arXiv:2302.06702v1 [math.GT] 13 Feb 2023

曲面上曲面丛的几何

R. İNANC, BAYKUR 和 Mustafa Korkmaz

Abstract. 对于除 18 种可能的纤维与底空间亏格组合之外的所有情况，我们构造了具有正符号的曲面上辛曲面丛。同时，我们确定了几个新映射类的交换子长度。

1. Introduction

曲面上的曲面丛构成了一类有趣的四维流形，可采用数学不同领域的技术进行研究，例如代数几何、辛拓扑和几何群论。令 Σ_g 表示亏格为 g 的闭可定向曲面，并令 σ 表示一个四维流形的符号。对于任意纤维和底空间亏格，构造具有 $\sigma = 0$ 的曲面丛都相当容易；事实上，在许多情况下，Σ_g上的 Σ_h 丛具有 $\sigma = 0$，例如当$\pi_1(\Sigma_h)$在 $H^*(\Sigma_g)$上平凡作用、纤维化为双曲型（尤其是当 $g \leq 2$ 时），或底空间亏格 $h \leq 1$ [16, 19, 44]时。此外，对于任意曲面丛 [44]，均有 $\sigma \equiv 0$ (模 4)。

本文旨在对以下悬而未决的地理问题给出全面解答：

对于哪些数对$(g, h) \in \mathbb{N}^2$，存在具有符号 $\sigma > 0$的、以 Σ_h 为底的 Σ_g–丛?

关于曲面丛的这一问题有着悠久而丰富的历史，可追溯至20世纪60年代末Kodaira、Atiyah和Hirzebruch的开创性工作 [33, 2, 30], 。他们通过复曲线乘积的分歧覆盖，构造了首批具有 $\sigma > 0$ 的曲面丛实例，尽管其纤维或底空间的亏格都相当大。20世纪90年代末，Endo运用Meyer余循环以及映射类群中的关系，对曲面丛的签名开展了创新性研究 [18, 19], ，使得人们能够更系统地研究这一地理问题。在过去二十年里，这些方法带来了大量具有正符号的曲面丛实例；参见例如 [3, 7, 10, 11, 15, 20, 24, 41, 42, 47, 50, 55]。

我们的主要结果是这一研究方向上的一项重大进展：

定理 1. 对于每一组 $g \geq 15, h = 2$； $g \geq 9, h = 3$； $g \geq 4, h = 4$；以及 $g \geq 3, h \geq 5$，都存在一个定义在 Σ_h 上、具有正符号的辛 Σ_g–丛。[1]

由于当 $g \leq 2$ 或 $h \leq 1$ 时 $\sigma = 0$，我们的定理遗漏了 19 组可能的 (g, h) 配对。然而，Hamenst¨adt 在 [27] 中证明，曲面丛的欧拉示性数 e 和符号 σ 总是满足不等式 $|\mathsf{e}| \geq 3\,|\sigma|$，这使我们能够排除另一组（且仅此一组）可能配对存在具有正符号的曲面丛：$(g, h) = (3,2)$。尽管在本文写作之时，我们所能做到的最好结果是为除 18 组可能的 (g, h) 配对之外的所有配对构造出具有正签名的曲面丛，但看起来有理由相信，我们的技术稍作变化——稍后将对此进行讨论——或许能进一步缩小这一差距。

我们在定理中构造的所有曲面丛的签名均为 $\sigma = 4$。因此，对于$\mathcal{M}_g$ 亏格为g 的曲线的模空间，并令 m_g 表示所有代表 $H_2(\mathcal{M}_g;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$ 的无限循环生成元的曲面之亏格中最小的亏格，其中 $g \geq 3$，正如 [10], 中所观察到的，我们可以从结果得出结论：对于任意 $g \geq 15$，都有 $m_g = 2$；并且我们得到如下估计：$m_g = 2$ 或 3（当 $9 \leq g \leq 14$ 时），$m_g = 2$，3 或 4（当 $4 \leq g \leq 8$ 时），以及 $m_g = 3$，4 或 5（当 $g = 3$ 时）。

我们通过映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 中明确的单值化分解，描述了定理 1 中除一个之外的所有曲面丛。（剩下的例子将 Catanese–Corvaja–Zannier 在 [14]中构造的半稳定全纯纤维化作为一个组成部分。）我们对那些生成这些具有正符号的小型曲面丛的关系的理解之所以取得突破，归功于我们能够为映射类群中交换子乘积本身以及多重扭曲得到更短的交换子表达式。特别是，定理 4 的证明改编了 Tsuboi 在 [51] 中的巧妙论证，以及 Burago、Ivanov 和 Polterovich 在 [12], 中的论证，因此可以从底空间亏格较高的曲面丛推导出底空间亏格为 $h = 2$和 3 的例子。借助这些工具，我们在推论 9 和 12 中计算了若干新映射类的交换子长度和稳定交换子长度，尤其为 Kirby 问题 2.13(b) [32]提供了新的答案。

我们研究的动机之一，是更好地理解曲面丛的地理学与辛四维流形及紧致复曲面的地理学有何异同。正如 Thurston 所示，所有具有正签名的曲面丛都允许辛形式，但其全空间未必允许复结构。事实上，根据第一作者在 [3], 中的工作，本文构造的曲面丛在除不到二十几对以外的所有可能纤维和底曲面亏格组合下，都给出了无限多个此类例子；参见注14。

一个特别有趣的比较地理问题涉及博戈莫洛夫–米亚奥卡–丘不等式 [8, 45, 53] 的边界情形。根据丘对卡拉比猜想 [53], 的著名证明，任何满足 $\mathsf{e} = 3\,\sigma$ 的一般型紧致复曲面都是复球商。这些构成了一类相当小但非常有趣的复曲面，其中不可能包含任何曲面丛 [43, 31]。与此相反，

目前仍不清楚，是否存在满足 $\mathrm{e} = 3\sigma$ 且不是复球商的一般型辛四维流形，因此引出了一个更具体的问题：

问题 2. 是否存在一个具有 $\mathrm{e} = 3\sigma$ 的曲面上的辛曲面丛？

这尤其相当于询问，是否存在一个 Σ_g–丛，其底空间为 Σ_h，并且在 $(g,h) = (4,2)$ 时具有正符号——而我们在 $(g,h) = (4,4)$ 时的例子简直近得令人振奋！更一般地说，这属于一个更大的问题：具有正符号的曲面丛的地理学是否还存在其他约束；显然，本文中的这些例子本身就限制了人们对更强约束的期待。

基本约定： 本文中考虑的所有流形和映射均为光滑的。我们用Σ_g^b表示亏格为 g 且具有 b 个边界分支的紧致可定向曲面；若无边界，则省略 b。我们用 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g^b)$ 表示由保持定向且在边界的某个领圈邻域内限制为恒等映射的微分同胚 $\Sigma_g^b \to \Sigma_g^b$ 构成的群。Σ_g^b 的映射类群 定义为 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b) := \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g^b))$。映射类的乘积作用于曲线时，从最右侧因子开始作用。研究 Σ_g^b 的映射类群中的关系时，我们只考虑 Σ_g^b 上的曲线和 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g^b)$ 中元素的同伦类，并用相同符号表示这些同伦类。我们用t_c 表示曲面 Σ_g^b 上沿简单闭曲线 c 的右手扭转，即正德恩扭转。对于 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 中任意的 A 和 B，令 $[A,B] := ABA^{-1}B^{-1}$ 表示它们的交换子，并令 $A^B := BAB^{-1}$ 表示 A 在 B 下的共轭元。我们用$\lfloor r \rfloor$ 表示小于或等于实数 r 的最大整数。

补充约定：我们将亏格为g的曲面丛（X, f）定义为以亏格为h的曲面为底的光滑局部平凡 Σ_g丛 $f\colon X \to \Sigma_h$，其中 X 是一个定向4维流形。对于（X, f），若有 b个自交数为 $S_j \cdot S_j = -k_j$ 的互不相交截面 $\{S_j\}$，则其单值化分解是形如以下形式的一个关系

$$[A_1, B_1] \cdots [A_h, B_h] = t_{\delta_1}^{k_1} \cdots t_{\delta_b}^{k_b} \qquad \text{in } \mathrm{Mod}(\Sigma_g^b),$$

其中， A_i, B_i 是映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 中的一般元素，而 $\{\delta_j\}$ 是沿着 Σ_g^b不同边界分支的边界平行曲线。最后，对于映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 中的任意关系子 $W = 1$，我们将其符号 $\sigma(W)$定义为：相对于德恩扭转生成元 [18, 22]，从平凡词推导出该关系子时所用各关系子的符号之代数和。有关曲面丛、单值化分解、映射类群关系和符号的一般背景，请参阅 [23, 20, 5, 6, 22, 47] 。

2. Shorter expressions for products of commutators

在许多情况下，群中的给定交换子乘积可以改写为由更少交换子构成的乘积。例如，群 G 中任意 a, b, c 所满足的著名 Hall-Witt 恒等式可以整理为

$$[[a,b],c^b]\,[[b,c],a^c] = [b^a,[c,a]].$$

这里还有几个可能不太为人熟知的例子：

Lemma 3. 对于 a, b, c, d 群 G 中的任意元素，以下结论成立：

(i) $[a,b]\,[b,c]\,[c,d]\,[d,a] = [a^{-1}c, b^{-1}d]^{ab}$, *and*
(ii) $\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i] = [\prod_{i=1}^{k} a_i, \prod_{i=1}^{k} b_i]$, *if* $[a_i,a_j] = [a_i,b_j] = [b_i,b_j] = 1$ *for all* $i \neq j$.

证明。 这两个恒等式都可以直接验证：

$$\begin{aligned}
[a,b]\,[b,c]\,[c,d]\,[d,a] &= aba^{-1}\underline{b^{-1}\,b}cb^{-1}\underline{c^{-1}\,c}dc^{-1}\underline{d^{-1}\,d}ad^{-1}a^{-1}\\
&= aba^{-1}\,cb^{-1}\,dc^{-1}\,ad^{-1}a^{-1}\\
&= aba^{-1}cb^{-1}dc^{-1}ad^{-1}\,\underline{bb^{-1}}\,a^{-1}\\
&= (ab)\,a^{-1}c\,b^{-1}d\,(a^{-1}c)^{-1}\,(b^{-1}\,d)^{-1}\,(ab)^{-1}\\
&= [a^{-1}c, b^{-1}d]^{ab},
\end{aligned}$$

其中我们给相消对加了下划线。同样，

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i] &= a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\,a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}\\
&= a_1a_2\cdots a_k\,b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\,b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots b_ka_k^{-1}b_k^{-1}\\
&= a_1a_2\cdots a_k\,b_1b_2\cdots b_k\,a_1^{-1}b_1^{-1}\,a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_k^{-1}b_k^{-1}\\
&= a_1a_2\cdots a_k\,b_1b_2\cdots b_k\,a_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_k^{-1}\,b_1^{-1}b_2^{-1}\cdots b_k^{-1}\\
&= a_1a_2\cdots a_k\,b_1b_2\cdots b_k\,a_k^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}\,b_k^{-1}\cdots b_2^{-1}b_1^{-1}\\
&= [\prod_{i=1}^{k} a_i, \prod_{i=1}^{k} b_i],
\end{aligned}$$

其中，在每一个中间步骤中，我们都反复只使用了给定的交换关系。□

回想一下，交换子的共轭元仍然是交换子，因此到目前为止我们列出的所有交换子恒等式，实际上都将交换子乘积表示为单个交换子。引理中的第一个恒等式早在 [48] 就已见于文献，其中包含两个更常见的特例：

$$[a,b]\,[b,c]\,[c,a] = [a^{-1}c, b^{-1}a]^{ab}$$

whic取引理 3(i) 中的 $d = a$ 可得 h，而取 $d = 1$ 则得到

$$[a, b]\,[b, c] = [a^{-1}c, b^{-1}]^{ab}. \tag{1}$$

引理中的第二个恒等映射或许更符合当代观点，但显然早已为专家所知 [51, 12]（下文将详述）。

对于曲面丛的单值化分解，上述交换子恒等式使我们能够导出新的、亏格更小的曲面上的曲面丛。下一个定理借鉴了 Tsuboi 在 [51] 以及 Burago、Ivanov 和 Polterovich 在 [12], 中的优美论证，证明我们还可以大幅降低底空间亏格，代价是增加纤维亏格：

定理 4. 设 (X, f) 是一个纤维亏格为 g、底空间为亏格 h 的曲面上的曲面丛，且有一个自交数为零的截面。那么还存在曲面丛

$$\text{(i)}\,(X', f') \text{ 其纤维亏格为 } g' = gh\text{，底空间亏格为 } 2\text{，其中 } h \geq 2\text{；以及}\text{(ii)}\,(X'', f'') \text{ 其纤维亏格为 } g'' = g\left\lfloor \tfrac{h+1}{2} \right\rfloor\text{，底空间亏格为 } 3\text{，其中 } h \geq 3,$$

以及具有自交数为零的截面和符号 $\sigma(X') = \sigma(X'') = \sigma(X)$。此外，给定具有自交数为零的截面 S 的 (X, f) 的一个显式单值化分解，我们可以显式描述具有自交数为零的截面 S' 和 S'' 的 (X', f') 和 (X'', f'') 的单值化分解。

证明。设 a_i, b_i（$i = 1, \ldots, h$），为 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g^1)$ 中的元素，它们在 $\partial\Sigma_g^1$ 的某个领圈邻域上限制为恒等映射。设 $\phi = \prod_{i=1}^{h}[a_i, b_i]$。也就是说，我们有以下关系：

$$\phi = [a_1, b_1] \cdots [a_h, b_h] \;\text{ in }\; \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)\,, \tag{2}$$

wher我们只需用同一个字母表示相应的映射类 s.

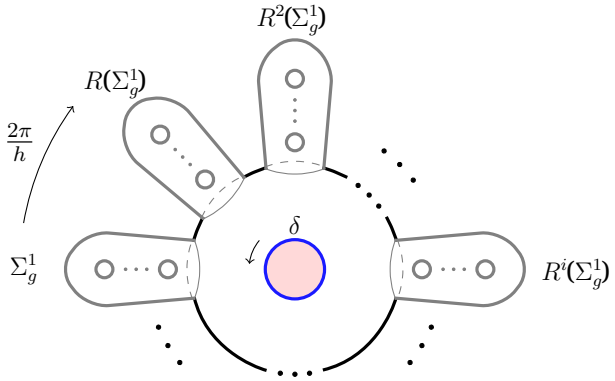

FIGURE 1. 旋转 R。

现在令 R 为 $\Sigma^1_{g'}$ 的顺时针—$\frac{2\pi}{h}$ 旋转，如图1所示，其中 $g' = gh$ ；随后在其边界的一个小领圈邻域内，进行一个支撑于此处的逆时针 $\frac{2\pi}{h}$ 旋转 $\partial\Sigma^1_{g'}$ 。我们取一个嵌入 $\Sigma^1_g \hookrightarrow \Sigma^1_{g'}$ ，其像如图1所示，且远离上述边界旋转的支撑集。通过将 Σ^1_g 与 $\Sigma^1_{g'}$ 的一个子曲面识别，我们便可定义 $\tilde{\phi}$， $\tilde{a}_i$， $\tilde{b}_i \in \mathsf{Diff}^+(\Sigma^1_{g'})$：将每个 ϕ， a_i， b_i 在 $\Sigma^1_{g'} \setminus \Sigma^1_g$ 上延拓为恒等映射。于是我们得到关系

$$\tilde{\phi} = [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \cdots [\tilde{a}_h, \tilde{b}_h] \ \text{ in } \ \mathrm{Mod}(\Sigma^1_{g'}) \,. \tag{3}$$

一个双交换子恒等式： 回顾 Tsuboi 在 [51] 中的代数论证细节（参见 [12]），对于我们定理证明的后续部分至关重要。令 $C_i := [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$，对所有 $i = 1, \dots, h$，于是 $\tilde{\phi} = \prod_{i=1}^h C_i$。按照 [51],，我们设

$$P := \prod_{i=1}^{h} (C_1^{R^{h-i}} \cdots C_i^{R^{h-i}}) \,.$$

这里有相当多值得注意的交换关系。首先，对于任意 $p \neq q$，都有 $[\tilde{a}_i^{R^p}, \tilde{b}_j^{R^q}] = [\tilde{a}_i^{R^p}, \tilde{a}_j^{R^q}] = [\tilde{b}_i^{R^p}, \tilde{b}_j^{R^q}] = 1$，因为这些交换子中的每一对微分同胚在 $\Sigma^1_{g'}$ 中的支集都不相交。因此，对于任意 i, j 和 $p \neq q$，有 $[C_i^{R^p}, C_j^{R^q}] = 1$。进而，当 $i \neq j$ 时， $[C_1^{R^{h-i}} \cdots C_i^{R^{h-i}}, C_1^{R^{h-j}} \cdots C_j^{R^{h-j}}] = 1$，所以在上述 P 的乘积表达式中，括号内的因子可以按任意顺序——尤其是逆序——展开。最后，由于 R^h 在任意 $\tilde{a}_i^{R^p}$ 的紧支集上都是恒等映射，且 $\tilde{b}_i^{R^p}$ （尽管它在 $\Sigma^1_{g'}$ 上与边界平行德恩扭转同痕），我们有 $[R^h, \tilde{a}_i^{R^p}] = [R^h, \tilde{b}_i^{R^p}] = 1$，因此对于任意 i 和 p，有 $[R^h, C_i^{R^p}] = 1$ ，进而 $(C_i^{R^p})^{R^h} = C_i^{R^p}$ 。

我们得到乘积表达式

$$P^{-1} = \prod_{i=1}^{h} (C_1^{R^{h-i}} \cdots C_i^{R^{h-i}})^{-1} = \tilde{\phi}^{-1} \prod_{i=1}^{h-1} (C_1^{R^{h-i}} \cdots C_i^{R^{h-i}})^{-1}$$

and

$$P^R = \prod_{i=1}^{h} (C_1^{R^{h-i+1}} \cdots C_i^{R^{h-i+1}}) = \prod_{i=0}^{h-1} (C_1^{R^{h-i}} \cdots C_{i+1}^{R^{h-i}}) = C_1 \prod_{i=1}^{h-1} (C_1^{R^{h-i}} \cdots C_{i+1}^{R^{h-i}}).$$

因此,

$$\begin{aligned}
[P^{-1},R] &= P^{-1}P^{R} \\
&= \tilde{\phi}^{-1}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^{h-i}}\cdots C_i^{R^{h-i}})^{-1}\ \cdot C_1 \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^{h-i}}\cdots C_{i+1}^{R^{h-i}}) \\
&= \tilde{\phi}^{-1}\ C_1\ \prod_{i=1}^{h-1}((C_1^{R^{h-i}}\cdots C_i^{R^{h-i}})^{-1}\,(C_1^{R^{h-i}}\cdots C_{i+1}^{R^{h-i}})) \\
&= \tilde{\phi}^{-1}\ C_1\ \prod_{i=1}^{h-1} C_{i+1}^{R^{h-i}} \\
&= \tilde{\phi}^{-1}\ \prod_{i=1}^{h} C_i^{R^{h-i+1}} \\
&= \tilde{\phi}^{-1}\ [\prod_{i=1}^{h}\tilde{a}_i^{R^{h-i+1}}\,,\,\prod_{i=1}^{h}\tilde{b}_i^{R^{h-i+1}}]
\end{aligned}$$

这里反复使用了上文提到的交换关系，并在最后一步调用了引理 3(ii)。

令 $A:=\prod_{i=1}^{h}\tilde{a}_i^{R^{h-i+1}}$ 和 $B:=\prod_{i=1}^{h}\tilde{b}_i^{R^{h-i+1}}$，我们得到双交换子恒等式

$$\tilde{\phi}=[A,B][R,P^{-1}]\ \text{in}\ \ \mathrm{Mod}(\Sigma_{g'}^1)\,. \tag{4}$$

一种变式：令 $\tilde{\phi}=\prod_{i=1}^{h}C_i$ 和 R 如上所述。这次令

$$Q:=\prod_{i=0}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i})=\tilde{\phi}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i})\,.$$

注意，根据上文提到的交换关系，这个乘积中的括号项也可以按任意顺序展开。因此，利用等式 $(C_1^{-1})^{R^h}=C_1^{-1}$，我们得到

$$(Q^{-1})^R=\prod_{i=0}^{h-1}(C_1^{R^{i+1}}\cdots C_{h-i}^{R^{i+1}})^{-1}=\prod_{i=1}^{h}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i+1}^{R^i})^{-1}=C_1^{-1}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i+1}^{R^i})^{-1}\,.$$

由此可知，对于 $[Q,R]=QRQ^{-1}R^{-1}=Q(Q^{-1})^R$，应用前面相同的论证，我们得到

$$\begin{aligned}
[Q,R] &= \tilde{\phi}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i})\ \cdot C_1^{-1}\prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i+1}^{R^i})^{-1}\\
&= \tilde{\phi}\ C_1^{-1}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i})\,(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i+1}^{R^i})^{-1}\\
&= \tilde{\phi}\ C_1^{-1}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i})\,(C_{h-i+1}^{R^i})^{-1}(C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i})^{-1}\\
&= \tilde{\phi}\ C_1^{-1}\ \prod_{i=1}^{h-1}(C_{h-i+1}^{C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i}R^i})^{-1}\\
&= \tilde{\phi}\ \prod_{i=1}^{h}(C_{h-i+1}^{C_1^{R^i}\cdots C_{h-i}^{R^i}R^i})^{-1}\\
&= \tilde{\phi}\ \prod_{i=1}^{h}(C_i^{C_1^{R^{h-i+1}}\cdots C_{i-1}^{R^{h-i+1}}R^{h-i+1}})^{-1}\\
&= \tilde{\phi}\ [\prod_{i=1}^{h}(\tilde{a}_i^{C_1^{R^{h-i+1}}\cdots C_{i-1}^{R^{h-i+1}}R^{h-i+1}})^{-1}\,,\prod_{i=1}^{h}(\tilde{b}_i^{C_1^{R^{h-i+1}}\cdots C_{i-1}^{R^{h-i+1}}R^{h-i+1}})^{-1}]\,.
\end{aligned}$$

（这里我们取 $C_1^{R^{h-i+1}}\cdots C_{i-1}^{R^{h-i+1}}=1$ if $i=1$，依此类推。）令

$$A':=\prod_{i=1}^{h}(\tilde{a}_i^{C_1^{R^{h-i+1}}\cdots C_{i-1}^{R^{h-i+1}}R^{h-i+1}})^{-1}\ \text{and}\ B':=\prod_{i=1}^{h}(\tilde{b}_i^{C_1^{R^{h-i+1}}\cdots C_{i-1}^{R^{h-i+1}}R^{h-i+1}})^{-1}$$

可得等式

$$\tilde{\phi}=[Q,R][B',A']\ \text{in}\ \ \mathrm{Mod}(\Sigma_{g'}^1)\,. \tag{5}$$

一个三个交换子恒等式：假设对于 $j=1$，2 我们有

$$\phi_j:=\prod_{i=1}^{h_j}[a_i(j),b_i(j)]\ \ \text{in}\ \ \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)$$

并令 h 为 h_1 和 h_2 中的最大值。必要时添加平凡交换子后，我们可以将两者都表示为 ϕ_j：$=\prod_{i=1}^{h}[a_i(j)\ b_i(j)]$。分别对 $j=1$ 运用 Tsuboi技巧，并对 $j=2$ 运用上述变体，可得两个恒等式

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1 &= [A,B][R,P^{-1}]=[R,P^{-1}][A,B]^{[P^{-1},R]}\\
\tilde{\phi}_2 &= [Q,R][B',A']=[B',A']^{[Q,R]}[Q,R]
\end{aligned}$$

在 Mod($\Sigma_{g'}^1$) 中。三元组 A, B, P 和 A', B', Q 分别由 ϕ_1 和 ϕ_2 中交换子的各项所对应的微分同胚确定，但 R 是 $\Sigma_{g'}^1$ 的同一个微分同胚。根据引理 3(i) 的特殊情形，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_2\tilde{\phi}_1 &= [B', A']^{[Q,R]}[Q, R][R, P^{-1}][A, B]^{[P^{-1},R]} \\ &= [B', A']^{[Q,R]}[Q^{-1}P^{-1}, R^{-1}]^{QR}[A, B]^{[P^{-1},R]}.\end{aligned}$$

重新标记共轭交换子项后，我们得到一个新的三个交换子表达式

$$\tilde{\phi}_2\tilde{\phi}_1 = [A_1, B_1][A_2, B_2][A_3, B_3] \text{ in } \mathrm{Mod}(\Sigma_{g'}^1). \tag{6}$$

我们注意到这里是 $g' = gh$，对于 $h =$，最大值为 $\{h_1, h_2\}$，而不是 $h_1 + h_2$。

关于 (X', f') 和 (X'', f'')：对于 (X, f)，存在如下形式的单值化分解，其具有一个自交数为零的截面 S：

$$[a_1, b_1] \cdots [a_h, b_h] = 1 \text{ in } \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1). \tag{7}$$

在 (2) 中取 $\phi = 1$，进而在 (3) 中得到 $\phi = 1$，等式 (4) 变为：

$$[A, B][R, P^{-1}] = 1 \text{ in } \mathrm{Mod}(\Sigma_{g'}^1). \tag{8}$$

由此关系确定的曲面丛为 (X', f')，其纤维亏格为 $g' = gh$，底空间亏格为 2，并且带有一个自交数为零的截面 S'。

另一方面，如果在构造三个交换子恒等式时取 $\phi_2 = [a_1, b_1] \cdots [a_k, b_k]$ 和 $\phi_1 = [a_{k+1}, b_{k+1}] \cdots [a_h, b_h]$作为 $k := \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor$，则等式 (6) 变为

$$[A_1, B_1][A_2, B_2][A_3, B_3] = 1 \text{ in } \mathrm{Mod}(\Sigma_{g''}^1), \tag{9}$$

其中 $g'' = gk$。由此关系确定的曲面丛为 (X'', f'')，其纤维亏格为 $g'' = g\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor$，底空间亏格为 3，并带有一个自交数为零的截面 S''。

曲面丛的单值化分解是通过映射类群中纤维的平凡字，利用德恩扭转之间的一系列基本关系子推导出来的。根据 [22], ，该曲面丛的符号可表示为这些基本关系子签名贡献的代数和，且结果与所选序列无关。此外，一个关系子及其共轭元的签名贡献相同，因此只需考察少数几个基本关系子。

事后看来，在通过嵌入 $\Sigma_g \hookrightarrow \Sigma_{g'}$ 将 Σ_g^1 中的一个正因子分解嵌入另一个曲面的映射类群之后，我们实际上可以认为，它是从 Mod($\Sigma_{g'}^1$) 中的平凡字通过在 Mod($\Sigma_{g'}^1$) 中使用相同的基本关系子得到的。（更多内容请见下一节。）因此，我们的单值化构造中的初始正因子分解，即 (7)，与带有 $\phi = 1$ 的正因子分解 (2) 具有相同的符号。我们的构造的关键

在于，从那之后，我们推导正因子分解 (8) 和 (9) 时所用的所有关系都很容易看出仅为交换性关系和共轭关系，以及插入／删除相消对，而这些操作的签名贡献均为零。因此，正如所承诺的，我们有 $\sigma(X) = \sigma(X') = \sigma(X'')$。□

3. Shorter expressions for products of Dehn twists

现在我们转而讨论如何将正德恩扭转的乘积表示为少数交换子的乘积，同时只使用映射类群中（德恩扭转生成元之间）具有非负签名贡献的关系子。[1]尽管有这一限制，我们的若干交换子表达式仍使我们能够计算一些新映射类精确且为正的交换子长度和稳定交换子长度。我们将在本节末尾讨论这些结果。

更具体地说，我们在此关注的是将正德恩扭转的乘积 P 表示为少数交换子的乘积 C，使得关系子$P^{-1}C = 1$ 的签名为正。按照 [18, 22], ，我们将采用 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$ 的无限表示，其中以沿所有曲线的德恩扭转作为生成元，并以它们之间的关系子作为关系。我们先回顾其中一些关系子及其签名。

3.1. 映射类群中的基本关系子与签名。

对于任意 a，显然有关系子 $t_a t_a^{-1} = 1$。若两条曲线 a 和 b 不相交，则有交换性关系子 $t_a t_b t_a^{-1} t_b^{-1} = 1$。类似地，对于在一点处横截相交的简单闭曲线 a 和 b，存在辫子关系子$t_a t_b t_a t_b^{-1} t_a^{-1} t_b^{-1} = 1$。所有这些基本关系子的签名均为 $\sigma = 0$。由此可知，对于任意 A, $B \in \mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$，共轭关系子 $A^{-1}B^{-1}A^B B = 1$ 也具有 $\sigma = 0$。这有若干推论。首先，若通过某个嵌入$\Sigma_g^b \hookrightarrow \Sigma_{g'}^{b'}$，从映射类群 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$ 中给定的关系子 $W = 1$ 导出映射类群 $\mathsf{Mod}(\Sigma_{g'}^{b'})$ 中的关系子 $W' = 1$，则 $\sigma(W') = \sigma(W)$，且 $\sigma(W')$ 实际上与该嵌入无关。

有两个具有正符号的重要基本关系子。首先，对于 a in Σ_g^b中的零伦曲线，众所周知的关系子 $t_a^{-1} = 1$具有 $\sigma = +1$。由此可得以下推论：假设我们有一个带截面的曲面丛的单值化分解，它由关系子 $W := C\, t_{\delta_1}^{-k_1} t_{\delta_2}^{-k_2} \cdots t_{\delta_b}^{-k_b} = 1$ in $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$表示，其中 C 是若干交换子的乘积。再假设关系子 $W' = 1$in $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^{b-1})$是由 W 对边界分支 δ_i 封帽一个圆盘得到的。那么根据上述推理，$\sigma(W') = \sigma(W) + k_i$。

[1]这一看似不自然的限制，源于我们的目标：在最后一节中，将这里得到的关系子与其他已知的具有负签名的关系子结合起来，构造单值化分解，从而建立具有正签名的曲面丛。)

我们这场比赛的控球后卫是灯笼关系子in Mod(Σ_0^4)

$$t_{\delta_1}^{-1}t_{\delta_2}^{-1}t_{\delta_3}^{-1}t_{\delta_4}^{-1}t_x t_y t_z = 1,$$

其中曲线 x、y、z、δ_i如图 2 所示。这个关系子也有 $\sigma = +1$；将 $\Sigma_0^4 \hookrightarrow \Sigma_g^b$嵌入后，根据我们上面列出的事实即可得到这一点。

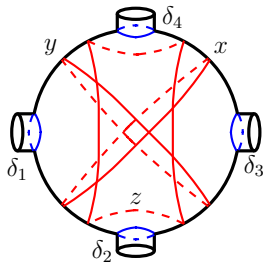

FIGURE 2. Σ_0^4 上的灯笼曲线。

3.2. **将多重扭曲表示为少数几个交换子的乘积**。

在接下来的几个引理中，我们将利用此前列出的关系子（其签名非负），把各种多重扭曲，即沿不相交曲线作正德恩扭转所得的乘积，表示为少数几个交换子的乘积。这些关系分别支撑在 Σ_g^b 中，对应于 $g = 2$、$g = 3$ 和 $g = 5$（并改变 b）；重要的是，我们始终有 $b > 0$，因此对于 $g' \geq g$，同样的关系可以嵌入任意的 Mod($\Sigma_{g'}^{b'}$) 中。

我们将反复使用以下简单却极为有用的观察，这一观察已在若干先前的研究中得到充分运用；例如 [5, 20, 25,28, 35, 36, 47]。设 a_1，a_2，……，a_m和 b_1，b_2，……，b_m是 Σ_g^b上的曲线，且存在一个微分同胚 $F \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g^b)$，使得对所有 $i = 1$，……，m，都有 $F(a_i) = b_i$。于是我们得到如下单交换子表达式

$$t_{a_1}^{k_1} \cdots t_{a_m}^{k_m} t_{b_m}^{-k_m} \cdots t_{b_1}^{-k_1} = [t_{a_1}^{k_1} \cdots t_{a_m}^{k_n}, F] \quad \text{in Mod}(\Sigma_g^b). \tag{10}$$

容易验证，相应的关系子的符号为零 .

在下一个引理的证明中，我们的论证适用于我们特别关注的同一个（多重）扭转的任意次幂，因此我们将一次性推导出所有这些情形的交换子表达式。

引理 5。对于 Σ_2^3的任意两个边界分支 δ_1、δ_2，以及任意正整数 n，存在一个关系子

$$t_{\delta_1}^{-n}t_{\delta_2}^{-n}\prod_{i=1}^{N} C_i(n) = 1 \quad in\ \mathrm{Mod}(\Sigma_2^3)$$

与 $N = \lfloor (n+3)/2 \rfloor$ 交换子 $\{C_i(n)\}$ 和符号 $2n$。

证明。 考虑 Σ_2^3 图3。根据灯笼关系，我们有

$$\begin{aligned} t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{\delta_1} &= t_{x_3}t_{x_1}t_{x_2}, \\ t_b t_{a_2}t_{a_3}t_{\delta_2} &= t_{y_1}t_{y_2}t_{y_3} \end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned} t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{\delta_1}t_{x_2}^{-1} &= t_{x_3}t_{x_1}, \\ t_b t_{a_2}t_{a_3}t_{\delta_2}t_{y_3}^{-1} &= t_{y_1}t_{y_2}. \end{aligned}$$

因此，

$$t_{a_1}^n t_{a_2}^n t_{a_3}^n t_{\delta_1}^n t_{x_2}^{-n} = (t_{x_3}t_{x_1})^n = \left(\prod_{i=1}^{n} t_{x_1}^{i-1}t_{x_3}t_{x_1}^{-i+1}\right) t_{x_1}^n = \left(\prod_{i=1}^{n} (t_{x_3})^{t_{x_1}^{i-1}}\right) t_{x_1}^n,$$

$$t_b^n t_{a_2}^n t_{a_3}^n t_{\delta_2}^n t_{y_3}^{-n} = (t_{y_1}t_{y_2})^n = \left(\prod_{i=1}^{n} t_{y_2}^{i-1}t_{y_1}t_{y_2}^{-i+1}\right) t_{y_2}^n = \left(\prod_{i=1}^{n} (t_{y_1})^{t_{y_2}^{i-1}}\right) t_{y_2}^n.$$

将最后两个等式相乘，得到

$$t_b^n t_{a_1}^n t_{a_2}^{2n} t_{a_3}^{2n} t_{\delta_1}^n t_{\delta_2}^n = \left(\prod_{i=1}^{n} (t_{x_3}t_{y_1})^{V^{i-1}}\right) t_{x_1}^n t_{y_2}^n t_{x_2}^n t_{y_3}^n,$$

其中 $V = t_{x_1}t_{y_2}$。 因此

$$t_{\delta_1}^n t_{\delta_2}^n = \left(\prod_{i=1}^{n} \left(t_{x_3}t_{y_1}t_b^{-1}t_{a_3}^{-1}\right)^{V^{i-1}}\right) (t_{x_1}^n t_{y_2}^n t_{a_1}^{-n}t_{a_2}^{-n}t_{x_2}^n t_{y_3}^n t_{a_2}^{-n}t_{a_3}^{-n}).$$

由于存在一个 Σ_2^3 的微分同胚，将 $(x_1,\ y_2,\ a_1,\ a_2)$ 映射到 $(a_2,\ a_3,\ x_2,\ y_3)$，所以乘积 $t_{x_1}^n t_{y_2}^n t_{a_1}^{-n}t_{a_2}^{-n}t_{x_2}^n t_{y_3}^n t_{a_2}^{-n}t_{a_3}^{-n}$ 是一个交换子。

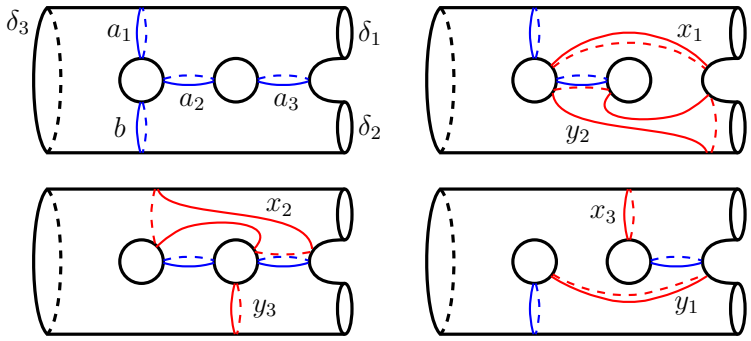

FIGURE 3. 证明引理 5 时使用的 Σ_2^3 上的曲线。

还要注意，由于存在一个将映射 Σ_2^3 $(x_3,\ y_1,\ b,\ a_3)$ 映到 $(a_3,\ b,\ y_1,\ x_3)$ 的微分同胚，乘积

$$t_{x_3}t_{y_1}t_b^{-1}t_{a_3}^{-1}(t_{x_3}t_{y_1}t_b^{-1}t_{a_3}^{-1})^V$$

也是一个交换子。因此，如果 $n = 2k$ 是偶数，那么

$$\prod_{i=1}^{n} \left(t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_3}^{-1}\right)^{V^{i-1}} = \prod_{i=1}^{k} \left(t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_3}^{-1} (t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_3}^{-1})^V\right)^{V^{2i-2}}$$

是 k 个交换子的乘积，且若 $n = 2k+1$，则

$$\prod_{i=1}^{n} \left(t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_3}^{-1}\right)^{V^{i-1}} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_3}^{-1}\right)^{V^{i-1}}\right) \left(t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_3}^{-1}\right)^{V^{2k}}$$

是 $k+1$ 个交换子的乘积。

因此，对于 $N = \lfloor (n+3)/2 \rfloor$，$t_{\delta_1}^n t_{\delta_2}^n = \prod_{i=1}^{N} C_i(n)$，其中 $C_i(n)$ 是交换子，随 n 变化。由于我们只使用了符号为零的关系子和 $2n$ 个灯笼关系子，因此关系子 $t_{\delta_1}^{-n} t_{\delta_2}^{-n} \prod_{i=1}^{N} C_i(n) = 1$ 具有 $\sigma = 2n$。□

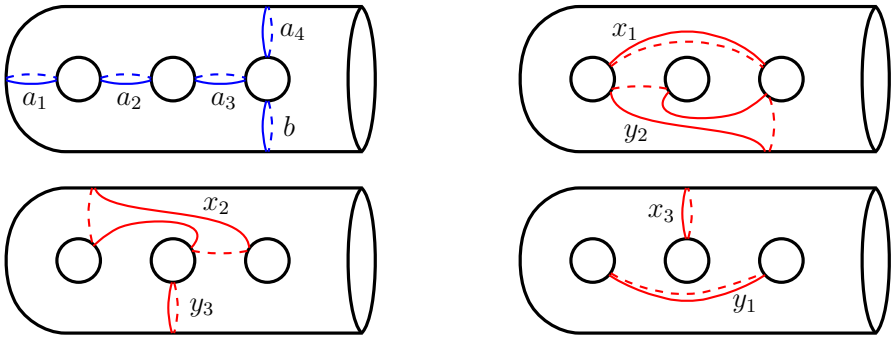

FIGURE 4. 引理 6 及其证明中所用的 Σ_3^1 上的曲线。

接下来，我们在带一个边界分支的亏格为3的曲面上推导出一个由三个交换子构成的表达式。

引理 6。 对于图*4*中的 a_1、a_2、a_3、a_4 所示的曲线，存在一个关系子

$$t_{a_1}^{-2} t_{a_2}^{-2} t_{a_3}^{-2} t_{a_4}^{-2} C_1 C_2 C_3 = 1 \quad in\ \mathrm{Mod}(\Sigma_3^1)$$

其符号为8，其中 C_1、C_2 和 C_3 是交换子。

证明。 根据灯笼关系，我们有

$$t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3} t_{a_4} = t_{x_2} t_{x_3} t_{x_1}$$

or

$$t_{x_2}^{-1} t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3} t_{a_4} = t_{x_3} t_{x_1}.$$

由此得到等式

$$\begin{aligned} t_{x_2}^{-2} t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_{a_4}^2 &= (t_{x_3} t_{x_1})^2 \\ &= t_{x_3} (t_{x_3})^{t_{x_1}} t_{x_1}^2 \end{aligned}$$

因此

$$t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_{a_4}^2 = t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 t_{x_3} (t_{x_3})^{t_{x_1}}.$$

因此,

$$\begin{aligned} t_{a_1}^4 t_{a_2}^4 t_{a_3}^4 t_{a_4}^4 &= t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 t_{x_3} \left(t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_{a_4}^2\right) (t_{x_3})^{t_{x_1}} \\ &= t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 t_{x_3} \left(t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 t_{x_3} (t_{x_3})^{t_{x_1}}\right) (t_{x_3})^{t_{x_1}} \\ &= t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 \left(t_{x_1}^2 t_{x_2}^2\right)^{t_{x_3}} t_{x_3}^2 (t_{x_3}^2)^{t_{x_1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

通过类似的计算，灯笼关系

$$t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3} t_b = t_{y_1} t_{y_2} t_{y_3}$$

得到

$$t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_b^2 = t_{y_2}^2 t_{y_3}^2 t_{y_1} (t_{y_1})^{t_{y_2}}$$

and

$$t_{a_1}^4 t_{a_2}^4 t_{a_3}^4 t_b^4 = t_{y_2}^2 t_{y_3}^2 \left(t_{y_2}^2 t_{y_3}^2\right)^{t_{y_1}} t_{y_1}^2 (t_{y_1}^2)^{t_{y_2}}. \tag{12}$$

由等式 (11) 和 (12) 可得

$$\begin{aligned} & t_{a_1}^8 t_{a_2}^8 t_{a_3}^8 t_{a_4}^4 t_b^4 \\ &= t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 \left(t_{x_1}^2 t_{x_2}^2\right)^{t_{x_3}} t_{x_3}^2 (t_{x_3}^2)^{t_{x_1}} \cdot t_{y_2}^2 t_{y_3}^2 \left(t_{y_2}^2 t_{y_3}^2\right)^{t_{y_1}} t_{y_1}^2 (t_{y_1}^2)^{t_{y_2}} \\ &= \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{x_2}^2 t_{y_3}^2\right) \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{x_2}^2 t_{y_3}^2\right)^X \left(t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 (t_{x_3}^2 t_{y_1}^2)^Y\right), \end{aligned}$$

其中 $X = t_{x_3} t_{y_1}$、 $Y = t_{x_1} t_{y_2}$。 接着我们写出

$$\begin{aligned} t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_{a_4}^2 = & \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_2}^{-2} \cdot t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 t_{a_2}^{-2} t_{a_3}^{-2}\right) \\ & \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_3}^{-2} t_{a_4}^{-2} \cdot t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 t_{a_1}^{-2} t_b^{-2}\right)^X \\ & \left(t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_3}^{-2} \cdot (t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 t_{a_2}^{-2} t_b^{-2})^Y\right). \end{aligned}$$

现在我们证明，右侧的三个因子各自都是一个交换子。很容易看出（例如，沿给定的四组曲线切开曲面），存在 $F_i \in \mathbf{Diff}^+(\Sigma_3^1)$，其中 $i = 1,2,3$，使得

- $F_1(x_1, y_2, a_1, a_2) = (a_2, a_3, x_2, y_3)$
- $F_2(x_1, y_2, a_3, a_4) = (a_1, b, x_2, y_3)$
- $F_3(x_3, y_1, a_1, a_3) = (a_2, b, x_3, y_1)$。

我们现在有

$$\begin{aligned} \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_2}^{-2}\right) \cdot \left(t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 t_{a_2}^{-2} t_{a_3}^{-2}\right) &= \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_2}^{-2}\right) \left(t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{x_1}^{-2} t_{y_2}^{-2}\right)^{F_1} \\ &= [t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_2}^{-2}, F_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_3}^{-2} t_{a_4}^{-2}\right)\cdot\left(t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 t_{a_1}^{-2} t_b^{-2}\right) &= \left(t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_3}^{-2} t_{a_4}^{-2}\right)\left(t_{a_3}^2 t_{a_4}^2 t_{x_1}^{-2} t_{y_2}^{-2}\right)^{F_2}\\ &= [t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_3}^{-2} t_{a_4}^{-2}, F_2],\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left(t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_3}^{-2}\right)\left(t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 t_{a_2}^{-2} t_b^{-2}\right)^{Y} &= \left(t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_3}^{-2}\right)\left(t_{a_1}^2 t_{a_3}^2 t_{x_3}^{-2} t_{y_1}^{-2}\right)^{YF_3}\\ &= [t_{x_3}^2 t_{y_1}^2 t_{a_1}^{-2} t_{a_3}^{-2}, YF_3].\end{aligned}$$

由于交换子的共轭元仍是交换子，因此我们已将 $t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_{a_4}^2$ 写成三个交换子的乘积 $C_1C_2C_3$ 。

对我们目前使用过的关系子进行简单的整理可知，关系子$t_{a_1}^{-2} t_{a_2}^{-2} t_{a_3}^{-2} t_{a_4}^{-2}\cdot C_1C_2C_3 = 1$ 的符号为 8，这是由于我们在推导过程中使用了八个灯笼关系子。□

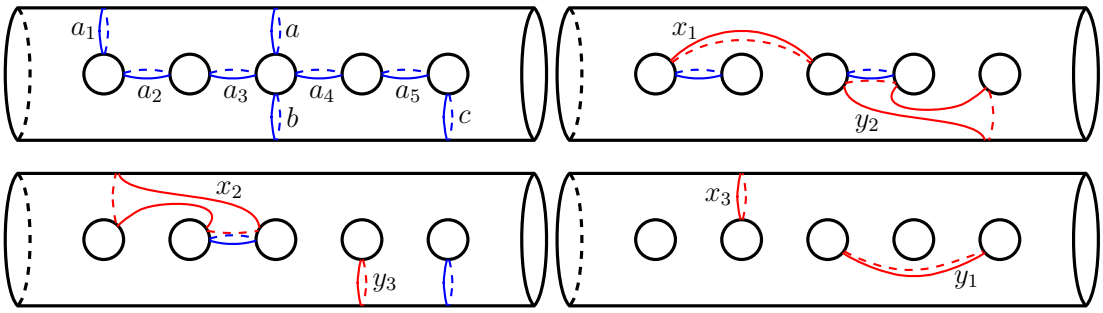

FIGURE 5. 证明引理7时在 Σ_5^2 上使用的曲线。

最后，我们在亏格为 5 的曲面 Σ_5^2上得到一个由两个交换子构成的表达式 :

引理7。 设 a 和 b 是Σ_5^2 上两两不相交的非分离曲线，使得$a\cup b$ 将曲面 Σ_5^2 分成两个亏格为2 的分支，并设 x 是 $a\cup b$补集中的另一条非分离曲线。那么存在一个关系子

$$t_a^{-1} t_b^{-1} t_x^{-2} C_1C_2 = 1 \quad in\ \mathrm{Mod}(\Sigma_5^2)$$

其符号为4。

证明。 考虑 Σ_5^2 上如图5所示的曲线。根据灯笼关系，我们有

$$\begin{aligned}t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3} t_a &= t_{x_2} t_{x_3} t_{x_1},\\ t_b t_{a_4} t_{a_5} t_c &= t_{y_1} t_{y_2} t_{y_3}.\end{aligned}$$

现在按照引理 6 的证明可得

$$t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_a^2 = t_{x_1}^2 t_{x_2}^2 t_{x_3} t_{x_3}^{t_{x_1}},$$
$$t_b^2 t_{a_4}^2 t_{a_5}^2 t_c^2 = t_{y_2}^2 t_{y_3}^2 t_{y_1} t_{y_1}^{t_{y_2}},$$

因此我们有

$$t_{a_1}^2 t_{a_2}^2 t_{a_3}^2 t_{a_4}^2 t_{a_5}^2 t_a^2 t_b^2 t_c^2 = t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 \cdot t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 \cdot t_{x_3} t_{y_1} \cdot (t_{x_3} t_{y_1})^{t_{x_1} t_{y_2}},$$

或者等价地

$$t_a t_b t_{a_1}^2 = (\, t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_2}^{-2} t_{a_4}^{-2} \cdot\, t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 t_{a_3}^{-2} t_c^{-2}\,) \cdot (\, t_{x_3} t_{y_1} t_a^{-1} t_{a_5}^{-1} \cdot (t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_5}^{-1})^{t_{x_1} t_{y_2}}\,).$$

可以很容易地找到 F_1, $F_2 \in \mathsf{Diff}^+(\Sigma_5^2)$, 使得

- $F_1(x_1, y_2, a_2, a_4) = (a_3, c, x_2, y_3)$,
- $F_2(x_3, y_1, a, a_5) = (b, a_5, x_3, y_1)$.

由此可知, 再次使用 (10), 我们可以将 $t_{x_1}^2 t_{y_2}^2 t_{a_2}^{-2} t_{a_4}^{-2} \cdot\, t_{x_2}^2 t_{y_3}^2 t_{a_3}^{-2} t_c^{-2}$ 以及 $t_{x_3} t_{y_1} t_a^{-1} t_{a_5}^{-1} \cdot (t_{x_3} t_{y_1} t_b^{-1} t_{a_5}^{-1})^{t_{x_1} t_{y_2}}$ 表示为单个交换子。因此我们得到一个关系子 $t_a^{-1} t_b^{-1} t_{a_1}^{-2} C_1 C_2 = 1$, 其符号为 4。□

3.3. **某些映射类的交换子长度**。

对于群 G 的换位子子群中的元素 x, 令 $\mathsf{cl}(x)$ 表示其交换子长度, 即将 x 表示为交换子乘积所需的最少交换子个数; 令 $\mathsf{scl}(x) := \lim_{n\to\infty} \mathsf{cl}(x^n)\, n$ 表示其稳定交换子长度 [13]。

设 c 是 Σ_g^b 上的一条非分离曲线。回顾一下, 当 $g \geq 3$ 时, 映射类群 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$ 是完美群; 而 $H_1(\mathsf{Mod}(\Sigma_2^b)) = \mathbb{Z}_{10}$ 则由 t_c 的类生成; 例如参见 [34]。从第 2 节中对 Tsuboi技巧的演绎应可清楚看出, 当 g 足够大时, $\mathsf{cl}(t_c^n) = 2$ 属于 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$（参见 [40]）。另一方面, 对于任意 g, $n \in \mathbb{Z}^+$ [9], $\mathsf{cl}(t_c^n) \geq 2$。由此引出下面的问题, 这是对 [32] 中关于 $\mathsf{cl}(t_c^n)$ 的 Mess的问题的细化。为便于接下来的讨论, 我们定义 $g_2(n)$ 为满足 $\mathsf{cl}(t_c^n) = 2$ 属于 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^1)$ 的最小亏格 $g \geq 2$, 其中曲线 c 为非分离曲线; 只有当 $g = 2$ 时, 考虑 $n \equiv 0$ (模 10) 才有意义。

问题 8。 给定一个正整数 n, $g_2(n)$ 等于多少?

在 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^b)$ 中, $b > 1$ 的最小亏格与 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^1)$ 中的相同, 因为两个亏格相同且带边界的曲面可以彼此嵌入, 因此我们可以将一方的交换子表达式用于另一方。根据同样的推理, $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^1)$ 中 t_c^n 的任意交换子表达式也为 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g)$ 中的最小亏格提供一个上界。然而, 我们尚不清楚这里的定性差异是否会转化为定量差异; 事实上, 当

$g = 1$，我们可以证明 $\mathrm{cl}(t_c^{12}) = 2$ 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_1)$ 中成立，但在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_1^1)$ 中显然不成立，因为 t_c 的任何非平凡次幂都不是交换子的乘积。最后补充一点，除了我们不想在此进一步离题之外，没有理由不对分离曲线考虑这个问题。

在没有更精确的下界时，要完全一般地回答上述问题颇具挑战。尽管如此，我们仍能确定若干个 n 值对应的最小亏格$g_2(n)$。现将其记录如下：

推论 9. 我们有 $g_2(1) = g_2(2) = g_2(4) = 3$，以及 $g_2(10) = 2$。

证明。 Ozbagci 与第二作者在 [36] 中证明了当$g = 3$时 $\mathrm{cl}(t_c) = 2$，而第二作者在 [35] 中证明了当 $g = 2$时 $\mathrm{cl}(t_c^{10}) = 2$。

对于 t_c^2 和 t_c^4，我们按如下方式进行。令 $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ 表示 $\partial\Sigma_2^3$的三个分支。由引理 5 可得 $t_{\delta_1} t_{\delta_2} = C_1 C_2$ 以及 $t_{\delta_1}^2 t_{\delta_2}^2 = D_1 D_2$，其中 C_j，D_j 是映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_2^3)$ 中的某些交换子。考虑一个嵌入 $\Sigma_2^3 \hookrightarrow \Sigma_3^1$，它通过将一个圆柱连接到 Σ_2^3的两个边界分支 δ_1 和 δ_2 而得到。δ_1 和 δ_2 的像同痕于 Σ_3^1中的同一条非分离曲线 c，而剩下的边界分支映射到 Σ_3^1的唯一边界分支。利用此嵌入诱导的同态 $\mathrm{Mod}(\Sigma_2^3) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_3^1)$，我们由此得到两个新的表达式，其形式为 $t_c^2 = C_1' C_2'$ 和 $t_c^4 = D_1' D_2'$，它们位于映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_3^1)$ 中，其中 C_j'，D_j' 是交换子。

上述考虑的对象均不属于较小 g 时 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)$ 的换位子子群，因此我们得到了 $g_2(n)$ 的所述值。□

注记 10. 推论 9 给出了 Kirby 的列表 [32] 中问题 2.13(b) 对 $n = 1$，2 和 4 的完整解答（即涵盖所有 $g \geq 3$）。通过类似的论证，我们还可以得出，对于所有 $g \geq 3$，$\mathrm{cl}(t_c^3) \leq 3$，且当 $g \geq 5$ 时等于 2。

注记 11. 若 t_c^n 可表示为 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)$ 中两个交换子的乘积，我们就得到一个底空间为 Σ_2、亏格为 g 的 Lefschetz纤维化，其中 n 个节点都聚集在同一个纤维中。于是，[9, 定理 8] 指出 $g \geq \frac{n+6}{18}$。因此，对每个 n，都有$\overline{g_2}(n) \geq \frac{n+6}{18}$。

最后，我们考察当 $g \geq 2, b > 0$ 时，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 中边界多重扭转$\Delta = t_{\delta_1} t_{\delta_2} \cdots t_{\delta_b}$的稳定交换子长度。注意，即使在 $g = 2$ 的情况下，Δ 也属于 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 的换位子子群。

在 [5], 中，Monden 和本文作者证明了，当 $b = 1$时，对于任意正的 n，$\mathrm{cl}(\Delta^n) = \lfloor (n+3)/2 \rfloor$，因此 $\mathrm{scl}(\Delta) = 1/2$。对于边界多重扭转而言，主要的收获是我们得到的尖锐下界；这可以解释为 Milnor-Wood 不等式的一种体现 [4, 26]。由于同一下界对任意 $b > 1$也适用于 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$，只要我们能够实现该下界，就可以精确计算 $\mathrm{cl}(\Delta^n)$ 和 $\mathrm{scl}(\Delta)$。而将额外的边界分支封口后，引理 5 恰好对 $b = 2$做到了这一点，正如我们

现在可以将 $\Delta^n = t_{\delta_1}^n t_{\delta_2}^n$ 表示为 $\mathsf{Mod}(\Sigma_2^2)$ 中 $\lfloor (n+3)/2 \rfloor$ 个交换子的乘积。总之，当 $b = 2$ 时，在 $\mathsf{Mod}(\Sigma_g^2)$ 中我们也有 $\mathsf{cl}(\Delta^n) = \lfloor (n+3)/2 \rfloor$ 以及 $\mathsf{scl}(\Delta) = 1/2$。我们将这些计算也记录如下：

推论 12. 令 Δ 为映射类群(Σ_g^b)中的边界多重扭转。对于任意 $g \geq 2$ 和 $b = 1,\ 2$，我们有 稳定换位子长度$(\Delta) = 1/2$。

这里我们还可以多说一点：设曲面上的一列曲线 $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ 为一条链，若 c_i 和 c_j，则它们横截相交于一点（$j = i \pm 1$ 时）；否则互不相交。对于 Σ_g^1 上的一条链 $(c_1, c_2, \dots, c_{2g})$，以及 Σ_g^2 上的一条链 $(c_1, c_2, \dots, c_{2g+1})$，考虑以下元素

$$S := t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_{2g}} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1) \quad \text{and} \quad T := t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_{2g+1}} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g^2).$$

众所周知，$S^{4g+2} = \Delta$ 和 $T^{2g+2} = \Delta$；例如参见 [23]。由于稳定换位子长度是齐次的，且稳定换位子长度$(\Delta) = 1/2$，我们得到在映射类群(Σ_g^1)中稳定换位子长度$(S) = 1/(4(2g+1))$，以及在映射类群(Σ_g^2)中稳定换位子长度$(T) = 1/(4(g+1))$，$g \geq 2$。

4. New surface bundles with positive signatures

本节最后将用于证明我们的主要定理。

定理 *1* 的证明：我们先给出一个初等观察（参见 [20]）：假设我们有一个单值化分解

$$C_1 \cdots C_h = 1 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)$$

对应于一个以 Σ_h 为底空间、具有自交数为零的截面的 Σ_g 丛，其中 $\{C_i\}$ 是交换子。将这个曲面丛记作（X，f）。那么对于任意给定的 $g' \geq g$ 和 $h' \geq h$，我们可以导出另一个单值化分解

$$C_1' \cdots C_h' C_{h+1}' \cdots C_{h'} = 1 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\Sigma_{g'}^1)$$

对应于一个以 $\Sigma_{h'}$ 为底空间、具有自交数为零的截面的 $\Sigma_{g'}$ 丛，方法是利用任意嵌入 $\Sigma_g^1 \hookrightarrow \Sigma_{g'}^1$，并将平凡交换子 C_{h+1}'，.....，C_h' 连接到交换子 C_i' 的乘积上，这些交换子是原交换子C_i 的像。由于嵌入一个关系或添加平凡交换子都不会改变符号，因此，对于我们得到的新曲面丛（X'，f'），有 $\sigma(X') = \sigma(X)$。[2]

应当注意，为了在这里提高纤维亏格，我们需要初始曲面丛 $(X,\ f)$ 具有一个自交数为零的截面，或者等价地，具有一个支撑在 Σ_g^1 而非 Σ_g 上的交换子恒等式。请回想，这也是应用定理 4 的必要条件。

[2]这一构造足以解决存在性问题：是否存在具有指定纤维属和底曲面属的正特征数曲面丛。另一方面，若要构造符号相对于拓扑而言更大的曲面丛，显然最好使用包含非平凡正特征数曲面丛的扩张。

考虑到上述内容，我们将从几个基例出发，构造出前面承诺的具有正签名的曲面丛。

$h \geq 5$ 以及$g \geq 3$: 对于左侧图 6 中所示的曲线 a_i, δ_j在 Σ_1^4上，{style id='10'>四孔环面关系在 [37] 中给出了一个关系子

$$t_{\delta_1}^{-1}t_{\delta_2}^{-1}t_{\delta_3}^{-1}t_{\delta_4}^{-1}(t_{c_0}t_{c_1}t_{c_3}t_{c_0}t_{c_2}t_{c_4})^2 = 1 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\Sigma_1^4)$$

其中有 $\sigma = -4$。我们将 $\Sigma_1^4 \hookrightarrow \Sigma_3^1$ 嵌入，使得 Σ_1^4 的边界分支δ_i 的像如图 6 右侧所示，并以相同的字母标记。由于 δ_2 和 δ_4 在 Σ_3^1中同痕，嵌入后我们用同一条曲线表示它们。每个 c_i 的像标记为 a_i。

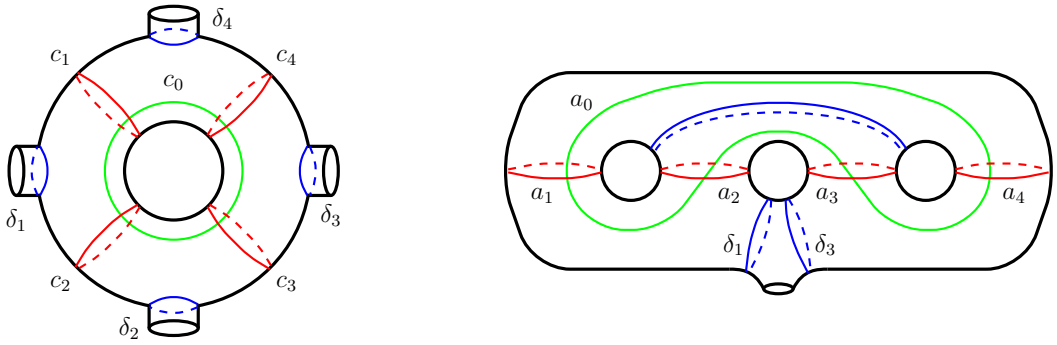

FIGURE 6. 4孔环面曲线及嵌入 $\Sigma_1^4 \hookrightarrow \Sigma_3^1$

因此，在带有 $\sigma = -4$的 $\mathrm{Mod}(\Sigma_3^1)$ 中，我们得到如下关系子:

$$1 = t_{\delta_1}^{-1}t_{\delta_2}^{-1}t_{\delta_3}^{-1}t_{\delta_4}^{-1}(t_{a_0}t_{a_1}t_{a_3}t_{a_0}t_{a_2}t_{a_4})^2 = t_{a_0}t_{z_1}t_{z_2}t_{z_3}(t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{a_4})^2\,,$$

其中 $z_1 = t_{a_1}t_{a_3}(a_0)$、 $z_2 = t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{a_4}(a_0)$和 $z_3 = t_{a_1}t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{a_3}t_{a_4}(a_0)$。利用式（10）和引理 6，我们可以将其变为

$$\begin{aligned} 1 &= (t_{\delta_1}^{-1}t_{a_0}\,t_{z_1}t_{\delta_2}^{-1})(t_{\delta_3}^{-1}t_{z_2}\,t_{z_3}t_{\delta_4}^{-1})(t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{a_4})^2 \\ &= C_4C_5(t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{a_4})^2 \cdot (t_{a_1}t_{a_2}t_{a_3}t_{a_4})^{-2}C_1C_2C_3 \\ &= C_4C_5 \cdot C_1C_2C_3\,, \end{aligned}$$

或者等价地，进入关系子

$$C_1C_2C_3C_4C_5 = 1 \quad \text{in} \quad \mathrm{Mod}(\Sigma_3^1)\,,$$

其符号为 $\sigma = -4+8 = 4$。这规定了一个在 Σ_5 上的 Σ_3 束，其具有 $\sigma = 4$ 和一个自交数为零的截面。进而，对于任意 $g \geq 3$ 和 $h \geq 5$，我们得到一个在 Σ_h 上的 Σ_g 束，其具有 $\sigma = 4$（以及一个自交数为零的截面）。

$h = 4$ 以及 $g \geq 5$：取一个嵌入 $\Sigma_1^4 \hookrightarrow \Sigma_5^1$，使得四孔环面关系中的 c_i 曲线（参见图 6）如图 7 左侧所示，而边界曲线 δ_j 映射到分离曲线 d_j。

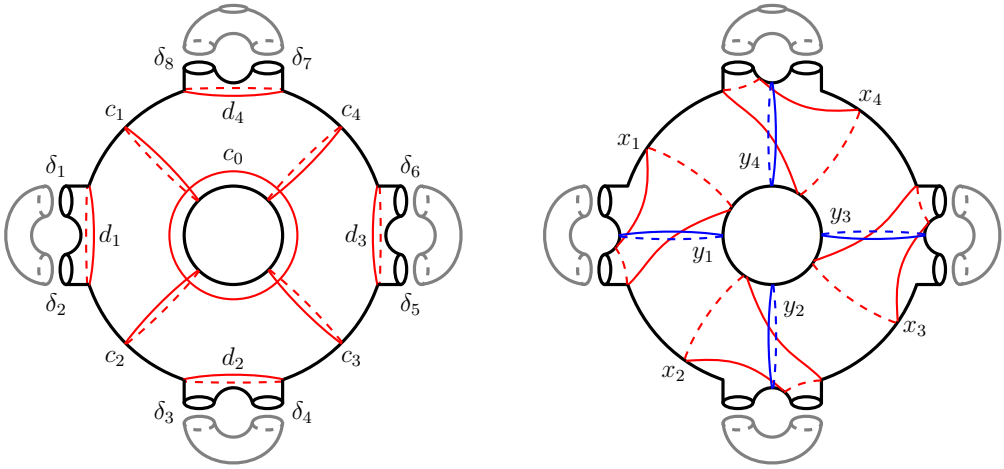

FIGURE 7. Σ_5^1上的曲线。

以下为简便起见，将 t_{c_i} 记作 t_i。由四孔环面关系，我们在映射类群(Σ_5^1)中得到：

$$\begin{aligned} t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4} &= t_0t_1t_3t_0t_2t_4t_0t_1t_3t_0t_2t_4 \\ &= t_0t_0^{t_1t_3t_0t_2t_4}t_1t_3t_0t_2t_4t_1t_3t_0t_2t_4 \\ &= t_0t_0^{t_1t_3t_0t_2t_4}t_0^{t_1t_3}t_1^2t_3^2t_2t_4t_0t_2t_4 \\ &= t_0t_0^{t_1t_3t_0t_2t_4}t_0^{t_1t_3}t_0^{t_1^2t_3^2t_2t_4}t_1^2t_2^2t_3^2t_4^2 \\ &= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}t_1^2t_2^2t_3^2t_4^2, \end{aligned}$$

其中 $v_0 = t_1t_3t_0t_2t_4(c_0)$、 $v_1 = t_1t_3(c_0)$和 $v_2 = t_1^2t_3^2t_2t_4(c_0)$。注意， c_0 和v_0 围成了 Σ_5^1中的一个子曲面 Σ_2^2。我们将等式两边同乘$t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdots t_{\delta_8}$，并对 $i = 1$，2，3，4，应用四个如下形式的灯笼关系

$$t_it_{i+1}t_{\delta_{2i-1}}t_{\delta_{2i}} = t_{y_i}t_{x_i}t_{d_i}\,,$$

在约定 $t_5 = t_1$ to get 的前提下

$$\begin{aligned} &t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4}t_{\delta_1}t_{\delta_2}t_{\delta_3}t_{\delta_4}t_{\delta_5}t_{\delta_6}t_{\delta_7}t_{\delta_8} \\ &\quad= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}\cdot t_1t_2t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdot t_2t_3t_{\delta_3}t_{\delta_4}\cdot t_3t_4t_{\delta_5}t_{\delta_6}\cdot t_4t_1t_{\delta_7}t_{\delta_8} \\ &\quad= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}\cdot t_{y_1}t_{x_1}t_{d_1}\cdot t_{y_2}t_{x_2}t_{d_2}\cdot t_{y_3}t_{x_3}t_{d_3}\cdot t_{y_4}t_{x_4}t_{d_4} \\ &\quad= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}\cdot t_{y_1}t_{x_1}\cdot t_{y_2}t_{x_2}\cdot t_{y_3}t_{x_3}\cdot t_{y_4}t_{x_4}\cdot t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4}. \end{aligned}$$

现在，约去所有 t_{d_i}，得到

$$\begin{aligned} t_{\delta_1}t_{\delta_2}t_{\delta_3}t_{\delta_4}t_{\delta_5}t_{\delta_6}t_{\delta_7}t_{\delta_8} &= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}\cdot t_{y_1}t_{x_1}\cdot t_{y_2}t_{x_2}\cdot t_{y_3}t_{x_3}\cdot t_{y_4}t_{x_4} \\ &= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}\cdot t_{y_1}t_{y_2}t_{y_3}t_{y_4}\cdot t_{x_1}t_{x_2}t_{x_3}t_{x_4}\,. \end{aligned}$$

由 Σ_1^8 支持，这是一个 8孔环面关系子（参见 [37, 25]）。

因此，利用（10）和引理7，我们有

$$\begin{aligned} 1 &= t_0t_{v_0}t_{v_1}t_{v_2}\cdot t_{y_1}t_{y_2}t_{y_3}t_{y_4}t_{\delta_1}^{-1}t_{\delta_3}^{-1}t_{\delta_5}^{-1}t_{\delta_7}^{-1}\cdot t_{x_1}t_{x_2}t_{x_3}t_{x_4}t_{\delta_2}^{-1}t_{\delta_4}^{-1}t_{\delta_6}^{-1}t_{\delta_8}^{-1} \\ &= (t_0t_{v_0}t_{\delta_1}^2)\cdot(t_{v_1}t_{\delta_1}^{-1}t_{\delta_1}^{-1}t_{v_2}) \\ &\qquad\qquad \cdot(t_{y_1}t_{y_2}t_{y_3}t_{y_4}t_{\delta_1}^{-1}t_{\delta_3}^{-1}t_{\delta_3}^{-1}t_{\delta_7}^{-1}\cdot t_{x_1}t_{x_2}t_{x_3}t_{x_4}t_{\delta_2}^{-1}t_{\delta_4}^{-1}t_{\delta_6}^{-1}t_{\delta_8}^{-1}) \\ &= C_1C_2\cdot C_3\cdot C_4\,, \end{aligned}$$

在映射类群(Σ_5^1)中，其中所有的 C_i 都是交换子。这里我们用到了这样一个事实：存在两个 Σ_5^1 的微分同胚，其中一个将(v_1,δ_1)映到(δ_1,v_2)，另一个将($y_1,y_2,y_3,y_4,\delta_1,\delta_3,\delta_5,\delta_7$)映到($\delta_2,\delta_4,\delta_6,\delta_8,x_1,x_2,x_3,x_4$)。（注意，对于$i=1$，$\delta_i=\delta_{i+1}$为 3、5。）

追踪所涉及的基本关系子，可轻易看出，八孔环面关系子有 $\sigma=-4+4(+1)=0$。由于引理7中的关系子$t_0^{-1}t_{v_0}^{-1}t_{\delta_1}^{-2}\cdot C_1C_2=1$ 有 $\sigma=4$，因此我们得出，映射类群(Σ_5^1)中的关系子 $C_1C_2C_3C_4=1$ 有 $\sigma=0+4=4$。这给出了一个在 Σ_4上的 Σ_5 丛，其具有 $\sigma=4$和一个自交数为零的截面。进而，对任意 $g\geq 5$，我们得到一个在 Σ_4 上的 Σ_g丛，其具有 $\sigma=4$ （以及一个自交数为零的截面）。

$g=4$ 并且$h=4$: 接下来我们构造一个 Σ_4–丛，它位于 Σ_4 且没有自交数为零的截面之上。根据 [14, 定理 1，3], 存在一个亏格为 4 的半单全纯纤维化，其基底为 T^2，恰有两个奇异纤维，每个奇异纤维都由一条亏格为 2 的曲线和一条椭圆曲线组成，并且两者在两点处横截相交。该纤维化的全空间光滑地同胚于一个乘积 $\Sigma_2\times\Sigma_2$，因此它具有 $\sigma=0$。于是，我们得到一个关系子

$$t_{a_1}t_{a_2}t_{b_1}t_{b_2}C_4=1 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\Sigma_4)$$

其中 $\sigma=0$，且 C_4 是一个交换子。由于存在一个 $F\in\mathrm{Diff}^+(\Sigma_4)$，使得$F(a_i)=b_i$，我们可以将上述关系子改写为

$$\begin{aligned} 1 &= t_{a_1}t_{a_2}(t_{a_1}t_{a_2})^FC_4 \\ &= (t_{a_1}t_{a_2})^2[(t_{a_1}t_{a_2})^{-1},F]\,C_4 \\ &= (t_{a_1}^2t_{a_2}^2)\cdot C_3C_4\,, \end{aligned}$$

其中我们记 $C_3:=[(t_{a_1}t_{a_2})^{-1},\ F]$。现在我们可以调用引理 5 来替换第一个因子，从而得到关系子

$$C_1C_2C_3C_4=1 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\Sigma_4)$$

其具有 $\sigma=0+4=4$。

$h = 3, \quad g \geq 9$ 和 $h = 2, \quad g \geq 15$: 考虑我们在上文构造的 Σ_3–丛，它具有 $\sigma = 4$ 和一个自交数为零的截面。根据定理 4，我们可以由此导出另外两个丛：一个是 Σ_{15}–丛，底空间为 Σ_2 ；另一个是 Σ_9–丛，底空间为 Σ_3；二者也都具有 $\sigma = 4$ 和自交数为零的截面。进而，对于任意 $g \geq 15$，我们可得到一个 Σ_g–丛，底空间为 Σ_2 ，且具有 $\sigma = 4$ ；对于任意 $g \geq 9$，还可得到一个 Σ_g–丛，底空间为 Σ_3 ，且具有 $\sigma = 4$。

我们构造的所有曲面丛都可以赋予 Thurston 辛形式。这就完成了定理 1 的□证明。

注13。 在 [20], Endo、Kotschick、Ozbagci、Stipsicz 和第二作者的工作中，他们为所有 $g \geq 3$和 $h \geq 9$构造了具有正签名的曲面丛。另一方面，Bryan 和 Donagi 在 [10] 中证明，正签名曲面丛的底空间亏格可以小至 2。Lee 在 [41], 中部分改进了这些结果，而 Monden 在 [47], 中取得了最成功的改进；特别地，他为所有 $g \geq 39$ 和 $h = 2$构造了具有正签名的曲面丛。

注14。 按照 [3], 中的方法，我们的曲面丛进一步给出了曲面上的非全纯曲面丛示例；至少对于每个 $g \geq 16, h = 2$； $g \geq 10, h = 3$； $g \geq 6, h = 4$； $g \geq 3$, $h = 5$ 以及 $g \geq 3, h \geq 6$，这些曲面丛具有正签名。特别地，对于除有限多个 (g, h) 对之外的所有情形，我们回答了是否存在在 Σ_h 上的、满足 $\sigma \neq 0$ 的非全纯 Σ_g–丛这一问题。所有这些非全纯示例的签名都可以取为 4。事实上，据我们所知，还没有具有 $\sigma = 4$的全纯曲面丛示例。是否存在某种障碍?

注 15。 尽管本文的技术或许可以用于构造具有较高陈斜率 c_1^2/c_2 （等价地，较高的 σ/e 比值）的曲面丛，但目前我们还没有任何斜率高于 Catanese 和 Rollenske 在 [15], 中得到的例子。因此，任何（辛）曲面上的曲面丛的陈数是否总是满足$c_1^2/c_2 \leq 2 + 2/3$，就更令人好奇了。

致谢。 作者谨向马克斯·普朗克数学研究所致谢。本研究是在作者逗留波恩期间于该所完成的。第一作者获得了西蒙斯基金会资助（项目编号634309）和美国国家科学基金会资助（项目编号DMS-2005327）。

References

[1] M. Akhavan-Malayeri and A. Rhemtulla，自由群中交换子的乘积，Internat. J. Algebra Comput. 13 (2003), no. 2, 231–240.[2] M. F. Atiyah，纤维丛的特征数，整体分析（纪念K. Kodaira论文集），第73–84页，东京大学出版社，东京，1969.[3] R. I. Baykur，非全纯曲面丛与Lefschetz纤维化，Math. Res. Lett. 19 (2012) 567–574.[4] R. I. Baykur，平坦丛与交换子长度，Michigan Math. J. 63(2) (2014) 333–344.[5] R. I. Baykur、M. Korkmaz和N. Monden，曲面丛的截面与Lefschetz纤维化，Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 11, 5999–6016.[6] R. I. Baykur和D. Margalit，曲面上的不可分解曲面丛，J. Topol. Anal. 5 (2013), no. 1, 161–181.[7] A. Beyaz、P. Naylor、S. Onaran和D. Park，从黎曼曲面的自同构到光滑四维流形，Math Res. Lett. 27(3), 629–645, 2020年.[8] F. A. Bogomolov，射影流形上的全纯张量与向量丛。Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 42, 1227–1287, 1439 (1978)（俄文）。[9] V. Braungardt和D. Kotschick，Lefschetz纤维化中临界点的聚集与辛Szpiro不等式，Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 8, 3217–3226.[10] J. Bryan和R. Donagi，小亏格曲面上的曲面丛，Geom. Topol. 6 (2002), 59–67.[11] J. Bryan、R. Donagi和A. Stipsicz，曲面丛：一些有趣的例子，Turkish J. Math. 25 (2001), no. 1, 61–68.[12] D. Burago、S. Ivanov和L. Polterovich，几何来源群上的共轭不变范数，《微分同胚群》，221–250，《纯数学高级研究》52，日本数学会，东京，2008。几何来源群上的共轭不变范数[13] D. Calegari，稳定换位子长度，MSJ Memoirs，第20卷，日本数学会，东京，2009.[14] F. Catanese、P. Corvaja和U. Zannier，纤维化代数曲面与辛群中的交换子，J. Algebra 562 (2020), 200–228.[15] F. Catanese和S. Rollenske，双重Kodaira纤维化，J. Reine Angew. Math. 628 (2009) 205–233.[16] S. S. Chern、F. Hirzebruch和J.-P. Serre，论纤维化流形的指标，Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 587–596.[17] M. Culler，利用曲面求解自由群中的方程，Topology 20 (1981), no. 2, 133–145.[18] H. Endo，构造具有非零特征数的曲面上的曲面丛，Osaka J. Math. 35 (1998), no. 4, 915–930.[19] H. Endo，Meyer特征数余循环与超椭圆纤维化，Math. Ann. 316 (2000), no. 2, 237–257.[20] H. Endo、M. Korkmaz、D. Kotschick、B. Ozbagci和A. Stipsicz，交换子、Lefschetz纤维化与曲面丛的特征数，Topology 41 (2002), no. 5, 961–977.[21] H. Endo和D. Kotschick，有界上同调与映射类群的非一致完美性，Invent. Math. 169–175 (2001).[22] H. Endo和S. Nagami，映射类群中关系的特征数与非全纯Lefschetz纤维化，Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 8, 3179–3199.[23] B. Farb和D. Margalit，映射类群入门，普林斯顿数学丛书第49卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012。

[24] G. Gonz´alez D´ıez 和 W. J. Harvey，《模空间中的完备曲线 I、II》，《剑桥哲学学会数学会刊》110（1991），第 3 期，461–466，467–472。[25] N. Hamada，《环面上 Lefschetz纤维化奇异纤维最小数目的上界》，《密歇根数学杂志》63（2014），275–291。[26]Hamenst¨adt，《曲面丛的一些拓扑性质》，《九项数学挑战——阐释》，87–105，《纯数学研讨会论文集》104，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021。[27] U. Hamenst¨adt，《曲面丛的符号与有界上同调》，预印本（2020）；https://arxiv.org/abs/2011.05792。[28] J. Harer，《可定向曲面的映射类群的第二同调群》，《数学发明》72（1982）221–239。[29] J. Hillman，《作为纤维丛的复曲面》，《拓扑学及其应用》100(2-3)（2000），187–191。[30] F. Hirzebruch，《分歧覆盖的符号》，《整体分析》（K. Kodaira 荣誉论文集），第 253–265 页，东京大学出版社，东京，1969。[31] M. Kapovich，《复曲面基本群中的正规子群》，预印本；arXiv:math/9808085。[32] R. Kirby，《低维拓扑问题》，载于 W. Kazez（编），《几何拓扑》，AMS/IP 高等数学研究丛书，第 2.2 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[33] K. Kodaira，《一种不规则代数曲面》，《数学分析杂志》19（1967），207–215。[34] M. Korkmaz，《映射类群的低维同调群：综述》，《土耳其数学杂志》26（2002），第 1 期，101–114。[35] M. Korkmaz，《Dehn 扭转的稳定交换子长度》，《密歇根数学杂志》52（2004），第 1 期，23–31。[36] M. Korkmaz 和 B. Ozbagci，《Lefschetz纤维化中奇异纤维的最小数目》，《美国数学会会刊》129（2001），第 5 期，1545–1549。[37] M. Korkmaz 和 B. Ozbagci，《椭圆纤维化的截面》，《密歇根数学杂志》56（2008），77–87。[38] D. Kotschick，《符号、单极与映射类群》，《数学研究快报》5（1998），227–234。[39] D. Kotschick，《关于正则纤维化复曲面》，《Kirbyfest 论文集》（加利福尼亚州伯克利，1998），291–298（电子版），《几何与拓扑专著》2，考文垂，1999。[40] D. Kotschick，《稳定群中的稳定长度》，《微分同胚群》，401–413，《纯数学高级研究》52，日本数学会，东京，2008。[41] J. A. Lee，《具有固定符号的曲面上的曲面丛》，《韩国数学会杂志》54(2)（2017）。[42] J. A. Lee、M. L¨onne 和 S. Rollenske，《小符号的双重Kodaira纤维化》，《国际数学杂志》31（2020），第 7 期，2050052，共 42 页。[43] K. Liu，《几何高度不等式》，《数学研究快报》3（1996），第 5 期，693–702。[44] W. Meyer，《曲面丛的符号》，《数学年刊》201（1973），239–264。[45] Y. Miyaoka，《关于一般型曲面的陈数》，《数学发明》42，225–237（1977）。[46] N. Monden，《映射类群中稳定交换子长度的上界》，《拓扑学及其应用》159(4)（2012）1085–1091。[47] N. Monden，《曲面丛的特征数与 Dehn 扭转的稳定换位子长度》，《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑）100（2019），第 3 期，957–986。

[48] H. Neumann，《群簇》，施普林格出版社，1967年。[49] F. Polizzi、C. Rito 和 X. Roulleau，一对刚性曲面，具有 $p_g = q = 2$ 和 $K^2 = 8$，其万有覆盖并非双圆盘，《国际数学研究通知》2020年，第 11 期，3453–3493。[50] A. Stipsicz，具有非零符号的曲面丛，《匈牙利数学学报》95（2002），第 4 期，299–307。[51] T. Tsuboi，Takashi，关于微分同胚群的一致完美性，《微分同胚群》，505–524，《纯数学高级研究》52，日本数学会，东京，2008。[52] R. Walczak，曲面上环面丛的辛结构存在性，《全球分析与几何年刊》28:3（2005），211–231。[53] S. T. Yau，*Calabi* 猜想与代数几何中的一些新结果，《美国国家科学院院刊》74，1798–1799（1977）。[54] S. T. Yau 关于紧致 *K¨ahler* 流形的里奇曲率及复 *Monge-Amp`ère* 方程。*I*。《纯粹与应用数学通讯》31（1978），第 3 期，339–411。[55] C. Zaal，亏格为三的曲线模空间中的显式完备曲线，《几何与演绎》56（1995），第 2 期，185–196。

Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst, MA 01003-9305, USA

电子邮件地址：inanc.baykur@umass.edu

Department of Mathematics, Middle East Technical University, 06800 Ankara,Turkey

电子邮件地址：korkmaz@metu.edu.tr