arXiv:2302.06653v1 [cs.DM] 13 Feb 2023

时序图中的快照不相交性

Allen Ibiapina

Ana Silva

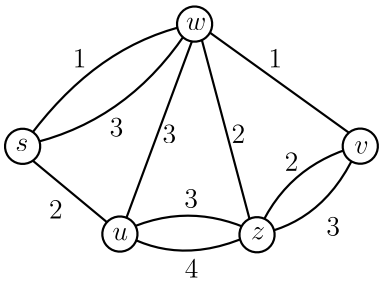
ParGO Group - 并行、图与优化 数学系 - 科学中心
塞阿拉联邦大学，巴西

摘要

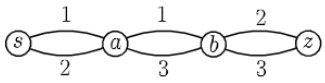
在时序图研究中，只有遵循时间流的路径才具有相关性。在此背景下，多年来人们提出了许多游走不相交性的概念，并对门格尔定理的有效性以及相关问题的复杂度进行了研究。本文引入并研究一种仅依赖于时间的不相交性类型。如果两条游走在同一个快照（也称为时间步）中均未被激活，则称它们为 $snapshot\ disjoint$。随后，我们定义了相关的路径问题和割问题，并证明当以解的规模为参数时，它们是 W[1]-难的且可在 XP 时间内求解。此外，根据 Kempe、Kleinberg 和 Kumar 在其开创性论文（STOC' 2000）中给出的门格尔图定义，我们将 $Mengeriangraph\ for\ time$ 定义为一种图 G，其无法构成一个门格尔定理在快照不相交性背景下不成立的例子。随后，我们用禁用结构对其进行刻画，并给出一个多项式时间识别算法。最后，我们还证明：给定一个时序图（G, λ）以及一对顶点 $s, z \in V$（G），判定是否至多有 h 条重边能够将 s 与 z 分隔开是 NP 完全的。

1 引言

时序图可以描述为随时间变化的图。这类对象可以通过不同方式建模，通常取决于所考虑的应用，并且在文献中有许多名称，例如动态网络 [19], 时序网络 [9], 时变图 [4], 等。有关综述，请参阅 [9, 14]。本文将时序图视为一对 (G, λ)，其中 G 是一个多重图（下文简称图），而 λ 是一个函数，称为时间函数，它将每条边与一个离散标签关联起来，用以指明该边何时激活。值 $\max_{e \in E(G)} \lambda(e)$ 是



(a) 时序图生命周期为4。



(b) 对于点对 s, z，其割必须大于快照不相交路径的数量。

图 1：示例。

称为生命周期，记作 τ。此外，图 G 称为基图。图1a给出了一个示例。

许多实际问题都可以用时序图建模（参见 [9]，其中汇集了许多有趣的实际例子），而最常见的问题包括与时序游走和连通性有关的问题。时序游走是遵循时间流的游走；为简单起见，我们将其表示为顶点和时间步组成的序列。例如，在图1a中，序列 $(w, 2, z, 2, v, 3, z, 4, u)$ 是 w 和 u 之间的时序游走（也称为时序 w, u-游走）。时序路径则定义为内部顶点各不相同的时序游走。因此，前面提到的时序 w, u-游走不是路径，而游走 $(w, 2, z, 4, u)$ 是一条时序路径。此外，有些作者只研究边在严格递增的时间点激活的游走和路径；在这种情况下，$(s, 1, w, 2, z, 3, v)$ 是一条有效的时序 s, v-路径，而 $(s, 2, u, 3, z, 3, v)$ 则不是。为与之区分，我们称边在严格递增的时间点激活的游走/路径为严格游走/路径，称边在非递减的时间点激活的游走/路径为非严格游走/路径。

与经典图论不同，在处理时序图中的游走和路径时，基于游走定义的问题并不总是等同于基于路径定义的问题。例如，参见 [1, 5, 7, 10]。本文研究的问题并非如此，因此我们交替使用“游走”和“路径”这两个术语。

连通性问题关注的是网络的鲁棒性，具体体现为了解从一个顶点到另一个顶点有多少种相互独立（或不相交）的路径，以及破坏这些连接有多容易。在本文中，我们引入了一种依赖网络时间特性的新型鲁棒性概念。为了更好地理解这些概念，请考虑以下情景。假设时序图（G，λ）描述了一个通信网络。由于攻击、停电、维护等原因，该网络可能会在某个时间步中断所有通信。因此，衡量此类网络鲁棒性的一个有效指标，可以是为了破坏一对

顶点之间的所有可能连接，通信必须被中断的最少时间步数。该指标越高，意味着网络越不容易因这类中断而失效，因此被认为越具鲁棒性。例如，在图1a中，如果时间步2和3发生中断，那么顶点 s 将无法再向 z 转发消息，但仍可以通过路径（z，1，w，1，v）向 v 转发消息。

为了对此类情形进行建模，我们称两条时序 s,z-路径 P 和 Q 快照不相交，如果在任意给定的时间步，P 和 Q 中至多有一条正在经过任何边。例如，在图1a中，路径 $(s,1,w,1,v,2,z)$ 和 $(s,3,w,3,u,3,z)$ 是两条快照不相交的时序 s,z-路径。我们还称时间步集合 S 为快照 s,z-割，如果每条时序 s,z-路径都使用一条在某个 $i \in S$对应的时间步 i 激活的边。例如，在图1a中，$S=\{2,3\}$是一个快照 s,z-割。由此定义以下问题。

$\leqslant$ h-快照 s, z-割
输入：时序图 (G,λ)、顶点 $s,z \in V(G)$ 以及整数 h。问题：在 (G,λ) 中是否存在大小至多为 h 的快照 s,z-割?

$\geq k$-SNAPSHOT DISJOINT TEMPORAL s,z-PATHS
输入。一个时序图（G,λ）、一对顶点 $s,z \in V$（G），以及一个正整数 k。

问题。(G,λ)中是否存在一组大小至少为 k 的快照不相交时序 s,z-路径?

我们证明，分别以 h 和 k 为参数时，这两个问题都是 W[1]-困难的，而且这是最优结果，即它们也属于 XP。对于 SNAPSHOT s,z-CUT，根据定义以及我们可以在 XP 时间内测试所有可能的割这一事实（具体而言，时间为 $O(\tau^h)$），其 XP 算法很容易得出；而 SNAPSHOT DISJOINT TEMPORAL s,z-PATHS 的算法则复杂得多，它采用了一种与在 DAG [17] 中寻找 k 给定顶点对之间的 k 条顶点不相交路径（也称为 k-LINKAGE PROBLEM）时所用技术相似的方法。正如我们将在相关工作中看到的，这是首个此类结果；此前定义的所有不相交性概念，要么使相关路径问题可在多项式时间内求解，要么导致参数化 NP 完全（即，当 k取固定值时为 NP 完全）。

经典图论中的一个著名结果告诉我们，在图 G 中，对于任意一对 $s,z \in V(G)$，内部顶点不相交的s,z-路径的最大数量等于 s,z-割的最小规模（移除这些顶点后，所有 s,z-路径都会被破坏）。这就是著名的门格尔定理，它对无向图和有向图都成立，对边不相交路径和边割也同样成立。将这些概念应用到时序图中时，自然会想知道门格尔定理是否也有相应的版本。在我们的情境中，答案是否定的，图1b中的例子就说明了这一点。请注意，任意两条时序 s,z-路径都会在某个时间步相交，但不存在大小为 1 的快照 s,z-割。事实上，$(s,1,a,1,b,2,z)$没有使用在时间步 3 激活的边，$(s,2,a,3,b,3,z)$没有使用时间步 1 的边，而 $(s,1,a,1,b,3,z)$没有使用时间步 2 的边。

在其开创性论文中，Kempe、Kleinberg 和 Kumar [13], 在顶点不相交时序路径的背景下，将满足

无论如何选择时间函数，门格尔定理都成立的图定义为具有门格尔性质的图。随后，他们刻画了限制为简单图（每条多重边的重数均为 1）时的这类图；最近，他们的结果被推广到允许多重图的情形 [11]。这里，如果对于任意时间函数 λ 以及任意 $s, z \in V(G)$，图 G 在时间方面具有门格尔性质，则快照不相交时序 s, z-路径在 (G, λ) 中的最大数量等于快照s, z-割的最小大小。换言之，对于基图为 G 的时序图，门格尔定理的快照不相交版本始终成立。接下来，我们给出如下刻画。m-拓扑子式的正式定义见第 2 节；但目前只需知道，在细分边e时，所得边的重数与 e 相同。

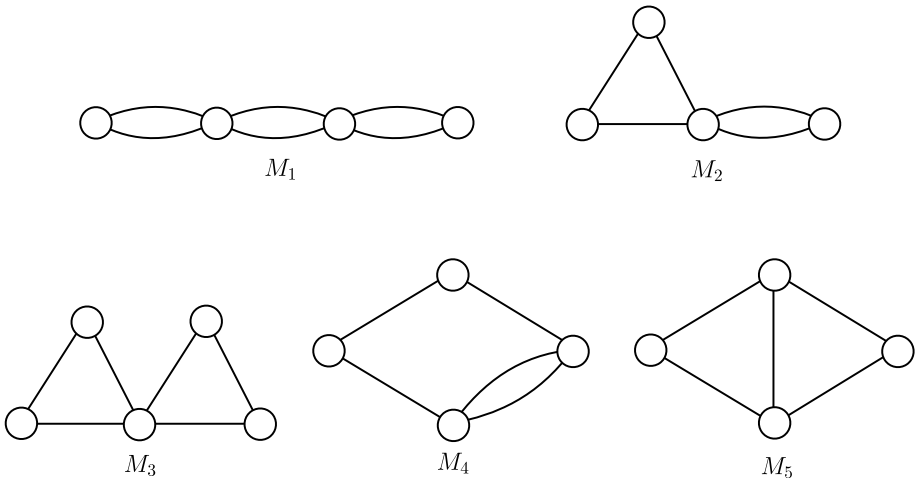


图 2：集合 $\mathcal{M}$ 中的图。

定理 1. 设 G 是一个图。那么，当且仅当 G 不包含图 2 中任何图作为 m-拓扑子式时，G 具有时间上的门格尔性质。此外，我们可以在多项式时间内判定 G 是否具有时间上的门格尔性质。

最后，为了填补一个与多重边不相交时序路径相关的开放问题（其定义稍后给出），我们在第6节证明，即使时序图的生命周期等于 2，相关的割问题仍然是 NP 完全的。

相关问题。由于快照不相交性是一个新提出的概念，目前尚无相关研究成果。因此，我们请读者参阅时序图中有关门格尔相关概念的大量研究成果。在这一背景下，Berman 证明了门格尔定理的顶点不相交版本并不成立 [3]。此后，许多论文研究了相关问题的复杂度 [13, 20], ，以及新的结构性概念，例如门格尔图的定义 [13, 11], ，还有针对时序顶点不相交版本的改编 [16, 10]。由于我们的问题与边连通性的关系更为密切，因此我们不再

不再详细评论顶点连通性的结果，而是请读者参阅 [10] ，了解这些结果的概述。接下来，我们将介绍边相关概念及已有结果。这些内容总结于表1中。

	Non-strict		Strict	
	$\geq k$-Walks	$\leq h$-Cut	$\geq k$-Walks	$\leq h$-Cut
Multiedge	NPc [3], 若 G有向, 即使对于 $k = \tau = 2$	$\tau = 2$的NPc（定理 11）	$\tau = 5$ [12]的NPc 以及 $k = 2$ [15]	$\tau = 4$ [2]的NPc 以及 W[1] 对于 h [8]
Edge	多项式时间 [3]		多项式时间 [16]	
Snapshot	W[1] 对于 k （定理 6） XP，适用于 k (定理 5)	W[1] for h (定理 7) XP，适用于 h (定理 4)	Open	
Node dep.	Open		多项式时间 [16]	

表1：最左侧一列指定了不相交的类型。上方的 τ 表示时序图的生命周期， k 表示路径数量，h 表示割的大小；NPc 表示 NP 完全性，W[1] 或 XP 表示以解的大小为参数时的 W[1]-困难性或 XP 结果。灰色单元格中的结果在本文中得到证明。

一组时态 s, z-游走若不共享任何边，则称为边不相交；若不共享任何重边，则称为多重边不相交。例如，在图1a中，路径$(s, 1, w, 2, z)$和$(s, 3, w, 3, u, 3, z)$边不相交，但不满足多重边不相交，因为它们共享端点为 sw的重边。若一组（多重）边与每条时态 s, z-游走都相交，则称其为时态（多重）边 s, z-割。例如，在图1a中， sw 和 su 构成一个多重边 s, z-割；但若要构造边 s, z-割，则必须选取端点为 sw的两条边。有些研究不使用多重图，而是使用简单图，并配合一个时间函数，为每条边分配一个由有限个正整数组成的集合。在这种情况下，我们这里的边称为时态边，而这里的多重边则对应于基图中的简单边。

在 [3], Berman 的研究中表明，非严格时序路径的边问题是多项式时间可解的，并且判定是否存在至少 k 条边不相交的时序路径是 NP 完全的，无论 G 是有向还是无向；如果 G 是有向的，那么即使 $k = \tau = 2$，这一结论仍然成立。据我们所知，迄今尚未有关于与重边相关的割问题的研究结果。通过对 [20], 中证明的简单修改，我们在第6节给出了多重边割问题为 NP 完全的证明。我们的证明同样适用于 G 为有向多重图的情形。对于严格路径，这些问题的复杂性可直接由关于有界长度路径的问题的结果 [2, 8]得出。此外， [16]中已证明，与边不相交路径相关的严格问题是多项式时间可解的。我们指出，在表1中出现的所有问题中，门格尔定理仅适用于严格和非严格情形下的边不相交路径 [3, 16],以及下文定义的节点出发不相交严格路径。

另一个相关概念是 [16] 中提出的节点出发不相交。给定生命周期为 τ 的时序图 (G, λ)，如果一组严格时序 s, z-游走中的任意两条路径都不会在同一时间步离开同一个顶点 u ，那么这组游走就是节点出发不相交的。例如，在图1a中，$(s, 1, w, 2, z)$ 和 $(s, 3, w, 3, u, 3, z)$ 是节点

出发不相交的。此外，如果所有严格时序 s,z-游走都包含一条在时间 t 从 u 离开的边，那么集合 $S \subseteq V(G) \times [\tau]$ 就是一个节点出发 s,z-割，其中 $(u,t) \in S$。例如，在图1a中，集合 $S = \{(s,1),(s,2),(s,3)\}$ 是一个节点出发 s,z-割。在 [16]，中，作者证明，节点出发不相交的 s,z-游走的最大数量等于节点出发 s,z-割的最小规模。尽管作者没有讨论相关问题的复杂度，但他们的证明给出了一个多项式时间算法，因为该证明通过构建流网络，并证明所求值等价于应用著名的最大流最小割定理来完成。据我们所知，他们的结果尚未在非严格情形下得到研究。

本文结构如下。第2节介绍定义、术语和一些基本结果。第3节介绍我们的 XP 算法。第4节证明，分别以 h 和 k 为参数时，$\leq h$-SNAPSHOT s,z-CUT 和 $\geq k$-SNAPSHOT DISJOINTTEMPORAL s,z-PATHS 是 W[1]-困难的。第5节刻画门格尔图。最后，在第6节证明 $\leq h$-多重边割是 NP 完全问题，并在第7节给出总结。

2 定义和术语

给定满足 $j \geq i$ 的正整数 $i,j \in \mathbb{N}$，我们用 $[i,j]$ 表示集合 $\{i,i+1,\ldots,j\}$，用 $[j]$ 表示集合 $\{1,\ldots,j\}$。

图是一个三元组 (V,E,f)，其中 V 和 E 是有限集合，分别称为顶点集和边集；f 是一个函数，它为每个 $e \in E$ 关联 V 中的一对元素 xy，其中 $x \neq y$。我们称边 e 与 x 和 y 关联，称 x,y 为 e 的端点，并称 e 连接 x 和 y。本文其余部分省略 f，改为直接称 e 的端点。我们还将二元组 xy 称为多重边，端点为 xy 的边的数量称为多重边 xy 的重数。如果每条边的重数均为 1，则称 G 为简单图。我们用 $U(G)$ 表示由 G 将所有多重边的重数减为 1 后得到的简单图。有关图论的其他基本定义，请参见 [18] 。

给定一个图 G 和一个顶点集 $Z \subseteq V(G)$，对 Z 的识别是指从 $G-Z$ 出发，通过添加一个新顶点 z，并对每条端点为 $z'u$（其中 $z' \in Z$ 和 $u \notin Z$）的边 e添加一条端点为 zu的边 e'，得到的图。通过对一条端点为 uv的边 e 进行细分，从 G 得到的图 G' 具有顶点集 $V(G) \cup \{z_e\}$，边集为 $E(G-e) \cup \{e',e''\}$，其中 e' 的端点为 uz_e，而 e'' 的端点为 z_ev。最后，通过对一条多重边 xy 进行 m-细分，从 G 得到的图，是将所有端点为 xy 的边细分后，再识别新顶点所得的图。定义示例见图 3。m-细分的定义最早见于 [11]。给定一个图 H，若 G 含有一个可由 H的 m-细分得到的子图，则称 H是 G的 m-拓扑子式。

时序图是一个二元组 (G,λ)，其中 G 是一个图，且 $\lambda\colon E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$。

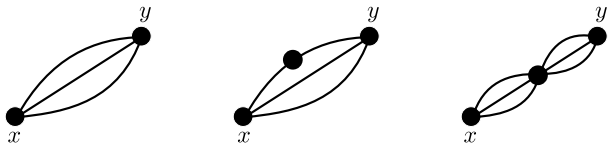


图 3：从左到右：多重边 xy、端点为 xy 的边的细分，以及 xy 的 m-细分。

根据上下文，我们将 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 的元素称为时间步。如果边 e 满足 $\lambda(e) = \alpha$，我们就说 e 在时间步α处处于激活状态或出现。(G, λ) 中的时序 x_1, x_q-游走是一个序列 P，它交替包含顶点和边 $(x_0, e_1, x_1, \ldots, e_q, x_q)$，并满足对于每个 $i \in [q]$，e_i 都是连接x_i和 x_{i-1}的一条边，且 $\lambda(e_1) \leq \cdots \leq \lambda(e_q)$。如果对于每个 i，$j \in [q]$ 都满足$i \neq j$，我们就称这样的时序游走为时序路径。此外，我们定义$V(P) = \{x_1, \ldots, x_q\}$和 $E(P) = \{e_1, \ldots, e_q\}$。对于我们的目的，可以假设在给定时间步处于激活状态的子图是简单的，也就是说，如果 e 和 e' 的两个端点都是 xy，那么 $\lambda(e) \neq \lambda(e')$。这一假设使我们可以将路径定义为由顶点和时间步组成的序列 $(x_0, t_1, x_1, \ldots, t_{q-1}, x_q)$，其中对于每个 $i \in [q]$，都存在一条边连接 $x_i x_{i-1}$，且该边在时间步 t_i处于激活状态。(G, λ) 的生命周期记为 $\tau(\lambda)$，它是满足在该时间步有一条 G 中的边处于激活状态的最大整数。对于每个时间步 $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，$(G, \lambda)$ 的第 i 个快照是 G 的子图，定义为 $H = (V(G), \lambda^{-1}(i))$。

设 (G, λ) 是一个生命周期为 τ 的时序图。此外，设 $s, z \in V(G)$ 是 G 中的顶点，Q, J 是时序 s, z-路径。如果 $\lambda(E(Q)) \cap \lambda(E(J)) = \emptyset$，则称 Q 和 J 快照不相交。若每条时序 s, z-路径都经过一条在 S 中某个时间步激活的边，则称子集 $S \subseteq [\tau]$ 为快照 s, z-割。我们用 $sp_{G,\lambda}(s, z)$ 表示快照不相交时序 s, z-路径的最大数量，用 $sc_{G,\lambda}(s, z)$ 表示快照 s, z-割的最小大小。注意，如果上述定义以时序路径为基础，则这些参数不会改变。若对于 $E(G)$ 上的每个时间函数λ，以及每个 $s, z \in V(G)$、$s \neq z$，都有 $sp_{G,\lambda}(s, z) = sc_{G,\lambda}(s, z)$，则称图 G 具有（时间上的）门格尔性质。以下结果将在后文中用到，证明见附录 A。

命题 2. 如果 G 具有非门格尔型，那么 G 的一个 m-细分也具有非门格尔型。

命题 3. 对每个 $H \subseteq G$，G 具有门格尔性质，当且仅当 H 具有门格尔性质。

3 正面结果

本节中，我们分别给出针对 SNAPSHOT s, z-CUT 和 SNAPSHOT DISJOINT TEMPORAL s, z-PATHS 的 XP 算法。根据第 4 节的结果，除非 FPT = W[1]-困难，否则从参数化复杂性的角度来看，XP 算法已是最佳选择。第一个算法相当简单，采用常规方法，测试所有可能的割。

定理 4. 给定一个生命周期为 τ 的时序图 (G, λ)、一个正整数h和 $s, z \in V(G)$，我们可以在 $O(\tau^h \cdot (|V(G)| + |E(G)|))$ 时间内求解 $\leq h$-SNAPSHOT s, z-CUT。

下一个算法复杂得多，并且使用了与在有向无环图 [17] 中寻找给定顶点对之间的不相交路径时所采用的技术类似的方法。

定理 5. 给定一个时序图（G, λ）、顶点 s、$z \in V$（G）以及一个正整数 k，我们可以在时间 O（m^k）内求解 SNAPSHOT DISJOINT TEMPORAL s, z-PATHS，其中 $m = |E$（G）$|$。

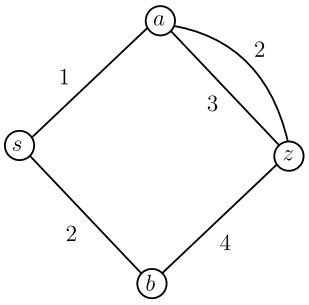
证明。我们构造一个有向图 D，其顶点为 s^* 和 z^*，使得 $|V$（D）$| = O$（m^k），并且 D 中存在一条 s^*, z^*-路径，当且仅当（G, λ）中存在 k 条快照不相交的时序 s, z-路径。

有向图 D 的顶点集等于由 G 的边构成的 k-元组，以及顶点 s 和 z；形式化地说，V（D）$\subseteq F^k$，其中 $F = E$（G）$\cup \{s, z\}$。顶点 s^* 被设为等于（$s, \ldots, s$），而顶点 z^* 被设为等于（$z, \ldots, z$）。V（D）的每个维度表示所需的不相交路径中的一条路径，并且一组快照不相交的时序 s, z-路径 $P_1, \ldots, P_k$ 将如前所述，由 G 中的一条 s^*, z^*-路径 P 表示。因此，s^* 表示每条时序 s, z-路径的起点，而 z^* 表示其终点。于是，当 P 遍历 D 的一条边时，我们希望其中一条 k 路径也遍历一条边。由于我们希望允许每一步 P 中只有一条路径向 z 靠近，因此，仅当 α 和 β 中恰好有一个位置不同时，才会存在一条从 $\alpha \in V$（D）到 $\beta \in V$（D）的边。不仅如此，我们还希望在 P 的每一步中，向 z 靠近的路径 P_i 是其最后遍历的边在所有 P_i 中出现得最早的那一条路径。下一段将形式化地构造有向图 D。

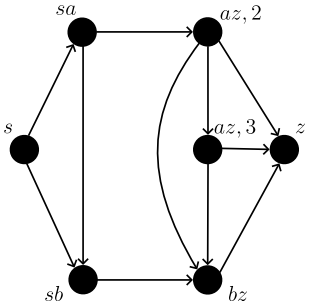
如前所述，令 $F = E(G) \cup \{s, z\}$。在构造过程中，我们将参照图4和图5。由于我们希望避免在同一个快照中同时遍历相交的路径，因此我们只考虑 F^k 中其 G 的所有边均出现在不同快照中的元素。事实上，如果 $k = 2$，并且例如允许存在顶点 (e, e') 使得 $t = \lambda(e) = \lambda(e')$，那么这意味着所构造的路径 P_1 和 P_2 在时间步 t 相交。因此，我们将 V 定义如下。注意，这意味着在图5中，顶点 $\{(e, e) \mid e \in E(G)\} \cup \{(az_2, sb), (sb, az_2)\}$ 不存在于 $V(D)$ 中，其中 az_2 表示一条端点为 az、在时间步2激活的边。

$$V = \{(u_1, \ldots, u_k) \in F^k \mid \forall i,\ j \in [k] \text{ 当 } i \neq j \text{ 时，我们有 } \lambda(u_i) \neq \lambda(u_j) \text{ 或 } u_i = u_j \in \{s, z\}\}$$

现在，我们定义 D 的边集。为此，我们首先构造一个辅助图 M，其顶点集等于 F；请参见图 4b 了解构造过程。首先，我们希望在 D 中遍历一条边，能够转化为在 (G, λ) 中进行有效遍历。因此，对于每一对 $e, f \in F$，仅当在 (G, λ) 中的某条时序 s, z-路径上可以先后经过 e 和 f 时，才将一条从 e 到 f 的边加入 M。形式化地说，在以下情形中加入 ef：对每个 $e \in E(G)$，以及每个 $f \in E(G)$



(a) 时序图示例 (G, λ)。



(b) 集合 M 上的辅助图 $F = E(G) \cup \{s, z\}$。

图 4：定理 5 中构造的示例。

与 e 相邻，且满足 $\lambda(e) \leq \lambda(f)$；对于 $e = s$，以及每个与 s 关联的 $f \in E(G)$；以及对于每个与 z 关联且满足 $f = z$ 的 $e \in E(G)$。

最后，正如前文所述，我们希望：对于 D 中一条 s^*, z^*-路径的每次边遍历，在 (G, λ) 中，朝 z 靠近的路径应当是最后使用的边在所有其他路径中最早的那条。为此，我们还定义 $\lambda(s)$ 等于 0，并定义 $\lambda(z)$ 等于 $\tau + 1$，其中 τ 等于 (G, λ) 的生命周期。直观来说，这意味着我们总是优先离开 s；一旦我们在任意维度上到达 z，就再也无法离开 z。因此，给定顶点 $\alpha = (u_1, .., u_k) \in V(D)$，当且仅当满足以下条件时，我们从 α 向 $\beta \in V(D)$ 添加一条边：

恰好在一个位置（i）与 α 不同；

满足 $\lambda(u_i) \leq \min_{j \in [k]} \lambda(u_j)$；并且

令 u_i' 为 β中第 i个位置上的值，则 $u_i u_i'$ 是一次有效移动，即 $u_i u_i' \in E(M)$。

观察图5。理解这一构造的另一种方式是：先在 D的每一行和每一列上放置 M 的副本，然后移除不属于 D的顶点，最后从第 e 行/列中移除所有离开f且满足 $\lambda(f) > \lambda(e)$的边。

现在，我们证明：在（G, λ）中存在 k 条快照不相交的时序 s, z-路径，当且仅当 D中存在一条 s^*, z^*-路径。下文中，给定一个顶点 $\alpha \in V(D)$，我们用（$a_1, \ldots, a_k$）表示与 α相关的元组。回忆一下，$s^* = (s, \ldots, s)$以及 $z^* = (z, \ldots, z)$。设 $P_1, \ldots, P_k$ 是一组（G, λ）中的快照不相交时序 s, z- 路径。对于每个 $i \in [k]$，令 $e_i^1, \ldots, e_i^{p_i}$ 为按遍历顺序在 P_i 中使用的边序列，并定义 $e_i^0 = s$ 和 $e_i^{p_i+1} = z$。通过归纳法，我们定义 D的一个顶点序列（$s^* = \alpha^1, \ldots, \alpha^q = \alpha$），它构成一条 s^*, α-路径，其中某个 α 满足以下性质：

(P) 对于每个维度 $i \in [k]$ 和每个 $\ell \in [q]$，在维度 i 中遍历的边序列是 P_i 的子路径。形式化地，通过移除 s 和重复的

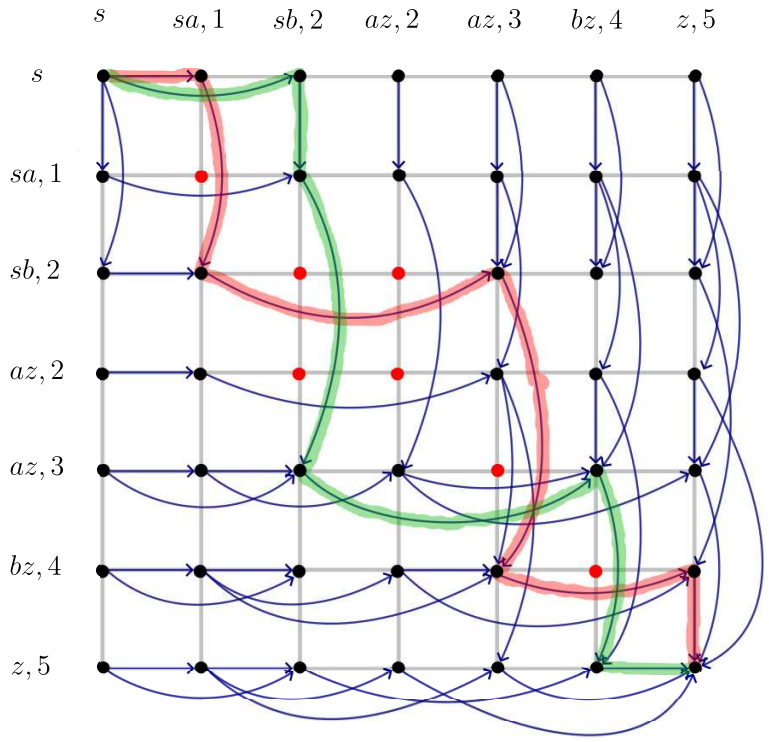


图5：与图4a中的时序图相关的有向图 D；此处使用值 $k = 2$，这意味着 $V(D) \subseteq F^2$。每行和每列都标注了 F 中的一个元素 e，以及值 $\lambda(e)$；这将有助于构造。D 的一个顶点（e, f）表示在第 e行与第 f列的交点处。图中的红点表示相关对（$row, column$）不是 D中的顶点。快照不相交的时序 s, z-路径 $P_1 = (s, 1, a, 3, z)$和 $P_2 = (s, 2, b, 4, z)$，可以通过红色或绿色的 s^*, z^*-路径获得。

从序列（$a_i^1, \ldots, a_i^q$）中选取边后，我们得到$e_i^1, \ldots, e_i^{p_i}$的一个子序列。

首先，我们定义 $\alpha_1 = s^*$；显然，性质(P)成立，因为所有路径都从 s 开始。现在假设已得到满足性质(P)的序列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$，$q \geq 1$。令 $i \in [k]$ 满足 $\lambda(a_i^q) = \min_{j \in [k]} \lambda(a_j^q)$。根据性质(P)，注意到以下情况之一成立：$a_i^q = s$，或者 a_i^q 是 P 的一条边，或者 $a_i^q = z$。若出现后一种情况，则可知 P 是 D 中的一条 s^*, z^*-路径，因为对于每个 $e \in F \setminus \{z\}$，都有 $\lambda(z) > \lambda(e)$；也就是说，只有当所有其他位置也都等于 z 时，$\lambda(z)$ 才可能是最小值。因此，假设出现其他情况之一。注意，这意味着在 P 中有一条边紧接在 a_i^q 之后，设为 e_i^ℓ。根据时序路径的定义，$\lambda(e_i^\ell) \geq \lambda(a_i^q)$；因此 $a_i^q e_i^\ell \in E(M)$。定义 α^{q+1}，使其与 α^q 相同，只是在位置 i 上用 e_i^ℓ 替代 a_i^q，并注意到 $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{q+1})$ 是 D 中的一条路径，且满足

性质(P)。

现在假设在 D、$(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)$ 中存在一条 s^*, z^*-路径。我们在 (G, λ) 中构造一组 k 快照不相交的时序 s, z-路径。为此，对每个 $i \in [k]$，令 P_i 为从维度 i（即从 $(a_i^1, \ldots, a_i^q)$）中移除 s 和 z的出现以及重复的边后）得到的边序列。由于每次转移都遵循 M，显然可知， P_i 定义了 (G, λ) 中的一条时序 s, z-路径。接下来只需证明这些路径快照不相交。反设不然，令 i, j 满足：存在边 e_i 属于 P_i，且边 e_j 属于 P_j，使得 $\lambda(e_i) = \lambda(e_j) = \ell$。令 ℓ_i 为满足 $a_i^{\ell_i} = e_i$ 的最小索引，令 ℓ_j 为满足 $a_j^{\ell_j} = e_j$ 的最小索引。根据 $V(D)$ 的定义，有 $\ell_i \neq \ell_j$。事实上， D 的任何顶点都不能包含 F 中两个 λ 值相同的元素；并且注意， $i \neq j$，因为 P_i, P_j 是不同的路径。因此，不失一般性，我们可以假设 $\ell_i < \ell_j$。注意，这意味着 $\alpha^{\ell_i - 1}$ 与 α^{ℓ_i} 仅在位置 i 上不同；此外，这也意味着 $\lambda(e_i) \leq \min_{h \in [k]} \lambda(a_h^{\ell_i - 1})$。特别地，有 $\ell = \lambda(e_i) \leq \lambda(a_j^{\ell_i - 1})$。但注意，在固定维度中， λ 的值只能递增；也就是说，由于 $\ell_i < \ell_j$，可得 $\lambda(a_j^{\ell_i - 1}) \leq \lambda(a_j^{\ell_j}) = \lambda(e_j) = \ell$。由此产生矛盾，因为在这种情况下，顶点 $\alpha^{\ell_i - 1}$ 不应被定义：它包含两个 λ 值相同的元素，即 $a_j^{\ell_i - 1}$ 和 e_i。

要完成证明，只需回想 $|V(D)| \leq (m+2)^k$，其中 $m = |E(G)|$；并且，判断 D 中两个顶点之间是否存在路径，可以在时间$O(|V(D)|^2)$内完成。因此，判断 (G, λ) 中是否存在 k 条快照不相交的时序 s, z-路径，可以在时间 $O(m^k)$内完成。 □

4 否定结果

本节证明，第 3 节所介绍的算法已是最优的，也就是说，当分别以 k 和 h为参数时，$\geq k$-SNAPSHOT DISJOINT TEMPORAL s, z-PATHS 和 $\leq h$-SNAPSHOT s, z-CUT 是 W[1]-难的。

定理 6. 当以 k为参数时， $\geq k$-SNAPSHOT DISJOINT TEMPORAL s, z-PATHS 是 W[1]-难的。

证明。我们从以 k为参数的 $\geq k$-INDEPENDENT SET 进行参数化归约。该问题的输入是一张简单图 G 和一个整数 k，问题是判断 G 是否存在一个大小至少为k的独立集。已知该问题是 W[1]-难的（例如参见 [6]）。

因此，考虑一个实例 G, k，其属于 $\geq k$-INDEPENDENT SET，并令 $|V(G)| = n$。请参阅图6以了解构造过程。首先，向 G' 中添加顶点 s 和 z。然后，对于每个 $u \in V(G)$，向 G' 中添加一条包含 $d(u)$ 条边的 s, z-路径；将这条路径记为 Q_u。现在，考虑 $E(G)$ 的任意排序 $e_1, \ldots, e_m$，并将与顶点 $u \in V(G)$ 关联的边记为 $\delta(u)$。我们可以定义 λ： $E(G') \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$，使得每个 Q_u 都是一条时序 s, z-路径，并使用 $\delta(u)$ 中边的排序。形式化地，对于每个 $u \in V(G)$，令 $\delta(u) = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}\}$，其中 $i_1 < \ldots < i_q$，并定义 $\lambda(E(Q_u))$ 等于 $\{i_1, \ldots, i_q\}$，使得 Q_u 是一条时序路径。

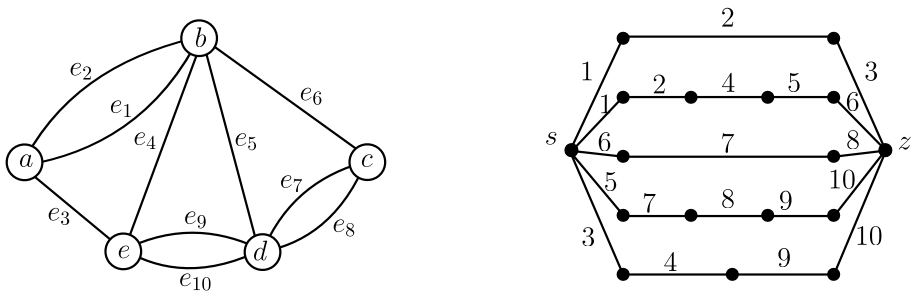


图6：左侧为图 G，右侧为构造出的时序图（G', λ）。在 G'中，路径 P_a, P_b, P_c, P_d, P_e 按从上到下的顺序展示。

由于篇幅所限，正确性证明见附录C。

□

现在，我们证明割问题的类似结果。

定理7. $\leq h$-SNAPSHOT s, z-CUT 在以 h为参数时是 W[1]-困难的。

证明。我们从 MULTICOLORED k-CLIQUE进行归约，该问题以 k为参数时已知是 W[1]-困难的 [6]。该问题的输入包括一个简单图G、一个整数 k，以及将 $V(G)$划分为 k 个独立集（或者，一个适当的 k-着色）；问题是判断 G 是否包含一个大小为 k的（多色）团。因此，设 G 为一个图，$\{X_1, \ldots, X_k\}$ 为 G的一个适当的 k-着色。必要时，通过添加人工顶点和边，我们可以假设对于每一对 i, $j \in [k]$，X_i 与 X_j 之间的边数都等于某个值 m。因此，对于 $i, j \in [k]$, $i \neq j$，将这些边的集合记为$E_{i,j} = \{e_1^{i,j}, \ldots, e_m^{i,j}\}$。作此假设是为了使表述更简单。

现在，对于每个 $i, j \in [k]$, $i \neq j$，我们构造一个构件，记为 $F_{i,j}$。请参见图 7 以了解构造过程。首先，向 $F_{i,j}$ 中添加顶点集合$V_{i,j} = \{v_0^{i,j}, \ldots, v_{2m}^{i,j}\}$，使其中前 $m+1$ 个顶点构成一条重数为m的路径，而后面的 $m+1$ 个顶点构成一条重数为 1 的路径。形式上，对于每个$\ell \in \{0, \ldots, m-1\}$，添加 m 条边，其端点为 $v^i_{,j}v^{i,j}_{\ell+1}$。此外，对于每个 $\ell \in \{m, \ldots, 2m-1\}$，添加 1 条边，其端点为 $v^i_{,j}v^{i,j}_{\ell+1}$。接下来，对于每个 $\ell \in [m]$，添加顶点 $w^i_{,\ell}{}^j$，并用一条包含 $m-1$ 条边的路径将该顶点与 $v^i_{,\ell}{}^j$ 相连，该路径记为 $P^i_{,\ell}{}^j$。我们称构件中的顶点 $w^i_{,\ell}{}^j$ 与 $E_{i,j}$的边 $e^i_{,\ell}{}^j$ 相关联。时间函数将在后文定义。

现在，我们完成时序图的构造。为此，取所有图的并集$F_{i,j}$并合并所有顶点 $v^i_{,0}{}^j$，将所得顶点称为s；再合并所有顶点 $v^i_{,2m}{}^j$，将所得顶点称为 z。此外，对于每个i、$j \in [k]$、$i \neq j$和 $\ell \in [m]$，我们在 $w^i_{,\ell}{}^j$ 与 z之间添加两条边。将所得图记为 G'，并将集合 $\{w_\ell^{i,j} \mid i, j \in [k], i \neq j, \ell \in [m]\}$记为 W。注意，G' 包含 O 个（$k^2 \cdot m$）顶点和边。

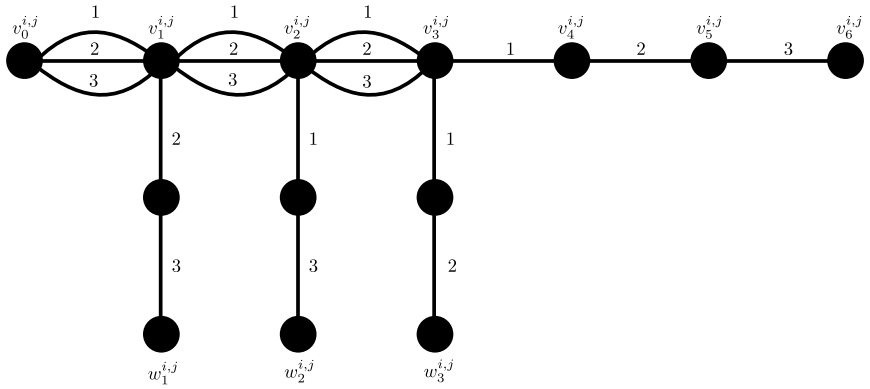


图 7：$F_{i,\ j}$ 带有 λ 的标签，其中 $m = 3$ 和 $\Delta_{i,\ j} = \{1, 2, 3\}$。

现在我们定义 λ。思路是让每个$F_{i,\ j}$ 在各自专属的时间窗口内激活。形式上，对于每一对 $i,\ j \in [k]$，定义 $\Delta_{i,\ j} = [f_{i,j} + 1, f_{i,j} + m]$，使得当且仅当 $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ 时，$\Delta_{i,\ j} \cap \Delta_{i',\ j'} = \emptyset$。现在，考虑满足 $i \neq j$ 的 $i,\ j \in [k]$。对于每个 $\ell \in \{0, \ldots, m-1\}$，我们以这样的方式定义 λ：$\Delta_{i,\ j}$中的每个值都会出现在一条端点为 $v^{i,\ j}_{\ell}$、$v^{i,\ j}_{\ell+1}$的边上。此外，对于每个 $\ell \in [m]$，令 $\lambda(v^{i,\ j}_{m+\ell}) = \{f_i + \ell\}$，并将 $\lambda(E(P^{i,\ j}_{\ell+1})$ 定义为等于 $\Delta_{i,\ j} \setminus \{f_{i,j} + \ell\}$，且使得 $P^{i,\ j}_{\ell}$ 构成一条时序 $v^{i,\ j}_{\ell}$、$w^{i,\ j}_{\ell}$-路径。最后，唯一尚未标记的边是z 与类型为 w 的顶点之间的边。对于此类边，我们预留一个大小为 $n = |V(G)|$ 的时间窗口，记作 Δ_V；该集合中的任意时间步都晚于迄今用于定义 λ 的所有时间步。此外，我们为每个顶点 $v \in V(G)$ 关联一个时间步 $t_v \in \Delta_V$。令 $w^{i,\ j}_{\ell} \in W$，并回想该顶点关联的是 $e^{i,\ j}_{\ell} \in E(G)$。假设 $e^{i,\ j}_{\ell}$ 的端点为 xy，并设 G' 中端点为 $w^{i,\ j}_{\ell} z$ 的两条边在时间步 $\{t_x, t_y\}$ 激活。

现在，我们证明：G 有一个大小为 k 的团，当且仅当(G', λ)有一个大小至多为 $\binom{k}{2} + k$的快照 s, z-割。首先考虑 C 中一个大小为k的团 G，并令 $\{e^{i_1,j_1}_{\ell_1}, \ldots, e^{i_a,j_a}_{\ell_a}\}$ 为 G 中连接 C各顶点的边的集合。注意，由于 C 每个部分中都有一个顶点，因此我们得到$a = \binom{k}{2}$。定义$S = \{f_{i_b,j_b} + \ell_b \mid b \in \{1, \ldots, a\}\} \cup \{t_v \mid v \in C\}$。我们证明 S 是一个快照s, z-割。反证，假设 P是一条不经过 S的时序 s, z-路径，也就是说，满足 $\lambda(E(P)) \cap S = \emptyset$。由于$a = \binom{k}{2}$ 以及所有与s 关联的边在时间步$\bigcup_{i,j \in [k], i \neq j} \Delta_{i,j}$均处于激活状态，我们可以将 $b \in [a]$ 定义为 P中第一条边所对应的索引，即 P从F_{i_b,j_b}中的一条边开始，设该边在时间步$f_{i_b,j_b} + \ell_b$处于激活状态。注意，值$f_{i_b,j_b} + \ell_b$ 位于包含在F_{i_b,j_b}中的时序s, z-路径上，并且它也将 s 与每个$\ell \in [m] \setminus \{\ell_b\}$对应的 $w^{i_b,\ j_b}_{\ell}$ 分隔开。因此，P必定以包含在F_{i_b,j_b}中的时序 $s, w^{i_b,\ j_b}_{\ell_b}$-路径开始。然而，由于 $e^{i_b,\ j_b}_{\ell_b}$与团中的顶点关联，设为 x和 y，因此我们有 P使用时间步 t_x或 t_y；这与 $\{t_x, t_y\} \subseteq S$矛盾。

现在，假设 S是(G', λ)中的一个最小快照 s, z-割，且其大小至多为$\binom{k}{2} + k$。令 $V_S = \{x \in V(G) \mid t_x \in S\}$。我们证明 V_S是 G 中一个大小为 k的团。用 O 表示满足 $\mid i, j \in [k], i < j\}$的数对 $\{(i, j)$的集合。若对于某个 $\ell \in [m]$，$\Delta_{i,\ j} \cap S = \{f_{i,j} + \ell\}$，则称$(i, j) \in O$ 是开放的；并称 $e^{i,\ }{}_{,\ell}{}^{j}$ 为(i, j)的开放边。以下几个简单事实将会用到：

1. 对于每个 $i, j \in [k], i \neq j$，都有 $\Delta_{i,j} \cap S \neq \emptyset$：这是因为存在一条时序 s, z-路径，仅使用 $\Delta_{i,j}$中的时间步；2. 若 $\ell \in [m]$ 满足 $\Delta_{i,j} \cap S = \{f_{i,j} + \ell\}$，则 $\{x, y\} \subseteq V_S$，其中 xy 是 $e^{i}{}_{,\ell}{}^{j}$ 的端点：这是因为存在一条时序 $s, w^{i}{}_{,\ell}{}^{j}$ -路径，不使用 S中的任何时间步，因此可以通过使用一条端点为 $w^{i}{}_{,\ell}{}^{j}$ 的边，将该路径延伸为时序 s, z-路径；该边位于时间步t_x 或时间步 t_y；3. 对于每个 $i, j \in [k], i \neq j$，都有$|\Delta_{i,j} \cap S| \leq 2$：只需注意，$\Delta_{i,j}$ 中的任意两个时间步都会与从 s 到 $\{w_{\ell}^{i,j} \mid \ell \in [m]\} \cup \{z\}$中任意顶点的所有时序路径相交；4. 若 $x \in V_S$，则 x 关联于某条开放边：事实上，若 x 不关联于任何开放边，则对于关联于 x的每条边 $e^{i}{}_{,\ell}{}^{j}$，$w^{i}{}_{,\ell}{}^{j}$ 都被 $S \setminus \{t_x\}$ 与 s 隔开；又由于时间步 t_x 只包含关联于某个此类 $w^{i}{}_{,\ell}{}^{j}$ 的边，因此 $S \setminus \{t_x\}$ 也是一个快照s, z-割，这与 S的极小性矛盾。

根据事实 3，如果 (i, j) 不是开放的，那么对于某一对值 $\ell_1, \ell_2 \in [m]$，$\Delta_{i,\ j} \cap S = \{f_{i,j} + \ell_1, f_{i,j} + \ell_2\}$。在这种情况下，我们称边 $e^{i}{}_{,\ell_1}{}^{j}$和 $e^{i}{}_{,\ell_2}{}^{j}$是为 (i, j) 选定的。我们说明如何修改 S，以减少选定边的数量。由于篇幅限制，以下断言的证明见附录 D。

断言 7.1. 如果 (i, j) 不是开放的，那么我们可以假设 $V_S \cap (X_i \cup X_j) = \emptyset$。

命题 7.2. 我们可以假设每一对都是开放的。

最后注意，根据开放边的定义和断言 $|S| = |E^*| + |V_S| = 7\ 2$，开放边集合 E^* 恰好包含 $\binom{k}{2}$ 条边。于是我们得到 $\binom{k}{2} + |V_S| \leq k$。由此可知 $|V_S| = 2$。此外，根据事实 ，我们知道 E^* 形成了 G 的一个子图，其顶点集为 V_S。由于 G 是简单图，E^* 包含 $\binom{k}{2}$ 条边，而 V_S 至多包含 k 个顶点，因此唯一可能的情况是 V_S 恰好包含 k 个两两相邻的顶点，即 V_S 是一个大小为 k 的团，这正是我们要证明的结论。

□

5 Menge-rian 图的刻画与识别

设 $\mathcal{P}$ 是一组快照不相交的时序 s,z-路径， S 是一个快照 s,z-割。根据定义，对于每条路径 $P \in \mathcal{P}$，存在一条边属于 P，且该边在某个时间步 α_P 处于激活状态，其中 $\alpha_P \in S$。由于 $\mathcal{P}$ 中的路径快照不相交，对于任意不同于 P 的 $Q \in \mathcal{P}$，都有 $\alpha_P \neq \alpha_Q$。因此 $|\mathcal{P}| \leq |S|$，并且不等式 $sp_{G,\ \lambda}(s,z) \leq sc_{G,\ \lambda}(s,z)$ 成立。在命题 8 中，我们证明这个不等式可以是严格的，随后证明定理 1。在我们的刻画中，有 5 个图作为禁用结构： M_1, M_2, M_3, M_4, M_5，如图 2 所示。设 $\mathcal{M}$ 为这类图的集合。

在图 8 中，我们给出了 $\mathcal{M}$ 中各图的时间函数，使不等式 $sp_{G,\ \lambda}(s,z) \leq sc_{G,\ \lambda}(s,z)$ 成为严格不等式。下一命题对此作了形式化表述，证明见附录 E。

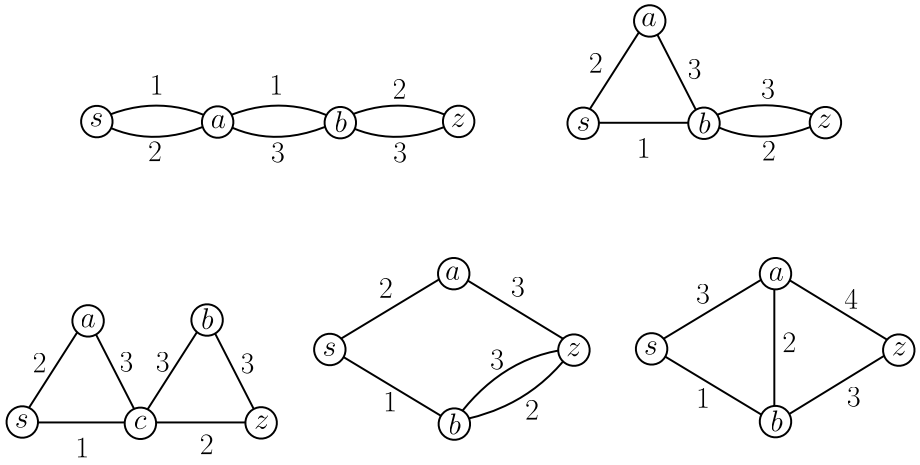


图 8：集合 $\mathcal{M}$ 中的图及其时间函数，使得 $sp_{G\lambda}(s,z) < sc_{G,\ \lambda}(s,z)$。

命题 8。设 (G,λ) 是图 8 所示的时序图之一。则 $sp_{G,\ \lambda}(s,z) < sc_{G,\ \lambda}(s,z)$。

现在证明，当 λ 是单射时，这些参数始终相等。

命题 9。设 (G,λ) 是一个时序图，且 λ 是单射（即对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}$，$|\lambda^{-1}(\alpha)| \leq 1$）。则对于每个 $s,z \in V(G)$，都有 $sp_{G,\ \lambda}(s,z) = sc_{G,\ \lambda}(s,z)$。此外，我们可以在多项式时间内计算出该值。

证明。如果 P和 Q是快照不相交的时态 s,z-路径，那么，对于 $e \in E(P)$ 和 $f \in E(Q)$，我们有 $\lambda(e) \neq \lambda(f)$，因此 $e \neq f$。另一方面，如果 P和 Q 满足 $E(P) \cap E(Q) = \emptyset$，那么我们有 $\lambda(E(P)) \cap$

$\lambda(E(Q)) = \emptyset$。因此， P 和 Q 快照不相交，当且仅当它们边不相交。因此，边不相交的最大数量的时态 s, z-路径等于 $sp_{G,\lambda}(s, z)$。此外请注意， $S \subseteq E(G)$ 是一个集合，使得每条时态 s, z- 路径都使用 S 中的一条边，那么每条时态 s, z-路径都会使用在时间步 $\{\lambda(e) \mid e \in S\}$ 激活的一条边。如果 $S^T \subseteq [\tau]$ 满足每条时态s, z-路径都使用一条在时间步 $\alpha \in S^T$ 激活的边，那么它会使用 $\lambda^{-1}(\alpha)$ 中唯一的一条边。因此，使每条时态 s, z- 路径都与其相交的最小边集的大小等于 $sc_{G,\lambda}(s, z)$。利用 [3] 中证明的结果，我们得出 $sp_{G,\lambda}(s, z) = sc_{G,\lambda}(s, z)$，并且这两个参数都可以在多项式时间内求得。 □

刻画的证明。我们首先证明，若对于某个 $M \in \mathcal{M}$， G 含有 M 作为 m-拓扑子式，则 G 不具有门格尔性质。命题 8 已经表明，每个 $H \in \mathcal{H}$ 都不具有门格尔性质。为完成必要性的证明，我们需要证明，在 H 中添加顶点、添加边以及对边进行 m-细分，不会得到具有门格尔性质的图。命题 2 和命题 3 完成了这项工作。

现在反设 G 不包含 M 在 $\mathcal{M}$ 中的任何 m-拓扑子式，且 G 是非门格尔型的。因此，存在 λ： $E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 s、 $z \in V(G)$，使得sp_{G}、$\lambda(s$、 $z)$ $< sc_{G}$、$\lambda(s$、 $z)$。不妨设，在所有满足条件的图和时间函数中，我们选择使 $|V(G)| + |E(G)| + \tau(\lambda)$最小的那些。我们首先证明，不存在连接 s 和 z的边。反之，设存在一条边 e ，其端点为，并令 $\lambda(e) = \alpha$。令 G' 为从 $\lambda^{-1}(\alpha)$中移除所有边后得到的图，并令 λ'为 λ 在 $E(G) \setminus \lambda^{-1}(\alpha)$上的限制。由于$(s, e, z)$是一个时序 s、 z-路径，注意到$sp_{G'}$、$\lambda'(s$、 $z) = sp_{G}$、$\lambda(s$、 $z)$ -1 且$sc_{G'}$、$\lambda'(s$、 $z)$ $= sc_{G}$、$\lambda(s$、 $z)$ -1。这与(G, λ)使$|V(G)| + |E(G)| + \tau(\lambda)$最小的事实矛盾。现在，设存在一个包含 C和 s 的环。由于 $sz \notin E(G)$，该环的大小至少为 4。由于 G 没有 M_5 作为 m-拓扑子式，因此 C 的顶点之间不存在不包含于 C中的路径。此外，由于 G 没有 M_4 作为 m-拓扑子式， C 的所有重边重数均为 1。换言之，包含C 的 2-连通分量仅由 C 自身构成，且 C 中每条重边的重数均为 1。特别地，连接 s 和 z的路径只有两条。如果这两条路径是快照不相交的时序 s、 z-路径，我们取与 z 关联的两条边的时间步，得到一个快照 s、 z-割，因为它会消除唯一的两条时序s、 z-路径。这是矛盾的，因为这样我们得到sp_{G}、$\lambda(s$、 $z) = sc_{G}$、$\lambda(s$、 $z)$。因此，如果 s 和 z 之间的两条路径都是时序路径，那么它们必定在某个时间步 α相交。但此时，集合 $\{\alpha\}$ 将是一个快照 s、 z-割，再次产生矛盾。因此，我们可以假设不存在同时包含 s和 z的环。这意味着，若考虑 G 分解为双连通分量 B_1、.....、 B_k，则 s和 z属于不同的分量。此外，由于我们假设(G, λ) s、 z使 $|V(G)| + |E(G)| + \tau(\lambda)$最小，由该分解诱导的图是一条路径，并且可以假设$s \in V(B_1)$以及 $z \in V(B_k)$。设存在 $i \in [k]$，使得 B_i 至少包含 3 个顶点。令 $v \in V(B_i) \cap V(B_j)$，其中 $j \in \{i - 1, i + 1\}$ 和C_1 为 B_i 的某个包含 v的环。若 B_j 至少包含 3 个顶点，则我们可以

找到 B_j 中包含的另一个环 C_2，使得 $V(C_1) \cap V(C_2) = \{v\}$，这与 G 没有 M_3 作为 m-拓扑子式的事实矛盾。因此，我们可以假设 $|V(B_j)| = 2$。如果 B_j 中包含的重边重数为 1，则令 α 为该边的时间步。我们有 $\{\alpha\}$ 是一个快照s、z-割，因此sp_G、$\lambda(s$、$z) = sc_G$、$\lambda(s$、$z)$，矛盾。因此，我们可以假设 B_j 的重边重数至少为 2；然而，由该重边和 C_1 诱导的图是图 M_2的 m-细分，再次产生矛盾。于是，我们可以假设，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，双连通分量 B_i 都包含一个环。换言之，$U(G)$是一个 s、z-路径。如果 G 的某些重边重数为 1，则sc_G、$\lambda(s$、$z) \leq 1$，从而得到该等式，矛盾。我们还可以说 $|U(G)| = 3$，否则 G将具有 M_1 作为 m-拓扑子式。现在，我们证明在这种情况下 G 必定具有门格尔性质，从而完成证明。

我们证明，对于图 H，若 $U(H)$ 是一条连接 s 和 z、长度为 3 的路径，且任意时间函数 λ 属于 H，则有 $sp_{G,\lambda}(s, z) = sc_{G,\lambda}(s, z)$。令 $V(H) = \{s, w, z\}$，这意味着 H 的重边为 sw 和 wz。我们对 H 的边数进行归纳。归纳的基础情形是 sw 和 wz 的重数都为 1。此时，要么 $\lambda(sw) \leq \lambda(wz)$，此时 $sp_{H,\lambda}(s, z) = sc_{H,\lambda}(s, z) = 1$；要么 $\lambda(sw) > \lambda(wz)$，此时 $sp_{H,\lambda}(s, z) = sc_{H,\lambda}(s, z) = 0$。现在，假设当 $|E(H')| \leq m$ 时命题成立，并考虑 $|E(H)| = m + 1$。根据命题 9，我们可以假设有两条边在同一时间步 α 出现，不妨设为 f 和 g。由于每个快照都是简单图，因此 f, g 构成一条时间 s, z-路径。令 $H' = H - \{f, g\}$。根据归纳假设，有 $sp_{H',\lambda}(s, z) = sc_{H',\lambda}(s, z)$。现在，令 $\mathcal{P}$ 为一组快照不相交的时间 s, z-路径，令 S 为 (H', λ) 中的一个快照 s, z-割。那么，$\mathcal{P} \cup \{(s, f, w, g, z)\}$ 是 (H, λ) 中一组快照不相交的时间 s, z-路径，且 $S \cup \{\alpha\}$ 是 (H, λ) 中的一个快照 s, z-割。因此，$sc_{H,\lambda}(s, z) = sc_{H',\lambda}(s, z) + 1 = sp_{H',\lambda}(s, z) + 1 = sp_{H,\lambda}(s, z)$。

□

现在，我们将目光转向门格尔图的识别，并证明该问题可以在多项式时间内解决。我们注意到，门格尔图刻画的证明有助于构造识别门格尔图的算法。经过适当调整，我们在附录 F 中证明下一个定理。

定理 10. 可以在多项式时间内判定图 G是否以图 $\mathcal{K}$ 为其 m-拓扑子式。

6 多重边割

最后，本节将研究割问题的另一种版本。回顾一下，如果两条时间 s, z-路径不共享任何多重边，则称它们多重边不相交；而多重边时间 s, z-割是一个由 G 中的多重边组成的集合 S，它与每条时间 s, z-路径都相交。本节将探讨以下问题。

$\leq h$-Multiedge Temporal s,z-cut

输入。一个时序图 (G, λ)，顶点 $s, z \in V(G)$，以及一个整数 h。问题。在 (G, λ) 中，是否存在大小至多为 h 的多重边时序 s, z-割?

定理 11. $\leq h$-Multiedge Temporal s,z-cut 是 NP 完全的，即使$\tau = 2$。

证明。我们从顶点覆盖问题归约而来。该问题给定一个简单图 G和一个正整数 k，需要判断是否存在一个子集$S \subseteq V(G)$，使得 $|S| \leq k$，且每条边 $e \in E(G)$ 都关联于某个 $u \in S$；这样的集合称为顶点覆盖（大小至多为 k）。因此，考虑 $\mathcal{I} = (G, k)$ 这一顶点覆盖问题的实例。我们构造一个图 G'，其顶点集为 $V(G') = \{s, z\} \cup \{x_v^1, x_v^2, x_v^3, x_v^4 \colon v \in V(G)\} \cup \{f_{vw} \mid vw \in E(G)\}$。可以参照图 9 来了解这一构造。接着，对于每个 $v \in V(G)$，我们添加从 s 到 x_v^1 和 x_v^2的边，以及从x_v^3 和 x_v^4 到 z 的边。此外，令 $(x_v^1, x_v^2, x_v^3, x_v^4)$ 构成一条路径，并对每条边 $vw \in E(G)$，添加边 $x_v^1 f_{vw}$ 和 $f_{vw} x_w^4$。更正式地说，我们有:

$$E(G') = \begin{array}{l} \{s x_v^1, s x_v^2, x_v^3 z, x_v^4 z \mid v \in V(G)\} \\ \cup \{x_v^i x_v^{i+1} \mid i \in \{1, 2, 3\}, v \in V(G)\} \\ \cup \{x_v^1 f_{vw}, f_{vw} x_w^4 \mid vw \in E(G)\} \end{array}.$$

最后，对于每个 $v \in V(G)$，添加一条端点为 $x_v^2 x_v^3$ 的第二条边。由于只有这些边的重数大于 1，我们通常用边的端点来表示边，但这些边除外，我们将它们记作 e_v^1, e_v^2。现在，对于每个 $i \in \{1, \ldots, 4\}$，定义 $X_i = \{x_v^i \colon v \in V\}$，令 $F = \{f_v w \mid vw \in E(G)\}$，并考虑一个满足以下条件的时间函数 λ：

$$\lambda(e) = \begin{cases} 1 \\ \text{，若 } e \in (\{s\}) \times X_1) \cup (X_1 \times X_2) \cup (X_3 \times \{z\}) \cup (X_1 \times F) \\ 2\text{；若 } e \in (\{s\} \times X_2) \cup (\\ i \end{cases}$$

$X_3 \times X_4) \cup (X_4 \times \{z\}) \cup (F \times X_4)$；若 $e = e_v^i$ 对于某个 $v \in V(G)$。

由于篇幅所限，正确性证明见附录 G。

□

7 结论

我们引入了快照不相交性的概念，并证明，相关路径问题和割问题在以解的大小为参数时，均为 W[1]-难，且可在 XP 时间内求解。随后，我们将 Kempe、Kleinberg 和 Kumar [13],提出的门格尔图定义调整为适用于我们的问题，并给出了与 [13] 和 [11], 中所给刻画类似的刻画，以及一个多项式时间识别算法。由于我们的所有结果都只涉及非严格时序路径，因此可以进一步探讨这些结果是否也适用于严格路径。

还可以从表1中提出更多开放问题。特别是，我们想知道，[16]中关于严格路径的节点离开不相交路径和割的结果是否同样适用于非严格路径。

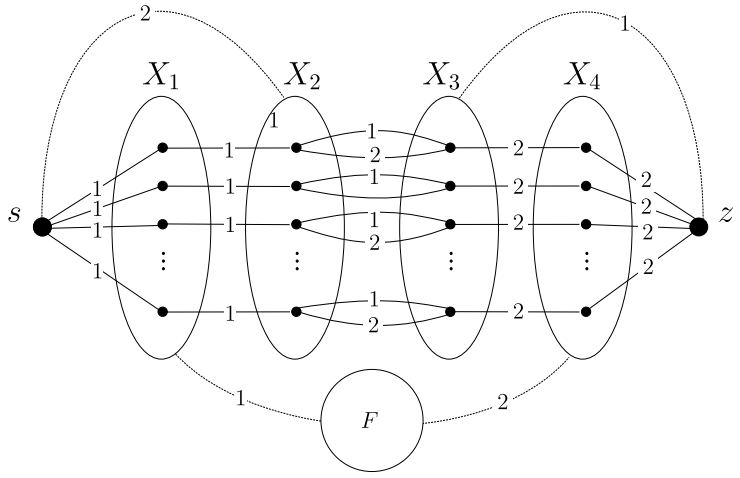


图 9：时序图（G', λ）的表示。虚线表示对应顶点集合之间的所有边。

最后，尽管已知门格尔定理对于边不相交路径 [3,16], 成立，但也已知该定理对于多重边不相交路径 [11]并不成立。我们再次提出 [11] 中关于在多重边不相交路径背景下对门格尔图进行刻画的问题。

参考文献

[1] Amir Afrasiabi Rad、Paola Flocchini 和 Joanne Gaudet。知识动员网络中时序介数的计算与分析。《计算社会网络》，4(1):1–22，2017年。[2] Georg Baier、Thomas Erlebach、Alexander Hall、Ekkehard K¨ohler、Petr Kolman、Ond˘rej Pangr´ac、Heiko Schilling 和 Martin Skutella。长度受限的割与流。《ACM 算法汇刊》(TALG)，7(1):1–27，2010年。[3] Kenneth A Berman。预定网络的脆弱性及门格尔定理的一种推广。《网络：国际期刊》，28(3):125–134，1996年。[4] Arnaud Casteigts、Paola Flocchini、Walter Quattrociocchi 和 Nicola Santoro。时变图与动态网络。《国际并行、涌现与分布式系统杂志》，27(5):387–408，2012年。[5] Arnaud Casteigts、Anne-Sophie Himmel、Hendrik Molter 和 Philipp Zschoche。在等待时间约束下寻找时序路径。发表于第31届国际算法与计算研讨会，

ISAAC 2020，LIPIcs 第181卷，第30:1–30:18页，2020年。doi:10.4230/LIPIcs.ISAAC.2020.30。[6] Marek Cygan、Fedor V Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Micha l Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》，第5卷。施普林格，2015年。[7] Eugen F¨uchsle、Hendrik Molter、Rolf Niedermeier 和 Malte Renken。时序连通性：应对可预见与不可预见的延迟。发表于 James Aspnes 和 Othon Michail 编，第1届动态网络算法基础研讨会（SAND 2022），莱布尼茨信息学国际论文集（LIPIcs）第221卷，第17:1–17:17页，达格施图尔，德国，2022年。达格施图尔城堡——莱布尼茨信息学中心。网址：https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/15959, doi:10.4230/LIPIcs.SAND.2022.17。[8] Petr A Golovach 和 Dimitrios M Thilikos。长度有界的路径及其割：参数化复杂性与算法。《离散优化》，8(1):72–86，2011年。[9] Petter Holme。现代时序网络理论：一篇综述。《欧洲物理学杂志B辑》，88(9):234，2015年。[10]Allen Ibiapina、Raul Lopes、Andrea Marino 和 Ana Silva。时序路径（而非游走）的门格尔定理。arXiv，arXiv:2206.15251，2022年。[11] Allen Ibiapina 和 Ana Silva。门格尔图：刻画与识别。arxiv，arXiv:2208.06517，2022年。[12] Alon Itai、Yehoshua Perl 和 Yossi Shiloach。寻找长度受限的最大不相交路径的复杂度。《网络》，12(3):277–286，1982年。[13] David Kempe、Jon Kleinberg 和 Amit Kumar。时序网络中的连通性与推断问题。《计算机与系统科学杂志》，64:820–842，2002年。[14] Matthieu Latapy、Tiphaine Viard 和 Cl´emence Magnien。用于建模随时间变化的交互的流图与链接流。《社会网络分析与挖掘》，8(1):61，2018年。[15] Chung-Lun Li、S Thomas McCormick 和 David Simchi-Levi。寻找具有极小极大目标函数的两条不相交路径的复杂度。《离散应用数学》，26(1):105–115，1990年。[16] George B Mertzios、Othon Michail 和 Paul G Spirakis。满足连通性约束的时序网络优化。《算法学》，81(4):1416–1449，2019年。

[17] Yossi Shiloach 和 Yehoshua Perl。在图中寻找两对顶点之间的两条不相交路径。《美国计算机协会会刊》（JACM），25(1)：1–9，1978年。[18] Douglas Brent West 等。《图论导论》，第 2 卷。Prentice Hall，上萨德尔河，2001年。[19]B Bui Xuan、Afonso Ferreira 和 Aubin Jarry。计算动态网络中的最短、最快和最早旅程。《国际计算机科学基础期刊》，14(02)：267–285，2003年。[20] Philipp Zschoche、Till Fluschnik、Hendrik Molter 和 Rolf Niedermeier。时序图中寻找小型分隔集的复杂度。《计算机系统科学杂志》，107：72–92，2020年。doi:10.1016/j.jcss.2019.07.006。

命题 2 和 3 的一个证明

命题 2 的证明。设 G 是一个非门格尔型图，并考虑 $\lambda \in E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $s, z \in V(G)$，使得 $sp_{G,\lambda}(s,z) < sc_{G,\lambda}(s,z)$。此外，假设 H 是由 G 对一条多重边（例如 xy）进行 m-细分得到的。我们构造一个函数 λ'，其定义域为 λ，并证明 H 也是非门格尔型的。

令 $D \subseteq E(G)$ 为 G 中端点为 xy 的边集，并用 v_{xy} 表示 H 中由对 xy 进行 m-细分所产生的顶点。此外，分别用 D_x 和 D_y 表示 H 中端点为 xv_{xy} 和 $v_{xy}y$ 的边集。最后，定义 λ'，使得对每个 $e \in E(G) \setminus D$，都有 $\lambda'(e) = \lambda(e)$，并且 $\lambda'(D_x) = \lambda'(D_y) = \lambda(D)$。我们证明 $sp_{G,\lambda}(s,z) = sp_{H,\lambda'}(s,z)$ 和 $sc_{G,\lambda}(s,z) = sc_{H,\lambda'}(s,z)$，从而完成证明。

给定一组在 (G,λ) 中的快照不相交时序 s,t-路径，若其中某些路径（例如 P）使用了边 xy，那么在 (H,λ') 中，我们可以将该边替换为 D_x 中的一条边和 D_y 中另一条同时激活的边，从而得到一条时序路径 P'，使得 $V(P') = V(P) \cup \{v_{xy}\}$。由此，我们得到一组在 (H,λ') 中的快照不相交时序 s,t-路径。反过来，若给定一组在 (H,λ') 中的快照不相交时序 s,t-路径，且其中某条路径使用了顶点 v_{xy}，令 f_j 为 D_j 中用于 $j \in \{x,y\}$ 的边。不失一般性，假设 $\lambda(f_x) \geq \lambda(f_y)$。那么，我们用一条在时间 $\lambda(f_x)$ 出现在 D 中的边，替换与 v_{xy} 关联的两条边。这意味着 $sp_{G,\lambda}(s,z) = sp_{G,\lambda'}(s,z)$。要说明 $sc_{G,\lambda}(s,z) = sc_{H,\lambda'}(s,z)$，需要回想 $\lambda'(D_x) = \lambda'(D_y) = \lambda(D)$。 □

命题 3 的证明。为证明必要性，假设 $H \subseteq G$ 是非门格尔型，并令 s、z、λ 满足 $sp_{H,\lambda}(s,z) < sc_{H,\lambda}(s,z)$。考虑在 $E(G)$ 中定义如下的时间函数 λ'。

$$\lambda'(e) = \begin{cases} \lambda(e) + 1, & \text{对每个 } e \in E(H) \\ 1, & \text{以及每个端点为 } yt \text{ 的 } e \in E(G) \setminus E(H), \text{ 且 } \max \lambda(E(H)) + 2, \text{ 否则。} \end{cases}$$

由于 $H \subseteq G$ 和 $\lambda \subseteq \lambda'$，注意到我们得到 $sp_{H,\lambda}(s,z) \leq sp_{G,\lambda'}(s,z)$ 和 $sc_{H,\lambda}(s,z) \leq sc_{G,\lambda'}(s,z)$。因此，只需证明 $sp_{G,\lambda'}(s,z) \leq sp_{H,\lambda}(s,z)$ 和 $sc_{G,\lambda'}(s,z) \leq sc_{H,\lambda}(s,z)$。事实上，这些结论成立，是因为时间函数 λ'不允许存在一条不包含于 H 中的时序 s,t-路径。□

B 定理 4 的证明

设 (G,λ) s,z,h 如定理的假设所述。对于每个大小为 h 的子集 $S \subseteq [\tau]$，定义 G_S，使得 $V(G_S) = V(G)$ 且 $E(G_S) = \{e \in E(G) \mid \lambda(e) \notin S\}$。此外，对所有 $e \in E(G_S)$，定义 $\lambda_S(e) = \lambda(e)$。现在，根据 G_S 的定义，(G_S,λ_S) 中的任意时间 s,z-路径都是 (G,λ) 中一条不使用在时间步 S 激活的边的时间 s,z-路径。反过来，G 中每条不使用在时间步 S 激活的边的时间 s,z-路径，都是 (G_S,λ_S) 中的时间 s,z-路径。由于可以在多项式时间内测试 (G_S,λ_S) 中是否存在时间 s,z-路径，且可以在 $O(n+m)$ 时间内构造 (G_S,λ_S)，只需对每个大小为 h 的 $S \subseteq [\tau]$，在 (G_S,λ_S) 上执行此测试。由于此类集合至多有 τ^h 个，定理得证。

C 定理 6 中归约正确性的证明

我们证明，(G',λ) 存在 k 快照不相交的时序 s,z-路径，当且仅当G 存在一个大小至少为 k 的独立集。根据 G' 的定义，所有时序s,z-路径都属于类型 Q_u，其中某个 $u \in V(G)$。因此，只需证明：子集 $S \subseteq V(G)$ 是 G 的独立集，当且仅当 $\{Q_u \mid u \in S\}$ 是 (G',λ) 中一组快照不相交的时序 s,z-路径。首先，假设 S 是一个独立集，并反设存在 $u_1,u_2 \in S$，使得 Q_{u_1}，且 Q_{u_2} 不快照不相交。则存在 $e_1 \in E(Q_1)$ 和 $e_2 \in E(Q_2)$，使得 $\lambda(e_1) = \lambda(e_2)$。根据构造，这意味着$e_1 = e_2$；又由于 $u_1 \neq u_2$，我们得到这条边的端点实际上是 u_1u_2，这与 S 是独立集相矛盾。因此，$\{Q_u \mid u \in S\}$ 是一组快照不相交的时序 s,z-路径。最后，注意若 $e_i = vw \in E(G)$，则 $\lambda(Q_v) \cap \lambda(Q_w) = \{i\}$，这直接意味着，若 $\{Q_u \mid u \in S\}$ 是一组快照不相交的时序 s,z-路径，则 S 不可能包含任何一对相邻顶点。

D 定理7中各项主张的证明

断言 7.1 的证明。设 $e^{i,}{}_{\ell_1}{}^{j}$ 和 $e^{i,}{}_{\ell_2}{}^{j}$ 是 (i,j) 的选定边。用x_1y_1 和 x_2y_2 分别表示 $e^{i,}{}_{\ell_1}{}^{j}$ 和 $e^{i,}{}_{\ell_2}{}^{j}$ 的端点。不失一般性，假设 $\{x_1,x_2\} \subseteq X_i$和 $\{y_1,y_2\} \subseteq X_j$。现在假设存在 $x \in X_i \cap S$。若 $x \in \{x_1,x_2\}$，例如 $x = x_1$，则将 S中的 $f_{i,j} + \ell_2$ 替换为 y_1，得到 S'。注意在这种情况下，$e^{i,}{}_{\ell_1}{}^{j}$ 变成了一条开放边，但是

使得 $\{t_{x_1}, t_{y_1}\} \subseteq S'$。因此， S' 仍然是一个快照 s, z-割，其中包含的选定边更少。若 $x \notin \{x_1, x_2\}$，则令 xy 为 x 中任意一条满足 $y \in X_j$ 的关联边。我们可以假设这样的边存在；否则， x 不可能属于任何多色 k-团，因此我们可以将其从 G 中移除。令 $\ell \in [m]$ 满足 $e^{i,\ j}_{\ell}$ 的端点为 xy。注意，事实 3 还告诉我们，$S' = (S \setminus \{f_{i,j} + \ell_2\}) \cup \{f_{i,j} + \ell\}$ 是一个快照 s, z-割。于是，我们可以应用前面的论证，将 $f_{i,\ j} + \ell_1$ 替换为 t_y，再次得到一个包含更少选定边的快照 s, z-割。

□

断言 7.2 的证明。显然，我们可以假设 G 是连通的，否则， Multicolored k-Clique 的答案显然是“否”。现在，令 I_1 为指标 $\{i \in [k] \mid V_S \cap X_i = \emptyset\}$ 和 $I_2 = S \setminus I_1$的集合。首先假设 $I_1 \neq \emptyset$和 $I_2 \neq \emptyset$，并考虑 $i_1 \in I_1$和 $i_2 \in I_2$。根据断言 7.1，且由于 $i_2 \in I_2$，我们知道 (i_1, i_2) 是开放的。因此，令 $e^{i_1,\ i_2}_{\ell}$为 (i_1, i_2) 的开放边，并令 xy 为其端点，其中 $x \in X_{i_1}$ 且 $y \in X_{i_2}$。根据事实 2，我们得到$\{t_x, t_y\} \subseteq S$，即 $\{x, y\} \subseteq V_S$；这与断言 7.1 矛盾，因为 $x \in X_{i_1}$且 $i_1 \in I_1$。

因此，要么是 $I_1 = \emptyset$，要么是 $I_2 = \emptyset$。注意，如果 $I_1 = \emptyset$，那么对每个 $i \in [k]$ 都有 $V_S \cap X_i \neq \emptyset$，结论由断言 7.1 得出。而如果 $I_2 = \emptyset$，那么根据事实 3，我们可知 S 对每一对 i、 j 都包含两条边，总计 $|S| = 2\binom{k}{2}$。由于$|S| \leq \binom{k}{2} + 2$，只有在 $k \leq 3$ 的情况下才会出现这种情形；此时 Multicolored k-Clique 是多项式时间可解的。

□

E 命题 8 的证明

要看出 $sc_{G,\ \lambda}(s, z) > 1$，只需验证对于每个时间步，都存在一条不使用该时间步的时序 s、 z-路径。现在，对于情形 $G \in \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$，假设 $sp_{G,\ \lambda}(s, z) = sc_{G,\ \lambda}(s, z)$，并令 Q、 J 为快照不相交的时序 s、 z-路径。在这些情形中，只有两条边与 s 关联，其中一条在时间步 1 激活，另一条在时间步 2 激活。因此，这些路径中必有一条（设为 Q）从时间步 2 开始。注意，在这种情况下， Q 只能通过在时间步 3 激活的边结束。因此， J 不能使用时间步 2 或 3；然而，所有与 z 关联的边都在时间步 2 或 3 激活，这与第一个快照中不存在包含于其中的时序 s、 z-路径相矛盾。最后，假设 $G = M_5$；我们将采用类似的论证。令 Q、 J 为快照不相交的时序 s、 z-路径。注意，其中一条（设为 Q）必须使用与 s 关联、在时间步 3 激活的边，因此以使用与 z 关联、在时间步 4 激活的边结束。由此可知， J 不能使用时间步 3 或 4；这与所有与 z 关联的边都只在这些时间步激活相矛盾。

F 定理10的证明

首先，我们将 G 分解为二连通分量， $B_1, \ldots, B_k$。这可以在 $O(m + n)$ 时间内完成（例如参见 [18]）。

我们考虑所有满足 $|V(B_i)| = 2$ 且包含在 B_i 中的多重边的重数至少为 2 的连通分量 B_i，令 D 为这样的集合。然后，我们检验 D 中是否存在某个连通分量 B_i，它与大小至少为 3 的某个连通分量 B_i 有共同顶点。这需要 $O(k^2)$ 时间。如果答案为肯定，则可知 G 以 M_2 为 m-拓扑子式。于是我们可以作如下假设：

2. D 中没有任何连通分量与其他至少有 3 个顶点的连通分量共享顶点。

现在，我们分离出所有至少有 3 个顶点的连通分量，并检查其中是否有两个共享顶点；这一步需要 $O(k^2)$ 次操作。如果某两个连通分量的答案为是，那么 G 包含 M_3 作为 m-拓扑子式。因此，我们可以假设：

3. 大小至少为 3 的连通分量 B_i 和 B_j 不共享顶点。

现在，我们考察满足 $|V(B_i)| \geq 4$ 的连通分量 B_i。由于 B_i 是二连通的，它包含一个环 C，我们可以在 $O(n^2)$ 中找到该环。接着，我们检查是否存在一条边 $e \in E(B_i) \setminus E(C)$。如果答案为是，那么由于 B_i 是二连通的，C 中存在一条包含 e的弦。这意味着 G 包含 M_5 作为 m-拓扑子式。因此，我们得到以下性质。

4. 每个大小至少为 4 的连通分量 B_i 都满足：$U(B_i)$ 是一个环。

基于这一观察，我们现在可以检验大小至少为 4 的连通分量 B_i 是否包含重数至少为 2 的多重边。如果答案是肯定的，我们就完成了，因为这将导致 B_i 以 M_4 为 m-拓扑子式。因此，我们可以假设情况并非如此：

5. 大小至少为 4 的连通分量 B_i 不包含重数至少为 2 的重边。

现在我们证明，性质 2–5 意味着 G 在 $\mathcal{M}$ 中没有图作为 m-拓扑子式。只需注意，每个环都包含在一个 2-连通分量中。因此，性质 2–5 保证 G 没有 M_2、M_3、M_4 或 M_5 作为 m- 拓扑子式。

现在，我们只需检验 G 是否以 M_1 为 m-拓扑子式。我们可以考虑从 G 中得到的图 G'，但排除重数为 1 的多重边。然后，我们检验 G' 是否存在一条至少包含 4 个顶点的路径。当且仅当 G 以 M_1 为 m-拓扑子式时，答案为肯定。至此，识别过程完成。

G 定理 11 中归约正确性的证明

我们证明， G 存在大小至多为 k 的顶点覆盖，当且仅当 (G', λ) 存在大小至多为 $n + k$ 的多重边时序 s, z-割。给定 Vertex Cover 的一个解 S，我们可以定义 $S' = \{sx_v^1, x_v^4 z \colon v \in S\} \cup \{x_v^2 x_v^3 \colon v \notin S\}$。接下来需要论证 S' 将 s 与 z 分隔开；更形式化地说，在 $(G' - S^*, \lambda)$ 中不存在时序 s, z-路径，其中 S^* 包含每个满足其端点位于 S' 中的 $e \in E(G')$。注意，如果一条时序 s, z-路径不使用 X_1 与 F 之间的边，那么它包含以下路径之一：$(s, x_v^1, x_v^2, x_v^3, x_v^4, z)$、$(s, x_v^2, x_v^3, x_v^4, z)$ 或 $(s, x_v^1, x_v^2, x_v^3, z)$。无论哪种情况，这样的路径都会与 S' 相交。现在假设一条时序 s, z-路径 P 使用了一条边 $x_v^1 f_{vw}$，这意味着它也会使用 $f_{vw} x_w^4$，因此在时间步 2 到达 z。注意，在时间步 2 激活且与 x_w^4 关联的边，端点只能是 F、x_w^3 或 z。在前一种情况下，我们会陷入死路，因为对于每个 $u \in N(w)$，f_{uw} 在时间步 2 只有一条关联边。第二种情况也一样，因为从 x_w^3 只能前往 x_w^2，再次陷入死路。因此，如果 P 包含 $x_v^1 f_{vw}$，那么它也必须包含 $x_w^4 z$。用类似的论证还可以证明，它也必须包含 sx_v^1。由于 $vw \in E(G)$，v 和 w 中至少有一个属于 S；根据构造可知，P 使用了 S' 的某条多重边，正如我们要证明的那样。

现在，设 S' 是一条大小至多为 $n + k$ 的多重边时序 s, z-割。对于每个 $v \in V(G)$，将多重边集合 $\{sx_v^1, x_v^1 x_v^2, x_v^2 x_v^3, x_v^3 x_v^4, x_v^4 z\}$ 记为 A_v，并令 $S'_v = S' \cap A_v$。由于 A_v 构成一条时序 s, z-路径，我们知道 $S'_v \neq \emptyset$。可以注意到，每条使用 $x_v^1 x_v^2$ 的时序 s, z-路径也会使用 sx_v^1；同样，每条使用 $x_v^3 x_v^4$ 的时序 s, z-路径都会使用 $x_v^4 t$。因此，如有必要，通过修改 S'，我们可以假设 S'_v 是 $\{sx_v^1, x_v^2 x_v^3, x_v^4 z\}$ 的非空子集。现在我们证明，实际上可以假设 $S' \cap A_v$ 要么是 $\{sx_v^1, x_v^4 t\}$，要么是 $\{x_v^2 x_v^3\}$。我们通过分析该情形不成立时的各种情况来证明这一点。

- $S'_v = \{sx_v^1\}$ 或 $S'_v = \{x_v^4 z\}$。我们只需解决第一个子情况，因为第二个情况类似。注意，$(s, x_v^2, x_v^3, x_v^4, z)$是一条时序 s, z-路径，而由于当前分析的情况，这条路径中唯一可能属于 S' 的边是 sx_v^2。因此，从 S' 中移除 sx_v^2 并加入 x_v^4，仍能保持其为一条多重边时序 s, z-割的性质，并将 S'_v 变为 $\{sx_v^1, x_v^4 z\}$。

- $S'_v = \{sx_v^1, x_v^2 x_v^3\}$ 或 $S'_v = \{x_v^2 x_v^3, x_v^4 z\}$。在这两种子情况下，我们都可以移除$x_v^2 x_v^3$，并加入 $x^4 z$（第一种情况）或 sx_v^1（第二种情况）。

现在我们可以定义 $S = \{v \in V \colon S_v = \{sx_v^1, x_v^4 t\}\}$。所需性质$|S| \leq k$ 可由以下事实推出：对于每个 $v \in V$（G），都有 $1 \leq |S'_v| \leq 2$，并且 $|S'| \leq n + k$。最后，假设 $vw \in E$（G）满足 $S \cap \{v, w\} = \emptyset$。那么，$(s, x_v^1, x_w^4, z)$是一条不经过 S'中各边的时序 s, z-路径，这就产生了矛盾。