathrm{e}^{2\varphi}R_{mn}+\ldots\tag{3.6}$$

其中其他项由“挠率”或三形式通量 H 构成，并且还包含出现在 $\mathcal{O}(\alpha')$ 处的修正项，这些修正项关于曲率是二次的。正如对于

[13]注意，有一些构造共形平衡度量的方法，因此这些初始数据并没有特别强的限制。参见例如 [50]。

标准 Ricci 流，人们可能会认为，度量和膨胀子的流分别就是每个场的运动方程。然而，由于在（3.2）中使用了 Chern 联络，当前形式的反常流与异质超引力运动方程之间通常不存在清晰的关系。特别是，流的不动点并不对应于异质超引力的解，直到 $\mathcal{O}(\alpha')$。正如我们将在下一节看到的，通过在 Bianchi 恒等式中使用 Hull联络，可以解决这一问题。

3.1 运动方程

正如我们在附录 B 中所示，若不考虑 α' 修正，度量的流（3.4）可改写为

$$\partial_t g_{mn} = -\mathrm{e}^{2\varphi}\big(R_{mn} + 2\nabla_m\nabla_n\varphi - \tfrac{1}{4}H_{mpq}H_n{}^{pq}\big). \tag{3.7}$$

此处的右端仅仅是异质超引力中度量的零阶运动方程（关于 α'）。由于反常条件（$\mathcal{O}(\alpha')$ 中的这一项对于 2.2）在 H-通量非平凡时至关重要，而 X 是紧致的，因此我们需要了解加入首阶 α' 修正后，流会如何改变。

采用式（3.1）中的流，并令 R^{Ch} 由 Chern 联络的曲率给出，则与异质超引力的联系在 $\mathcal{O}(\alpha')$ 阶失效：例如，在$\partial_t g_{mn}$ 中会出现额外项，使其无法被解释为度量的超引力运动方程，直至 $\mathcal{O}(\alpha')$ 阶。这仅仅反映了这样一个事实：若在反常条件（2.2）中采用任意联络，则超引力运动方程与反常条件在 不满足 $N=1$ 超对称性，直至 $\mathcal{O}(\alpha')$ 阶。相反，超对称性要求将联络选为 Hull联络 ∇^+。若如此处理，并在定义反常流中的曲率时采用 Hull联络，便可恢复与超引力运动方程的联系，并将其解释为修正里奇流。

为强调这一点，假设用 Bianchi 恒等式中的任意联-˜络 ∇ 来定义反常流：

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega) = 2\mathrm{i}\partial\bar\partial\omega - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr}F\wedge F - \operatorname{tr}\tilde R\wedge\tilde R). \tag{3.8}$$

将该方程与厄米形式缩并，即可得到度量的流：

$$\partial_t g_{mn} = \frac{1}{24}\mathrm{e}^{2\varphi}(\omega\wedge\omega)_m{}^{p_1p_2p_3}\left(2\mathrm{i}\partial\bar\partial\omega - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr}F\wedge F - \operatorname{tr}\tilde R\wedge\tilde R)\right)_{np_1p_2p_3}. \tag{3.9}$$

假设几何是超对称的，则有

$$-\frac{1}{24}(\omega\wedge\omega)_m{}^{p_1p_2p_3}(2\mathrm{i}\partial\bar{\partial}\omega)_{np_1p_2p_3}=R_{mn}+2\nabla_m\nabla_n\varphi-\frac{1}{4}H_{mpq}H_n{}^{pq},\tag{3.10}$$

我们将其识别为度量在 X上的运动方程。因此，在 α'的零阶近似下，度量的流方程由（3.7）给出，与~联络 ∇的选择无关。

那么，（ $\mathcal{O}$）α'对（3.9）的修正项呢？利用 SU(3) 不变旋量 ϵ，可以证明

$$\frac{1}{24}(\omega\wedge\omega)_m{}^{p_1p_2p_3}(\operatorname{tr}\tilde{R}\wedge\tilde{R})_{np_1p_2p_3}=-\operatorname{tr}\tilde{R}_{mp}\tilde{R}_n{}^p-\operatorname{tr}\epsilon^\dagger\tilde{R}_{mp}\gamma_n{}^p\tilde{\not{R}}\epsilon,\tag{3.11}$$

其中 $\operatorname{tr}F\wedge F$ 项也有类似的表达式。附录B 中的计算进而表明，流方程可写为

$$\partial_t g_{mn}=-\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{eom}[g]_{mn}+\frac{\alpha'}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\Big(\operatorname{tr}\epsilon^\dagger F_{mp}\gamma_n{}^p\not{F}\epsilon-\epsilon^\dagger\tilde{R}_{mp}\gamma_n{}^p\tilde{\not{R}}\epsilon\Big)+\mathcal{O}(\alpha'^2),\tag{3.12}$$

其中 $\mathrm{eom}[g]_{mn}$ 包含（2.1a）中的 $\mathcal{O}(\alpha')$ 项。在流的不动点处，规范场满足厄米–杨–米尔斯条件，因此依赖于 F的项因$\not{F}\epsilon=0$而消失。于是，度量满足其自身的异质超引力运动方程，但还差一个关于 R的二次~额外项。由于我们希望流的驻点对应于 $\mathcal{O}$（α'）的真正超引力解~，因此必须要求依赖于 R的项要么在不动点处消失，要么至少是 $\mathcal{O}$（α'^2）阶，从而可以在 α'~展开中将其舍去。将依赖于 R的项与 g^{mn}缩并后，可以发现其形式为 $\operatorname{tr}\epsilon^\dagger\tilde{\not{R}}\tilde{\not{R}}\epsilon=\operatorname{tr}|\tilde{\not{R}}\epsilon|^2$。由于该项正定，当且仅当 $\tilde{\not{R}}\epsilon=0$时才会消失。因此，对于$\tilde{\not{R}}\epsilon=0+\mathcal{O}$（$\alpha'$），式（3.12）中的额外项将以 $\mathcal{O}$（α'）阶消失。这要求 $\tilde{\nabla}$ 在 α'的零阶近似下为 SU(3) 瞬子，从而唯一确定 Hull联络 ∇^+ 为合适的选择。正如我们先前提到的， TX 上的 Chern 联络一般~ [38]并非瞬子。因此，若取 ∇ 为 Chern 联络，则在不动点处，式（3.12）中的额外项并非 α' 的二阶项，度量也就无法满足其自身的运动方程。

我们已经论证，若要使流的不动点对应于满足异质超引力运动方程的 $\mathcal{O}(\alpha')$解，就必须在 Bianchi 恒等式中使用 Hull联络 ∇^+，并采用反常流的定义。现在我们来看看这对度量和膨胀子的演化方程有何影响。

3.2 使用 Hull联络的反常流

对于满足（2.10）的超对称几何，并在 Bianchi 恒等式中取 Hull联络 ∇^+，式（3.12）中度量 $\mathcal{O}$（α'）的流方程为[14]

$$\partial_t g_{mn} = -\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{eom}[g]_{mn} + \frac{\alpha'}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\Big(\mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger F_{mp}\gamma_n{}^p \not{F}\epsilon - \epsilon^\dagger R^+_{mp}\gamma_n{}^p \not{R}^+\epsilon\Big) + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{3.13}$$

其中，第一项是度量的异质弦运动方程，精确到 $\mathcal{O}$（α'）（由将（2.1a）限制在三维流形 X）得到），而“额外”项则关于 F 和 R^+呈二次型。此时人们可能会担心，在不动点处并不满足超引力运动方程 $\mathrm{eom}[g]_{mn} = 0$，而是满足某个含有额外曲率二次项的修正方程。然而事实并非如此，Hull联络的选择再次发挥了关键作用。首先，关于曲率 R^+ 的二次项实际上正比于 $\mathrm{d}H$，这得益于如下恒等式：

$$R^+_{mn}{}^{pq}\gamma^{mn}\epsilon = -\tfrac{1}{2}\mathrm{d}H_{mn}{}^{pq}\gamma^{mn}\epsilon, \tag{3.14}$$

该恒等式对超对称几何成立。在流的不动点处，按定义，对于 H 满足 Bianchi 恒等式，因此 $\mathrm{d}H \sim \mathcal{O}(\alpha')$。关于 R^+ 的额外二次项随后为 $\mathcal{O}(\alpha'^2)$，因此在我们所处理的 α' 阶上应将其舍去。其次，根据规范联络的流方程，在不动点处有 $\not{F}\epsilon = 0$，因此关于 F 的额外二次项也消失。于是，在不动点处可得到

$$\partial_t g_{mn} = 0 \equiv -\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{eom}[g]_{mn} + \mathcal{O}(\alpha'^2). \tag{3.15}$$

换言之，不动点处的度量自动满足其自身的异质弦超引力运动方程，精确到 $\mathcal{O}(\alpha')$。

在异常条件中选用 Hull联络后，可以在膨胀子的流方程中看到类似的结构：

$$\partial_t \varphi = -\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{eom}[\varphi] + \frac{\alpha'}{16}\mathrm{e}^{2\varphi}\Big(\mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger \not{F}\not{F}\epsilon - \mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger \not{R}^+\not{R}^+\epsilon\Big) + \mathcal{O}(\alpha'^2). \tag{3.16}$$

出于与上述相同的原因，我们看到，在该流的不动点处，膨胀子满足其自身的超引力运动方程，即 $\mathcal{O}(\alpha')$。[15]

[14]有关此计算，请参见附录 B。[15]请注意，若用运动方程来表述，就无法明显看出这些流方程

在发现异质超引力运动方程与采用 Hull联络的反常流之间存在直接联系后，从此处开始，当我们提到复三维流形上的反常流时，始终指的是

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega\big)=\mathcal{B}, \tag{3.17a}$$

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega\big)=0, \tag{3.17b}$$

$$h^{-1}\partial_t h=-\omega\lrcorner F, \tag{3.17c}$$

¯其中 $\mathrm{d}H=2\mathrm{i}\partial\partial\omega$ 和 $\mathcal{B}$ 是 Bianchi 恒等式，其曲率由 Hull联络定义：

$$\mathcal{B}=\mathrm{d}H-\frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr}F\wedge F-\operatorname{tr}R^+\wedge R^+). \tag{3.18}$$

3.3 The α' 展开

在进入下一节之前，我们先停下来讨论 α' 展开的重要性。按照最初的表述，反常流被视为一个关于 α'精确的封闭系统。这也是选择 Chern 联络来定义 H的 Bianchi 恒等式的原因之一——Chern 联络始终具有复型（2, 2），与 $\partial\partial\omega$和 tr $F\wedge F$的复型¯一致，因此 Bianchi 恒等式成立这一条件不会受到过多约束。正如我们将在第 5 节看到的，如果使用 Hull联络，它通常会产生一个非（2, 2）分量，因此若假设系统关于 α'精确，Bianchi 恒等式便无解。然而，事实并非如此。异质作用量、运动方程、超对称条件以及 Bianchi 恒等式本身都只在 $\mathcal{O}(\alpha')$ 阶正确，并且都会在更高阶[52, 53]受到修正。例如，如果一阶 Bianchi 恒等式成立，那么 $R^+\epsilon=0+\mathcal{O}(\alpha')$。考察（3.13）中的度规流方程，加入修正项会产生一个新的 $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ 项，接下来人们希望将其吸收到度规运动方程中。不过，为了保持与作用量和运动方程的相容性，还应相应调整超对称变分。预计这一过程会在 α'的所有阶持续下去。[16] 有鉴于此，应保持一致，对这两个方程都只做到 α' 阶，我们

度量和膨胀子的流保持扭曲体积测度 $\mathrm{e}^{-4\varphi}\mathrm{vol}$，而这自动由$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega)=0$得出。这个表面矛盾的解决办法是，对于超对称几何，运动方程$[g]_{mn}$ 和运动方程$[\varphi]$ 之间存在额外关系，$\partial_t\varphi=\frac{1}{8}g^{mn}\partial_t g_{mn}$从而确保 $\partial_t\varphi=\frac{1}{8}g^{mn}\partial_t g_{mn}$。当用 Bianchi 恒等式来表示这些流时，这些关系显而易见；我们也可以像在附录B中那样显式计算它们。[16]另请参见 [54]，其中论证了超对称性加上异质 Lichnerowicz 恒等式意味着对 α'的修正会延续到所有阶。

正在尝试求解，并求出这些方程的解。

4 由泛函导出的反常流

本节旨在为反常流（3.17）寻找一种泛函描述。其动机是为这种流找到一种与维数无关的表述，进而将其推广到具有 G-结构的七维和八维流形。在此过程中，我们将看到，反常流与某个异质 Lichnerowicz 恒等式密切相关，该恒等式将玻色作用量与超对称算子的平方联系起来。

首先，让我们简要回顾一下佩雷尔曼对标准 Ricci 流作为梯度流 [1]的描述。给定泛函

$$\mathcal{S}[g,\varphi]=\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\big(R+4(\nabla\varphi)^2\big), \tag{4.1}$$

它实际上就是将度量和膨胀子的弦框架作用量限制在 X上，其变分为

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[g,\varphi]=\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\Big[&-\delta g_{mn}(R^{mn}+2\nabla^m\nabla^n\varphi)\\&+\big(\tfrac{1}{2}g^{mn}\delta g_{mn}-2\delta\varphi\big)\big(R+4\nabla^2\varphi-4(\nabla\varphi)^2\big)\Big].\end{aligned} \tag{4.2}$$

如果且仅如果各变分相互关联，使扭曲体积测度 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\mathrm{vol}$ 保持不变，则变分 $\frac{1}{2}g^{mn}\delta g_{mn}-2\delta\varphi$恒等于零。定义新测度 $\mathrm{d}m=\mathrm{e}^{-2\varphi}\mathrm{vol}$，并将膨胀子定义为 $\varphi=\frac{1}{2}\log(\mathrm{vol}/\mathrm{d}m)$，对称张量 $-(R^{mn}+2\nabla^m\nabla^n\varphi)$就是泛函的梯度

$$\mathcal{S}[g]=\int_X \mathrm{d}m\big(R+4(\nabla\varphi)^2\big), \tag{4.3}$$

其中，泛函导数定义为

$$\delta\mathcal{S}[g]=\int_X \mathrm{d}m\,\frac{\delta\mathcal{S}[g]}{\delta g_{mn}}\delta g_{mn}. \tag{4.4}$$

泛函的演化遵循

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{S}[g]=-\int_X \mathrm{d}m\,(R^{mn}+2\nabla^m\nabla^n\varphi)\partial_t g_{mn}. \tag{4.5}$$

给定测度 $\mathrm{d}m$ 的一种选取后，佩雷尔曼随后考虑了梯度流

$$\partial_t g_{mn} = \frac{\delta \mathcal{S}[g]}{\delta g_{pq}} g_{mp} g_{nq} \equiv -(R_{mn} + 2\nabla_m \nabla_n \varphi) \tag{4.6}$$

的 $\mathcal{S}[g]$，其中 φ 的流由 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\mathrm{vol}$ 的不变性隐式定义。将其代入（4.5），泛函本身的演化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{S}[g] = \int_X \mathrm{d}m \, |\mathrm{Ric} + 2\,\mathrm{Hess}\,\varphi|^2 \geq 0, \tag{4.7}$$

因此 $\mathcal{S}[g]$ 在流作用下单调递增。当流（4.6）存在时，除相依赖于时间的（φ依赖）微分同胚外，它就是里奇流。[17] 因此，选择测度 $\mathrm{d}m$ 类似于选择规范，由此得到的流被视为相同。

4.1 反常流的另一种表述

如（3.17）所示，反常流方程以形式 ω 和 Ω 表示，它们在 X上定义了一个 SU(3) 结构。回想一下，也可以等价地用度量 g 定义在 X 上，以及一个在 SU(3) 下变换为单态的旋量 ϵ 来刻画 SU(3) 结构。这两种描述之间的对应关系为

$$\omega_{mn} = -\mathrm{i}\epsilon^\dagger \gamma_{mn}\gamma_* \epsilon, \qquad \Omega_{mnp} = -\mathrm{i}\epsilon^\dagger \gamma_{mnp}(1+\gamma_*)\epsilon, \tag{4.8}$$

其中，度量的标架 $e_m{}^a$ 用于将平直伽马矩阵转换为坐标指标，$\gamma_m = e_m{}^a \gamma_a$。随后，（3.17）中的流方程可改写为膨胀子、标架和旋量的演化方程：

$$\partial_t \varphi = -\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\epsilon^\dagger \not{\mathcal{B}} \epsilon, \tag{4.9a}$$

$$\partial_t e_m{}^a = -\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\tfrac{1}{3!}\epsilon^\dagger \gamma_m{}^{n_1 n_2 n_3}\epsilon\, \mathcal{B}^a{}_{n_1 n_2 n_3}, \tag{4.9b}$$

$$\partial_t \epsilon = 0, \tag{4.9c}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是式（3.18）中定义的四形式。注意，标架和膨胀子的变分意味着扭曲体积测度 $\mathrm{e}^{-4\varphi}\mathrm{vol}$ 在流下保持不变。

以这种方式重新表述反常流后，很容易看出，流方程的右端

[17] 这是“德图克技巧”的一个特例。

可以由该泛函的场方程得到

$$I = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\,\epsilon^\dagger \not{\mathcal{B}}\epsilon = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\mathcal{B}, \tag{4.10}$$

其中使用恒等式 $\epsilon^\dagger\gamma_{(4)}\epsilon = \star\omega$ 得到第二个等式。更准确地说， I 被视为一个伪作用量，其中 $\mathcal{B}$ 是背景场，因此本身不参与变分。（我们将在第6节回到这个问题，届时会给出一个不受此限制的泛函。）接着，我们定义关于场（φ， e， ϵ）的泛函导数为[18]

$$\delta I = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\left(\frac{\delta I}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta I}{\delta e_m{}^a}\delta e_m{}^a + \left(\frac{\delta I}{\delta\epsilon}\right)^\dagger\delta\epsilon + \delta\epsilon^\dagger\frac{\delta I}{\delta\epsilon}\right), \tag{4.11}$$

其中积分以 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\mathrm{vol}$ 为权重。容易求得 I 的泛函导数为

$$\frac{\delta I}{\delta\varphi} = -2\epsilon^\dagger\not{\mathcal{B}}\epsilon, \tag{4.12a}$$

$$\frac{\delta I}{\delta e_m{}^a} = -\tfrac{1}{3!}\epsilon^\dagger\gamma^{mn_1\ldots n_3}\epsilon\,\mathcal{B}_{an_1\ldots n_3} + \epsilon^\dagger\not{\mathcal{B}}\epsilon\,e^m{}_a, \tag{4.12b}$$

$$\frac{\delta I}{\delta\epsilon} = \not{\mathcal{B}}\epsilon - (\epsilon^\dagger\not{\mathcal{B}}\epsilon)\epsilon. \tag{4.12c}$$

接着，我们将流方程定义为

$$\partial_t\varphi = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2\varphi}\frac{\delta I}{\delta\varphi}, \tag{4.13a}$$

$$\partial_t e_m{}^a = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\left(\frac{\delta I}{\delta e_n{}^b}g_{mn}\eta^{ab} + \frac{1}{2}\frac{\delta I}{\delta\varphi}e_m{}^a\right), \tag{4.13b}$$

$$\partial_t\epsilon = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\frac{\delta I}{\delta\epsilon}, \tag{4.13c}$$

其中，规范联络的流由式（3.17）中纤维度量的流给出。这里出现的特定变分组合，与异质弦运动方程如何定义为弦框架作用量的变分有关——参见附录（A.1）。随后令 $\mathcal{B}$ 为异质弦比安基恒等式，并由超对称性确定三形式 H 如何通过 $H = \mathrm{i}(\partial-\partial)\omega$ 表示为其他场的函数。

[18]注意，关于 ϵ 的变分存在歧义，因为这是在单位范数 $\epsilon^\dagger\epsilon = 1$ 的马约拉纳旋量空间中的变分，因此 $\epsilon^\dagger\delta\epsilon = 0$。通过施加条件 $\epsilon^\dagger\frac{\delta I}{\delta\epsilon} = 0$ 即可消除这一歧义。

利用上述方程，可以得到 $\omega\wedge\omega$ 和 Ω 的流：

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega\big)=\mathcal{B}, \tag{4.14a}$$

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega\big)=-\frac{3\mathrm{i}}{4}\omega\wedge(\Omega\lrcorner\mathcal{B}). \tag{4.14b}$$

当 $\mathcal{B}$ 是一个 (2,2)-形式时——至少在 $\mathcal{O}(\alpha')$ 的意义下——有 $\Omega\lrcorner\mathcal{B}=0$，因此 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega$ 不发生流动。回顾泛函的变分，从 (4.12c) 也可以看出 $\not{\mathcal{B}}\epsilon=(\epsilon^\dagger\not{\mathcal{B}}\epsilon)\epsilon$，因此旋量也不发生流动。于是，$(\varphi,e,\epsilon)$ 的流方程恰好与反常流 (4.9) 的流方程一致，而 (4.14) 中四形式和三形式的流则化为 (3.1)。

鉴于这一观察，人们或许会想知道，是否有一种直接的方法可以看出，在流的不动点处，度量和膨胀子满足各自的超引力运动方程。上一节中，我们通过使用若干针对 SU(3) 结构的特设恒等式，以一种颇为迂回的方式证明了这一点。正如我们将看到的，通过超对称性可以更一般且直接地得到这一结果。

4.2 异质超引力中的 Lichnerowicz 恒等式

如[34, 54], 所示，Lichnerowicz 公式的一种推广可将十维玻色作用量 S_{10} 表示为“BPS 平方”形式：

$$\tfrac{1}{4}S_{10}=\int_{M_{10}}\mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}_{10}\left[|\not{D}\varepsilon|^2-|D\varepsilon|^2+\frac{\alpha'}{16}\big(\mathrm{tr}\,\bar{\varepsilon}\not{F}\not{F}\varepsilon-\mathrm{tr}\,\bar{\varepsilon}\not{R}^+\not{R}^+\varepsilon\big)\right], \tag{4.15}$$

其中假定十维超对称参数 ε 的范数为单位值。微分算子 D 和 $\not{D}$ 正是出现在引力微子变分和修正膨胀微子变分中的算子：

$$\delta\Psi_M=D_M\varepsilon\equiv(\nabla_M+\tfrac{1}{8}H_{MNP}\Gamma^{NP})\varepsilon, \tag{4.16a}$$

$$\Gamma^M\delta\Psi_M-\delta\lambda=\not{D}\varepsilon\equiv(\not{\nabla}+\tfrac{1}{4}\not{H}-\not{\partial}\varphi)\varepsilon. \tag{4.16b}$$

注意，$\not{D}$并非定义为通常的伽马矩阵缩并：$\not{D}\neq\Gamma^M D_M$。经过分部积分并对场取消失边界条件后，式（4.15）中的等式成立，同时还要求 H 满足 Bianchi 恒等式。由式（4.15）可直接看出，超对称解——即满足 $\not{D}\varepsilon=D\varepsilon=\not{F}\varepsilon=0$（其中 $\not{R}^+\varepsilon=0$ 根据 Hull 联络的定义自动成立）——具有

作用量为零，并且对式（4.15）进行变分后可知，只要 H 满足 Bianchi 恒等式，超对称解就满足运动方程。

如第2节所述，考虑一个背景，其度量为四维闵可夫斯基时空与一个六维流形 X的乘积。马约拉纳–外尔超对称参数 ε 可分解为闵可夫斯基空间上的常值外尔旋量 $\eta_\pm$ 和定义在 ϵ 上的处处非零旋量 X：

$$\varepsilon = \eta_+ \otimes \epsilon_+ + \eta_- \otimes \epsilon_-, \tag{4.17}$$

其中 $\epsilon_\pm$ 是马约拉纳旋量 ϵ的手征/反手征部分。于是，存在一个六维版本的 Lichnerowicz型恒等式，它将限制在 X 上的玻色作用量 S_{B}与超对称算子的平方联系起来：

$$\tfrac{1}{4}S_{\mathrm{B}} = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\left[|\not{D}\epsilon|^2 - |D\epsilon|^2 + \frac{\alpha'}{16}\big(\mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger \not{F}\not{F}\epsilon - \mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger \not{R}^+\not{R}^+\epsilon\big) + \tfrac{1}{4}\epsilon^\dagger \not{\mathcal{B}}\epsilon\right], \tag{4.18}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是式（3.18）中定义的 Bianchi 恒等式。这给出了式（4.15）在 X 上的对应形式，且无需假设 Bianchi 恒等式成立。

让我们停下来看看这个恒等式是如何得出的。为便于阐述，我们聚焦于六维版本，不过在十维中也有完全相同的版本，只含零阶的 α' 项。标准的 Lichnerowicz（或 Lichnerowicz–Weitzenb¨ock）公式 [55] 指出，由列维-奇维塔导数 ∇_m 和狄拉克算符 $\not{\nabla} = \gamma^m\nabla_m$构成、作用于旋量的微分算子的一个特定二次组合具有张量性。算符平方之差作用于旋量 ϵ 时，等价于乘以里奇标量：

$$(\nabla^m\nabla_m - \not{\nabla}^2)\epsilon = \tfrac{1}{4}R\,\epsilon. \tag{4.19}$$

值得注意的是，这个恒等式可以推广到挠率背景。考虑以下算子

$$D_m\epsilon = \nabla_m\epsilon + \alpha_1\,\tfrac{1}{2!}H_{mn_1n_2}\gamma^{n_1n_2}\epsilon, \tag{4.20a}$$

$$\not{D}\epsilon = \gamma^m\nabla_m\epsilon + \alpha_2\,\tfrac{1}{3!}H_{m_1\ldots m_3}\gamma^{m_1\ldots m_3}\epsilon + \alpha_3\,\nabla_m\varphi\,\gamma^m\epsilon, \tag{4.20b}$$

由三个实常数 α_1、 α_2 和 α_3 参数化。注意，狄拉克算符 $\not{D}$ 不再由

$\gamma^m D_m$ 给出。它们的平方之差具有如下形式

$$\begin{aligned}(D^m D_m - \not{D}^2)\epsilon = \tfrac{1}{4}(R - 12(\alpha_1^2 - \tfrac{1}{3}\alpha_2^2)H^2 - 4\alpha_3^2(\nabla\varphi)^2 - 4\alpha_3\nabla^m\nabla_m\varphi)\epsilon \\ -\alpha_2\,\tfrac{1}{4!}\mathrm{d}H_{m_1\dots m_4}\gamma^{m_1\dots m_4}\epsilon \\ +\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)(\star\mathrm{d}\star H)_{n_1n_2}\gamma^{n_1n_2}\epsilon \\ +\tfrac{1}{4}(\alpha_1^2-\alpha_2^2)H_{m_1m_2}{}^{n}H_{m_3m_4n}\gamma^{m_1\dots m_4}\epsilon \\ +(\alpha_1-\alpha_2)H_{m_1m_2}{}^{n}\gamma^{m_1m_2}\nabla_n\epsilon \\ -2\alpha_3\,\nabla^m\varphi\,(\nabla_m\epsilon + \alpha_2\,\tfrac{1}{2!}H_{mn_1n_2}\gamma^{n_1n_2}\epsilon),\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中$H^2 = \frac{1}{3!}\,H_{m_1\dots m_3}H^{m_1\dots m_3}$且$(\nabla\varphi)^2 = \nabla_m\varphi\nabla^m\varphi$。对于 α_i的任意取值，这个组合都不是张量性的：除了乘以 ϵ的标量外，它还包含通过伽马矩阵作用的二形式和四形式，以及导数 $\nabla\epsilon$。施加 $\alpha_1 = \alpha_2$可消去其中许多项，仅留下两个非张量项：四形式 $\mathrm{d}H$以及涉及 $\nabla\varphi$的项。令 H 为闭形式，并令 $\alpha_3 = 0$，这些项便会消失，从而得到 Bismut 对 Lichnerowicz 公式的推广[56]。

引入膨胀子依据以下观察：当 $\alpha_1 = \alpha_2$时，与 α_3 成正比的非张量项可写为 $\nabla^m\varphi\, D_m\epsilon$。因此，虽然（4.21）按当前写法并非张量性的，但通过分部积分可以使其成为张量性的。[19] 考虑到异质作用量中出现的共形因子 $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ ，组合 $\mathrm{e}^{-2\varphi}(|D\epsilon|^2 - |\not{D}\epsilon|^2)$ 可以改写为以下形式

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-2\varphi}((D^m\epsilon)^\dagger D_m\epsilon - (\not{D}\epsilon)^\dagger\not{D}\epsilon) &= -\mathrm{e}^{-2\varphi}\epsilon^\dagger(D^mD_m - \not{D}^2)\epsilon \\ &\quad +2\,\mathrm{e}^{-2\varphi}\nabla^m\varphi\,\epsilon^\dagger D_m\epsilon - 2(\alpha_3+1)\mathrm{e}^{-2\varphi}\nabla^m\varphi\,\epsilon^\dagger\gamma_m\not{D}\epsilon \\ &\quad +\nabla^m(\mathrm{e}^{-2\varphi}\epsilon^\dagger(D_m - \gamma_m\not{D})\epsilon) \\ &= -\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\varphi}(R - 8\,\alpha_1^2H^2 - 4\alpha_3(\alpha_3+2)(\nabla\varphi)^2) \\ &\quad +\alpha_1\,\mathrm{e}^{-2\varphi}\tfrac{1}{4!}\mathrm{d}H_{m_1\dots m_4}\epsilon^\dagger\gamma^{m_1\dots m_4}\epsilon \\ &\quad +2\,\mathrm{e}^{-2\varphi}(\alpha_3+1)\nabla^m\varphi\,\epsilon^\dagger(D_m - \gamma_m\not{D})\epsilon \\ &\quad +\nabla^m(\mathrm{e}^{-2\varphi}\epsilon^\dagger(D_m - \gamma_m\not{D} + \alpha_3\nabla_m\varphi)\epsilon).\end{aligned} \tag{4.22}$$

值得注意的是，设定 $\alpha_3 = -1$ 就足以将大多数非张量项设为零。对于这一选择，$\mathrm{i}\not{D}$ 关于内积 $\langle\epsilon_1,\epsilon_2\rangle = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\;\epsilon_1^\dagger\epsilon_2$ 是自伴的。最后一个自由参数可以设为 $\alpha_1 = 1/4$ ，从而得到正确的动能项

[19]一个必要 条件是存在一个可归一化旋量 ϵ ，该旋量 X 可以设为 $\epsilon^\dagger\epsilon = 1$.

对于 H。[20] 对该恒等式在 X 上积分，可得到 Lichnerowicz 恒等式（4.18）中的零阶项：

$$\tfrac{1}{4}\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\Big(R+4(\nabla\varphi)^2-\tfrac{1}{2}H^2\Big)=\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\Big(|\not{D}\epsilon|^2-|D\epsilon|^2+\tfrac{1}{4}\epsilon^\dagger \not{d}\not{H}\epsilon\Big),\tag{4.23}$$

其中 D 并且 $\not{D}$ 与异质超引力的超对称算子相匹配（2.8）.

不难看出，对这一恒等式的 α' 修正必定具有（4.18）中给出的形式。例如，额外的 tr $|\not{F}\epsilon|^2$ 项可利用伽马矩阵代数展开，得到一个 tr $\epsilon^\dagger \not{F}\wedge\not{F}\epsilon$ 项和一个 tr $|F|^2$ 项。前者抵消了 Bianchi 恒等式中的 tr $F\wedge F$项，后者则再现了玻色作用量中规范场的动能项。 R^+ 项的处理类似。

4.3 变化 I

注意，（4.18）右端的最后一项恰好是（ I 4.10）中的泛函，其场方程再现了反常流。从直观上看， I 的变分似乎应与 S_{B} 的变分相关，两者相差一些在超对称几何上消失的项。二者之间的确切关系有些微妙。具体而言，我们将 I 视为关于（φ， e， ϵ）的泛函，并将 $\mathcal{B}$ 理解为背景场，且不对 B作显式变分。与此相关的是，在反常流中，Bianchi 恒等式仅在不动点处成立。这两个问题都需要进一步说明。

为便于说明，我们首先考虑 $\alpha'=0$ 的情形，此时上述恒等式写为

$$\tfrac{1}{4}S_{\mathrm{B}}|_{\alpha'=0}=\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\Big(|\not{D}\epsilon|^2-|D\epsilon|^2+\tfrac{1}{4}\epsilon^\dagger \not{d}\not{H}\epsilon\Big).\tag{4.24}$$

请回想，玻色作用量 S_{B} 通常被视为超引力场（g、 φ、 B、 A）的泛函（对于 $\alpha'\to 0$， A 不起作用）；对这些场变分即可得到异质超引力运动方程 (2.1)。由于 (4.24) 是一个恒等式，对左端和右端关于超引力场进行变分，必然得到相同的结果。不过，对 B 变分时有一个微妙之处：作用量中出现的是三形式通量 H，因此，为了关于 B 进行变分，我们必须先能够将其定义为 H 的局部势。然而，一旦将 H 定义为某个势，它就会自动满足 Bianchi 恒等式。于是，四形式 dH 恒等地为零，并且对于任意的（g、 φ、 B），都会从 (4.24) 中消失，因此 dH 项本身从未参与变分。换言之，超引力运动方程可通过对以下内容进行变分得到

[20] T选择 $\alpha_1=-1/4$ 也是允许的，这相当于对符号 $H\to -H$ 做一个平凡的改变。

关于 $(g、\ \varphi、\ B)$ 对右端进行变分，并将 $\mathrm{d}H$ 视为背景场。此外，由于 (4.24) 对任意场构型均成立，处处非零旋量的选取ϵ 是任意的。例如，对于非超对称解，ϵ 定义了一个 G-结构，作用于 X，但它不必满足超对称条件，因此也无法告诉我们任何关于超引力场的信息！换句话说，由于通常 ϵ 不依赖于 $(g、\ \varphi、\ B)$，且 (4.24) 的左端不依赖于 ϵ，(4.24) 的右端也必定与 ϵ的选取无关。这也意味着，右端关于旋量的变分为零。

如果将 (4.24) 视为 (g, φ, B) 的泛函，那么似乎无法“离壳”并放宽 Bianchi 恒等式，而这正是反常流所要求的。然而，我们不必在超引力场的整个空间中进行变分，而可以改为在 (2.10) 中定义的超对称几何空间中进行变分。对于这些构型，由于旋量 ϵ 满足 Killing 旋量方程，$\not{D}\epsilon = D\epsilon = 0$, ϵ 现在包含了物理超引力场的信息——例如，指定 (φ, e, ϵ) 就足以通过 (2.9) 确定 H，而其运动方程也会自动成立。得益于此，对于超对称几何，我们可以等价地对 (φ, e, ϵ) 进行变分。此外，由于 (4.24) 关于各种超对称算子是二次的，令 $\not{D}\epsilon = D\epsilon = 0$ 也足以使 $|\not{D}\epsilon|^2$ 和 $|D\epsilon|^2$ 项的变分为零，因此对于超对称几何而言，这些项不会对右端的变分作出贡献。因此，当我们将讨论范围限制在超对称几何空间时，恒等式 (4.24) 变为

$$S_{\mathrm{B}}|_{\alpha'=0} = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\,\epsilon^\dagger \not{\mathrm{d}}\not{H}\epsilon \equiv I|_{\alpha'=0}. \tag{4.25}$$

此外，由于反常流保持 SU(3) 结构的超对称条件，在流开始时令 $D\epsilon = \not{D}\epsilon = 0$ 为零，就足以确保它在流过程中始终为零。由此以及式（A.8）中运动方程的定义可知，从满足 $\alpha' = 0$ 的超对称几何出发，由 $I|_{\alpha'=0}$ 驱动的流（4.13）实际上对应于这些场的零阶运动方程（取负号）所产生的流，这与第 3.1 节的结果一致。

将式（ α' （4.18）中的主导修正项重新引入后，超对称几何将满足式（4.18），其中 $D\epsilon$ 和 $\not{D}\epsilon$ 项设为零：

$$S_{\mathrm{B}} = I + \frac{\alpha'}{4}\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\big(\mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger \not{F}\not{F}\epsilon - \mathrm{tr}\,\epsilon^\dagger \not{R}^+\not{R}^+\epsilon\big). \tag{4.26}$$

按照（A.8）中定义的运动方程，由 I 驱动的流（4.9）现在对应于

这些场的 $\mathcal{O}(\alpha')$ 运动方程所描述的流，不过现在还包含我们借助 α'项和 $\not{F}$ （3.13）和（3.16）中得到的额外修正，这些项出现在（ $\not{R}^{+}$ 4.26）的右端。

5 不同维度中的反常流

在上一节中，我们使用了限制在六维流形上的 Lichnerowicz 恒等式（4.18）X ，将 Bianchi 恒等式与超对称算符的平方以及玻色作用量联系起来。利用这一点以及由旋量定义 SU(3) 结构这一条件，我们得以将反常流改写为一个依赖于不变旋量和 Bianchi 恒等式的泛函所产生的流。对于限制在七维或八维内部空间上的情形，这个 Lichnerowicz 恒等式同样成立，例如那些具有 G_2 或 Spin(7) 结构的空间。因此，自然可以将这些空间上的反常流定义为由以下泛函驱动的流

$$I = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi} \operatorname{vol} \epsilon^{\dagger} \not{\mathcal{B}} \epsilon, \tag{5.1}$$

其中， X 是一个七维或八维流形，而 ϵ 是不变旋量，它刻画了G-结构在 X 上的形式，并与超对称性相关。在生成流时，泛函中出现的 Bianchi 恒等式 $\mathcal{B}$ 保持不变，而 I 发生变分；事实证明，这足以写出 G_2 或 Spin(7) 结构的流。我们将在第6 节再讨论这个问题，并给出一个不存在这一微妙之处的泛函——无论采用哪种方式，得到的流都相同。

在本节余下部分，我们将回顾六维 Fu–Yau 解的反常流，然后推导刻画 G_2 或 Spin(7) 结构的不变张量的流方程，并分析其含义。对于 G-结构约化为 SU(3) 的情形，由（5.1）驱动的流可以化为通常的反常流。假设该结构进一步约化为 SU(2)，我们将得到 Fu–Yau Ansatz 的类似形式，适用于以 K3 曲面为底空间的三维和四维环面纤维化。这些流的终点描述了具有三维和二维闵可夫斯基因子的超对称解。根据所选的纤维化结构，这些解同样可以保留四个或八个超荷（$N = 1$ 或 $N = 2$ （在四维中））。在保留八个超荷的情形下，流再次简化为关于膨胀子的单个标量方程。因此，这些解的存在性应可由该流的长时间存在性推出，正如 [17]中所述。我们还给出一个简单的例子，其中外部空间为反德西特$_3$，内部七维流形为 $\mathrm{K3} \times \mathrm{S}^3$。

5.1 K3 上 T^2 纤维化的反常流

对于保留扩展 $N = 2$超对称性的三复形上的含挠异质弦背景，反常流的理解最为透彻。含挠异质弦背景本质上都是一个解的各种变体；该解最初通过对 $\mathrm{K3} \times \mathrm{K3}$ [27]上的 F/M 理论紧化进行对偶化而得到。此后，物理学文献中出现了许多推广 [57–65]。在数学文献中，这些解后来被称为 Fu–Yau 解 [26]。在反常流中使用它们的基本思路是：Fu–Yau 试探解自动满足所有超对称条件，只需满足 Bianchi 恒等式；而且关键的是，反常流会保持这一试探解。这样，流的不动点便会满足超对称条件和 Bianchi 恒等式。

具体而言，Fu–Yau 解是非 K¨ahler 几何，其保留 $N = 1$ 或 $N = 2$ 超对称性，具体取决于纤维化结构的选择。其底层三维复流形 X 是 Goldstein–Prokushkin 纤维化 [32], ，即一个全纯 T^2 纤维化，底空间为 K3 曲面，且总空间是复流形。K3 曲面上的 SU(2) 结构由全纯二形式 Ω_{K3} 和 K¨ahler 形式 ω_{K3}定义，它们共同确定纤维化底空间上的 Ricci 平坦度量。于是，三维复流形上的 SU(3) 结构的试探解为[21]

$$\omega = \mathrm{e}^{2\varphi}\omega_{\mathrm{K3}} + a\tfrac{\mathrm{i}}{2}\Theta \wedge \bar{\Theta}, \qquad \Omega = \mathrm{e}^{2\varphi}\sqrt{a}\,\Omega_{\mathrm{K3}} \wedge \Theta, \tag{5.2}$$

其中 a 是 T^2 纤维的（常数）面积。三维复流形上的度量为

$$\mathrm{d}s^2(X) = \mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}s^2(\mathrm{K3}) + a\,\delta_{IJ}\Theta^I\Theta^J, \tag{5.3}$$

其中 $\Theta = \Theta^1 + \mathrm{i}\Theta^2$，而 Θ^I 是与二维环面的基灵向量对偶的全局定义一形式。[22]纤维化由曲率 $\mathcal{F}^I = \mathrm{d}\Theta^I$ 指定，它们是 $H^2(\mathrm{K3}, 2\pi\mathbb{Z})$ 中元素的拉回。值得注意的是，如果 $\mathcal{F}^I$ 在上同调中非平凡，则 X 上的度量永远不是 K¨ahler 度量 [32]。

我们来回顾 Fu–Yau 试探解如何满足超对称条件。当且仅当复通量 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 + \mathrm{i}\mathcal{F}^2$不含 (0, 2) 分量时， X上的几乎复结构才是可积的。由此再结合 K3底空间上 SU(2) 结构形式的闭性,

[21]我们的记号遵循 [66], ，但使用 $\mathcal{F}$ 表示纤维化，并保留 F 表示杨–米尔斯曲率。[22]更一般地，可以通过 $\Theta = \Theta^1 + \tau\Theta^2$允许二维环面具有非平凡的复结构。 τ 为常数的情形很简单。关于 τ 何时是 K3 上的全纯函数，请参见[61] 。

很容易验证 (2.9) 中的前两个方程成立。若取 A 为 K3 上某个稳定全纯丛拉回所得的厄米–杨–米尔斯联络，则最后两个方程也成立。于是，(2.9) 中的第三个条件只需确定 H 与 ω 的导数之间的关系。因此，给定一个卡拉比–丘度量、K3 上的一个厄米–杨–米尔斯联络，以及底空间上一个不含 (0, 2) 分量的复通量 $\mathcal{F}$，Fu–Yau 试探解 (5.2) 就满足 Hull–Strominger 系统的超对称条件。如 [66], 所示，该构型通常保留 $N = 1$ 超对称性。正如前文所述，要使异质弦运动方程有解，还需满足最后一个条件，即 Bianchi 恒等式。由此得到的背景通常保留$N = 1$ 超对称性（四个超荷）；不过，如果 $\mathcal{F}^I$ 各自都是 (1, 1) 型且满足厄米–杨–米尔斯方程，超对称性便会增强至 $N = 2$ 。注意到在 (ω_{K3}、re Ω_{K3}、im Ω_{K3}) 的 SU(2) 旋转下，超对称条件保持不变，唯一例外是 $\mathcal{F}$ 不含 (2, 0) 分量这一条件，由此即可看出这一点。若要求 $\mathcal{F}$ 纯为 (1, 1) 型，该条件在旋转下也保持不变；此时得到的 SU(2) 可解释为保留 $N = 2$的背景的 R对称性。

在此之前，我们先简要谈谈通量量子化。通常认为，只有当超引力通量经过量子化时，超引力解才能提升为弦论解；也就是说，必须对 X 中各个圈上的闭 p 形式通量积分进行量子化。对于具有通量的一般异质弦背景，情况有些微妙，因为 H 并非闭形式，且满足非平凡的 Bianchi 恒等式。不过，对于 Fu–Yau 解，可以确定一组合适的量子化条件 [66, 67]。将三形式通量分解为

$$H = H_{\mathrm{hor}} + H_I \wedge \Theta^I, \tag{5.4}$$

其中，水平分量 H_{hor} 完全位于 K3 上，而 H_I 是 K3 上的二形式，很容易验证 H_I 是闭形式。因此，适当的量子化条件为

$$H_I \in H^2(X, 2\pi\alpha'\mathbb{Z}), \tag{5.5}$$

因此， a，即 T^2 纤维的面积，必须以 α' 为单位量子化。特别是，这意味着 $a \sim \mathcal{O}(\alpha')$，在考虑 α' 展开中给定阶数会出现哪些项时，应牢记这一点。

有人提出　　在[26] 中， $N = 2$ 情形下解的存在性可以归结为

膨胀子的一个 Monge–Amp`ère 型标量方程：

$$\Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi} = \mathrm{vol}_{\mathrm{K3}} \lrcorner \left(a\,\mathcal{F}_I \wedge \mathcal{F}^I + \frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}\,F \wedge F - \mathrm{tr}\,R^{\mathrm{Ch}} \wedge R^{\mathrm{Ch}}) \right), \tag{5.6}$$

其中 Δ_{K3} 是 K3 上的拉普拉斯算子，与逆体积形式 vol 的缩并$_{\mathrm{K3}}$ 等价于作用 $\star_{\mathrm{K3}}$。乍看之下，这似乎是一个关于膨胀子的简单泊松方程，因此证明解的存在性应该轻而易举。然而，$R^{\mathrm{Ch}} \wedge R^{\mathrm{Ch}}$ 项中的膨胀子依赖性被隐藏在形式 $\partial\bar{\partial}\varphi \wedge \partial\bar{\partial}\varphi + \ldots$ 之中，这使得问题变成非线性的。注意，[26] 及后续研究在 Bianchi 恒等式中使用了 Chern 联络，而我们前面已经论证过，这不会导出超引力运动方程的解。然而，按照[68], ，可以验证，联络的选择会通过所选函数影响最终得到的 Monge–Amp`ère 方程，其精确形式对存在性证明并不重要。得益于此，[26]的论证仍然成立，只需使用 R^+ 代替 R^{Ch}即可。

为了解这个标量方程的由来，请回想一下：若取 R^+ 为Hull联络，则只需解 Bianchi 恒等式。对于 $N = 2$ 解，dH 是一个相对于二维环面纤维化完全水平的四形式，因此与K3上的体积形式成正比。同样，如[66], 所示，出现在 $\mathcal{O}(\alpha')$处的tr $F \wedge F$ 和tr $R^+ \wedge R^+$ 项也是水平的。于是，Bianchi 恒等式可以对偶化为上面的单个标量方程。在 $N = 1$ 情形下，必须使用 α'展开，并记住环面的面积 a 以 α'为单位量子化。更具体地说，可以发现四形式dH 通常含有非水平部分。$_\quad_a\,\partial\mathcal{F}_{(2,0)}\wedge\Theta+$c.c. $\subset$ dH，其阶数为 α'。求解Bianchi 恒等式会约束环面纤维化的复化曲率 $\mathcal{F}$ 的(2, 0)部分，使其为Ω_{K3} 的常数倍（在 α'的一阶近似下）。考虑这一(2, 0)部分后，解仅保留 $N = 1$超对称性。

5.1.1 $N = 2$ 流方程

如 [17], 所示，反常流保持 Fu–Yau Ansatz 的形式。此外，对于 $N = 2$ 类，反常流化简为关于膨胀子的单个流方程：

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi} - a \star_{\mathrm{K3}}(\mathcal{F}_I \wedge \mathcal{F}^I) - \frac{\alpha'}{4} \star_{\mathrm{K3}}(\mathrm{tr}\,F \wedge F - \mathrm{tr}\,R^+ \wedge R^+) \right) + \mathcal{O}(\alpha'^2). \tag{5.7}$$

在 $N = 2$ 情形下，反常流的长时间存在性和收敛性已得到证明[17], ，从而为 Fu 和 Yau 最初的存在性证明提供了另一种证明 [26]。

注意，即使对于任意的 $\mathcal{F}_{(2,0)}$，反常流也与 $N = 1$ 几何相容，并且该流仍可化约为关于膨胀子的标量方程。然而，一般而言，它还需要一个关于环面纤维化的额外流方程，其形式为

$$\partial_t \mathcal{A} = \star_{\mathrm{K3}} \mathrm{d}\mathcal{F}_{(2,0)} + \mathcal{O}(\alpha'). \tag{5.8}$$

该流方程保持 $N = 1$ 超对称性，因为它满足

$$\Omega_{\mathrm{K3}} \wedge \partial_t \mathcal{A} = \mathcal{O}(\alpha'), \qquad \omega_{\mathrm{K3}} \wedge \partial_t \mathcal{A} = \mathrm{d}(-\mathrm{i}\mathcal{F}_{(2,0)}) + \mathcal{O}(\alpha'). \tag{5.9}$$

由此可得 $\partial_t(\omega_{\mathrm{K3}} \wedge \mathcal{F}) = \partial_t(\Omega_{\mathrm{K3}} \wedge \mathcal{F}) = \mathcal{O}(\alpha')$，因此环面曲率 $\mathcal{F}$仍保持原始的，在流动过程中不会产生 (0, 2) 部分。

5.2 G_2 结构流形上的反常流

我们的第一个新例子是 X 为一个具有 G_2 结构的七维流形。按照 [34], 的约定，七维流形上的单位范数 G_2-不变旋量 ϵ 定义了一个三形式 ϕ 和一个四形式 $\star\phi$ ，如下所示

$$\phi = -\mathrm{i}\epsilon^\dagger \gamma_{(3)} \epsilon, \qquad \star\phi = \epsilon^\dagger \gamma_{(4)} \epsilon. \tag{5.10}$$

由此可以构造投影到 G_2 表示上的投影算子——附录A.4中给出了三形式和四形式对应的投影算子。

5.2.1 超对称条件

紧致化在具有 G_2 结构的流形上的异质超引力，既存在闵可夫斯基解，也存在反德西特$_3$ 解。对于弦框架度量

$$\mathrm{d}s^2_{10} = \mathrm{d}s^2(\mathrm{AdS}_3) + \mathrm{d}s^2(X), \tag{5.11}$$

并允许 NSNS 通量具有一个外部部分，形式为 $2\ell^{-1}\,\mathrm{vol}^{\mathrm{AdS}_3}$，其中$\ell$ 是 AdS 半径；三维中 $N = 1$ 超对称性的 G_2 结构条件为

维为 [69, 70]

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\star\phi)=0,\qquad \phi\wedge\mathrm{d}\phi=-\frac{12}{7\ell}\phi\wedge\star\phi,\qquad \star H=-\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\phi)-\frac{2}{\ell}\star\phi. \tag{5.12}$$

这些方程的闵可夫斯基极限由 $\ell\to\infty$.[23] 这些方程确定了 G_2 结构的内禀挠率以及三形式通量：

$$\mathrm{d}\phi=\frac{3}{2}\mathrm{d}\varphi\wedge\phi-\frac{12}{7\ell}\star\phi-\star H_{\mathbf{27}}, \tag{5.13a}$$

$$\mathrm{d}\star\phi=2\mathrm{d}\varphi\wedge\star\phi, \tag{5.13b}$$

$$H=-\frac{2}{7\ell}\phi+\frac{1}{2}\star(\mathrm{d}\varphi\wedge\phi)+H_{\mathbf{27}}, \tag{5.13c}$$

其中，H 的 27 分量不受超对称性约束。注意，内禀挠率可能具有的 14 分量并未出现在 $\mathrm{d}\star\phi$ 中，因此得到的是所谓可积 G_2结构。[24] 若在 X 上引入非平凡向量丛，最后一个超对称条件要求其曲率 F 满足 G_2 瞬子条件 [71, 72]。具体而言，这意味着

$$F\wedge\star\phi=0, \tag{5.14}$$

因此，F 属于 **14** 表示（对于 G_2, ），且在 **7**中没有分量。回想 Bianchi 恒等式，这意味着 $\mathrm{tr}\,F\wedge F$ 在 **7**中没有分量，只属于 $\mathbf{1}\oplus\mathbf{27}$。我们始终假设 $p_1(X)=p_1(V)$，这样 Bianchi 恒等式的解就不会受到阻碍。与 SU(3) 情形类似，我们将 (5.13) 的解称为超对称几何，而超对称解还需满足 G_2瞬子条件和 Bianchi 恒等式。

5.2.2 反常流

现在考虑由泛函（5.1）驱动的流，其中 ϵ 取为定义$_2$ 上 G X结构的单位范数旋量。在此情况下，泛函 I 可简化，并可用 G_2 三形式表示为

$$I=\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\mathcal{B}\wedge\phi. \tag{5.15}$$

[23] $\ell\neq 0$ 的超对称条件来自施加 $D_m\epsilon=0$ 和 $\not{D}\epsilon=\mathrm{i}\,\overline{\ell}^{\epsilon}$。[24]由于内禀挠率的 7 分量与 $\mathrm{d}\varphi$ 成正比，因而是恰当的，所以总可以定义一个共形重标度三形式 $\hat{}\,\phi=\mathrm{e}^{-3\varphi/2}\phi$，使得由此得到的 G_2 结构是余闭的，即 $\hat{}\mathrm{d}\hat{}\star\phi=0$。

对标架、膨胀子和旋量的这个泛函取变分，仍由（4.12）给出。按照（4.13）将变分与流方程联系起来，可得流为

$$\partial_t\varphi = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\epsilon^\dagger \not{\mathcal{B}}\epsilon, \tag{5.16a}$$

$$\partial_t e_m{}^a = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\frac{1}{3!}\epsilon^\dagger \gamma_m{}^{n_1n_2n_3}\epsilon\, \mathcal{B}^a{}_{n_1n_2n_3}, \tag{5.16b}$$

$$\partial_t\epsilon = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\frac{1}{3!}\mathcal{B}_{mn_1n_2n_3}\phi^{n_1n_2n_3}\mathrm{i}\gamma^m\epsilon, \tag{5.16c}$$

其中我们使用了 $\gamma^{abcd}\epsilon = \star\phi^{abcd}\epsilon - 4\mathrm{i}\phi^{[abc}\gamma^{d]}\epsilon$ 来表示 G_2 结构[73]。注意，如果 $\mathcal{B}$ 没有变换为 G 的**7** 表示的分量，那么旋量不会演化[2]。由于流方程再次来源于泛函（5.1），对于超对称几何，它们按构造就对应于异质超引力运动方程。因此，很容易推导出 G_2 三形式和四形式的流：[25]

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\star\phi\big) = -\tfrac{1}{2}\mathcal{B}, \qquad \partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\phi) = \tfrac{1}{2}(\pi_{\mathbf{1}} - \pi_{\mathbf{7}} + \pi_{\mathbf{27}})\star\mathcal{B}. \tag{5.17}$$

由此可轻易证明，扭曲体积 $\mathsf{e}^{-4\varphi}\mathsf{vol}$ 在流演化过程中仍保持不变。由于 G_2 结构也定义了一个黎曼度规，因此可以得到X 上度量的流：

$$\partial_t g_{mn} = \mathrm{e}^{2\varphi}\phi_m{}^{p_1p_2}\big(\tfrac{1}{2}\pi_{\mathbf{27}}\star\mathcal{B} - \tfrac{1}{3}\pi_{\mathbf{1}}\star\mathcal{B}\big)_{np_1p_2}, \tag{5.18}$$

这与（5.16b）中的标架流一致。此外，由（5.16b）和（5.17），可以验证该流满足

$$\partial_t\star\phi = \star\big(\tfrac{4}{3}\pi_{\mathbf{1}} + \pi_{\mathbf{7}} - \pi_{\mathbf{27}}\big)\partial_t\phi, \tag{5.19}$$

这与 G_2 结构的通常变形一致 [7, 74, 75]

与 Hull– Strominger 系统的反常流相比，对这一情形的分析颇为微妙。原因在于，该流并不保持全部超对称条件。e 的流$^{-2\varphi}\star\phi$ 由一个闭四形式给出，因此，如果初始几何满足超对称条件，那么沿着该流，它将继续满足（5.12）中的第一个方程。 $\phi\wedge\mathrm{d}\phi = 0$

[25]更一般地，如果将 $-1/4$ (5.16)中的系数替换为常数 c_i，则三形式和四形式的流为

$$\partial_t\phi = \mathrm{e}^{2\varphi}\big(12c_2\pi_{\mathbf{1}} + (8c_3 - 6c_2)\pi_{\mathbf{7}} - 2c_2\pi_{\mathbf{27}}\big)\star\mathcal{B},$$
$$\partial_t\star\phi = \mathrm{e}^{2\varphi}\big(16c_2\Pi_{\mathbf{1}} + (8c_3 - 6c_2)\Pi_{\mathbf{7}} + 2c_2\Pi_{\mathbf{27}}\big)\mathcal{B}.$$

该条件更加复杂，因为它是非线性的：可以将这一条件写成 $\pi_{\mathbf{1}}\mathrm{d}\phi$ =constant，其中投影算子取决于 G_2 结构。[26] 然而，一项颇为繁琐的计算表明，除非 $\mathcal{B}$仅属于 $\mathbf{1}$ 表示（或者如果 $\mathcal{B}=\mathrm{d}H$ 与 $H_{\mathbf{27}}=0$），否则（5.12）中的第二个方程通常不会保持不变。此外，G_2结构的流还应辅以规范丛上的联络流，该规范丛位于 X之上。与 SU(3) 情形类似，由于 $F\wedge\star\phi=0$ 取决于 G_2 结构的选择，因此不能在流开始时固定 F。

我们也可以从 G_2 结构的内禀挠率看出这一点。若不施加第二个超对称条件，则有

$$\mathrm{d}\phi=-\big(\tfrac{2}{\ell}+\tfrac{1}{7}H_{\mathbf{1}}\big)\star\phi+\tfrac{3}{2}\mathrm{d}\varphi\wedge\phi-\star H_{\mathbf{27}},\qquad H=\tfrac{1}{7}H_{\mathbf{1}}\phi+\tfrac{1}{2}\star(\mathrm{d}\varphi\wedge\phi)+H_{\mathbf{27}},\tag{5.20}$$

满足 $\mathsf{d}\star\phi$，与（5.13）相同。等价地，超对称算子 D 和 $\not{D}$ 作用于 G_2 不变旋量 ϵ 时为

$$D_m\epsilon=\tfrac{\mathrm{i}}{8}\big(H_{\mathbf{1}}+\tfrac{2}{\ell}\big)\gamma_m\epsilon,\qquad \not{D}\epsilon=\tfrac{3\mathrm{i}}{8}\big(H_{\mathbf{1}}+\tfrac{2}{\ell}\big)\epsilon+\tfrac{\mathrm{i}}{\ell}\epsilon.\tag{5.21}$$

利用这一点以及可积性条件（B.24），后者将度规运动方程表示为超对称算子和 Bianchi 恒等式的形式，可将度量的 G_2 流写为

$$\begin{aligned}\partial_t g_{mn}&=-\tfrac{1}{12}\mathrm{e}^{2\varphi}\star\phi_{(m}{}^{p_1\dots p_3}\mathrm{d}H_{n)p_1\dots p_3}\\&=-\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{eom}[g]_{mn}+\tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{2\varphi}\big(H_{\mathbf{1}}+\tfrac{2}{\ell}\big)\Big[\big(\tfrac{1}{7}H_{\mathbf{1}}+\tfrac{6}{\ell}\big)g_{mn}-2H_{\mathbf{27}mn}\Big],\end{aligned}\tag{5.22}$$

这里为简洁起见取 $\alpha'=0$。对于超对称几何，单态 $H_{\mathbf{1}}$ 固定为常数 $-2/\ell$；然而，一般而言，G_2 流不会保持这一条件，因此会在流动过程中破坏超对称性。[27]

为避免这一复杂情况，我们考虑 G_2 结构进一步约化为 SU(3) 或 SU(2) 结构的例子。我们的指导性要求是，试探解与由此得到的流方程相容，并且 $\phi\wedge\mathsf{d}\phi=-\frac{12}{7\ell}\phi\wedge\star\phi$ 自动成立；这便足以确保超对称性在流的过程中得以保持。此外，试探解的形式应当能够在流开始时固定规范联络，

[26]这应与一个尚未解决的问题相比较：余闭 G_2 结构的拉普拉斯流是否仍保持余闭 [76], ，因为余闭条件同样关于 ϕ是非线性的。[27]尽管如此，所得流在主阶上按里奇流演化，且至多关于挠率呈二次，因此在 [76, 77]的意义下，仍可能是“合理的”。

（如 $N=2$ Fu–Yau 情形，其中 F 相对于 ω_{K3} 为厄米–杨–米尔斯）或表明一种自然的流，使得 F 在不动点处为 G_2 瞬子。

5.2.3 沿圆约化

考虑闵可夫斯基背景的特殊情形，此时 X 上的 G_2 结构可进一步约化为 SU(3)，对应于三维中的 $N=2$ 超对称性。X 上的度量可写成以六维流形 X_6 为底空间的 U(1) 纤维化

$$\mathrm{d}s^2(X)=\mathrm{d}s^2(X_6)+\Theta^2, \tag{5.23}$$

其中，Θ 是与生成圆的 U(1) 等距变换的基灵向量对偶的实一形式，纤维化的曲率定义为 $\mathcal{F}=\mathrm{d}\Theta$。$\mathrm{G}_2$ 结构形式可写为

$$\phi=\omega\wedge\Theta+\mathrm{re}\,\Omega,\qquad \star\phi=-\tfrac{1}{2}\omega\wedge\omega-\mathrm{im}\,\Omega\wedge\Theta, \tag{5.24}$$

其中 (ω,Ω) 在 X_6 上定义了典范 SU(3) 结构。我们进一步假设该向量丛是底空间 X_6 上一个丛的拉回，并且膨胀子与沿圆方向的坐标无关。

不难看出，此试探解如何至少保留 $N=1$ 超对称性。首先，考虑式 (5.12) 中第二个 G_2 超对称条件。可以验证，只要满足以下条件，该条件便自动成立：1) $\mathrm{d}\Omega$ 为 (3, 1) 型；2) $\mathcal{F}$ 为 (1, 1) 型；3) $\omega\lrcorner\mathcal{F}=0$。换言之，$X_6$ 上的 SU(3) 结构定义了一个复结构，U(1) 纤维化相对于此复结构是全纯的，并且相应的曲率 $\mathcal{F}$ 满足底空间上的厄米–杨–米尔斯方程。接下来是 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\star\phi$ 的闭合性：结合前述条件和上述分解，这可化为 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega$ 和 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega$ 的闭合性，我们将其识别为 X_6 上 Hull–Strominger 系统的前两个超对称条件。最后，要求曲率 F 是 G_2 瞬子（5.14），可简化为 $F\wedge\mathrm{im}\,\Omega=0$ 和 $F\wedge\omega\wedge\omega=0$，这要求 F 在 X_6 上满足厄米–杨–米尔斯方程。这些条件足以解出 $N=1$ 超对称条件，相应的挠率为

$$H=-\star\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\phi)=\star_6\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega)-\mathcal{F}\wedge\Theta, \tag{5.25}$$

其中 $\star_6$ 是作用于 X_6上的霍奇星算子。注意，$\mathrm{d}H$ 相对于纤维化是水平的，且属于 (2,2) 型。给定上述关于纤维化、规范丛和 (ω,Ω) 的条件，

很容易看出，若在 G_2 结构的试探解（ $N=1$ 5.24）中，通过常数 SO(2) $\simeq$ U(1) 旋转来旋转（re Ω，im Ω），这些条件仍然成立。这意味着该背景实际上保留了增强的 $N=2$ 超对称性（三维中的四个实超荷），并伴有 U(1) R 对称性。

假设 $\mathcal{B}$ 是一个水平四形式，G_2 结构形式（5.17）的反常流方程化为

$$\partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega\big)=\mathcal{B},\qquad \partial_t\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega\big)=0, \tag{5.26}$$

这些恰好就是 Hull–Strominger 系统的反常流方程。然而，故事并未就此结束。在证明圆上的约化解满足 G_2 超对称性条件时，曲率 $\mathcal{F}$ 为 (1,1) 型且为原始的是至关重要的。给定流开始时的 $\mathcal{F}$ 选择，第一个条件显然会保持，因为 X_6 上的复结构不变。第二个条件，即 $\mathcal{F}$ 为原始的，不会保持，因为 ω 本身也在流动。换言之，为了保持超对称性， $\mathcal{F}$ 应当在X_6 上满足厄米–杨–米尔斯条件，但该条件的定义取决于 ω ，而后者沿流发生变化。人们或许可以通过允许 $\mathcal{A}$ 发生流动来补偿 ω的流动，从而解决这一问题，并在不动点处达到 $\omega\wedge\omega\wedge\mathcal{F}=0$ 。然而，处理这一问题的最简单方法是取 $\mathcal{F}=0$，这样（5.23）就是直积 $X_6\times\mathrm{S}^1$ 上的一个度量，而 G_2 反常流则化为 X_6上的标准 SU(3) 反常流。

5.3 K3 × S^3 上的反常流

作为上一小节的一个特例，考虑一个七维流形，它由一个圆三维球面纤维化在 K3 曲面上构成。方便的做法是用一组三个闭厄米形式 j_I 来描述 K3 因子，它们刻画了其超 Kähler 结构；我们可以将其归一化为[28]

$$\tfrac{1}{2}j_I\wedge j_J=\delta_{IJ}\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}}, \tag{5.27}$$

其中，$\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}}$ 是 K3 体积形式。圆球面 S^3 拥有一组三个 Maurer–Cartan 形式σ_I，它们与 SU(2) 上的左不变向量场对偶。这些形式满足通常的恒等式

$$\mathrm{d}\sigma_I+\tfrac{1}{2}\epsilon_{IJK}\sigma^J\wedge\sigma^K=0. \tag{5.28}$$

[28]这些可以写成 $\Omega_{\mathrm{K3}}=j_1+\mathrm{i}\,j_2$ 和 $\omega_{\mathrm{K3}}=j_3$。

七维度量的试探解是一个直积

$$\mathrm{d}s^2(X) = \mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}s^2(\mathrm{K3}) + \tfrac{1}{4}\ell^2\mathrm{d}s^2(\mathrm{S}^3), \tag{5.29}$$

其中，AdS 半径决定了三维球面的半径。随后，可以按照与该试探解相一致的方式，将一个 G_2 不变旋量分解，从而得到 G_2 形式。结果为

$$\phi = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\varphi}\ell j_I \wedge \sigma^I - \tfrac{1}{8}\ell^3 \operatorname{vol}_{\mathrm{S}^3}, \tag{5.30a}$$

$$\star\phi = \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{2\varphi}\ell^2\epsilon_{IJK}j^I \wedge \sigma^J \wedge \sigma^K - \mathrm{e}^{4\varphi}\operatorname{vol}_{\mathrm{K3}}, \tag{5.30b}$$

其体积形式为$_{\mathrm{S}^3} = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$。容易验证，它们自动满足$N = 1$式（5.12）中的超对称条件，最后一个方程将三形式通量H 表示为 G_2 结构的形式：

$$H = \star_{\mathrm{K3}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{2\varphi} + \tfrac{1}{4}\ell^2 \operatorname{vol}_{\mathrm{S}^3}, \tag{5.31}$$

其中， $\star_{\mathrm{K3}}$ 是与 $\mathrm{d}s^2$(K3) 相关的霍奇星算子。注意， H的外微分是 K3 底空间上的一个顶形式，

$$\mathrm{d}H = \Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi}\operatorname{vol}_{\mathrm{K3}}, \tag{5.32}$$

其中， Δ_{K3} 是 K3 上的标量拉普拉斯算子。

5.3.1 反常流

Hull联络的曲率（它出现在反常条件中）具有如下形式：

$$R^+ = \begin{pmatrix} 2\sigma^I \wedge \sigma_J & 0 \\ 0 & R^+_{\mathrm{K3}} \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

其中 $R^+{}_{\mathrm{K3}}$ 是 K3 上的一个二形式。满足瞬子条件的一种方法是令 F 为 K3底空间上的本原 (1, 1) 形式，从而 $F_{\mathrm{K3}} \wedge j_I = 0$。采用这一选择后，Bianchi 恒等式简化为一个仅沿 K3 方向的四形式：

$$\mathcal{B} = \Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi}\operatorname{vol}_{\mathrm{K3}} - \frac{\alpha'}{4}\big(\operatorname{tr} F_{\mathrm{K3}} \wedge F_{\mathrm{K3}} - \operatorname{tr} R^+_{\mathrm{K3}} \wedge R^+_{\mathrm{K3}}\big). \tag{5.34}$$

这是一个关于单个泛函自由度的方程，该自由度可以取为膨胀子。对于 G_2 结构，反常流（5.17）随后化简为关于膨胀子的流

，类似于 $N=2$ Fu–Yau Ansatz 的反常流。明确地说，可以得到

$$\partial_t \mathrm{e}^{2\varphi} = \tfrac{1}{2}\Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi} - \frac{\alpha'}{8}\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}}\lrcorner\big(\mathrm{tr}\,F_{\mathrm{K3}}\wedge F_{\mathrm{K3}} - \mathrm{tr}\,R^{+}_{\mathrm{K3}}\wedge R^{+}_{\mathrm{K3}}\big). \tag{5.35}$$

这与六维 5.7 中的流方程极为相似，适用于 $N=2$ Fu– Yau 试探解；此处由于我们的试探解是直积，纤维化不会产生贡献。我们同样预期，只要 Bianchi 恒等式的解不存在拓扑障碍，这一流就具有长时间存在性。

5.4 K3 上 T^3 纤维化的反常流

根据 [68], ，异质超引力应存在超对称解，其时空为三维闵可夫斯基空间与一个七维流形 X 的直积，其中 X 是一个 T^3 纤维化，其底空间为一个 K3 曲面。根据纤维化结构的不同，这些解在三维中将保留 $N=2$ 或 $N=4$ 超对称性，分别对应四个或八个超荷，从而给出第 5.1 节所讨论的 Fu–Yau 试探解的七维版本。

X 上的度量取为

$$\mathrm{d}s^2(X) = \mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}s^2(\mathrm{K3}) + a\,\delta_{IJ}\Theta^I\Theta^J, \tag{5.36}$$

其中， Θ^I 是与三维环面纤维的基灵向量对偶的全局定义一形式，而 $a^{3/2}$ 是 T^3 的（常数）体积。定义纤维化的二形式 $\mathcal{F}^I$ 满足 $\mathcal{F}^I = \mathrm{d}\Theta^I$，它们是 $H^2(\mathrm{K3}, 2\pi\mathbb{Z})$ 中元素的拉回。于是，在 X 上存在一个 G_2 结构，其定义为

$$\phi = a^{1/2}\mathrm{e}^{2\varphi} j_I\wedge\Theta^I - \tfrac{1}{6}a^{3/2}\epsilon_{IJK}\Theta^I\wedge\Theta^J\wedge\Theta^K, \tag{5.37a}$$

$$\star\phi = \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{e}^{2\varphi}\epsilon_{IJK}j^I\wedge\Theta^J\wedge\Theta^K - \mathrm{e}^{4\varphi}\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}}\,. \tag{5.37b}$$

5.4.1 超对称条件

回顾（5.12）中具有 aG_2 结构的异质闵可夫斯基背景的超对称条件，可得

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\star\phi) \equiv a\,\epsilon_{IJK}j^I\wedge\mathcal{F}^J\wedge\Theta^K, \tag{5.38a}$$

$$0 = \phi\wedge\mathrm{d}\phi \equiv -\tfrac{1}{3}a^2\mathrm{e}^{2\varphi} j_I\wedge\mathcal{F}^I\wedge\epsilon_{JKL}\Theta^J\wedge\Theta^K\wedge\Theta^L, \tag{5.38b}$$

这对应于以下关于定义该纤维化的二形式的条件：

$$\epsilon_{IJK} j^J \wedge \mathcal{F}^K = 0, \qquad \mathcal{F}^I \wedge j_I = 0. \tag{5.39}$$

超对称条件和 G_2 随后确定三形式通量 H t o

$$\begin{aligned} H &= - \star \mathrm{e}^{2\varphi} \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\phi) \\ &= \star_{\mathrm{K3}} \mathrm{d}\mathrm{e}^{2\varphi} + a\, \delta_{IJ} (\star_{\mathrm{K3}} \mathcal{F}^I) \wedge \Theta^J. \end{aligned} \tag{5.40}$$

如果选择 $\mathcal{F}^I$，使其与 K3 上的三个 K¨ahler 形式均正交，$\mathcal{F}^I \wedge j_J$ =0，那么所得解将保留 $N = 4$超对称性。可以看出，对于 j_I的任意 SO(3) $\simeq$ SU(2) 旋转，超对称条件都会成立。因此，该解的 R 对称群为 SU(2)，对应于三维中的八个超荷或$N = 4$ 超对称性。在这种情况下，H 的外微分是 K3 上的顶形式，表示为

$$\mathrm{d}H = \Delta_{\mathrm{K3}} \mathrm{e}^{2\varphi}\, \mathrm{vol}_{\mathrm{K3}} - a\, \delta_{IJ} \mathcal{F}^I \wedge \mathcal{F}^J. \tag{5.41}$$

一般情况下，形式 $\mathcal{F}^I$ 不必与超 K¨ahler 结构正交，而是可以含有与 K3 上的 K¨ahler 形式成比例的分量。将 $\mathcal{F}^I$ 分解为

$$\mathcal{F}^I = f^I + \tfrac{1}{2} \lambda^{IJ} j_J, \tag{5.42}$$

其中 $\lambda_{IJ} = \star_{\mathrm{K3}}(\mathcal{F}_I \wedge j_J)$ 和 f_I是 (1, 1) 型且与 K¨ahler 形式正交，纤维化的超对称条件（5.39）转化为函数矩阵 λ_{IJ} 对称且无迹的条件，因此留下六个（泛函）自由度。扩展超 $N = 4$ 对称性则对应于 $\lambda_{IJ} = 0$。采用此分解，H 的外微分为

$$\mathrm{d}H = \left(\Delta_{\mathrm{K3}} \mathrm{e}^{2\varphi} + \tfrac{1}{2} a\, \lambda_{IJ} \lambda^{IJ}\right) \mathrm{vol}_{\mathrm{K3}} - a\, f^I \wedge f_I + a\, \mathrm{d}\lambda_{IJ} \wedge j^I \wedge \Theta^J. \tag{5.43}$$

特别是，dH 不再自动保持水平（它并非完全位于 K3 上）。

对于规范扇区，超对称性要求曲率 F 是一个 G_2 瞬子，如式（5.14）所示。由于任意二形式在 $\mathbf{7} \oplus \mathbf{14}$ G 的表示$_2$, 中变换，这相当于 **7** 分量 F消失。鉴于纤维化结构，这一条件

若 F 与 K¨3 上的三个 Kähler 形式正交，则满足该条件：

$$F \wedge j_I = 0, \tag{5.44}$$

这也意味着 F 是水平的。该条件等价于 F 为 (1, 1) 型且为原始的，即满足厄米–杨–米尔斯条件，因此规范丛是 K3 上一个稳定全纯丛的拉回，而此时 Bianchi 恒等式中的项 tr $F \wedge F$ 是 K3 上的顶形式。

Bianchi 恒等式中的曲率项应使用 Hull联络计算∇^+。度量 (5.36) 在局部标架 (dx^μ, $\sqrt{a}\,\Theta^I$) 中的联络符号为

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} (\Sigma^+_{\mathrm{K3}})^\mu{}_\nu - \frac{a}{2}\lambda_{KL}(j^K)^\mu{}_\nu\Theta^L & \sqrt{a}\,(f_J)_\rho{}^\mu \mathrm{d}x^\rho \\ -\sqrt{a}\,(f_J)_{\rho\nu}\mathrm{d}x^\rho & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.45}$$

其中 x^μ 表示 K3 上的坐标，而 Σ^+ K3 是 K3 上针对度量 e$^{2\varphi}$ds^2(K3)、挠率为 $\star_{\mathrm{K3}}$de$^{2\varphi}$的 Hull 联络。对于具有 $N = 4$ 超对称性的解 —— 其中 $\mathcal{F}^I \wedge j_J = 0$—— 联络 Σ^+ 自动是一个水平一形式。更一般地说，请注意，上述表达式中的许多项都带有 a这样的前因子；根据通量量子化，这些前因子又以 α'为单位量子化。在 $\mathcal{O}(\alpha')$ 阶近似下，这些项在 Bianchi 恒等式中应予以忽略，因为它们会导致 $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ 阶修正。剩余的贡献为

$$\operatorname{tr} R^+ \wedge R^+ = \operatorname{tr} R^+_{\mathrm{K3}} \wedge R^+_{\mathrm{K3}} + \mathcal{O}(\alpha'), \tag{5.46}$$

其中 R^+ K3 是 K3 上 Hull联络 Σ^+ K3 的曲率。综上，Bianchi 恒等式可写为

$$\mathcal{B} \equiv \mathrm{d}H - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr} F \wedge F - \operatorname{tr} R^+ \wedge R^+) = b\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}} + a\,\mathrm{d}\lambda_{IJ} \wedge j^I \wedge \Theta^K + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{5.47}$$

其中 b 由下式给出

$$b = \Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi} + \tfrac{1}{2}a\,\lambda_{IJ}\lambda^{IJ} - \star_{\mathrm{K3}}\big(a\,f^I \wedge f_I + \tfrac{1}{4}\alpha'(\operatorname{tr} F \wedge F - \operatorname{tr} R^+_{\mathrm{K3}} \wedge R^+_{\mathrm{K3}})\big). \tag{5.48}$$

考虑 $\lambda_{IJ} = 0$ 的特殊情形。采用上述试探解，超对称性条件自动满足。为确保解满足异质弦运动方程，唯一尚待求解的方程是令 Bianchi 恒等式为零；这将化为 K3 上的一个标量方程，$b = 0$。与 Fu–Yau Ansatz 的情形一样，这并非简单地

一个形如 $\Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi}=$源项的方程，因为 $R^{+}{}_{\mathrm{K3}}$ 是 e 的 Hull 联络的曲率$^{2\varphi}\mathrm{d}s^{2}$(K3)，因此是膨胀子的函数 φ。然而，与 [26], 的分析相比较，我们看到 $b=0$ 与他们证明存在解的标量方程形式相同。因此，至少对于 $\lambda_{IJ}=0$，这些 T^{3}纤维化异质通量解必然存在。

5.4.2 反常流

该试探解的反常流源于 G$_2$ 三形式和形式-形式的流，见（5.17），以及（ ϕ 和 $\star\phi$ 中的分解（5.37）。随后，将 Bianchi 恒等式的表达式投影到 G 中出现的 **1**、**7** 和**27** 表示上，从而得到$_2$ 反常流。直接但繁琐的计算给出

$$\Pi_{\mathbf{1}}\mathcal{B}=\tfrac{1}{7}b\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}}-\tfrac{1}{14}a\,\mathrm{e}^{-2\varphi}b\,\epsilon_{IJK}j^{I}\wedge\Theta^{J}\wedge\Theta^{K}+\mathcal{O}(\alpha'^{2}),\tag{5.49a}$$

$$\Pi_{\mathbf{7}}\mathcal{B}=0+\mathcal{O}(\alpha'^{2}),\tag{5.49b}$$

$$\Pi_{\mathbf{27}}\mathcal{B}=\tfrac{6}{7}b\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}}+\tfrac{1}{14}a\,\mathrm{e}^{-2\varphi}b\,\epsilon_{IJK}j^{I}\wedge\Theta^{J}\wedge\Theta^{K}+a\,\mathrm{d}\lambda_{IJ}\wedge j^{I}\wedge\Theta^{J}+\mathcal{O}(\alpha'^{2}).\tag{5.49c}$$

沿该流，G$_2$ 结构的 t 阶导数为

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\star\phi)=a\,\epsilon_{IJK}j^{I}\wedge\partial_t\mathcal{A}^{J}\wedge\Theta^{K}-(\partial_t\mathrm{e}^{2\varphi})\,\mathrm{vol}_{\mathrm{K3}},\tag{5.50a}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\phi)=a^{1/2}j_I\wedge\partial_t\mathcal{A}^{I}-\tfrac{1}{2}a^{3/2}\mathrm{e}^{-2\varphi}\,\epsilon_{IJK}\partial_t\mathcal{A}^{I}\wedge\Theta^{J}\wedge\Theta^{K}\\-a^{3/2}(\partial_t\mathrm{e}^{-2\varphi})\epsilon_{IJK}\Theta^{I}\wedge\Theta^{J}\wedge\Theta^{K},\end{aligned}\tag{5.50b}$$

其中包含一些 $\partial_t\mathcal{A}^I$ 取决于 T^{3}纤维化的联络形式之流的项。最后，膨胀子和联络形式的流为

$$\partial_t\mathrm{e}^{2\varphi}=\tfrac{1}{2}b,\tag{5.51a}$$

$$\partial_t\mathcal{A}_I=\tfrac{1}{2}\star_{\mathrm{K3}}(\mathrm{d}\lambda_{IJ}\wedge j^{J}).\tag{5.51b}$$

利用超 K¨ahler 形式所满足的 SU(2) 代数，即 $j_I{}^{\mu}{}_{\rho}j_J{}^{\rho}{}_{\nu}=-\delta_{IJ}\delta^{\mu}_{\nu}-\epsilon_{IJK}j^{K\mu}{}_{\nu}$，可以证明联络形式的流满足

$$j^{I}\wedge\partial_t\mathcal{A}_I=0+\mathcal{O}(\alpha'),\qquad\epsilon_{IJK}j^{J}\wedge\partial_t\mathcal{A}^{K}=-\tfrac{1}{2}\mathrm{d}(\lambda_{IJ}j^{J})+\mathcal{O}(\alpha').\tag{5.52}$$

与环面纤维化的条件（5.39）相比，我们看到，流在所需阶次上保留了超对称性，见 α' 展开。此外，如果从

其中 $\lambda_{IJ}=0$ 对应于扩展超对称性出发，那么纤维化联络不会发生流，因此该流将保留完整的 $N=4$ 超对称性。

同样，人们可能会想知道，何时该系统会像六维 Fu–Yau 拟设那样化为单个标量方程。由上述方程可知，令 $\lambda_{IJ}=$为常数意味着 $\partial_t\mathcal{A}_I=0$。此时，$\mathrm{G}_2$ 流便化为单个方程

$$\partial_t \mathrm{e}^{2\varphi}=\tfrac{1}{2}b, \tag{5.53}$$

其中 b 由式（5.48）给出。[29] 该系统的驻点对应于 $b=0$。与 $N=2$ 六维空间中的解 [17], 类似，我们预计可以证明 $N=4$ 流在 $\lambda_{IJ}=0$的条件下具有长时间存在性和收敛性，从而为这些解提供另一种存在性证明。

5.5 Spin(7) 结构流形上的反常流

最后举一个例子，指出也可以写出 Spin(7) 结构八维流形上的反常流的一般化。与 G_2 情形一样，该流通常不保持超对称性；不过，同样可以将其约化为保持超对称性的 SU(3) 结构，从而得到 SU(3) 反常流。此外，也存在一种 Fu–Yau 类拟设，即在 K3 曲面上方的四维环面丛，此时流方程可化为关于膨胀子的单个标量方程。分析与上一小节考察的情形非常相似，因此这里从简介绍。

设 X 为一个具有 Spin(7) 结构的八维流形，该结构由一个不变的单位范数旋量 ϵ定义。该旋量定义了一个自对偶四形式 Φ：

$$\Phi=\epsilon^{\dagger}\gamma_{(4)}\epsilon, \tag{5.54}$$

该形式可用于构造将 p形式投影到 Spin(7) 表示上的投影算子，如附录 A.4所示。异质超引力在 $\mathbb{R}^{1,1}\times X$ 上紧致化后，若 Spin(7) 结构满足 [69, 78]，则在二维中保留最小超对称性（一个超荷）

$$\Phi\wedge\star\mathrm{d}\Phi=12\star\mathrm{d}\varphi,\qquad H=\star\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Phi), \tag{5.55}$$

以及曲率 向量丛在 X 上的 e 是一个 Spin(7) 瞬子 [71, 72]。这些确定了 e

[29]与 $N=2$ 情形之间的差别在于， b 中多了一个形式为 $\lambda_{IJ}\lambda^{IJ}$的常数源项。

Spin(7) 结构的内禀挠率为

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{12}{7}\mathrm{d}\varphi \wedge \Phi - \star H_{\mathbf{48}}, \tag{5.56a}$$

$$H = -\frac{2}{7}\star(\mathrm{d}\varphi \wedge \Phi) + H_{\mathbf{48}}, \tag{5.56b}$$

其中 $H_{\mathbf{48}}$ 不受超对称性的约束，并要求 F 仅按 21 表示变换，在 7 表示中没有分量。

我们假设该流仍由泛函（5.1）驱动，它可写为

$$I = \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\mathcal{B} \wedge \Phi. \tag{5.57}$$

标架、膨胀子和旋量的流因此为

$$\partial_t \varphi = -\frac{1}{4}\frac{1}{4!}\mathrm{e}^{2\varphi}\Phi^{m_1\cdots}\mathcal{B}_{m_1\ldots}, \tag{5.58a}$$

$$\partial_t e_m{}^a = -\frac{1}{4}\frac{1}{3!}\mathrm{e}^{2\varphi}\Phi_m{}^{n_1n_2n_3}\mathcal{B}^a{}_{n_1n_2n_3}, \tag{5.58b}$$

$$\partial_t \epsilon = -\frac{1}{4}\frac{1}{4!}\mathrm{e}^{2\varphi}\Phi^{m_1m_2m_3}{}_n\gamma^{m_4n}\epsilon\,\mathcal{B}_{m_1\ldots m_4}, \tag{5.58c}$$

由此可以证明，四形式的流为[30]

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Phi) = -\tfrac{1}{2}(\mathcal{B} - \star\mathcal{B}). \tag{5.59}$$

请注意，该流由一个反自对偶四形式给出，因此对应于沿 $\Omega^4_{\mathbf{35}}$ 中某个元素的变形。沿 7 或 27 中的元素进行变形不会改变 Spin(7) 度量，而沿单态变形只会导致共形重标度，因此，沿 35维表示中的元素产生的四形式流，在某种意义上是最有意思的一类 Spin(7) 变形。

如果 X 上的度量具有一个以六维流形 X_6 为底空间的二维环面纤维化形式，且 Spin(7) 结构相应约化为 SU(3)，则四形式可用 ω 和支撑在 X_6 上的 Ω 表示为

$$\Phi = \omega \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^2 - \tfrac{1}{2}\omega \wedge \omega + \tfrac{1}{2}\Omega \wedge (\Theta^2 + \mathrm{i}\Theta^1) + \tfrac{1}{2}\bar{\Omega} \wedge (\Theta^2 - \mathrm{i}\Theta^1), \tag{5.60}$$

[30]若将 $-1/4$ 式（5.58）中的系数替换为常数 c_i，则四形式的流可写为 as

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Phi) = \tfrac{1}{3}(84(c_2 - c_1)\Pi_{\mathbf{1}} + 48(c_3 - c_2)\Pi_{\mathbf{7}} + 12c_2\Pi_{\mathbf{35}})\mathcal{B}.$$

其中 Θ^I 与二维环面纤维的基灵向量对偶。假设 X_6 上的 SU(3) 结构满足 Hull–Strominger 系统，Bianchi 恒等式 $\mathcal{B}$ 相对于该纤维化是水平的，且二维环面纤维化是厄米–杨–米尔斯的，则 Spin(7) 超对称条件（5.55）自动成立，Spin(7)流简化为

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega)=\mathcal{B},\qquad \partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega)=0, \tag{5.61}$$

它与规范丛的流一起，正是反常流的演化方程。与第5.2.3节中底空间为六维流形的圆纤维化的情形一样，不可能在流开始时就固定 $\mathrm{d}\Theta^I$，同时仍保持超对称性，因为它们应当相对于 ω满足厄米–杨–米尔斯条件，而后者本身也在流动。同样，也可以尝试为$\mathcal{A}^I$ 定义一个流，或者直接取 $\mathrm{d}\Theta^I=0$，使度量成为 X_6 与二维环面的乘积。在后一种情况下，Spin(7)流约化为六维流形上的 SU(3) 反常流。

如果 X 是一个以 K3 曲面为底空间的全纯 T^4 纤维化，且各曲率分别满足底空间上的厄米–杨–米尔斯条件，那么该背景将保持八个超荷，并且上述流将约化为一个关于膨胀子的标量流方程:

$$\partial_t\mathrm{e}^{2\varphi}=\frac{1}{2}\Big(\Delta_{\mathrm{K3}}\mathrm{e}^{2\varphi}-a\star_{\mathrm{K3}}(f^I\wedge f_I)-\tfrac{1}{4}\alpha'\star_{\mathrm{K3}}(\operatorname{tr}F\wedge F-\operatorname{tr}R^+_{\mathrm{K3}}\wedge R^+_{\mathrm{K3}})\Big), \tag{5.62}$$

其中，a^2 是 T^4 纤维的体积，$f^I=\mathrm{d}\Theta^I$ 是 K3 上满足厄米–杨–米尔斯条件的四个二形式曲率，而 $R^+{}_{\mathrm{K3}}$ 则是 K3 上 Hull联络的曲率。不同于上文，f^I 可以作为初始数据的一部分固定下来，因为 K¨ahler 形式在 K3 上不发生流动。与上一节一样，该方程与 [17],中分析的方程具有相同的形式，因此可以保证这些解存在。更一般地，应当能够放宽 f_I 分别满足厄米–杨–米尔斯条件的要求，但相应地，所保留的超对称性会减少。

6 反常流作为梯度流

在前面的各节中，我们引入了泛函 I，它通过异质 Lichnerowicz 恒等式与玻色作用量以及超对称算子的平方密切相关。利用这个泛函，我们发现反常流的演化方程可以用 I 的变分来表示，从而得以将反常流推广并扩展到七维和八维流形。尽管这一过程确实导出了有趣的流，

但这并不完全令人满意，因为在进行变分时，Bianchi 恒等式 $\mathcal{B}$ 被视为背景场。这并非通常理解几何流的方式；通常，几何流被视为某个泛函的梯度流，正如我们在第4节回顾里奇流时所述。在最后一节中，我们将通过引入一个泛函来弥补这一点，其梯度流确实导出反常流；将其推广到七维和八维流形后，则可分别重现我们在第$_2$ 5.2 节和第5.5节给出的 G和 Spin(7) 流。

关键在于注意到，对于上一节讨论的所有例子，即使流不保留全部超对称条件，它始终保留三形式通量 H 与定义 G 结构的不变形式之导数之间的关系。为简明起见，我们聚焦于这样的情形： X 是一个具有 SU(3) 结构并定义超对称几何的六维流形。此时，三形式通量 H 给出为

$$H = \star \mathrm{e}^{2\varphi} \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega). \tag{6.1}$$

这些异质弦背景的奇特之处在于， H 的运动方程会由这一表达式自动满足，而 H 的 Bianchi 恒等式则并非平凡。若˜我们通过以下方式引入对偶三形式通量 H

$$\tilde{H} = \mathrm{e}^{-2\varphi} \star H, \tag{6.2}$$

˜{/style}的运动方程此时就是 H的 Bianchi 恒等式，反之亦然。由于˜的运动方程 H 根据（6.1）自动满足，因此有 $\mathrm{d}H = 0$ ，这使得˜ ˜ ˜我们可以通过以下方式引入对偶二形式势 B： $H = \mathrm{d}B$。我们可以将此势识别为

$$\tilde{B} = -\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega, \tag{6.3}$$

差一个恰当项。

现在考虑一个新的泛函 $\mathcal{I}$ ，其定义为

$$\mathcal{I}[\varphi, e, \epsilon, \tilde{B}] = \int_X \left(\tilde{B} + \mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\right) \wedge \mathcal{B}, \tag{6.4}$$

˜它是 (φ, e, ϵ) 和二形式势 B 的泛函。对其进行变分可得

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{I} &= \int_X \Big(\delta\tilde{B}\wedge\mathcal{B} + \delta\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\big)\wedge\mathcal{B} + \big(\tilde{B}+\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\big)\wedge\delta\mathcal{B}\Big)\\ &\equiv \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\left(\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta e_m{}^a}\delta e_m{}^a + \left(\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\epsilon}\right)^\dagger\delta\epsilon + \delta\epsilon^\dagger\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\epsilon} + \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\tilde{B}_{mn}}\delta\tilde{B}_{mn}\right).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Bianchi 恒等式的变分，$\delta\mathcal{B}$，将会很复杂，并包含˜(φ、e、B)的变分。然而，若先取变分，再限制于满足挠率条件（6.1）的情形，则出现在变分前面的二形式 $\tilde{B}+\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega$ 将消失。[31]在这种情况下，$\delta\mathcal{B}$ 项对 $\mathcal{I}$的最终变分完全没有贡献，上式因此简化为

$$\delta\mathcal{I} = \int_X \delta\tilde{B}\wedge\mathcal{B} + \int_X \delta\big(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\big)\wedge\mathcal{B}. \tag{6.6}$$

右端的第二项恰好是将 I （4.10）中的泛函视为 $\mathcal{B}$ 背景场时所得的变分。对 $\mathcal{I}$ 关于（φ、e、ϵ）的变分，恰好重现了（ I 4.12）中给出的变分：

$$\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\varphi} = \frac{\delta I}{\delta\varphi}\bigg|_{\mathcal{B}\text{ bg field}}, \qquad \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta e_m{}^a} = \frac{\delta I}{\delta e_m{}^a}\bigg|_{\mathcal{B}\text{ bg field}}, \qquad \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\epsilon} = \frac{\delta I}{\delta\epsilon}\bigg|_{\mathcal{B}\text{ bg field}}. \tag{6.7}$$

按照（4.13）定义流方程，可知反常流是泛函 $\mathcal{I}$ 的梯度流，而无需假设 $\mathcal{B}$ 是背景场。

˜那么看似新出现的自由度 B 会如何流动呢？可以通过以下变分计算得到

$$\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta\tilde{B}} = \mathrm{e}^{2\varphi}(\star\mathcal{B}+\Delta), \tag{6.8}$$

其中 $\Delta = \star\mathrm{d}(H-\mathrm{e}^{2\varphi}\star\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega))+\alpha'$（.....），而我们没有写出 α' 项。[32] 将 $\tilde{B}$的流定义为 $\partial_t\tilde{B} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\varphi}\frac{\delta I}{\delta\tilde{B}}$，并注意到反常流将厄米形式的流固定为 $\partial_t(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega) = \frac{1}{2}\star\mathcal{B}$，可得

$$\partial_t(\tilde{B}+\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega) = -\tfrac{1}{2}\Delta. \tag{6.9}$$

[31]由于假设 $\mathcal{B}$ 在上同调中是平凡的，因此只需 $\tilde{B}+\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega$ 在相差一个恰当˜项的意义下为零，这正是定义 B时的规范自由度。[32]这些可以通过以下方式计算：

$$\delta R^+_{m_1m_2n_1n_2} = -\nabla_{[m_1}\delta H_{m_2]n_1n_2} - H_{[m_1|n_1}{}^p\delta H_{|m_2]n_2p},$$

但它们并没有特别的启发性，因此我们不明确列出。

关键的是，对于 $\tilde{B} = -\mathrm{e}^{2\varphi}\omega$， Δ 为零。因此，如果在流开始时固定 $\tilde{B} = -\mathrm{e}^{2\varphi}\omega$，则组合 $\tilde{B} + \mathrm{e}^{-2\varphi}\omega$ 不会随流变化。条件 $\tilde{B} = -\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega$ 因而在流过程中得以保持，从而确保 $\mathcal{B}$ 的变化不会对（6.6）产生贡献。总之，反常流可理解为泛函 $\mathcal{I}$的梯度流，该泛函定义于（6.4），其初始数据为超对称几何，特别是满足（6.1），且这一条件沿流保持不变。

我们所说的一切都可以轻易推广到七维和八维流形。例如，此时的泛函为

$$\mathcal{I}_{\mathrm{G}_2} = \int_X \big(\tilde{B} + \mathrm{e}^{-2\varphi}\phi\big) \wedge \mathcal{B}, \tag{6.10a}$$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Spin}(7)} = \int_X \big(\tilde{B} + \mathrm{e}^{-2\varphi}\Phi\big) \wedge \mathcal{B}, \tag{6.10b}$$

其中 $\tilde{B}$ 现在分别是三形式势和四形式势。在这些情形下，正如我们在前文强调的那样，反常流并不保持背景的所有超对称条件。不过，事实证明，它确实保持了挠率 H 与不变形式的导数之间的关系，而这正是由 $\mathcal{I}$ 驱动的流化为相应反常流所需的全部条件。例如，(5.16)中的 G_2 流保持 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\star\phi$的闭性。这等价于定义旋量相对于 ∇^-平行，其挠率为 $H = -\star\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\phi)$ [35, 80]。对于(5.58)中的 Spin(7)流，挠率可定义为 $H = \star\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Phi)$，无需对 Φ [35, 78]施加任何其他条件。

有人可能会想，是否仅凭异质超引力就能推导出这个新的 $B \wedge \mathcal{B}$ 项。事实上，对偶化H之后，必须添加到玻色作用量中的恰恰就是这一项。对偶化后， H 的动能项变为 H 的动能项，进而可以通过假设 $H = \mathrm{d}B$来对其进行变分。然而， H 的运动方程应当重现 H 的 Bianchi 恒等式。为此，必须在玻色作用量中添加一个如下形式的 Chern–Simons项

$$\int_X \tilde{B} \wedge \mathcal{B}. \tag{6.11}$$

这正是出现在 $\mathcal{I}$中的新项。与（4.18）中的 Lichnerowicz 恒等式相比，这相当于在恒等式两边都加上 $\frac{1}{4}\int_X \tilde{B} \wedge \mathcal{B}$！ 因此，我们看到，以泛函 $\mathcal{I}$ 表述反常流，是通过将异质 Lichnerowicz 恒等式改写为关于对偶三形式通量 H的形式而得到的。

7 讨论

本文研究了异质超引力中超对称性与几何流之间的关系，这些几何流由三形式通量H的 Bianchi 恒等式驱动。我们阐明了如何从玻色作用量的异质 Lichnerowicz 恒等式中出现的一个泛函导出这些流。在定义超对称几何的复三维流形上，这一结果重现了反常流。关键的是，我们在 Bianchi 恒等式中采用了适当的联络，以确保流的不动点满足超引力运动方程。随后，我们将反常流推广到具有 G_2 或 Spin(7) 结构的七维和八维流形上。所得的流通常不保持超对称性，但它们仍然是修正里奇流。在结构群进一步约化为 SU(3) 或 SU(2) 的情形下，我们证明这些流约化为反常流，或给出 Goldstein–Prokushkin 纤维化上反常流的推广。最后，我们提出了一个相关的泛函，其梯度流与这些新的反常流一致。未来有许多值得研究的方向，我们将在此讨论其中一些。

与旋量流的联络

理解由 Bianchi 恒等式驱动的流与文献中讨论的各种旋量流之间是否存在关联，将会很有意思。在无通量的情形下，[81], 旋量流被引入为“能量”泛函的梯度流$\int_X$ 体积 $|\nabla\epsilon|^2$。该流具有短时存在性，其不动点是协变常值旋量。文献[82], 考察了有通量的情形，并引入了一种流，其不动点是关于协变导数为常值、但现在包含通量贡献的旋量。此外，通量的流同时保证其运动方程和 Bianchi 恒等式成立。在我们的情形中，Lichnerowicz 恒等式（4.18）为在异质弦背景下考察这些流提供了一个自然的出发点。在无通量的情形下，超对称算符化为 Levi-Civita 联络 ∇，因此 $|D\epsilon|^2$ 项（除膨胀子的一个归一化因子外）重现了上述能量泛函。在有通量的情形下，该恒等式中同时包含 $|D\epsilon|^2$ 和 $|\not{D}\epsilon|^2$ 项。然而，至少对于 SU(3) 结构，可以通过施加异质弦超势[83–87] 所导出的超对称条件，令 $\not{D}\epsilon = 0$成立——这些条件对应于 Hull–Strominger 系统中关于 Ω 和 H 的条件。其余条件为 H的 Bianchi 恒等式、 F 的厄米–杨–米尔斯条件，以及厄米度量为共形平衡。人们或许可以期待，在这一受限解空间中的旋量流具有有趣的物理

诠释，并且比“原始”旋量流表现得更好。我们希望在未来的工作中对此作出评论。

$\boldsymbol{N=1}$ 超引力与广义几何

Lichnerowicz 恒等式可用于精确建立 X 的几何与四维 $N=1$ 超引力语言之间的联系。在 X上进行紧化后，超引力势 $\mathcal{V}$ 可写成超势 $\mathcal{W}$ 和 K¨ahler 势 $\mathcal{K}$ 的形式：

$$\mathcal{V}=\mathrm{e}^{\mathcal{K}}\Big(g^{\alpha\bar{\beta}}\delta_\alpha\mathcal{W}\,\delta_{\bar{\beta}}\bar{\mathcal{W}}-3|\mathcal{W}|^2\Big)+\tfrac{1}{2}(\mathrm{re}\,f)^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\mathcal{P}_{\mathcal{B}},\tag{7.1}$$

其中，$g_{\alpha\bar{\beta}}$ 是 K¨ahler 度量，$\delta_\alpha\mathcal{W}=\partial_\alpha\mathcal{W}-(\partial_\alpha\mathcal{K})\mathcal{W}$ 是协变变分，二者都定义在手征场空间（由 α标记）上；$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 是对称性作用于场时对应的矩映射，而 $(\mathrm{re}\ f)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ 是对称群李代数上的正定不变度量（可视为规范多重态空间上的度量）。事实上，超引力势 $\mathcal{V}$ 等于限制在内流形 X上的玻色作用量的相反数。对于 SU(3) 紧化，可以利用以 X [83–87]的几何表示四维超势的表达式，明确地看到这一点。由此可知，施加 F 项约束（等价于 $\delta_\alpha\mathcal{W}=0$）会令$\not{D}\epsilon=0$。就 SU(3) 结构而言，这要求 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega)=0$ 且 $H=\mathrm{i}(\bar{\partial}-\partial)\omega$，但不足以恢复共形平衡条件。剩余的 Killing 旋量方程可简化为

$$D_m\epsilon=\mathrm{i}Q_m\gamma_*\epsilon,\qquad Q=\mathrm{i}(\partial-\bar{\partial})\varphi-\mathrm{i}(W_4^{(1,0)}-W_4^{(0,1)}),\tag{7.2}$$

其中 W_4 挠率类尚未确定，并出现在 $\omega\wedge\mathrm{d}\omega=W_4\wedge\omega\wedge\omega$ [88] 中。于是，Lichnerowicz 恒等式化简为

$$S_{\mathrm{B}}=\int_X\mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\big[-4|W_4-\mathrm{d}\varphi|^2+\epsilon^\dagger\not{d}\not{H}\epsilon\big].\tag{7.3}$$

既然我们已施加超势条件，或许会认为这等价于矩映射的平方，因为势应当是

$$-S_{\mathrm{B}}=\mathcal{V}\equiv\tfrac{1}{2}(\mathrm{re}\,f)^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\mathcal{P}_{\mathcal{B}},\tag{7.4}$$

其中势能的最小值对应于“D 项”条件 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}=0$。事实上，这与广义几何中的图景 [46, 89] 完全一致（至少在

求解 Bianchi 恒等式之后）。施加超势条件后，可以发现超对称性要求矩映射为零

$$\mu(\lambda) = \int_X \lambda \wedge \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega \wedge \omega) = 2\int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\lambda \wedge (W_4 - \mathrm{d}\varphi) \wedge \omega \wedge \omega, \tag{7.5}$$

对于所有一形式 λ。一形式 λ 是“广义向量”的一个分量，它参数化了作用在 X 上的微分同胚与规范变换代数 $\mathfrak{gdiff}$ 中的一个元素，因此 μ 取值于 $\det T^*X \otimes \mathfrak{gdiff}^*$。于是，我们可以将 μ 的上述分量视为一个向量密度：

$$\mu = 2\,\mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol} \star ((W_4 - \mathrm{d}\varphi) \wedge \omega \wedge \omega)^\sharp. \tag{7.6}$$

度量 $\mathrm{re}\, f$ 因此只是“广义度量” G，其势由与矩映射相关的 Yau 泛函 [90] 给出：

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_X \mathrm{vol}_G^{-1}\, G^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\mu_{\mathcal{A}}\mu_{\mathcal{B}} = \int_X (\mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol})^{-1} g_{mn}\mu^m\mu^n \\ &\propto \int_X \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}\,|W_4 - \mathrm{d}\varphi|^2. \end{aligned} \tag{7.7}$$

我们看到，这个表达式的形式恰好正确，可以给出剩余 D 项所产生的势。接下来，只需利用 [46] 中给出的矩映射，就能将领先阶 α' 修正纳入这一论证。

α' 修正与弦真空的存在

对于 Hull–Strominger 系统，当曲率所确定的长度尺度大于 $\sqrt{\alpha'}$ [16] 时，已知反常流具有短时存在性。此外，还有一些“稳定性”结果表明，对于 $\alpha' = 0$，该流在卡拉比–丘度量 [91] 附近是稳定的。从物理角度来看，理解这个问题的逆问题将十分有趣，即在不破坏已知存在性定理的情况下，可以纳入哪类 α' 修正？在没有通量的情况下，有一种沿着这一思路的世界面论证表明，从卡拉比–丘解出发，加入 α' 修正并不会破坏时空运动方程解的存在性（反而会得到一个非 Ricci-平坦的 K¨ahler 度量） [92]。如今，这一结果已经推广到具有光滑$\alpha' \to 0$ 极限的 (0, 2) σ 模型（值得注意的是，这并不包括本文讨论的 T^2-纤维化背景）。[33] 有鉴于此，人们或许可以期待，如果对于某个试探解，在 $\sqrt{\alpha'}$ [16] 的一阶近似下能够证明长时间存在性和收敛性，

[33]这些结果的时空类比已在卡拉比–丘 [93] 和特殊全纯背景 [75] 中出现。

那么当纳入小的高阶 α' 修正时，这些性质仍然成立。

非 K¨ahler 度量的数值近似

一个更具实践意义的问题是，反常流以及我们介绍过的其他几何流是否适合进行数值模拟。长期以来，人们一直在数值研究各种黎曼流形和洛伦兹流形上的里奇流[94–100],[34] 因此，人们或许会想，我们讨论过的这些流能否用于数值构造异质通量背景。我们看到，在某些情况下，系统会化简为一个关于膨胀子的单一流方程，而这等价于求解 Bianchi 恒等式。这些系统也具有长期存在性和收敛性。这一点很重要，因为它让人相信，如果某个数值算法似乎收敛到了一个解，那么它很可能就是已知存在的那个解，而不是一个在数值上近似满足运动方程的“非解”。另一方面，与其通过流来求解这些系统，不如直接用其他方法求解膨胀子方程，例如用神经网络对 φ 进行参数化，然后最小化一个编码了 Bianchi 恒等式的损失函数。近期已有研究采用这种方法来寻找卡拉比–丘度量的数值解[102–108] 以及厄米–杨–米尔斯联络 [109], ；未来，这很可能成为求解非线性偏微分方程的一种强大技术。

致谢

谨向 Andr´e Coimbra、Dan Isra¨el、Jock McOrist、Ilarion Melnikov、Savdeep Sethi 和 Eirik Eik Svanes 致谢，感谢他们提出的宝贵见解。AA 部分得到 NSF资助编号 PHY2014195 的支持，同时也得到 Kadanoff理论物理中心 的支持。AA 还感谢欧盟地平线2020研究与创新计划通过 Marie Sk lodowska-Curie 资助协议（编号 838776）提供的支持。RM 部分得到 ERC资助787320-QBH Structure 和 ERC资助 772408-Stringlandscape 的支持。

A 约定

全文中，十维标架指标记为（$A, B, \ldots$） $= 0, 1, \ldots, 9$。当在维数为 d 的内部空间上进行紧化时，我们用（$a, b, \ldots$） $= 1, \ldots, d$ 表示内部标架指标。同样，我们用（$M, N, \ldots$）和（$m, n, \ldots$）分别表示十维和

[34]参见[101]，其中有一篇很好的综述。

d 维坐标标架指标。指标（I, J, K, L）表示环面上的坐标或 SU(2)三元组的元素，上标和下标不作区分。

A.1 异质弦理论

异质弦理论玻色子扇区的有效作用量，在 $\mathcal{O}(\alpha')$ 阶精度下为

$$S_{\mathrm{B}} = \int \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}_{10}\Big(R + 4(\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2}H^2 - \frac{\alpha'}{4}\big(\mathrm{tr}\,|F|^2 - \mathrm{tr}\,|R^+|^2\big)\Big), \tag{A.1}$$

其中 $H^2 = \frac{1}{3!}H^{MNP}H_{MNP}$, $|F|^2 = \frac{1}{2!}F_{MN}F^{MN}$，而 vol_{10}是与弦框架度量 g_{MN}相关联的体积形式。反常抵消要求 H 满足一个非平凡的 Bianchi 恒等式，其形式为

$$\mathrm{d}H = \frac{\alpha'}{4}\big(\mathrm{tr}\,F\wedge F - \mathrm{tr}\,R^+\wedge R^+\big). \tag{A.2}$$

在 $\alpha'\to 0$ 极限下，玻色作用量简化为

$$S_{\mathrm{B}} = \int \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}_{10}\Big(R + 4(\nabla\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}H^2\Big), \tag{A.3}$$

该作用量的变分可以用世界面弦的一圈β函数表示为

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{B}} = \int \mathrm{e}^{-2\varphi}\,\mathrm{vol}_{10}\Big[&-\delta g_{MN}\beta^{MN}(g) - \delta B_{MN}\beta^{MN}(B)\\ &+\big(\tfrac{1}{2}g^{MN}\delta g_{MN} - 2\delta\varphi\big)\big(g^{PQ}\beta_{PQ}(g) - 4\beta(\varphi)\big)\Big],\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 β函数为

$$\beta_{MN}(g) = R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\varphi - \tfrac{1}{4}H_{MPQ}H_N{}^{PQ}, \tag{A.5a}$$

$$\beta(\varphi) = -\tfrac{1}{2}\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2 - \tfrac{1}{4}H^2, \tag{A.5b}$$

$$\beta_{MN}(B) = -\tfrac{1}{2}\nabla^P(\mathrm{e}^{-2\varphi}H_{PMN}). \tag{A.5c}$$

重整化群流方程因此为 $\partial_t\mathbf{\Phi} = -\beta(\mathbf{\Phi})$，适用于 $\mathbf{\Phi} = (g,\ \varphi,\ B)$。一致的弦背景必须是 Weyl不变的，这要求所有 β函 B数都为零。方程 (2.1) 中定义的超引力运动方程于是为

β函数的线性组合：

$$\mathrm{eom}[g]_{MN} = \beta_{MN}(g), \tag{A.6a}$$
$$\mathrm{eom}[\varphi] = \tfrac{1}{4}\big(\beta^{P}{}_{P}(g) - 4\beta(\varphi)\big), \tag{A.6b}$$
$$\mathrm{eom}[B]_{MN} = -2\beta_{MN}(B). \tag{A.6c}$$

由（A.4），玻色作用量关于（g、φ、B）的变分为

$$\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta g_{MN}} = -\mathrm{e}^{-2\varphi}\big(\mathrm{eom}[g]^{MN} - 2g^{MN}\mathrm{eom}[\varphi]\big), \tag{A.7a}$$
$$\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta \varphi} = -8\mathrm{e}^{-2\varphi}\mathrm{eom}[\varphi], \tag{A.7b}$$
$$\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta B_{MN}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\varphi}\mathrm{eom}[B]_{MN}. \tag{A.7c}$$

换言之，运动方程与变分之间的关系为

$$\mathrm{eom}[g]_{MN} = -\mathrm{e}^{2\varphi}\left(\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta g_{PQ}} g_{MP} g_{NQ} + \frac{1}{4} g_{MN}\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta \varphi}\right), \tag{A.8a}$$
$$\mathrm{eom}[\varphi] = -\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2\varphi}\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta \varphi}, \tag{A.8b}$$
$$\mathrm{eom}[B]_{MN} = 2\mathrm{e}^{2\varphi}\frac{\delta S_{\mathrm{B}}}{\delta B_{MN}}. \tag{A.8c}$$

A.2 联络与超对称性

在异质弦　理论中，常见的联络有多种　　：

Levi-Civita 联络　∇ 是唯一的度量相容且挠率为零的联络。它按照通常方式由度量的导数定义。

Bismut 引力微子的超对称性变分为

$$\delta\psi_M = \nabla_M \varepsilon + \tfrac{1}{8} H_{MNP}\Gamma^{NP}\varepsilon + \mathcal{O}(\alpha'^2), \tag{A.9}$$

可用 Bismut联络　∇^{-} 表示为

$$\nabla^{-}_{M}\varepsilon = \nabla_M \varepsilon + \tfrac{1}{8} H_{MNP}\Gamma^{NP}\varepsilon. \tag{A.10}$$

Hull。出现在异质作用量或反常条件中的并非 Bismut联络。出现在其中的联络是

$$\nabla^{+}_{M}\varepsilon = \nabla_{M}\varepsilon - \tfrac{1}{8}H_{MNP}\Gamma^{NP}\varepsilon. \tag{A.11}$$

这个联络称为 Hull联络。

Chern Chern 联络是唯一同时满足厄米性并与 $T^{1,0}X$ 上的全纯结构相容的联络。我们用 ∇^{Ch} 表示该联络，其联络符号为 Σ^{Ch}。

A.3 旋量与伽马矩阵

Cliff(1, 9)

在十维时空中，伽马矩阵 Γ^{A} 满足反对易关系

$$\{\Gamma_{A},\Gamma_{B}\} = 2\,\eta_{AB}\,1_{32}, \tag{A.12}$$

其中 η_{AB} 是具有洛伦兹符号的闵可夫斯基度规 (−, +, . . ., +)。Clifford代数由反对称化乘积 $\Gamma_{A_1\ldots A_r} = \Gamma_{[A_1}\ldots\Gamma_{A_r]}$ 生成。手征矩阵定义为 $\Gamma_{*} = \frac{1}{10!}\,\varepsilon^{A_1\ldots A_{10}}\Gamma_{A_1\ldots A_{10}}$，其中 $\varepsilon^{01\ldots9} = 1$。伽马矩阵满足厄米共轭性质

$$(\Gamma^{A})^{\dagger} = \Gamma_{0}\,\Gamma^{A}\Gamma_{0}, \tag{A.13}$$

十维旋量 ε 的狄拉克共轭定义为 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\dagger}\mathrm{i}\Gamma^{0}$。电荷共轭矩阵 Γ_{C} 是满足以下两个性质（Γ_{A}）$^{\intercal} = -\Gamma^{-1}{}_{\mathrm{C}}\ \Gamma_{A}\Gamma_{\mathrm{C}}$ 和（Γ_{C}）$^{\intercal} = -\Gamma_{\mathrm{C}}$. 的唯一（相位因子除外）厄米矩阵。马约拉纳旋量 ε 满足 $\varepsilon = \Gamma_{\mathrm{C}}\,\bar{\varepsilon}^{\intercal}$。

虽然伽马矩阵是用标架指标定义的，但可以通过十维 vielbein $\Gamma^{M} = e^{M}{}_{A}\Gamma^{A}$将其转换为坐标指标。对于一个 r形式 A，Clifford积 $\not{A}$定义为

$$\not{A} = \frac{1}{r!}A_{M_1\ldots M_r}\,\Gamma^{M_1\ldots M_r}. \tag{A.14}$$

Cliff(6)

在六个欧几里得维度中，伽马矩阵是厄米矩阵 $\gamma^a = (\gamma^a)^\dagger$ ，满足反对易关系

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\,\delta_{ab}\,1_8. \tag{A.15}$$

手征矩阵 定义为 $\gamma_* = -\frac{\mathrm{i}}{6!}\varepsilon_{a_1\ldots a_6}\gamma^{a_1\ldots a_6}$，并出现在对偶关系中

$$\gamma^{a_1\ldots a_r} = -\mathrm{i}(-1)^{r(r-1)/2}\frac{1}{(6-r)!}\varepsilon^{a_1\ldots a_r b_1\ldots b_{6-r}}\gamma_{b_1\ldots b_{6-r}}\gamma_*. \tag{A.16}$$

电荷共轭矩阵 γ_{C} 由 $(\gamma^a)^{\intercal} = -\gamma^{-1}{}_{\mathrm{C}}\ \gamma^a\gamma_{\mathrm{C}}$ 和 $(\gamma_{\mathrm{C}})^\dagger = (\gamma_{\mathrm{C}})^{\intercal} = \gamma_{\mathrm{C}}$定义。赝马约拉纳旋量由约束 $\epsilon = \gamma_{\mathrm{C}}\epsilon^*$定义。

当将十维理论紧化在配备非零赝马约拉纳旋量 ϵ的内部空间 X 上时，旋量可分解为内部和外部分量。十维马约拉纳–外尔旋量 ε 通过下式给出一个四维马约拉纳旋量 η

$$\varepsilon = \eta_+ \otimes \epsilon_+ + \eta_- \otimes \epsilon_-, \tag{A.17}$$

其中 $\eta_\pm$ （分别是 $\epsilon_\pm$）为 η （分别是 ϵ）的左、右分量。

Cliff(7)

在七维欧几里得维度中，伽马矩阵是厄米矩阵 $\gamma^a = (\gamma^a)^\dagger$ ，满足反对易关系

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\,\delta_{ab}\,1_8, \tag{A.18}$$

其中现在 $(a, b) = 1, \ldots\ldots, 7$。奇数维中无法定义手性，伽马矩阵满足的对偶关系现在为

$$\gamma^{a_1\ldots a_r} = -\mathrm{i}(-1)^{r(r-1)/2}\frac{1}{(7-r)!}\varepsilon^{a_1\ldots a_r b_1\ldots b_{7-r}}\gamma_{b_1\ldots b_{7-r}}. \tag{A.19}$$

电荷共轭矩阵的定义与六维空间中的定义相同。

Cliff(8)

在八维欧几里得空间中，伽马矩阵是厄米矩阵 $\gamma^a = (\gamma^a)^\dagger$，满足反对易关系

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\,\delta_{ab}\,1_{16}, \tag{A.20}$$

其中 $(a, b) = 1, \ldots, 8$。手征矩阵定义为 $\gamma_* = \frac{1}{8!}\,\varepsilon_{a_1 \ldots a_8}\gamma^{a_1 \ldots a_8}$，并出现在对偶关系中

$$\gamma^{a_1 \ldots a_r} = (-1)^{r(r-1)/2}\frac{1}{(8-r)!}\varepsilon^{a_1 \ldots a_r b_1 \ldots b_{8-r}}\gamma_{b_1 \ldots b_{8-r}}\gamma_*. \tag{A.21}$$

电荷共轭矩阵的定义与六维空间中的定义相同。

A.4 G-结构

$\mathsf{G_2}$ 结构

遵循 [34], 一个 G_2 结构由一个不变单位范数旋量 ϵ定义为

$$\phi = -\mathrm{i}\epsilon^\dagger\gamma_{(3)}\epsilon, \qquad \star\phi = \epsilon^\dagger\gamma_{(4)}\epsilon. \tag{A.22}$$

具有 G_2 结构的流形上的 p形式空间可分解为 G_2模。对我们而言尤为重要的是三形式和四形式，它们可分解为

$$\begin{aligned} \Omega^3 &= \Omega^3_{\mathbf{1}} \oplus \Omega^3_{\mathbf{7}} \oplus \Omega^3_{\mathbf{27}}, \\ \Omega^4 &= \Omega^4_{\mathbf{7}} \oplus \Omega^4_{\mathbf{14}}, \end{aligned} \tag{A.23}$$

其中，下标表示相关的 G_2 表示。我们将投影算子定义为投影到这些子空间上的算子，分别记作 $\pi_{\boldsymbol{d}}$ 和 $\Pi_{\boldsymbol{d}}$，对应三形式和四形式。它们可以显式定义为

as

$$
\begin{aligned}
(\pi_{\mathbf{1}})_{m_1m_2m_3}{}^{n_1n_2n_3} &= \tfrac{1}{42}\phi_{m_1m_2m_3}\phi^{n_1n_2n_3},\\
(\pi_{\mathbf{7}})_{m_1m_2m_3}{}^{n_1n_2n_3} &= \tfrac{1}{24}\star\phi_{m_1m_2m_3p}\star\phi^{n_1n_2n_3p},\\
(\pi_{\mathbf{27}})_{m_1m_2m_3}{}^{n_1n_2n_3} &= \tfrac{1}{7}\phi_{m_1m_2m_3}\phi^{n_1n_2n_3}+\tfrac{1}{8}\star\phi_{m_1m_2m_3p}\star\phi^{n_1n_2n_3p}\\
&\quad+\tfrac{3}{2}\star\phi_{[m_1m_2}{}^{n_1n_2}\delta^{n_3]}_{m_3]},\\
(\Pi_{\mathbf{1}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= \tfrac{1}{168}\star\phi_{m_1\ldots m_4}\star\phi^{n_1\ldots n_4},\\
(\Pi_{\mathbf{7}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= \tfrac{1}{6}\delta^{[n_1}_{[m_1}\phi_{m_2m_3m_4]}\phi^{n_2n_3n_4]},\\
(\Pi_{\mathbf{27}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= \tfrac{1}{28}\star\phi_{m_1\ldots m_4}\star\phi^{n_1\ldots n_4}+\tfrac{1}{2}\delta^{[n_1}_{[m_1}\phi_{m_2m_3m_4]}\phi^{n_2n_3n_4]}\\
&\quad+3\delta^{[n_1}_{[m_1}\delta^{n_2}_{m_2}\star\phi_{m_3m_4]}{}^{n_3n_4]},
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

其中这些 其作用方式定义如下，例如，$(\pi_{\mathbf{1}}\phi)_{m_1m_2m_3}=(\pi_{\mathbf{1}})_{m_1m_2m_3}{}^{n_1n_2n_3}\phi_{n_1n_2n_3}$.

Spin(7) 结构

Spin(7) 结构由一个单位范数的不变旋量 ϵ 定义为

$$\Phi=\epsilon^{\dagger}\gamma_{(4)}\epsilon. \tag{A.25}$$

与 G_2 情形类似，四形式空间可分解为 Spin(7) 模，形式如下

$$\Omega^4=\Omega^4_{\mathbf{1}}\oplus\Omega^4_{\mathbf{7}}\oplus\Omega^4_{\mathbf{27}}\oplus\Omega^4_{\mathbf{35}}, \tag{A.26}$$

其中前三个加和项在霍奇星算子作用下的特征值为 $+1$ ，而最后一个加和项 $\Omega^4_{\mathbf{35}}$, 的特征值为 -1 ，因此是反自对偶的。利用 Spin(7)四形式，可以构造出投影到这些子空间上的一组相应投影算子:

$$
\begin{aligned}
(\Pi_{\mathbf{1}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= \tfrac{1}{336}\Phi_{m_1\ldots m_4}\Phi^{n_1\ldots n_4},\\
(\Pi_{\mathbf{7}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= -\tfrac{1}{48}\Phi_{[m_1m_2m_3}{}^{[n_4}\Phi^{n_1n_2n_3]}{}_{m_4]}+\tfrac{1}{48}\Phi_{p[m_1m_2m_3}\Phi^{p[n_1n_2n_3}\delta^{n_4]}_{m_4]},\\
(\Pi_{\mathbf{27}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= \delta^{n_1}_{[m_1}\delta^{n_2}_{m_2}\delta^{n_3}_{m_3}\delta^{n_4}_{m_4]}+\tfrac{1}{56}\Phi_{m_1\ldots m_4}\Phi^{n_1\ldots n_4}-\tfrac{1}{16}\Phi_{[m_1m_2m_3}{}^{[n_4}\Phi^{n_1n_2n_3]}{}_{m_4]}\\
&\quad-\tfrac{5}{48}\Phi_{p[m_1m_2m_3}\Phi^{p[n_1n_2n_3}\delta^{n_4]}_{m_4]},\\
(\Pi_{\mathbf{35}})_{m_1\ldots m_4}{}^{n_1\ldots n_4} &= -\tfrac{1}{48}\Phi_{m_1\ldots m_4}\Phi^{n_1\ldots n_4}+\tfrac{1}{12}\Phi_{[m_1m_2m_3}{}^{[n_4}\Phi^{n_1n_2n_3]}{}_{m_4]}\\
&\quad+\tfrac{1}{12}\Phi_{p[m_1m_2m_3}\Phi^{p[n_1n_2n_3}\delta^{n_4]}_{m_4]}.
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

B 度量流方程

在本附录中，我们将明确展示，如何把度量的流方程改写为形式（3.13），其中爱因斯坦方程（2.1a）的内部部分得以显式呈现。这一表述完善了 [18], 中推导出的流方程，将反常流与异质弦运动方程联系起来。推导基于两个观察结果。首先，正如 [18], 中所强调的，对于超对称几何，度量的流方程可以由 SU(3) 结构形式的流方程（3.1）得到。其次，当用异质弦自由度来表示时，驱动度量流的张量会化为度规运动方程，除了在流的不动点处为 $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ 的项。

下文中，我们使用全纯坐标 $(z^i,\ \bar{z}^{\bar{\imath}})$，而不采用实坐标 x^m。全纯指标记为 $(i,j,k,l) = 1,\dots,3$，而实指标记为 $(m,n,p,q) = 1,\dots,6$。

B.1 流方程的积分

将 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\omega\wedge\omega$ 的流方程与厄米形式收缩，得到

$$2\mathrm{e}^{-2\varphi}\big(-\partial_t g_{\bar{\imath}j} - g_{\bar{\imath}j}\, g^{\bar{k}l}\partial_t g_{\bar{k}l} + 4\, g_{\bar{\imath}j}\,\partial_t\varphi\big) = g^{\bar{k}l}\left(\mathrm{d}H - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr} F\wedge F - \operatorname{tr} R^+\wedge R^+)\right)_{\bar{k}l\bar{\imath}j}. \quad \text{(B.1)}$$

注意到流下 $\mathrm{e}^{-2\varphi}\Omega$ 的不变性意味着体积形式 $\mathrm{e}^{-4\varphi}\,\mathrm{vol} = -\mathrm{e}^{-4\varphi}\frac{1}{3!}\omega^3$ 保持不变，因此该流方程可大为简化。这转化为以下关系

$$\partial_t\varphi = \frac{1}{4}g^{\bar{\imath}j}\partial_t g_{\bar{\imath}j}. \quad \text{(B.2)}$$

该关系给出了度量流与膨胀子流之间的联系。于是度量流方程可简化为

$$\partial_t g_{\bar{\imath}j} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\varphi}(\mathrm{d}H - \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr} F\wedge F - \operatorname{tr} R^+\wedge R^+))^k{}_{k\bar{\imath}j}. \quad \text{(B.3)}$$

为了将这个方程改写为修正里奇流，通过明确写出对 Chern 联络的依赖，便可将收缩 $\mathrm{d}H^k{}_{k\bar{\imath}j}$ 改写为 [18] 。事实上，切恩曲率张量的分量为

$$R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1 j_1\bar{\imath}_2 j_2} = \partial_{\bar{\imath}_1}\partial_{j_1} g_{\bar{\imath}_2 j_2} - g^{\bar{k}l}\partial_{\bar{\imath}_1} g_{\bar{\imath}_2 l}\,\partial_{j_1} g_{j_2\bar{k}}, \quad \text{(B.4)}$$

因此，对两组指标 $\bar{\imath}_1, \bar{\imath}_2$ 和 j_1, j_2 分别进行反对称化，得到

$$R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1 j_1 \bar{\imath}_2 j_2} - R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_2 j_1 \bar{\imath}_1 j_2} - R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1 j_2 \bar{\imath}_2 j_1} + R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_2 j_2 \bar{\imath}_1 j_1} = \frac{1}{2}\mathrm{d}H_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2 j_1 j_2} - H_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2}{}^{\bar{k}} H_{j_1 j_2 \bar{k}}. \tag{B.5}$$

将此恒等式与厄米度量缩并，并利用共形平衡度量的陈曲率缩并关系，可得 [18],

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}H^{k}{}_{k\bar{\imath}j} = R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}j} + H_{\bar{\imath}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l}, \tag{B.6}$$

其中，$R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}j}$ 是陈曲率与厄米形式的 $g^{\bar{k}l} R^{\mathrm{Ch}}_{k\bar{\imath}j}$ [35] 缩并，如下所示。于是，度量流方程可简化为

$$\partial_t g_{\bar{\imath}j} = \mathrm{e}^{2\varphi}(R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}j} + H_{\bar{\imath}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l}) + \frac{\alpha'}{8}\mathrm{e}^{2\varphi}(\operatorname{tr} F \wedge F - \operatorname{tr} R^{+} \wedge R^{+})^{k}{}_{k\bar{\imath}j}, \tag{B.7}$$

这与 [18] 的度量流方程一致（仅符号有所不同）。

B.2 重述为运动方程

为了将流（B.7）重述为由度量的异质弦运动方程驱动的形式，需要恰当地识别张量 $R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}j} + H_{\bar{\imath}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l}$。自然会想到，此张量与内流形的里奇张量有关；事实上，对于 K¨ahler 流形，这些张量相同。对于非 K¨ahler 流形，其挠率为 $H = \mathrm{i}(\partial - \partial)\omega$，张量 $R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}j}$ 与里奇张量相差由 H 构造的二阶导数项。识别出这些项后，便可将其与异质超引力的相关运动方程联系起来。

黎曼曲率与陈曲率

在非 K¨ahler 流形上，Chern 联络 ∇^{Ch} 与列维-奇维塔联络 ∇ 并不相同。在全纯坐标中，联络一形式的分量为

$$\Sigma^{\mathrm{Ch}}_{m}{}^{a}{}_{b}\,\mathrm{d}x^m = \begin{pmatrix} \Sigma^{\mathrm{Ch}}_{m}{}^{i}{}_{j} & 0 \\ 0 & \Sigma^{\mathrm{Ch}}_{m}{}^{\bar{\imath}}{}_{\bar{\jmath}} \end{pmatrix} \mathrm{d}x^m, \qquad \Sigma_{m}{}^{a}{}_{b}\,\mathrm{d}x^m = \begin{pmatrix} \Sigma_{m}{}^{i}{}_{j} & \Sigma_{m}{}^{i}{}_{\bar{\jmath}} \\ \Sigma_{m}{}^{\bar{\imath}}{}_{j} & \Sigma_{m}{}^{\bar{\imath}}{}_{\bar{\jmath}} \end{pmatrix} \mathrm{d}x^m. \tag{B.8}$$

[35] 在 [18], 中，这个张量记作 $-\tilde{R}_{\bar{\imath}j}$。

这两个联络之间的差可以用挠率 H 表示为

$$\Sigma^{\mathrm{Ch}}{}_{m}{}^{a}{}_{b}\,\mathrm{d}x^{m}-\Sigma_{m}{}^{a}{}_{b}\,\mathrm{d}x^{m}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}H_{m}{}^{i}{}_{j} & \frac{1}{2}H_{m}{}^{i}{}_{\bar{j}}\\ \frac{1}{2}H_{m}{}^{\bar{\imath}}{}_{j} & -\frac{1}{2}H_{m}{}^{\bar{\imath}}{}_{\bar{j}}\end{pmatrix}\mathrm{d}x^{m}. \tag{B.9}$$

相应曲率 $R^{\mathrm{Ch}}{}_{m_1m_2}{}^{n_1}{}_{n_2}$与 $R_{m_1m_2}{}^{n_1}{}_{n_2}$之间的差可据此计算为

$$\begin{aligned}
R^{\mathrm{Ch}}{}_{\bar{\imath}_1i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}-R_{\bar{\imath}_1i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}&=-\frac{1}{2}\nabla_{\bar{\imath}_1}H_{i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}+\frac{1}{2}\nabla_{i_2}H_{\bar{\imath}_1}{}^{j_1}{}_{j_2}-\frac{3}{4}H_{i_2}{}^{j_1}{}_{\bar{k}}H_{\bar{\imath}_1j_2}{}^{\bar{k}}\\
&\quad-\frac{1}{4}H_{\bar{\imath}_1}{}^{j_1\bar{k}}H_{i_2j_2\bar{k}}+\frac{1}{4}H_{i_2}{}^{j_1\bar{k}}H_{\bar{\imath}_1j_2\bar{k}}\\
&=-\frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1}H_{i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}+\frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{i_2}H_{\bar{\imath}_1}{}^{j_1}{}_{j_2}-\frac{1}{4}H_{i_2}{}^{j_1}{}_{\bar{k}}H_{\bar{\imath}_1j_2}{}^{\bar{k}}\\
&\quad+\frac{1}{4}H_{\bar{\imath}_1}{}^{j_1\bar{k}}H_{i_2j_2\bar{k}}-\frac{1}{4}H_{i_2}{}^{j_1\bar{k}}H_{\bar{\imath}_1j_2\bar{k}},
\end{aligned} \tag{B.10a}$$

$$\begin{aligned}
R^{\mathrm{Ch}}{}_{i_1i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}-R_{i_1i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}&=-\nabla_{[i_1}H_{i_2]}{}^{j_1}{}_{j_2}+\frac{1}{2}H^{j_1}{}_{[i_1}{}^{\bar{k}}H_{i_2]j_2\bar{k}}\\
&=-\nabla^{\mathrm{Ch}}_{[i_1}H_{i_2]}{}^{j_1}{}_{j_2}-\frac{1}{2}H^{j_1}{}_{[i_1}{}^{\bar{k}}H_{i_2]j_2\bar{k}}-\frac{1}{2}H_{i_1i_2}{}^{k}H^{j_1}{}_{j_2k},
\end{aligned} \tag{B.10b}$$

$$\begin{aligned}
R^{\mathrm{Ch}}{}_{\bar{\imath}_1i_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-R_{\bar{\imath}_1i_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}&=\frac{1}{2}\nabla_{\bar{\imath}_1}H_{i_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-\frac{1}{2}\nabla_{i_2}H_{\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-\frac{1}{4}H_{\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1\bar{k}}H_{i_2j_2\bar{k}}+\frac{1}{4}H_{i_2}{}^{\bar{\jmath}_1\bar{k}}H_{\bar{\imath}_1j_2\bar{k}}\\
&=\frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1}H_{i_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-\frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{i_2}H_{\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-\frac{1}{4}H_{\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1\bar{k}}H_{i_2j_2\bar{k}}+\frac{1}{4}H_{i_2}{}^{\bar{\jmath}_1\bar{k}}H_{\bar{\imath}_1j_2\bar{k}},
\end{aligned} \tag{B.10c}$$

$$\begin{aligned}
R^{\mathrm{Ch}}{}_{i_1i_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-R_{i_1i_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}&=\nabla_{[i_1}H_{i_2]}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}\\
&=\nabla^{\mathrm{Ch}}_{[i_1}H_{i_2]}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2},
\end{aligned} \tag{B.10d}$$

$$\begin{aligned}
R^{\mathrm{Ch}}{}_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-R_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}&=\nabla_{[\bar{\imath}_1}H_{\bar{\imath}_2]}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-\frac{1}{2}H_{[\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1k}H_{\bar{\imath}_2]j_2k}-\frac{1}{2}H_{[\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1\bar{k}}H_{\bar{\imath}_2]j_2\bar{k}}\\
&=\nabla^{\mathrm{Ch}}_{[\bar{\imath}_1}H_{\bar{\imath}_2]}{}^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2}-\frac{1}{2}H_{[\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1k}H_{\bar{\imath}_2]j_2k}-\frac{1}{2}H_{[\bar{\imath}_1}{}^{\bar{\jmath}_1\bar{k}}H_{\bar{\imath}_2]j_2\bar{k}}\\
&\quad+\frac{1}{2}H_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2}{}^{\bar{k}}H^{\bar{\jmath}_1}{}_{j_2\bar{k}},
\end{aligned} \tag{B.10e}$$

其余分量可由指标的反对称性或复共轭得到。这里，陈曲率唯一非零的分量为 $R^{\mathrm{Ch}}{}_{\bar{\imath}_1i_2}{}^{j_1}{}_{j_2}$。

当挠率非零时，曲率张量的对称性不如 K¨ahler 流形上的曲率张量。例如，陈曲率不再对指标的置换保持对称，而是满足

$$R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1j_1\bar{\imath}_2j_2}-R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_2j_1\bar{\imath}_1j_2}=\nabla^{\mathrm{Ch}}_{j_1}H_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2j_2}. \tag{B.11}$$

还应注意，使用全纯坐标可能会掩盖一些歧义。值得注意的是，列维-奇维塔联络与厄米度量相容，但与

复结构不相容。因此，在使用列维-奇维塔协变导数 ∇时应格外谨慎。特别是， ∇ 与厄米形式的缩并不相容。可以通过使用 Chern 联络（它与复结构相容），并在最后将结果转换回列维-奇维塔联络，来避免这个问题。

里奇张量

里奇张量可由黎曼曲率（B.10）计算得出。其分量形式为

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{k}} H^{\bar{k}}{}_{ij} - \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{k} H^{k}{}_{ij} + \nabla^{\mathrm{Ch}}_{i} H_j + \frac{1}{2} H_{ij}{}^{k} H_k + \frac{1}{2} H_i{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l}, \tag{B.12a}$$

$$\begin{aligned} R_{\bar{\imath}j} = {} & R^{\mathrm{Ch}\,k}_{k\bar{\imath}}{}_{j} + \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{k}} H^{\bar{k}}{}_{\bar{\imath}j} - \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{k} H^{k}{}_{\bar{\imath}j} + \nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}} H_j + \frac{1}{2} H_{\bar{\imath}j}{}^{k} H_k \\ & - \frac{1}{2} H_{\bar{\imath}j}{}^{k} H_k - \frac{1}{2} H_{\bar{\imath}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l} + \frac{1}{4} H_{\bar{\imath}}{}^{\bar{k}\bar{l}} H_{j\bar{k}\bar{l}}, \end{aligned} \tag{B.12b}$$

其中 $H_i = H^{j}{}_{ji}$ 和 $H_{\bar{\imath}} = -H^{j}{}_{j\bar{\imath}}$。

¯挠率的形式 $H = \mathrm{i}(\partial - \partial)\omega$ 对协变导数 ∇H施加了若干约束，从而简化了（B.12）。[36] 例如， H 满足 $\partial H = \bar{\partial} H (= i\partial\bar{\partial}\omega)$ ，或者用分量表示为 $\partial_{[j_1} H_{j_2]\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2} = \partial_{[\bar{\imath}_1} H_{\bar{\imath}_2]j_1 j_2}$。对此等式施加协变导数，可得

$$\nabla^{\mathrm{Ch}}_{j_1} H_{j_2\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2} - \nabla^{\mathrm{Ch}}_{j_2} H_{j_1\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2} - \nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_1} H_{\bar{\imath}_2 j_1 j_2} + \nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}_2} H_{\bar{\imath}_1 j_1 j_2} = 0. \tag{B.13}$$

与厄米度量作缩并可得

$$\nabla^{\mathrm{Ch}}_{k} H^{k}{}_{\bar{\imath}j} + \nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{k}} H^{\bar{k}}{}_{\bar{\imath}j} = -\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{\imath}} H_j + \nabla^{\mathrm{Ch}}_{j} H_{\bar{\imath}}. \tag{B.14}$$

挠率还满足 $\partial_{[i_1} H_{i_2 i_3]\bar{\jmath}} = 0$，可将其写成协变形式

$$\nabla^{\mathrm{Ch}}_{[i_1} H_{i_2 i_3]\bar{\jmath}} = -H_{\bar{\jmath}k[i_1} H_{i_2 i_3]}{}^{k}. \tag{B.15}$$

将该方程与厄米度量收缩可得

$$\nabla^{\mathrm{Ch}}_{k} H^{k}{}_{ij} = \nabla^{\mathrm{Ch}}_{i} H_j - \nabla^{\mathrm{Ch}}_{j} H_i + H_{ij}{}^{k} H_k. \tag{B.16}$$

[36]此类约束同样可以从与 Chern 联络相关的第一 Bianchi 恒等式中提取出来。

由于挠率没有 (3, 0) 分量，它还满足

$$\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{k}} H^{\bar{k}}{}_{ij} = 0. \tag{B.17}$$

由于流方程（ $R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{i}j}$B.7）中出现的陈曲率收缩与里奇张量（$R^{\mathrm{Ch}k}_{k\bar{i}}{}_{j}$ B.12）中出现的收缩不同，因此也有必要建立二者之间的联系。对（B.11）用厄米度量进行收缩即可得到

$$R^{\mathrm{Ch}k}_{k\bar{i}}{}_{j} = -R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{i}j} + \nabla^{\mathrm{Ch}}_{k} H^{k}{}_{\bar{i}j}. \tag{B.18}$$

利用挠率导数的恒等式（B.14）、（B.16）和（B.17），以及（B.18），可将里奇张量写成如下形式

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{i} H_j + \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{j} H_i + \frac{1}{2} H_i{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l} \\ &= \frac{1}{2}\nabla_i H_j + \frac{1}{2}\nabla_j H_i + \frac{1}{2} H_i{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l}, \end{aligned} \tag{B.19a}$$

$$\begin{aligned} R_{\bar{i}j} &= -R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{i}j} + \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{\bar{i}} H_j + \frac{1}{2}\nabla^{\mathrm{Ch}}_{j} H_{\bar{i}} + \frac{1}{2} H_{\bar{i}j}{}^{k} H_k - \frac{1}{2} H_{\bar{i}j}{}^{\bar{k}} H_{\bar{k}} - \frac{1}{2} H_{\bar{i}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l} + \frac{1}{4} H_{\bar{i}}{}^{\bar{k}\bar{l}} H_{j\bar{k}\bar{l}} \\ &= -R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{i}j} + \frac{1}{2}\nabla_{\bar{i}} H_j + \frac{1}{2}\nabla_j H_{\bar{i}} - \frac{1}{2} H_{\bar{i}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l} + \frac{1}{4} H_{\bar{i}}{}^{\bar{k}\bar{l}} H_{j\bar{k}\bar{l}}. \end{aligned} \tag{B.19b}$$

流方程

黎曼张量和里奇张量的表达式（B.10）和（B.19）适用于任意复流形，并不依赖于超对称性。假设几何具有超对称性，则可得到额外的方程

$$H_m = -2\nabla_m \varphi, \tag{B.20}$$

该式可由共形平衡条件得到。将此方程与（B.19）结合可知，对于超对称几何，

$$R_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j \varphi - \frac{1}{4} H_i{}^{mn} H_{jmn} = 0, \tag{B.21a}$$

$$R_{\bar{i}j} + 2\nabla_{\bar{i}} \nabla_j \varphi - \frac{1}{4} H_{\bar{i}}{}^{mn} H_{jmn} = -(R^{\mathrm{Ch}}_{\bar{i}j} + H_{\bar{i}}{}^{\bar{k}l} H_{j\bar{k}l}). \tag{B.21b}$$

驱动流的张量在（B.7）中显式出现，因此我们可以将流写成以下形式

$$\partial_t g_{\bar{i}j} = -\mathrm{e}^{2\varphi}\big(R_{\bar{i}j} + 2\nabla_{\bar{i}}\nabla_j \varphi - \tfrac{1}{4} H_{\bar{i}}{}^{mn} H_{jmn}\big) + \frac{\alpha'}{8}\mathrm{e}^{2\varphi}(\operatorname{tr} F \wedge F - \operatorname{tr} R^{+} \wedge R^{+})^{k}{}_{k\bar{i}j}. \tag{B.22}$$

同样可以证明，度量在流作用下保持厄米性，即 $\partial_t g_{ij} = 0$，这与爱因斯坦方程非混合分量的消失相一致。

流方程（B.22）包含了 α'的零阶度规运动方程。类似地，也可以对流方程中的 $\mathcal{O}(\alpha')$ 项进行推导，从而得到 α'的一阶运动方程。不过，无需明确展示这一过程，因为事实证明还有一种替代方法（而且更简单），同样可以得到这一结果，那就是利用超对称性。

B.3 绕道探讨超对称性

杂化弦理论内在的超对称性使场方程具有额外的结构。尤其值得注意的是，玻色运动方程可以改写为超对称变分 [35–38] 的可积条件。因此，在 α' 的零阶，作用于一个非零马约拉纳–外尔旋量 ε 上的超对称算符组合可以构造出运动方程。例如，爱因斯坦方程可以表示为

$$\begin{aligned} &R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\varphi - \tfrac{1}{4}H_M{}^{P_1P_2}H_{NP_1P_2} \\ &= \left(\bar\varepsilon\,\Gamma_{(M}\not{D}D_{N)}\varepsilon - \bar\varepsilon\,\Gamma_{(M}D_{N)}\not{D}\varepsilon + \tfrac{1}{2}H_{(M}{}^{PQ}\,\bar\varepsilon\,\Gamma_{N)}\Gamma_P D_Q\varepsilon + \text{c.c.}\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{12}\mathrm{d}H_{(M}{}^{P_1\ldots P_3}\,\bar\varepsilon\Gamma_{N)P_1\ldots P_3}\varepsilon. \end{aligned} \tag{B.23}$$

对于紧化到四维闵可夫斯基时空的情形，该方程唯一非平凡的分量沿内部空间方向。ε 的双线性式随后化为内部旋量 ϵ的双线性式；该旋量出现在 ε的分解中，由此得到的方程为

$$\begin{aligned} &R_{mn} + 2\nabla_m\nabla_n\varphi - \tfrac{1}{4}H_m{}^{p_1p_2}H_{np_1p_2} \\ &= \left(\epsilon^\dagger\gamma_{(m}\not{D}D_{n)}\epsilon - \epsilon^\dagger\gamma_{(m}D_{n)}\not{D}\epsilon + \tfrac{1}{2}H_{(m}{}^{pq}\,\epsilon^\dagger\gamma_{n)}\gamma_p D_q\epsilon + \text{c.c.}\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{12}\mathrm{d}H_{(m}{}^{p_1\ldots p_3}\,\epsilon^\dagger\gamma_{n)p_1\ldots p_3}\epsilon. \end{aligned} \tag{B.24}$$

对于超对称几何，$D_m\epsilon$ 和 $\not{D}\epsilon$ 均为零，且（B.24）化简为

$$R_{mn} + 2\nabla_m\nabla_n\varphi - \tfrac{1}{4}H_m{}^{p_1p_2}H_{np_1p_2} = -\tfrac{1}{24}\mathrm{d}H_{(m}{}^{p_1\ldots p_3}\,(\omega\wedge\omega)_{n)p_1\ldots p_3}, \tag{B.25}$$

其中，最后一项已利用 $\epsilon^\dagger\gamma_{m_1\ldots m_4}\epsilon = (\star\omega)_{m_1\ldots m_4}$ 进行了改写。在全纯分量中，该方程的非混合分量为零。对于混合分量，

可得

$$R_{\bar{\imath}j} + 2\nabla_{\bar{\imath}}\nabla_j\varphi - \tfrac{1}{4}H_{\bar{\imath}}{}^{m_1m_2}H_{jm_1m_2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}H^k{}_{k\bar{\imath}j}, \tag{B.26}$$

这与附录B.2中推导出的结果完全一致。

接下来，将异质弦运动方程中的 $\mathcal{O}(\alpha')$ 部分纳入计算是直接的。对于规范场的曲率 F_{mn}，在克利福德基中展开伽马矩阵的乘积可得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\epsilon^\dagger F_{mp}\gamma_n{}^p \not{F}\epsilon &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(F_{mp}F_{q_1q_2})(\epsilon^\dagger\gamma_n{}^{pq_1q_2}\epsilon - 2\delta_n^{q_1}\delta_p^{q_2}) \\ &= -\tfrac{1}{24}\operatorname{tr}(F\wedge F)_m{}^{p_1\dots p_3}(\omega\wedge\omega)_{np_1\dots p_3} - \operatorname{tr}F_m{}^pF_{np}.\end{aligned} \tag{B.27}$$

利用该方程，$\operatorname{tr}F\wedge F$ 与（B.22）中出现的厄米形式的缩并，可以很容易地改写为度规运动方程中的规范贡献，并附加一个涉及超对称算符 $\not{F}\epsilon$ 的项。对于 R^+，也可以完全按照相同的推导进行。将二者合在一起，便可用一阶 α'精度下完整的度规运动方程来表示（B.22）。

具体而言，将度量的运动方程（2.1a）限制在 X

$$\begin{aligned}\operatorname{eom}[g]_{mn} = {}& \left(\epsilon^\dagger\gamma_{(m}\not{D}D_{n)}\epsilon - \epsilon^\dagger\gamma_{(m}D_{n)}\not{D}\epsilon + \tfrac{1}{2}H_{(m}{}^{pq}\epsilon^\dagger\gamma_{n)}\gamma_pD_q\epsilon + \text{c.c.}\right) \\ &+\frac{\alpha'}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\left(\operatorname{tr}\epsilon^\dagger F_{mp}\gamma_n{}^p\not{F}\epsilon - \epsilon^\dagger R^+_{mp}\gamma_n{}^p\not{R}^+\epsilon\right) + \tfrac{1}{12}\mathcal{B}_{(m}{}^{p_1\dots p_3}\epsilon^\dagger\gamma_{n)p_1\dots p_3}\epsilon.\end{aligned} \tag{B.28}$$

类似地，将膨胀子运动方程（2.1b）限制在 X 可写为

$$\operatorname{eom}[\varphi] = \epsilon^\dagger(D^2 - \not{D}^2)\epsilon - 2\nabla^m\varphi\,\epsilon^\dagger D_m\epsilon + \frac{\alpha'}{16}\epsilon^\dagger(\operatorname{tr}\not{F}\not{F} - \operatorname{tr}\not{R}^+\not{R}^+)\epsilon + \tfrac{1}{4}\epsilon^\dagger\not{\mathcal{B}}\epsilon. \tag{B.29}$$

参考文献

[1] G. Perelman，《里奇流的熵公式及其几何应用》，arXiv:math/0211159。[2] E. S. Fradkin 和 A. A. Tseytlin，《量子化弦的有效场论》，*Phys. Lett. B***158** (1985)316–322。[3] E. S. Fradkin 和 A. A. Tseytlin，《量子弦论有效作用量》，《核物理B》**261** (1985)1–27。[勘误：Nucl.Phys.B 269, 745–745 (1986)]。[4] C. G. Callan, Jr.、E. J. Martinec、M. J. Perry 和 D. Friedan，《背景场中的弦》，《核物理B》**262** (1985)593–609。

[5] C. G. Callan, Jr.、I. R. Klebanov 和 M. J. Perry, 《弦理论有效作用量》, 《核物理B》278 (1986)78–90。[6] H.-D. Cao, 《紧致K¨ahler流形上K¨ahler度量到K¨ahler–Einstein度量的变形》, 《数学新进展》81 2, (1985)359–372。[7] R. L. Bryant, 《关于 G_2-结构的一些评述》, arXiv:math/0305124 [math.DG]。[8] S. Dwivedi、P. Gianniotis 和 S. Karigiannis, 《等距 G_2 结构的梯度流》, arXiv:1904.10068 [math.DG]。[9] S. Karigiannis、B. McKay 和 M.-P. Tsui, 《具有对称性的一些 G_2结构的拉普拉斯余流孤子解》, arXiv:1108.2192 [math.DG]。[10] S. Karigiannis, 《 G_2 结构流, I》, arXiv:math/0702077 [math.DG]。[11] E. Calabi, 《极值K¨ahler度量》, 《数学年刊研究》102 (1982)259–290。[12] R. Hamilton, 《里奇流中的奇点形成》, 《微分几何综述》2 (1993)7 – 136。[13] T. Oliynyk、V. Suneeta 和 E. Woolgar, 《世界面非线性σ模型的梯度流》, 《核物理B》739 (2006)441–458, arXiv:hep-th/0510239。[14] T. Oliynyk、V. Suneeta 和 E. Woolgar, 《世界面重整化群流的不可逆性》, Phys. Lett. B 610 (2005)115–121, arXiv:hep-th/0410001。[15] A. A. Tseytlin, 《关于σ模型重整化群流、"中心荷"作用量与佩雷尔曼熵》, 《物理评论D辑》75 (2007)064024, arXiv:hep-th/0612296。[16] D. H. Phong、S. Picard 和 X. Zhang, 《几何流与Strominger系统》, arXiv:1508.03315 [math.DG]。[17] D. H. Phong、S. Picard 和 X. Zhang, 《反常流与Fu-Yau方程》, arXiv:1610.02740 [math.DG]。[18] D. H. Phong、S. Picard 和 X. Zhang, 《反常流》, 《通讯：分析与几何》26 4, (2018)955–1008, arXiv:1610.02739 [math.DG]。[19] D. H. Phong、S. Picard 和 X. Zhang, 《幺模李群上的反常流》, arXiv:1705.09763 [math.DG]。[20] T. Fei、Z. Huang 和 S. Picard, 《黎曼曲面上的反常流》, 《国际数学研究公告》2021 3, (2021)2134–2165, arXiv:1711.08186 [math.DG]。[21] J. Streets 和 G. Tian, 《多重闭度量的抛物流》, 《国际数学研究公告》2010 16, (2010)3101–3133。

[22] J. Fu 和 J. Yang, 《厄米曲率流》《中国数学年刊》B辑**43** 5, (2022年)845–854。[23] A. Strominger, 《带挠率的超弦》《核物理B》**274** (1986年)253。[24] C. M. Hull, 《异质超弦紧化》*Phys. Lett. B***178** (1986年)357–364。[25] M. B. Green 和 J. H. Schwarz, 《超对称 D 中的反常抵消=10 规范理论与超弦理论》, *Phys. Lett. B* **149** (1984)117–122。[26] J.-X. Fu 和 S.-T. Yau, 《非 Kähler 流形上带通量超弦理论及

d

复 Monge–Ampère 方程》, 微分几何杂志 78 3, (2008年)369–428, arXiv:hep-th/0604063.[27] K. Dasgupta、G. Rajesh 和 S. Sethi, 《M 理论、定向平面与 G - 通量》, 《高能物理学杂志》08 (1999)023, arXiv:hep-th/9908088.[28] M. Fernandez、S. Ivanov、L. Ugarte 和 R. Villacampa, 《具有非零通量和常数膨胀子的非 Kähler 异质弦紧化》, Commun. Math. Phys. 288 (2009年)677–697, arXiv:0804.1648 [math.DG].[29] G. Grantcharov, 《第一陈类消失的紧致复齐性空间的几何》, Adv. Math. 226 (2011年)3136–3159, arXiv:0905.0040 [math.DG].[30] M. Fernandez、S. Ivanov、L. Ugarte 和 D. Vassilev, 《具有非零通量和非恒定膨胀子的非 Kähler 异质弦解》, 《高能物理学杂志》06 (2014年)073, arXiv:1402.6107 [math.DG].[31] T. Fei、Z. Huang 和 S. Picard, 《构造无穷多个 Strominger 系统的解》, 微分几何杂志 117 1, (2021年)23–39, arXiv:1703.10067 [math.DG].[32] E. Goldstein 和 S. Prokushkin, 《具有 SU(3) 结构的复非 Kähler 流形的几何模型》, Commun. Math. Phys. 251 (2004)65–78, arXiv:hep-th/0212307.[33] J. Li 和 S.-T. Yau, 《带挠率的超对称弦理论的存在性》, 微分几何杂志

.

Geom. **701**, (2005年)143–181, arXiv:hep-th/0411136.[34] R. Minasian, M. Petrini, and E. E. Svanes, "关于具有费米子期望值的异质真空", *Fortsch. Phys.* **653-4, (2017年) 1700010**, arXiv:1702.01156 [hep-th].[35] S. Ivanov, "异质超对称性、反常抵消和运动方程", *Phys. Lett. B***685 (2010年)190–196**, arXiv:0908.2927 [hep-th].[36] J. P. Gauntlett, D. Martelli, S. Pakis, and D. Waldram, "G 结构与缠绕的 NS5膜", *Commun. Math. Phys.***247 (2004年)421–445**, arXiv:hep-th/0205050.

[37] H. Kunitomo and M. Ohta, “异质超引力中的超对称 AdS(3) 解” ,

《理论物理进展》122 (2009年)631–657, arXiv:0902.0655 [hep-th].[38] D. Martelli 和 J. Sparks, 《非 Kähler 异质旋转》, 《理论与数学物理进展》15 1, (2011年)131–174, arXiv:1010.4031 [hep-th].[39] D. Fadel、E. Loubeau、A. J. Moreno 和 H. N. S. Earp, 《几何结构的流》, arXiv:2211.05197 [math.DG].[40] S. Picard 和 C. Suan, 《与卡拉比–丘流形相关的 G_2-结构的流》, arXiv:2209.03411 [math.DG].[41] X. de la Ossa 和 E. E. Svanes, 《联络、场重定义与异质超引力》, 《高能物理学杂志》12 (2014年)008, arXiv:1409.3347 [hep-th].[42] S. K. Donaldson, 《复代数曲面上的反自对偶杨–米尔斯联络与稳定向量丛》, 《伦敦数学学会会刊》50 (1985年)1–26.[43] S. K. Donaldson, 《无穷行列式、稳定丛与曲率》, 《杜克数学杂志》54 1, (1987)231 – 247.[44] K. Uhlenbeck 和 S. T. Yau, 《关于稳定向量丛中 Hermitian–Yang–Mills 联络的存在性》, 《纯粹与应用数学通讯》39 S¹, (1986年)S257–S293.[45] S.-T. Yau, 《复流形上的度量》, 《中国科学：数学》53 3, (2010年)565–572.[46] A. Ashmore、C. Strickland-Constable、D. Tennyson 和 D. Waldram, 《通过广义几何研究异质弦背景：矩映射与模空间》, 《高能物理学杂志》11 (2020)071, arXiv:1912.09981 [hep-th].[47] M. Garcia-Fernandez 和 R. G. Molina, 《Hull–Strominger 系统的调和度量

em

与稳定性”, arXiv:2301.08236 [math.DG].[48] M. F. Atiyah 和 R. Bott, “黎曼曲面上的杨–米尔斯方程”, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学与物理科学**308** 1505, (1983)523–615.[49] S. Donaldson 和 P. Kronheimer, 四维流形的几何。牛津数学

al

专著。克拉伦登出版社，1997年。[50] V. Tosatti 和 B. Weinkove, “紧致 K`ähler 流形上 (n-1)-多重次调和函数的 Monge-Ampère 方程”, 美国数学会杂志 30 2, （2017年）311–346, arXiv:1305.7511 [math.DG]。

[51] N. J. Hitchin，“六维三形式的几何”，微分几何杂志 **55** 3，（2000年）547–576，arXiv:math/0010054。[52] E. Bergshoeff 和 M. de Roo，“十维超对称 Chern-Simons 项”，*Phys. Lett. B***218**（1989年）210–215。[53] E. A. Bergshoeff 和 M. de Roo，“异质弦的四次有效作用量及

d

超对称性”，《核物理B》328 (1989)439–468.[54] A. Coimbra、R. Minasian、H. Triendl 和 D. Waldram，“弦修正的广义几何”，《高能物理学杂志》11 (2014)160，arXiv:1407.7542 [hep-th].[55] A. Lichnerowicz，“调和旋量”，巴黎科学院报告 A 257 7，(1963)7–9.[56] J.-M. Bismut，“非 K¨ahler 流形的局部指标定理”，数学年刊 284 4，(1989)681–699.[57] K. Becker 和 K. Dasgupta，“带挠率的异质弦”，《高能物理学杂志》11 (2002)006，arXiv:hep-th/0209077.[58] G. Lopes Cardoso、G. Curio、G. Dall'Agata、D. Lust、P. Manousselis 和 G. Zoupanos，“非凯勒弦背景及其五种挠率类”，《核物理B》652 (2003)5–34，arXiv:hep-th/0211118.[59] A. Adams、M. Ernebjerg 和 J. M. Lapan，“通量真空的线性模型”，《理论与数学物理进展》12 4, (2008)817–852，arXiv:hep-th/0611084.[60] M. Becker、L.-S. Tseng 和 S.-T. Yau，“新的异质非凯勒几何”，《理论与数学物理进展》13 6, (2009)1815–1845，arXiv:0807.0827 [hep-th].[61] K. Becker 和 S. Sethi，“挠率异质几何”，《核物理B》820 (2009)1–31，arXiv:0903.3769 [hep-th].[62] D. Andriot、R. Minasian 和 M. Petrini，“由扭曲产生的通量背景”，《高能物理学杂志》12 (2009)028，arXiv:0903.0633 [hep-th].[63] K. Becker、C. Bertinato、Y.-C. Chung 和 G. Guo，“超对称破缺、异质弦与通量”，《核物理B》823 (2009)428–447，arXiv:0904.2932 [hep-th].[64] D. Israel 和 L. Carlevaro，“异质通量真空的局部模型：时空与世界面方面”，Fortsch. Phys. 59 (2011)716–722，arXiv:1109.1534 [hep-th].[65] D. Israel 和 Y. Proto，“异质通量背景的世界面方法”，arXiv:2302.01889 [hep-th].[66] I. V. Melnikov、R. Minasian 和 S. Sethi，“异质通量与超对称性”，《高能物理学杂志》06 (2014)174，arXiv:1403.4298 [hep-th].

[67] I. V. Melnikov、R. Minasian 和 S. Theisen，“异质通量背景及其 IIA 对偶”，《高能物理学杂志》07 (2014)023，arXiv:1206.1417 [hep-th].[68] I. V. Melnikov、R. Minasian 和 S. Sethi，“三维中的非对偶性”，《高能物理学杂志》10 (2017)053，arXiv:1702.08537 [hep-th].[69] J. P. Gauntlett、N. Kim、D. Martelli 和 D. Waldram，“包裹在特殊拉格朗日三维圈上的五膜及相关几何”，《高能物理学杂志》11 (2001)018，arXiv:hep-th/0110034.[70] T. Friedrich 和 S. Ivanov，“七维中的 Killing 旋量方程与可积 G(2) 流形的几何”，J. Geom. Phys. 48 (2003)1，arXiv:math/0112201.[71] E. Corrigan、C. Devchand、D. B. Fairlie 和 J. Nuyts，“高于四维空间中规范场的一阶方程”，《核物理B》214 (1983)452–464.[72] S. K. Donaldson 和 R. P. Thomas，“高维中的规范理论”，载于会议 o

n

《纪念罗杰·彭罗斯爵士65岁生日的科学基础中的几何问题》，第31–47页。6，1996年。[73] P. Kaste、R. Minasian 和 A. Tomasiello，《带通量的七维流形上的超对称 M 理论紧化与 G 结构》，《高能物理学杂志》07（2003）004，arXiv:hep-th/0303127。[74] D. Joyce，《黎曼全纯群与标定几何》。牛津数学研究生教材。牛津大学出版社，2007年。[75] K. Becker、D. Robbins 和 E. Witten，《特殊全纯紧流形上的 α' 展开》，《高能物理学杂志》06（2014）051，arXiv:1404.2460 [hep-th]。[76] S. Grigorian，《余闭 G_2结构的流》，arXiv:1811.10505 [math.DG]。[77] G. Chen，《G2结构流的 Shi 型估计与有限时奇点》，《数学季刊》69 3，（2018）779–797。[78] S. Ivanov，《带挠率的联络、平行旋量与 Spin(7) 流形的几何》，arXiv:math/0111216。[79] S. Karigiannis，《流形上的 G_2 与 Spin(7) 结构的变形》，arXiv:math/0301218 [math.DG]。[80] T. Friedrich 和 S. Ivanov，《弦理论中的平行旋量与具有反对称挠率的联络》，《亚洲数学杂志》6（2002年）303–336，arXiv:math/0102142。[81] B. Ammann、H. Weiss 和 F. Witt，《自旋能量泛函：临界点与梯度流》，arXiv:1207.3529 [math.DG]。[82] T. C. Collins 和 D. H. Phong，《带通量的旋量流，I：短时存在性与平滑估计》，arXiv:2112.00814 [math.DG]。

[83] S. Gurrieri、A. Lukas 和 A. Micu，《半平坦上的异质弦》，《物理评论D辑》70（2004年）126009，arXiv:hep-th/0408121。[84] I. Benmachiche、J. Louis 和 D. Martinez-Pedrera，《紧致化于具有 SU(3) 结构的流形上的异质弦的有效作用量》，Class. Quant. Grav. 25（2008年）135006，arXiv:0802.0410 [hep-th]。[85] X. de la Ossa、E. Hardy 和 E. E. Svanes，《异质弦超势与模空间》，《高能物理学杂志》01（2016）049，arXiv:1509.08724 [hep-th]。[86] J. McOrist，《异质真空的有效场论》，Lett. Math. Phys. 108 4，（2018）1031–1081，arXiv:1606.05221 [hep-th]。[87] A. Ashmore、X. De La Ossa、R. Minasian、C. Strickland-Constable 和 E. E. Svanes，《异质弦超势产生的有限变形：全纯陈-西蒙斯与L_∞ 代数》，《高能物理学杂志》10（2018）179，arXiv:1806.08367 [hep-th]。[88] M. Grana、R. Minasian、M. Petrini 和 A. Tomasiello，《广义卡拉比-丘流形产生的超对称背景》，《高能物理学杂志》08（2004）046，arXiv:hep-th/0406137。[89] A. Ashmore、C. Strickland-Constable、D. Tennyson 和 D. Waldram，《广义化 G_2几何：内合性、矩映射与模空间》，《高能物理学杂志》01（2021年）158，arXiv:1910.04795 [hep-th]。[90] S.-T. Yau，《关于紧 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge-Amp´ère 方程，I》，《纯粹与应用数学通讯》31 3，（1978）339–411。[91] L. Bedulli 和 L. Vezzoni，《关于反常流的稳定性》，Math. Res. Lett. 29 2，（2022）323–338，arXiv:2005.05670 [math.DG]。[92] D. Nemeschansky 和 A. Sen，《卡拉比–丘流形上超对称 σ 模型的共形不变性》，Phys. Lett. B 178（1986年）365–369。[93] K. Becker、M. Becker 和 D. Robbins，《弦修正时空与 SU(N) 结构流形》，《核物理B》898（2015）715–735，arXiv:1503.04237 [hep-th]。[94] M. Headrick 和 T. Wiseman，《里奇流与黑洞》，Class. Quant. Grav. 23（2006年）6683–6708，arXiv:hep-th/0606086。[95] C. Doran、M. Headrick、C. P. Herzog、J. Kantor 和 T. Wiseman，《第三德尔佩佐曲面上的数值 Kähler–Einstein 度量》，Commun. Math. Phys. 282（2008）357–393，arXiv:hep-th/0703057。[96] A. Adam、S. Kitchen 和 T. Wiseman，《寻找一般定常真空黑洞的数值方法》，Class. Quant. Grav. 29（2012）165002，arXiv:1105.6347 [gr-qc]。

[97] G. Holzegel、T. Schmelzer 和 C. Warnick，《连接 Taub–Bolt 与 Taub–NUT 度量的里奇流》，《经典与量子引力》24 24，（2007年11月）6201。[98] D. Garfinkle 和 J. Isenberg，《里奇流中的临界行为》，arXiv:math/0306129。[99] G. Holzegel、T. Schmelzer 和 C. Warnick，《双轴 Bianchi IX 度量的里奇流》，arXiv:0706.1694 [hep-th]。[100] D. De Biasio、J. Freigang、D. Lust 和 T. Wiseman，《爱因斯坦–麦克斯韦理论与 Reissner-Nordstr¨om 黑洞的梯度流》，arXiv:2210.14705 [hep-th]。[101] T. Wiseman，《静态与定常黑洞的数值构造》，第 233–270 页。剑桥大学出版社，2012 年。arXiv:1107.5513 [gr-qc]。[102] V. Jejjala、D. K. Mayorga Pena 和 C. Mishra，《卡拉比–丘度量的神经网络近似》，《高能物理学杂志》08（2022）105，arXiv:2012.15821 [hep-th]。[103] N. Afkhami-Jeddi、A. Ashmore 和 C. Cordova，《卡拉比–丘共形场论与随机矩阵》，《高能物理学杂志》02（2022）021，arXiv:2107.11461 [hep-th]。[104] A. Ashmore、L. Calmon、Y.-H. He 和 B. A. Ovrut，《卡拉比–丘度量、能量泛函与机器学习》，arXiv:2112.10872 [hep-th]。[105] M. Larfors、A. Lukas、F. Ruehle 和 R. Schneider，《学习卡拉比–丘空间的大小与形状》，arXiv:2111.01436 [hep-th]。[106] M. Larfors、A. Lukas、F. Ruehle 和 R. Schneider，《完全交与 Kreuzer–Skarke 卡拉比–丘流形的数值度量》，《机器学习：科学与技术》3 3，（2022）035014，arXiv:2205.13408 [hep-th]。[107] P. Berglund、G. Butbaia、T. H¨ubsch、V. Jejjala、D. Mayorga Pe˜na、C. Mishra 和 J. Tan，《机器学习得到的卡拉比–丘度量与曲率》，arXiv:2211.09801 [hep-th]。[108] M. Gerdes 和 S. Krippendorf，《CYJAX：使用 JAX 处理卡拉比–丘度量的软件包》，arXiv:2211.12520 [hep-th]。[109] A. Ashmore、R. Deen、Y.-H. He 和 B. A. Ovrut，《机器学习线丛联络》，Phys. Lett. B 827（2022）136972，arXiv:2110.12483 [hep-th]。