arXiv:2302.06720v1 [math.FA] 13 Feb 2023

可求和性与对偶性

SOUMITRA GHARA、JAVAD MASHREGHI 和 THOMAS RANSFORD

Abstract. 我们将这一观察形式化：同一种可和方法在巴拿赫空间 X 及其对偶空间 X^*中收敛。与此同时，我们确定了这些方法分别在 X 和 X^*上的弱拓扑与弱*拓扑中收敛的条件。我们还导出了一个一般的限制定理，它给出了可和方法在 X中收敛的必要条件。随后，我们通过将这些结果应用于多种函数空间来加以说明，其中包括连续函数空间、勒贝格空间、圆盘代数、Hardy 空间和 Bergman 空间、BMOA空间、布洛赫空间以及 de Branges–Rovnyak 空间。我们的方法表明，所有这些应用都源自两个抽象定理。

1. Introduction

设 X 是开单位圆盘 $\mathbb{D}$上由全纯函数构成的一个巴拿赫空间，并假设 X 包含多项式。每个函数$f \in X$ 都有泰勒展开 $f(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$，该展开在 $\mathbb{D}$ 上局部一致收敛于 $f(z)$。然而，该级数可能不收敛到 f 在 X中的范数意义下的值。例如，当多项式在 X中不稠密时就会出现这种情况，但即使它们稠密，也可能发生。下面简要列出一些例子，展示了从“最好”到“最差”的各种可能情形。

(1) 如果 X 是 Hardy 空间 H^2，那么 f 的泰勒级数确实在 X的范数下收敛到 f。若 X 是狄利克雷空间或伯格曼空间，结论也成立。(2) 如果 X 是圆盘代数 $A(\mathbb{D})$，那么 f 的泰勒级数可能无法在 X 的范数下收敛（ du Bois-Reymond 的例子），但其 Ces`aro 均值确实在范数下收敛（Fej´er 定理）。

2020 *Mathematics Subject Classification.*主要分类号 46A35，次要分类号 30H10、30H20、30H45。*Key words and phrases.* 可和性、限制定理、Ces`aro 平均、巴拿赫空间、对偶空间。Ghara 获得 Fields–Laval博士后奖学金资助。Mashreghi 获得 NSERC探索基金资助。Ransford 获得 NSERC 和加拿大研究主席计划的资助。

(3) 如果 X 是 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathcal{H}(b)$，那么对于 b 和 f 的某些取值，Ces`aro 均值可能无法在范数下收敛，尽管多项式在 X 中仍然稠密（见 [3]）。(4) 如果 X 不具有有界逼近性质，那么没有任何下三角求和方法能够对每个函数都在范数下收敛，尽管多项式在X 中仍可能稠密（见 [13]）。

本文主要关注类似于（2）和（3）的情形：某些可和方法有效，而另一些则无效；问题在于确定哪些方法有效。我们的出发点是这样一个事实：通常，在 X 及其对偶空间 X^*中，往往是相同的方法有效。这是因为，一种可和方法的收敛性通常归结为某个求和算子序列是否在范数意义下有界，而一个算子与其伴随算子具有相同的范数。我们将这一思想形式化，同时将其分别与 X 和 X^* 中的弱收敛和弱*收敛联系起来。我们还推导出一个一般的限制定理，即在给定巴拿赫空间中某种可和方法收敛的必要条件。这些结果的证明分为两步进行：在 §2 中，我们建立一个一般的算子论结果；随后在 §3 中利用该结果推导出抽象的可和性定理。

本文其余部分将介绍这些结果的各种示例与应用。第 4 节讨论连续函数空间、勒贝格空间以及圆盘代数。第 5 节讨论 Hardy 空间、伯格曼空间及其相关空间 BMOA 和布洛赫空间。最后，第 6 节讨论全纯函数的再生核希尔伯特空间，尤其是 de Branges–Rovnyak 空间。有些应用已为人所知，有些是对已知结果的略微推广，还有一些则是全新的。我们的方法表明，这些结果都源自仅有的两个抽象定理。

2. Operator theory

下文中，X 是实或复巴拿赫空间。我们用 X^*表示 X的对偶空间，用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 X 与X^*之间的对偶配对。我们用 w 和 w^* 分别表示 X和 X^* 上的弱拓扑与弱*拓扑。最后，给定 X上的有界算子 T，我们用T^*表示其在 X^*上的伴随算子，它由以下关系定义：

$$\langle x, T^*\phi \rangle = \langle Tx, \phi \rangle \quad (x \in X,\ \phi \in X^*).$$

本节旨在证明以下结果。

定理 2.1. 设 $(T_n)_{n\geq 0}$ 是 X 上一列有界的有限秩算子，使得

$$T_nT_m(X)\subset T_m(X) \quad and \quad T_n^*T_m^*(X^*)\subset T_m^*(X^*) \qquad (m,n\geq 0). \tag{2.1}$$

Let

$$Y:=\overline{\operatorname{span}(\cup_{m\geq 0}T_m(X))} \quad and \quad Z:=\overline{\operatorname{span}(\cup_{m\geq 0}T_m^*(X^*))},$$

其中，闭包分别取自 X 和 X^* 的范数拓扑。则以下陈述等价:

(i) $T_nx\to x$ *in* (X,w) *for all* $x\in X$;
(ii) $T_nx\to x$ *in* $(X,\|\cdot\|)$ *for all* $x\in X$;
(iii) $T_n^*\phi\to\phi$ *in* (X^*,w^*) *for all* $\phi\in X^*$;
(iv) $T_n^*\phi\to\phi$ *in* (X^*,w^*) *for all* $\phi\in Z$, *and* Z *is* w^**-sequentially dense in* X^* *and* $Y=X$;
(v) $T_n^*\phi\to\phi$ *in* $(X^*,\|\cdot\|)$ *for all* $\phi\in Z$, *and* Z *is* w^**-sequentially dense in* X^* *and* $Y=X$.

此外，若 X 是自反的，则它们还等价于:

(vi) $T_n^*\phi\to\phi$ *in* $(X^*,\|\cdot\|)$ *for all* $\phi\in X^*$.

我们将通过一系列引理证明这一结果，首先从一个非常简单的引理开始。

引理 2.2. 设 $(T_n)_{n\geq 0}$ 是 X 上的一列有界算子。以下陈述等价:

(i) $T_nx\to x$ *in* (X,w) *for all* $x\in X$;
(ii) $T_n^*\phi\to\phi$ *in* (X^*,w^*) *for all* $\phi\in X^*$.

证明。我们有

$$\begin{aligned} T_nx\xrightarrow{w}x \quad \forall x\in X &\iff \langle T_nx,\phi\rangle\to\langle x,\phi\rangle \quad \forall\phi\in X^*,\forall x\in X\\ &\iff \langle x,T_n^*\phi\rangle\to\langle x,\phi\rangle \quad \forall x\in X,\forall\phi\in X^*\\ &\iff T_n^*\phi\xrightarrow{w^*}\phi \quad \forall\phi\in X^*. \end{aligned}$$

□

接下来，我们将证明一个类似的结果，说明 X 中的弱收敛与范数收敛之间的关系。为了得到等价结论，我们需要对算子 T_n施加一些条件。

引理 2.3. 设 $(T_n)_{n\geq 0}$ 是 X 上的一列有界有限秩算子，并满足

$$T_nT_m(X)\subset T_m(X) \qquad (m,n\geq 0). \tag{2.2}$$

那么，以下命题等价:

(i) 对所有 $x\in X$, $T_nx\to x$ 属于 (X,w);
(ii) 对所有 $x\in X$, $T_nx\to x$ 属于 $(X,\|\cdot\|)$。

注。(1) 若不满足“有限秩”这一假设，引理 2.3 不成立。例如，若 $X := \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 且 $T_n := I + S^n$，其中 S 是作用在 $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上的单边移位，则对所有 m, n，$T_n T_m = T_m T_n$，因此 (2.2) 成立，并且

$$T_n x - x = S^n x \xrightarrow{w} 0 \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}^+),$$

but

$$\|T_n e_0 - e_0\|_2 = \|e_n\|_2 \not\to 0.$$

(2) 若不满足假设 (2.2)，引理 2.3 也不成立。例如，若 $X = \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 且 $T_n := \sum_{j=0}^{n} (e_j \otimes e_j) + (e_n \otimes e_0)$，那么每个 T_n 都是有界有限秩算子，并且

$$T_n x - x = -\sum_{j>n} \langle x, e_j \rangle e_j + \langle x, e_0 \rangle e_n \xrightarrow{w} 0 \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}^+),$$

but

$$\|T_n e_0 - e_0\|_2 = \|e_n\|_2 \not\to 0.$$

注意，在这个例子中，若 $m < n$，则 $T_m(X)$ 张成空间 $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$，而 $T_n T_m(X)$ 张成空间 $\{e_0 + e_n, e_1, \ldots, e_m\}$。

引理 2.3 的证明。只需证明 (i) $\Rightarrow$ (ii)，因为反向蕴含显然成立。于是，假设对于所有 $x \in X$，$T_n x \to x$ 弱收敛。我们需要证明它也按范数收敛。这将分四步完成。

第一步是证明 $\|T_n x - x\| \to 0$ if $x \in \text{span}(\cup_m T_m(X))$。固定 m，并令 ψ 为 $T_m(X)$ 上的连续线性泛函。根据 Hahn–Banach 定理，我们可以将 ψ 延拓为定义在整个 X 上的连续线性泛函 ϕ。因此，对所有 $x \in T_m(X)$，有

$$\langle T_n x, \psi \rangle = \langle T_n x, \phi \rangle \to \langle x, \phi \rangle = \langle x, \psi \rangle.$$

这表明 $T_n x \to x$ 在 $T_m(X)$ 中弱收敛。由于 $\dim(T_m(X)) < \infty$，弱拓扑与范数拓扑一致，因此对所有 $x \in T_m(X)$，有 $\|T_n x - x\| \to 0$。最后，由线性性可知，对所有 $x \in \text{span}(\cup_m T_m(X))$，有 $\|T_n x - x\| \to 0$，证毕。

第二步是证明 $\text{span}(\cup_m T_m(X))$ 在 X 中范数稠密。反设不然。则根据 Hahn–Banach 定理，存在 $\phi \in X^* \setminus \{0\}$，使得 $\phi = 0$ 在 $\text{span}(\cup_m T_m(X))$ 上成立。对所有 $m \geq 1$，有

$$\langle x, T_m^* \phi \rangle = \langle T_m x, \phi \rangle = 0 \quad (x \in X),$$

所以 $T_m^* \phi = 0$。此外，由引理 2.2 可知，$T_m^* \phi \to \phi$ in (X^*, w^*)。因此 $\phi = 0$。这与 ϕ的选择矛盾。由此得出，如所述，$\text{span}(\cup_m T_m(X))$ 在 X 中范数稠密。

第三步是证明 $\sup_n \|T_n\| < \infty$。对于每个 $x \in X$，序列 $(T_n x)$ 弱收敛，因此它是弱有界的。根据 Banach–Steinhaus定理，它也范数有界，即 $\sup_n \|T_n x\| <$

∞。由于这对每个 $x \in X$ 都成立，再次应用巴拿赫–施泰因豪斯定理可得 $\sup_n \|T_n\| < \infty$，如所要求证。

第四步也是最后一步，是证明对所有$x \in X$，$\|T_n x - x\| \to 0$。令 $x \in X$，并令 $\epsilon > 0$。由步骤 2 和步骤 3，存在$x_0 \in$ 张成空间$(\cup_m T_m(X))$，使得 $\|x - x_0\| < \epsilon/(1 + \sup_n \|T_n\|)$。由步骤 1，存在 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$，$\|T_n x_0 - x_0\| < \epsilon$。于是，若 $n \geq n_0$，则有

$$\|T_n x - x\| \leq \|T_n(x - x_0)\| + \|T_n x_0 - x_0\| + \|x_0 - x\| < 3\epsilon.$$

因此 $\|T_n x - x\| \to 0$，这正是要证明的结论。 □

若 X 是自反的，则我们可以在引理 2.3 中交换 X 和 X^* 的角色，从而得出以下推论。

推论 2.4。假设 X 是自反的。设$(T_n)_{n\geq 0}$ 是 X 上的一列有界有限秩算子，使得

$$T_n^* T_m^*(X^*) \subset T_m^*(X^*) \qquad (m, n \geq 0). \tag{2.3}$$

那么，以下陈述等价：

(i) $T_n^*\phi \to \phi$ *in* (X^*, w^*) *for all* $\phi \in X^*$;
(ii) $T_n^*\phi \to \phi$ *in* $(X^*, \|\cdot\|)$ *for all* $\phi \in X^*$.

注。如果 X 不是自反的，那么推论 2.4 可能不成立。例如，令 $X := \ell^1(\mathbb{Z}^+)$，并令 $T_n\colon \ell^1(\mathbb{Z}^+) \to \ell^1(\mathbb{Z}^+)$ 为投影到前 n 个坐标上的投影。其伴随算子 $T_n^*\colon \ell^\infty(\mathbb{Z}^+) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ 也是投影到前 n 个坐标上的投影。序列 (T_n) 和 (T_n^*) 分别满足 (2.2) 和 (2.3)。此外，对所有$x \in \ell^1(\mathbb{Z}^+)$，都有 $\|T_n x - x\|_1 \to 0$，因此由引理 2.2 和引理 2.3 可知，对所有$\phi \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$，都有 $T_n^*\phi \to \phi$ 弱*。然而，若 $\phi_0 := (1, 1, 1, \dots)$，则 $\|T_n^*\phi_0 - \phi_0\|_\infty \not\to 0$。注意，在此例中，span $\cup_n T_n^*(X^*)$ 的范数闭包为 c_0。

下面给出一个适用于所有 X（不一定是自反的）的推论 2.4 版本。

引理 2.5. 设 $(T_n)_{n\geq 0}$ 是 X 上的一列有界有限秩算子，使得

$$T_n(T_m(X)) \subset T_m(X) \quad \textit{and} \quad T_n^*(T_m^*(X^*)) \subset T_m^*(X^*) \quad (m, n \geq 0). \tag{2.4}$$

Let

$$Y := \overline{\operatorname{span}(\cup_{m\geq 0} T_m(X))} \quad \textit{and} \quad Z := \overline{\operatorname{span}(\cup_{m\geq 0} T_m^*(X^*))},$$

其中，闭包分别是在 X 和 X^* 的范数拓扑中取的。则下列陈述等价：

(i) $T_n^*\phi \to \phi$ *in* (X^*, w^*) *for all* $\phi \in X^*$;
(ii) $T_n^*\phi \to \phi$ *in* (X^*, w^*) *for all* $\phi \in Z$, *and* Z *is* w^**-sequentially dense in* X^* *and* $Y = X$;

(iii) 对所有 $\phi \in Z$, $T_n^*\phi \to \phi$ 属于$(X^*, \|\cdot\|)$，且 Z 在 X^* 和 $Y = X$中是 w^*-序列稠密的。

证明还需要一个引理。

引理 2.6. 设 Z 是 X^* 的一个子空间，且在 X^* 中关于 w^* 序列稠密。那么， Z 的单位球的 w^*-闭包包含 X^* 的单位球的某个正倍数。

证明. 设 C 是 X^* 中 Z 的单位球在 (X^*, w^*) 下的闭包。给定 $\phi \in X^*$，存在 Z 中的一个序列 (ϕ_n)，使得 ϕ_n 收敛于 ϕ （关于 w^*）。根据 Banach–Steinhaus 定理，由于 (ϕ_n) 是 w^*-有界的，因此它是范数有界的。因此存在一个整数 $m \geq 1$，使得 $\phi \in mC$。于是我们有 $\cup_{m\geq 1} mC = X^*$。每个集合 mC 在 X^* 中都是 w^*- 闭的，因此当然也是范数闭的。因此，我们可以应用贝尔纲定理，推得存在 m_0，使得 m_0C 有非空的范数内点。由于 m_0C 是一个凸对称集，可知 0 属于 m_0C 的范数内部。换言之， C 包含一个以 0 为中心的球。□

引理 2.5 的证明。 [(i)⇒(ii)]: 假设 (i) 成立。那么显然，对于所有 $\phi \in Z$, $T_n^*\phi \to \phi$，并且 Z 在 X^* 中是 w^*-序列稠密的。最后，由引理 2.2 和引理 2.3，(i) 蕴含对于所有 $x \in X$， $T_n x \to x$ 在范数下收敛，这又意味着 $Y = X$。

[(ii)⇒(iii)]: 假设 (ii) 成立。由 (ii)，对于每个 $\phi \in Z$，我们有 $T_n^*\phi \to \phi$ 属于 (X^*, w^*)。将 Banach–Steinhaus 定理应用于 Z 上的序列 $(T_n^*|_Z)$，可得 $\sup_n \|T_n^*|_Z\| < \infty$。

令 $m \geq 0$。那么，对于所有 $\phi \in T_m^*(X^*)$， $T_n^*\phi \to \phi$ 属于 (X^*, w^*)。由于 $\dim(T_m^*(X^*)) < \infty$，可知对于所有 $\phi \in T_m^*(X^*)$， $T_n^*\phi \to \phi$ 在范数下收敛。由于这对每个 $m \geq 0$ 都成立，我们推得，对于所有 $\phi \in \text{span}(\cup_{m\geq 0} T_m^*(X^*))$， $T_n^*\phi \to \phi$ 在范数下收敛。最后，由于 $\sup_n \|T_n^*|_Z\| < \infty$，可知对于所有 $\phi \in Z$，$T_n^*\phi \to \phi$ 在范数下收敛。

[(iii)⇒(i)]: 假设 (iii) 成立。如上所述，$\sup_n \|T_n^*|_Z\| < \infty$。由 (iii) 和引理 2.6 可知， Z 的单位球在 X^*中对半径为 $r > 0$ 的球是 w^*-稠密的。因此，对于 X上的每个算子 T，都有 $\|T^*\| \leq \|T^*|_Z\|/r$。结合这些事实，我们推得$K := \sup_n \|T_n^*\| < \infty$。

令 $m \geq 0$，并令 $Z_m := \{\phi|_{T_m(X)} : \phi \in Z\}$。由于 Z 在 X^* 中是 w^*-序列稠密的，且 $\dim T_m(X) < \infty$，因此 Z_m 在 $T_m(X)^*$中范数稠密。令 $x \in T_m(X)$。令 $\psi \in T_m(X)^*$，并令 $\epsilon > 0$。于是存在 $\phi \in Z$，使得$\|\psi - \phi|_{T_m(X)}\| < \epsilon$。由于 $\|T_n^*\phi - \phi\| \to 0$，存在 N 使得

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \|T_n^*\phi - \phi\| < \epsilon.$$

Then

$$\langle T_n x - x, \psi\rangle = \langle x, T_n^*\phi - \phi\rangle + \langle T_n x - x, \psi - \phi|_{T_m(X)}\rangle,$$

因此，对所有 $n \geq N$，

$$|\langle T_n x - x,\, \psi\rangle| \leq \|x\|\|T_n^*\phi - \phi\| + (K+1)\|x\|\|\psi - \phi|_{T_m(X)}\| \leq (\|x\| + K + 1)\epsilon.$$

因此，对所有 $x \in T_m(X)$，$T_n x \to x$ 弱收敛。由于 $\dim T_m(X) < \infty$，可知对所有 $x \in T_m(X)$，$T_n x \to x$ 按范数收敛。由于这对所有 $m \geq 0$ 都成立，我们得出，对所有 $x \in \operatorname{span}(\cup_m T_m(X))$，$T_n x \to x$ 按范数收敛。由于 $\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|T_n^*\| = K < \infty$，可知对所有 $x \in Y$，$T_n x \to x$。

由 (iii)，有 $Y = X$。因此，对所有 $x \in X$，$T_n x \to x$ 按范数收敛。由引理 2.2 和引理 2.3，这意味着对所有 $\phi \in X^*$，$T_n^*\phi \to \phi$ 属于 (X^*, w^*)。□

注。尽管陈述 (i)–(iii) 都涉及伴随算子T_n^*，但我们仍然需要不变性假设，即在 (2.4) 中 $T_n(T_m(X)) \subset T_m(X)$。在证明蕴含关系 (iii)⇒(i) 时用到了这一假设；事实上，没有这一假设，该结论并不成立。下面给出一个反例。

令 $X := \ell^1(\mathbb{N})$。对于 $n \geq 1$，定义 $T_n : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ 如下：

$$T_n := P_{2n}(S^n + I),$$

其中，$S : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ 是单边移位，$P_{2n} : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ 是到前 $2n$ 个坐标的投影。取伴随算子可得 $T_n^* : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$，其定义为 $T_n^* = (S^{*n} + I)P_{2n}$。以下性质易于验证：

- $T_m(X) =$ 张成空间$\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ 对所有 $m \geq 1$ 均成立。
- $T_m^*(X^*) =$ 张成空间$\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ 对所有 $m \geq 1$ 均成立。
- $T_n^*(T_m^*(X^*)) \subset T_m^*(X^*)$ 对所有 $m, n \geq 1$ 均成立。
- $Y = \ell^1(\mathbb{N}) = X$。
- $Z = c_0(\mathbb{N})$，它在 $X^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$ 中是 w^*-序列稠密的。

如果 $\phi \in c_0(\mathbb{N})$，那么我们有

$$\|T_n^*\phi - \phi\|_\infty \leq \|S^{*n}\phi\|_\infty + \|P_{2n}\phi - \phi\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此，对于所有 $\phi \in Z$，$T_n^*\phi \to \phi$ 在范数意义下成立。因此 (iii) 成立。

然而，如果 $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \setminus c_0(\mathbb{N})$，那么

$$\langle e_1,\, T_n^*\phi - \phi\rangle = \langle T_n e_1 - e_1,\, \phi\rangle = \langle e_{n+1}, \phi\rangle \not\to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而 $T_n^*\phi \not\to \phi$ 弱*。因此 (i) 不成立。

最后，本节的主要结果——定理 2.1——由引理 2.2、2.3 和 2.5 组合得出。

3. Summability

3.1. 基本设定。在本文余下部分，我们考虑如下设定。与前文一样，X 表示一个巴拿赫空间，其对偶空间为

X^*。设 $(e_k)_{k\geq 0}$ 和 $(\psi_k)_{k\geq 0}$ 分别是 X 和 X^* 中的序列，并满足

$$\begin{cases} \langle e_j, \psi_k\rangle = 0, & \forall j,k,\ j\neq k,\\ \langle e_k, \psi_k\rangle \neq 0, & \forall k. \end{cases}$$

对每个 $k\geq 0$，定义 $P_k\colon\ X\to X$ 由下式给出

$$P_k := \frac{e_k\otimes \psi_k}{\langle e_k, \psi_k\rangle}.$$

明确地说，

$$P_k(x) := \frac{\langle x, \psi_k\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} e_k \quad (x\in X).$$

显然，$P_k(e_k) = e_k$ 且 $P_k(e_j) = 0$，若 $j\neq k$。容易看出，P_k 是一个秩一投影（$P_k^2 = P_k$），其满足

$$\|P_k\| = \frac{\|e_k\|\|\psi_k\|}{|\langle e_k, \psi_k\rangle|}.$$

其伴随算子 $P_k^*\colon\ X^*\to X^*$ 由下式给出

$$P_k^* = \frac{\psi_k\otimes e_k}{\langle e_k, \psi_k\rangle}.$$

设 $A = (a_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 是一个复数标量无限矩阵，使得对每个 $n\geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0} |a_{nk}|\|P_k\| < \infty. \tag{3.1}$$

我们用绝对收敛级数定义相应的求和算子 $S_n^A\colon\ X\to X$ $(n\geq 0)$

$$S_n^A := \sum_{k\geq 0} a_{nk} P_k.$$

具体而言，我们有

$$S_n^A(x) = \sum_{k\geq 0} a_{nk}\frac{\langle x, \psi_k\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} e_k \quad (x\in X),$$

$$(S_n^A)^*(\phi) = \sum_{k\geq 0} a_{nk}\frac{\langle e_k, \phi\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} \psi_k \quad (\phi\in X^*).$$

3.2. 主要等价性。确立上述记号后，我们的目标是证明以下定理。

定理 3.1. 令 Z 为 X^* 中由 $\{\psi_k : k\geq 0\}$张成空间的范数闭包。假设至少存在一个满足 (3.1) 的矩阵 A^0，使得对所有 $x\in X$，$S_n^{A^0}x\to x$（无论是弱收敛还是按范数收敛）。那么，对每个满足 (3.1) 的矩阵 A，以下命题等价:

(i) $S_n^A(x) \to x$ *in* (X, w) *for all* $x \in X$;
(ii) $S_n^A(x) \to x$ *in* $(X, \|\cdot\|)$ *for all* $x \in X$;
(iii) $(S_n^A)^*(\phi) \to \phi$ *in* (X^*, w^*) *for all* $\phi \in X^*$;
(iv) $(S_n^A)^*(\phi) \to \phi$ *in* (X^*, w^*) *for all* $\phi \in Z$;
(v) $(S_n^A)^*(\phi) \to \phi$ *in* $(X^*, \|\cdot\|)$ *for all* $\phi \in Z$.

此外，如果 X是自反的，那么这些命题还等价于:

(vi) $(S_n^A)^*(\phi) \to \phi$ *in* $(X^*, \|\cdot\|)$ *for all* $\phi \in X^*$.

证明。根据 (3.1)，对于每个 $n \geq 0$，都存在 $K_n \geq 0$ 使得

$$\sum_{k>K_n} |a_{nk}| \|P_k\| < 2^{-n}.$$

定义 T_n^A: $X \to X$ 为

$$T_n^A := \sum_{k=0}^{K_n} a_{nk} P_k.$$

显然，对于所有 n，我们都有 $\|S_n^A - T_n^A\| < 2^{-n}$；因此，(i)–(vi) 中的每个命题成立，当且仅当将 S_n^A 替换为 T_n^A 后该命题成立。

算子 T_n^A 是 X 上的有界有限秩算子。 T_n^A 和 $(T_n^A)^*$ 的像为

$$T_n^A(X) = \operatorname{span}\{e_k : 1 \leq k \leq K_n,\ a_{nk} \neq 0\}, \tag{3.2}$$

$$(T_n^A)^*(X^*) = \operatorname{span}\{\psi_k : 1 \leq k \leq K_n,\ a_{nk} \neq 0\}. \tag{3.3}$$

由此可得，对于所有 m、n，$T_n^A T_m^A(X) \subset T_m^A(X)$ 且 $(T_n^A)^*(T_m^A)^*(X^*) \subset (T_m^A)^*(X^*)$。因此，定理 2.1 适用。

我们断言，对于每个 k，至少存在一个 n 使得 $a_{nk} \neq 0$。事实上，如果对所有 n都有 $a_{nk} = 0$，那么对所有 n，$T_n^A(e_k) = 0$ 且 $(T_n^A)^*(\psi_k) = 0$，因此（在相关假设 (i)–(vi) 下），要么 $e_k = 0$，要么 $\psi_k = 0$。这两种情况都不可能成立，因为我们假设 $\langle e_k, \psi_k \rangle \neq 0$。

由此可知，按照定理 2.1 中的记号，

$$Y := \overline{\operatorname{span}(\cup_{m\geq 0}(T_m^A)(X))} = \overline{\operatorname{span}\{e_k : k \geq 0\}},$$
$$Z := \overline{\operatorname{span}(\cup_{m\geq 0}(T_m^A)^*(X^*))} = \overline{\operatorname{span}\{\psi_k : k \geq 0\}}.$$

特别是，这使定理 3.1 的陈述中给出的 Z 的定义与定理 2.1 中的定义相一致。

将定理 2.1 应用于 $A = A^0$，可得 $Y = X$，且 Z 在 X^* 中 w^*-序列稠密。现在将定理 2.1 重新应用于一般的 A，即可得到结论。□

注。（1）蕴含关系 (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii)$\Longrightarrow$(iv) $\iff$ (v) 无须假设 A^0。只有在从 (iv)$\Longrightarrow$(iii) 的蕴含中才需要 A^0 的存在性。

（2）在下文将讨论的具体例子中， A^0 的存在性显然是某种版本的 Fej´er 定理的推论。

(3) 然而，确实存在一些例子，其中不存在满足 (ii) 的矩阵A^0 。例如，当巴拿赫空间 X 不具有有界逼近性质时，情况便是如此（见 [13]）。文章 [10] 还给出了另一个这样的例子，其中 X 实际上是一个希尔伯特空间。

3.3. 极限定理。设 $A = (a_{nk})_{n,k\geq 0}$ 是一个满足 (3.1) 的无限标量矩阵。若存在标量矩阵 $B =(b_{jn})_{j,n\geq 0}$ 使得.....，则称 A 有左逆。

$$\sum_{n\geq 0} |b_{jn}| < \infty \quad (j \geq 0) \qquad \text{and} \qquad \sum_{n\geq 0} b_{jn}a_{nk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{3.4}$$

定理 3.2. 假设对于所有 $x \in X$， $S_n^A(x) \to x$ （弱收敛或依范数收敛），且 A 有左逆 B。那么，记 $B_j := \sum_{n\geq 0} |b_{jn}|$，我们有

$$\frac{\|e_j\|\|\psi_j\|}{|\langle e_j, \psi_j\rangle|} = O(B_j) \quad (j \to \infty).$$

注。当 $\|e_j\|\|\psi_j\|/|\langle e_j, \psi_j\rangle|$ 随着 j 增大时，这个定理很有意义，因为它会限制可使可和性成立的矩阵 A 。Hardy [8, p.57] 将这类结果称为限制定理。

证明。对于每个 $j \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} b_{jn}S_n^A &= \sum_{n\geq 0} b_{jn}\Big(\sum_{k\geq 0} a_{nk}P_k\Big) \\ &= \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{n\geq 0} b_{jn}a_{nk}\Big)P_k = \sum_{k\geq 0} \delta_{jk}P_k = P_j, \end{aligned}$$

根据 (3.1) 和 (3.4) 中的绝对收敛性，可以交换求和次序。现在，由于对所有 $x \in X$ 都有 $S_n^A(x) \to x$，我们对每个 $x \in X$ 都有 $\sup_n \|S_n^A(x)\| < \infty$，因此根据 Banach–Steinhaus定理，$\sup_n \|S_n^A\| <\infty$。由此可得

$$\|P_j\| = \Big\|\sum_{n\geq 0} b_{jn}S_n^A\Big\| \leq \sum_{n\geq 0} |b_{jn}|\|S_n^A\| \leq B_j \sup_n \|S_n^A\|,$$

换言之， $\|P_j\| = O(B_j)$。最后，由于 $\|P_j\| = \|e_j\|\|\psi_j\|/|\langle e_j, \psi_j\rangle|$，结论得证。□

实际上，矩阵 B 并非显式已知，因此估计 B_j可能会有困难。下面给出一个可以做到的情形。

我们用 $W^+(\mathbb{D})$ 表示全纯维纳代数，即

$$W^+(\mathbb{D}) := \Big\{ f(z) = \sum_{k\geq 0} \widehat{f}(k) z^k : \sum_{k\geq 0} |\widehat{f}(k)| < \infty \Big\}.$$

定理 3.3. 设 $f \in W^+(\mathbb{D})$ 满足 $f(0) \neq 0$，并设 $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ 是 $(0,\infty)$ 中的递增序列。设 $A = (a_{nk})$ 为下三角矩阵，其元素定义如下：

$$a_{nk} := \gamma_n^{-1} \widehat{(1/f)}(n-k) \quad (0 \leq k \leq n).$$

那么 A 有一个左逆 B，其中 $B = (b_{jn})$ 是一个下三角矩阵，并且

$$\sum_{n\geq 0} |b_{jn}| \asymp \gamma_j \quad (j \to \infty).$$

证明. 设 B 为下三角矩阵，其元素 (b_{jn}) 定义如下：

$$b_{jn} := \gamma_n \widehat{f}(j-n) \quad (0 \leq n \leq j).$$

对每个固定的 j，仅有有限个 n 满足 $b_{jn} \neq 0$，因此 (3.4) 中的第一个条件显然成立。至于第二个条件，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} b_{jn} a_{nk} &= \sum_{n\geq 0} \gamma_n \widehat{f}(j-n) \gamma_n^{-1} \widehat{(1/f)}(n-k) \\ &= \sum_{\substack{p,q\geq 0 \\ p+q=j-k}} \widehat{f}(p) \widehat{(1/f)}(q) = \widehat{1}(j-k) = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

因此， B 确实是 A 的一个左逆。此外，我们有

$$\sum_{n\geq 0} |b_{jn}| = \sum_{n=0}^{j} \gamma_n |\widehat{f}(j-n)| \leq \gamma_j \sum_{\ell\geq 0} |\widehat{f}(\ell)|$$

and

$$\sum_{n\geq 0} |b_{jn}| = \sum_{n=0}^{j} \gamma_n |\widehat{f}(j-n)| \geq \gamma_j |\widehat{f}(0)|,$$

根据假设，我们有 $\sum_{\ell\geq 0} |\widehat{f}(\ell)| < \infty$ 和 $|\widehat{f}(0)| > 0$。由此可得 $\sum_{n\geq 0} |b_{jn}| \asymp \gamma_j$，如所声称。□

注。在这种情况下，很容易看出，实际上 B 是 A的双侧逆。

我们将这些结果应用于一类特定的求和方法，即 Ces`aro 平均。给定 $\alpha > -1$，令$A = (a_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 为如下定义的下三角矩阵：

$$a_{nk} := \binom{n}{k} \Big/ \binom{n+\alpha}{k} \quad (0 \leq k \leq n). \tag{3.5}$$

（按照惯例，非整数参数的二项式系数用伽马函数定义。）在此选择 A的情况下，我们记为

$$\sigma_n^\alpha(x) := S_n^A(x) \quad (x \in X).$$

特别地，我们记 s_n 为 σ_n^0，记 σ_n 为 σ_n^1。

我们指出，若 $-1 < \alpha \le \beta$，则 σ_n^β 包含 σ_n^α，其含义是：若对于某个 $x \in X$，$\sigma_n^\alpha(x) \to x$，那么 $\sigma_n^\beta(x) \to x$也成立。（对于标量，这是众所周知的；对于巴拿赫空间，可由 [11, 定理 5.1]推出。）

下面的限制定理是 [8, 定理 46]的抽象版本。

定理 3.4. 设 $\alpha \ge 0$。若对所有$x \in X$，$\sigma_n^\alpha(x) \to x$（弱收敛或依范数收敛），则

$$\frac{\|e_j\|\|\psi_j\|}{|\langle e_j, \psi_j\rangle|} = O(j^\alpha) \quad (j \to \infty).$$

证明。令 A 为由 (3.5) 定义的 Ces`aro 矩阵。计算可得

$$a_{nk} = \binom{n}{k}\Big/\binom{n+\alpha}{k} = \binom{n-k+\alpha}{\alpha}\Big/\binom{n+\alpha}{\alpha} = \gamma_n^{-1}\widehat{g}(n-k),$$

其中 (γ_n) 是由下式给出的递增数列

$$\gamma_n := \binom{n+\alpha}{\alpha},$$

并且 $\widehat{g}(m)$ 是函数的泰勒系数

$$g(z) := \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+\alpha}{\alpha}z^m = (1-z)^{-\alpha-1}.$$

显然 $g = 1/f$，其中 $f(z) := (1-z)^{\alpha+1}$。由于 f 的泰勒系数满足

$$\sum_{k\ge1}|\widehat{f}(k)| = \sum_{k\ge1}\Big|\frac{\widehat{(f')}(k-1)}{k}\Big| \le \Big(\sum_{k\ge1}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\|f'\|_{H^2} < \infty,$$

因此我们有 $f \in W^+(\mathbb{D})$，定理 3.3 适用。由此可得，A 有一个下三角逆矩阵 $B = (b_{jn})$，使得

$$\sum_{n\ge0}|b_{jn}| = O(\gamma_j) = O\Big(\binom{j+\alpha}{\alpha}\Big) = O(j^\alpha) \quad (j \to \infty),$$

最后一个等式由斯特林公式得出。现在应用定理 3.2 即可得到结果。□

4. Applications in spaces of continuous functions

4.1. 傅里叶级数。求和方法最广为人知的应用大概就是傅里叶级数，因此，作为第一个例子，我们来看看前两节中建立的抽象理论对这一情形有何启示。

令 $\mathbb{T}$ 表示单位圆。我们用 $C(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$上的复值连续函数空间，并赋予通常的上确界范数 $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbb{T}} |f|$。$C(\mathbb{T})$ 的对偶空间可与 $M(\mathbb{T})$ 视为同一空间，后者是 $\mathbb{T}$上的有限复博雷尔测度空间，其对偶配对为

$$\langle f, \mu \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\, d\mu(\overline{\zeta}) \quad (f \in C(\mathbb{T}),\ \mu \in M(\mathbb{T})).$$

在此配对下，$M(\mathbb{T})$ 继承了 $C(\mathbb{T})^*$ 的范数，而这正是全变差范数。

$\mathbb{T}$ 上的绝对连续测度构成 $M(\mathbb{T})$ 的一个闭子空间，该空间可通过 $g \leftrightarrow g(e^{it})dt/2\pi$ 与 $L^1(\mathbb{T})$ 识别。全变差范数在 $L^1(\mathbb{T})$ 上的限制恰好是通常的 L^1范数。

现在我们应用第 3 节中建立的理论。令 $X := C(\mathbb{T})$，并对 $k \in \mathbb{Z}$ 令 $e_k := e^{ikt}$ 和 $\psi_k := e^{ikt}\, dt/2\pi$。（这里，指标 k 遍历所有整数，而不仅仅是正整数，但这不会造成任何问题。）于是，对于所有$k \in \mathbb{Z}$，有 $\|e_k\|_\infty = \|\psi_k\|_1 = 1$ 和 $\langle e_k, \psi_k \rangle = 1$。

设 $A = (a_{nk})_{n\geq 0,\ k\in\mathbb{Z}}$ 是一个复数标量无限矩阵，满足对每个 $n \geq 0$，都有 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{nk}| < \infty$。那么，对每个 $n \geq 0$，我们有

$$S_n^A(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \frac{\langle f, \psi_k \rangle}{\langle e_k, \psi_k \rangle} e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (f \in C(\mathbb{T})),$$

$$(S_n^A)^*(\mu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \frac{\langle e_k, \mu \rangle}{\langle e_k, \psi_k \rangle} \psi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \widehat{\mu}(k) e^{ikt}\, \frac{dt}{2\pi} \quad (\mu \in M(\mathbb{T})).$$

由 Fejér 定理，对所有 $f \in C(\mathbb{T})$，当 $n \to \infty$ 时，我们有 $\|\sigma_n f - f\|_\infty \to 0$；因此至少存在一个矩阵 A^0，使得 $\|S_n^{A^0}(f) - f\|_\infty \to 0$。于是定理 3.1 适用。用定理 3.1 的记号，Z 是 $M(\mathbb{T})$ 中 $\{e^{ikt}dt/2\pi$ 张成空间 $k \in \mathbb{Z}\}$ 的范数闭包，它恰好是 $L^1(\mathbb{T})$。由此得到以下定理。

定理 4.1. 设 $(a_{nk})_{n\geq 0,\ k\in\mathbb{Z}}$ 是一个复数标量无限矩阵，满足对每个 $n \geq 0$，都有 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{nk}| < \infty$。那么以下命题等价：

(i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \widehat{f}(k) e^{ikt} \to f$属于 $(C(\mathbb{T})\ w)$，对所有 $f \in C(\mathbb{T})$；

(ii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \widehat{f}(k) e^{ikt} \to f$属于 $(C(\mathbb{T})\ \|\cdot\|_\infty)$，对所有 $f \in C(\mathbb{T})$；

(iii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk} \widehat{\mu}(k) e^{ikt} dt/2\pi \to \mu$属于 $(M(\mathbb{T})\ w^*)$，对所有 $\mu \in M(\mathbb{T})$；

(iv) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk}\widehat{g}(k)e^{ikt}dt/2\pi \to g(e^{it})dt/2\pi$ *in* $(M(\mathbb{T}), w^*)$ *for all* $g \in L^1(\mathbb{T})$*;*
(v) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk}\widehat{g}(k)e^{ikt} \to g$ *in* $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$*, for all* $g \in L^1(\mathbb{T})$.

现在我们利用这个定理，推导关于傅里叶级数的 Ces`aro 求和的一些经典结果。由于求和指标 k 遍历的是 $\mathbb{Z}$而不是 $\mathbb{Z}^+$，因此需要相应地修改 σ_n^α 的定义，取 $a_{nk} := \binom{n}{|k|}/\binom{n+\alpha}{|k|}$ 对应 $|k| \le n$，以及 $a_{nk} := 0$ 对应 $|k| > n$。照例，我们记 s_n 为 σ_n^0，记 σ_n 为 σ_n^1（上文引用 Fej´er 定理时，这一点已隐含在其中）。

定理 4.2. (1) 若 $\mu = \delta_1$，则 $s_n(\mu) \not\to \mu$ 属于 $(M(\mathbb{T}), w^*)$。(2) 存在 $f \in C(\mathbb{T})$，使得 $s_n(f) \not\to f$ 属于 $(C(\mathbb{T}), w)$。(3) 存在 $g \in L^1(\mathbb{T})$，使得 $s_n(g) \not\to g$ 属于 $(M(\mathbb{T}), w^*)$。

证明。(1) 若 $\mu = \delta_1$，则对所有 $k \in \mathbb{Z}$，$\widehat{\mu}(k) = 1$，因此

$$s_n(\mu) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\frac{dt}{2\pi} = D_n(t)\frac{dt}{2\pi},$$

其中 $D_n(t)$ 是狄利克雷核。我们知道

$$\|s_n(\mu)\|_{M(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1 \asymp \log n \to \infty,$$

因此 $(s_n(\mu))$ 不弱*收敛。
现在将定理 4.1 应用于（1），即可得出（2）和（3）。 □

注。（2）是 du Bois-Reymond 一项著名结果的弱形式。他证明了连续函数的傅里叶级数可能在某一点发散。

定理 4.3。设 $\alpha > 0$。
（1） $\|\sigma_n^\alpha(f) - f\|_\infty \to 0$ 对所有 $f \in C(\mathbb{T})$ 均成立。（2） $\|\sigma_n^\alpha(g) - g\|_1 \to 0$ 对所有 $g \in L^1(\mathbb{T})$ 均成立。（3） $\sigma_n^\alpha(\mu) \to \mu$ 属于 $(M(\mathbb{T}), w^*)$，对所有 $\mu \in M(\mathbb{T})$ 均成立。

证明。（1）是 M. Riesz 的经典结果 [14]。应用定理 4.1，即可得出（2）和（3）。□

4.2. 圆盘代数。圆盘代数 $A(\mathbb{D})$ 由开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数组成，这些函数可连续延拓至 $\overline{\mathbb{D}}$。在上确界范数下，它是一个巴拿赫空间（实际上是一个巴拿赫代数）。

根据最大值原理，映射 $f \mapsto f|_{\mathbb{T}}$ 是从 $A(\mathbb{D})$ 到 $C(\mathbb{T})$ 的等距映射，因此 $A(\mathbb{D})$ 可以视为 $C(\mathbb{T})$ 的一个闭子空间 A。^事实上，$A = \{f \in C(\mathbb{T}) : f(k) = 0\ \forall k < 0\}$。因此，$A(\mathbb{D})$ 的对偶空间

可以视为商空间 $M(\mathbb{T})/A^\perp$，其中

$$A^\perp := \Big\{\mu \in M(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f\,d\mu = 0 \ \forall f \in A\Big\}.$$

根据 F. & M. Riesz 定理，若 $\mu \in A^\perp$，则 μ 相对于 $\mathbb{T}$ 上的勒贝格测度绝对连续，记作 $\mu = h\,dt/2\pi$。条件 $h\,dt/2\pi \in A^\perp$ 等价于 $h \in \overline{H_0^1}$，其中

$$\overline{H}_0^1 := \{h \in L^1(\mathbb{T}) : \widehat{h}(k) = 0 \ \forall k \geq 0\}.$$

因此，我们可以将对偶空间 $A(\mathbb{D})^*$ 与 $M(\mathbb{T})/\overline{H_0^1}$ 等同起来。

还可以用柯西变换来表达这种对偶性。给定 $\mu \in M(\mathbb{T})$，我们定义其柯西变换 $K\mu:\ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$，如下：

$$K\mu(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{1 - \overline{\zeta} z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

注意到 $K\mu \equiv 0 \iff \mu \in \overline{H_0^1}$。因此，映射 $[\mu] \mapsto K\mu$ 是从 $M(\mathbb{T})/H_0^1$ 到 $\mathcal{K}$ 的线性同构，其中

$$\mathcal{K} := \{K\mu : \mu \in M(\mathbb{T})\}.$$

我们在 $\mathcal{K}$ 上赋予一个范数，使该同构成为等距映射，即

$$\|K\mu\|_{\mathcal{K}} := \|[\mu]\|_{M(\mathbb{T})/\overline{H_0^1}} = \operatorname{dist}(\mu, \overline{H_0^1}) \quad (\mu \in M(\mathbb{T})).$$

因此，最后，$A(\mathbb{D})$的对偶空间可与 $\mathcal{K}$等同，对偶配对由下式给出

$$\langle f, K\mu\rangle := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\,d\mu(\overline{\zeta}) = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\mu}(k) r^k \quad (f \in A(\mathbb{D}),\ K\mu \in \mathcal{K}).$$

现在我们应用§3中建立的理论。令 $X := A(\mathbb{D})$且 $X^* = \mathcal{K}$。对于 $k \geq 0$，我们定义 $e_k \in A(\mathbb{D})$为 $e_k(z) := z^k$，并令 $\psi_k \in \mathcal{K}$ 为

$$\psi_k(z) := K\Big(e^{ikt}\,\frac{dt}{2\pi}\Big)(z) = z^k.$$

容易验证，$\|e_k\|_\infty = \|\psi_k\|_{\mathcal{K}} = 1$，且对所有 k，$\langle e_k, \psi_k\rangle = 1$。

设 $A = (a_{nk})_{n,k\geq 0}$ 是由复数标量构成的无限矩阵，并满足 $\sum_{k\geq 0} |a_{nk}| < \infty$ 对每个 $n \geq 0$。那么，对于每个 $n \geq 0$，我们有

$$S_n^A(f) = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \frac{\langle f, \psi_k\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} e_k = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \widehat{f}(k) z^k \quad (f \in A(\mathbb{D})),$$

$$(S_n^A)^*(K\mu) = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \frac{\langle e_k, K\mu\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} \psi_k = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \widehat{\mu}(k) z^k \quad (K\mu \in \mathcal{K}).$$

与 $C(\mathbb{T})$ 的情形相同，Fej´er 定理蕴含 $\|\sigma_n f - f\|_\infty \to 0$，当 $n \to \infty$ 时，对所有 $f \in A(\mathbb{D})$ 均成立，因此至少存在一个矩阵 A^0，使得 $\|S_n^{A^0}(f) - f\|_\infty \to 0$。于是定理 3.1 适用。按照定理 3.1 的记号，Z 是 $\mathcal{K}$ 中 $\{K(e^{ikt}dt/2\pi) : k \geq 0\}$ 的张成空间的范数闭包，也就是 $L^1(\mathbb{T})/\overline{H_0^1}$。因此得到以下定理。

定理 4.4。设 $(a_{nk})_{n,k\geq 0}$ 是一个由复数标量构成的无限矩阵，满足 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{nk}| < \infty$ 对每个 $n \geq 0$。那么以下陈述等价：

(i) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{f}(k)z^k \to f$ *in* $(A(\mathbb{D}), w)$, *for all* $f \in A(\mathbb{D})$;
(ii) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{f}(k)z^k \to f$ *in* $(A(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$ *for all* $f \in A(\mathbb{D})$;
(iii) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{\mu}(k)z^k \to K\mu$ *in* $(\mathcal{K}, w^*)$, *for all* $\mu \in M(\mathbb{T})$;
(iv) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k)z^k \to Kg$ *in* $(\mathcal{K}, w^*)$, *for all* $g \in L^1(\mathbb{T})$;
(v) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k)z^k \to g$ *in* $(L^1/\overline{H_0^1}, \|\cdot\|_{L^1/\overline{H_0^1}})$, *for all* $g \in L^1(\mathbb{T})$.

5. Application to Hardy spaces and Bergman spaces

5.1. Hardy 空间、BMOA 和 VMOA。我们首先回顾这些空间的定义和一些基本事实。所有细节见第 [20, 9]章。

对于 $1 \leq p < \infty$，Hardy 空间 H^p 定义为满足以下条件的 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 集合：

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{r<1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\Big)^{1/p} < \infty.$$

此外，H^∞ 是定义在 $\mathbb{D}$上的有界全纯函数集，其中

$$\|f\|_{H^\infty} := \sup_{\mathbb{D}} |f|.$$

由有界平均振荡全纯函数构成的空间 BMOA，可刻画为满足以下条件的 $f \in H^2$ 所构成的空间：

$$\|f\|_{\mathrm{BMOA}} := |f(0)| + \sup_{\mathbb{D}} (P|f|^2 - |f|^2)^{1/2} < \infty,$$

其中，$P|f|^2$表示 $|f|^2$的 Poisson 积分。由消失平均振荡全纯函数构成的空间 VMOA，是 BMOA 的闭子空间，由满足（$P|f|^2 - |f|^2$）（z）$\to 0$ 当 $|z| \to 1$时的那些 f ∈∈BMOA组成。

所有空间 H^p、VMOA 和 BMOA 都是巴拿赫空间，且包含多项式。多项式在 H^p（$1 \leq p < \infty$）和 VMOA 中稠密，但在 H^∞ 或 BMOA 中不稠密，因为后两者都不可分。

我们有以下对偶空间的（同构意义下）对应关系：（VMOA）$^* \cong H^1$ 和（H^1）$^* \cong$BMOA。配对定义为

by

$$\langle f,g\rangle := \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})g(re^{-i\theta})\,d\theta \quad (f\in \mathrm{VMOA},\ g\in H^1),$$

$$\langle g,h\rangle := \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})h(re^{-i\theta})\,d\theta \quad (g\in H^1,\ h\in \mathrm{BMOA}).$$

现在我们继续应用§3中建立的理论。设 $X:=H^1$，设 $e_k:=z^k\in H^1$，并设 $\psi_k:=z^k\in$ BMOA。则对所有 $k\geq 0$，有 $\|e_k\|=1$、$\|\psi_k\|\asymp 1$以及 $\langle e_k、\ \psi_k\rangle=1$。

设 $(a_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 是一个复数标量矩阵，使得 $\sum_k |a_{nk}|<\infty$对每个 n均成立。

$$S_n^A(g)=\sum_{k\geq 0} a_{nk}\frac{\langle g,\psi_k\rangle}{\langle e_k,\psi_k\rangle}e_k=\sum_{k\geq 0}a_{nk}\widehat{g}(k)z^k \quad (g\in H^1),$$

$$(S_n^A)^*(h)=\sum_{k\geq 0} a_{nk}\frac{\langle e_k,h\rangle}{\langle e_k,\psi_k\rangle}\psi_k=\sum_{k\geq 0}a_{nk}\widehat{h}(k)z^k \quad (h\in \mathrm{BMOA}).$$

由 Fej´er 定理的一个适当版本，$\|\sigma_n(g)-g\|_{H^1}\to 0$ 对所有$g\in H^1$均成立。因此，定理 3.1 适用。按照定理 3.1 的记号，Z 是 BMOA 中张成空间 $\{z^k:\ k\geq 0\}$的范数闭包，它恰好就是 VMOA。因此我们得到如下结果。

定理 5.1. 设 $(a_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 是一个复数标量无限矩阵，使得 $\sum_k |a_{nk}|<\infty$ 对每个 n均成立。则以下陈述等价:

(i) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k)z^k\to g$ *in* (H^1,w), *for all* $g\in H^1$;
(ii) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k)z^k\to g$ *in* $(H^1,\|\cdot\|_{H^1})$, *for all* $g\in H^1$;
(iii) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{h}(k)z^k\to h$ *in* (BMOA,w^*), *for all* $h\in \mathrm{BMOA}$;
(iv) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{f}(k)z^k\to f$ *in* (VMOA,w), *for all* $f\in \mathrm{VMOA}$;
(v) $\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{f}(k)z^k\to f$ *in* $(\mathrm{VMOA},\|\cdot\|_{\mathrm{BMOA}})$, *for all* $f\in \mathrm{VMOA}$.

注. 明确地说，陈述 (iii) 意味着，对所有 $h\in$BMOA 以及所有 $g\in H^1$,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{r\to 1^-}\sum_{k\geq 0}a_{nk}r^k\widehat{g}(k)\widehat{h}(k)=\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})h(re^{-i\theta})\,d\theta.$$

现在我们专门讨论 Ces`aro 平均的情形。

定理 5.2。（1）存在 $g\in H^1$，使得 $s_n(g)\not\to g$ 属于 (H^1,w)。（2）存在 $f\in$VMOA，使得 $s_n(f)\not\to f$属于 (VMOA w)。

证明。众所周知，存在 $g\in H^1$ 使得 $\|s_n(g)-g\|_{H1}\not\to 0$。这很容易由黎斯投影这一事实推出

P_+： $L^1(\mathbb{T}) \to H^1$ 是无界的（例如参见 [6, 第 III 章，第 §1]节）。(1) 和 (2) 均可通过应用定理 5.1 中的等价关系得到。□

注：运用大致相同的思路，Zhu 先前已证明存在 $f \in \mathrm{VMOA}$，使得 $\|s_n(f) - f\|_{\mathrm{BMOA}} \not\to 0$（见 [19, 推论 5]）。

定理5.3。设 $\alpha > 0$。

(1) $\|\sigma_n^\alpha(g) - g\|_{H^1} \to 0$ 对所有 $g \in H^1$ 均成立。(2) 对所有 $h \in \mathrm{BMOA}$，$\sigma_n^\alpha(h) \to h$ 属于 (BMOA, w^*)。(3) $\|\sigma_n^\alpha(f) - f\|_{\mathrm{BMOA}} \to 0$ 对所有 $f \in \mathrm{VMOA}$ 均成立。

证明。(1) 是 Hardy 的经典结果 [7]。(2) 和 (3) 可由定理 5.1 得出。□

5.2. 伯格曼空间与布洛赫空间。我们的论述与 §5.1 中的内容平行。我们再次从回顾这些空间的定义和一些基本性质开始。详情见 [20,第 4 章和 5]。

对于 $1 \le p < \infty$，伯格曼空间 A^p 定义为由满足以下条件的 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 函数构成的空间

$$\|f\|_{A^p} := \Big(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z)\Big)^{1/p} < \infty,$$

其中 dA 表示 $\mathbb{D}$上的面积测度。

布洛赫空间 $\mathcal{B}$ 由满足以下条件的 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$函数构成

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := |f(0)| + \sup_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

小布洛赫空间 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{B}$ 的闭子空间，由满足 $(1 - |z|^2)|f'(z)| \to 0$ 当 $|z| \to 1$时的函数 $f \in \mathcal{B}$ 构成。

所有空间 A^p、$\mathcal{B}$、$\mathcal{B}_0$ 都是巴拿赫空间，并且包含多项式。多项式在 A^p $(1 \le p < \infty)$和 $\mathcal{B}_0$中稠密，但在 $\mathcal{B}$中不稠密，因为后者不可分。

我们有以下对偶空间的识别（在同构意义下）：$(\mathcal{B}_0)^* \cong A^1$ 和 $(A^1)^* \cong \mathcal{B}$。配对由下式给出

$$\langle f, g\rangle := \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{\pi}\int_{|z|<r} f(z)g(\overline{z})\, dA(z) \quad (f \in \mathcal{B}_0,\ g \in A^1),$$

$$\langle g, h\rangle := \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{\pi}\int_{|z|<r} g(z)h(\overline{z})\, dA(z) \quad (g \in A^1,\ h \in \mathcal{B}).$$

再次应用 §3 中建立的理论。令 $X := A^1$，令$e_k := z^k \in A^1$，并令 $\psi_k := z^k \in \mathcal{B}$。则$\|e_k\|_{A^1} \asymp 1/(k+1)$ 且$\|\psi_k\|_{\mathcal{B}} \asymp 1$，并且 $|\langle e_k, \psi_k\rangle| \asymp 1/(k+1)$，其中隐含常数与 k无关。

设 $(a_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 是一个由复数标量构成的矩阵，满足对每个 n都有 $\sum_k |a_{nk}| < \infty$。那么

$$S_n^A(g) = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \frac{\langle g, \psi_k\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} e_k = \sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k) z^k \quad (g \in A^1),$$

$$(S_n^A)^*(h) = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \frac{\langle e_k, h\rangle}{\langle e_k, \psi_k\rangle} \psi_k = \sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{h}(k) z^k \quad (h \in \mathcal{B}).$$

已知对于所有 $g \in A^1$，$\|\sigma_n(g) - g\|_{A^1} \to 0$（见下文定理 5.8 (i)）。因此，定理 3.1 适用。按照定理 3.1 的记号，Z 是 $\mathcal{B}$ 中 $\operatorname{span}\{z^k : k \geq 0\}$ 的范数闭包，这恰好就是 $\mathcal{B}_0$。由此得到以下结果。

定理 5.4. 设 $(a_{nk})_{n,k\geq 0}$ 是一个复数标量无限矩阵，且对每个 n，$\sum_k |a_{nk}| < \infty$。那么以下命题等价：

(i) 对所有 $g \in A^1$，$\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k) z^k \to g$ 属于 (A^1, w)；
(ii) 对所有 $g \in A^1$，$\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{g}(k) z^k \to g$ 属于 $(A^1, \|\cdot\|_{A^1})$；
(iii) 对所有 $h \in \mathcal{B}$，$\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{h}(k) z^k \to h$ 属于 $(\mathcal{B}, w^*)$；
(iv) 对所有 $f \in \mathcal{B}_0$，$\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{f}(k) z^k \to f$ 属于 $(\mathcal{B}_0, w)$；
(v) 对所有 $f \in \mathcal{B}_0$，$\sum_{k\geq 0} a_{nk}\widehat{f}(k) z^k \to f$ 属于 $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$。

注。具体而言，命题 (iii) 意味着，对所有 $h \in \mathcal{B}$ 和所有 $g \in A^1$，

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} a_{nk} r^k \widehat{g}(k)\widehat{h}(k) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{\pi} \int_{|z|<r} g(z) h(\overline{z})\, dA(z).$$

5.3. Hardy 空间与伯格曼空间之间的关系。以下结果描述了 H^p 中的可和性与 A^p 中的可和性之间的关系。

定理 5.5. 设 $1 \leq p < \infty$。设 $A := (a_{nk})_{n,k\geq 0}$ 是一个由复数标量构成的无限矩阵，使得对每个 n 都有 $\sum_k |a_{nk}| < \infty$。如果对所有 $f \in H^p$，$\|S_n^A(f) - f\|_{H^p} \to 0$，那么对所有 $g \in A^p$，$\|S_n^A(g) - g\|_{A^p} \to 0$。

证明这一结论需要一个引理。

引理 5.6. 设 $1 \leq p < \infty$。

(1) 我们有 $H^p \subset A^p$，并且对于所有 $f \in H^p$，$\|f\|_{A^p} \leq \|f\|_{H^p}$。(2) 设 $S : \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 是一个线性映射，使得对于所有 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 和所有 $r \in (0, 1)$，都有 $(Sf)_r = S(f_r)$。如果对于所有 $f \in H^p$，$\|Sf\|_{H^p} \leq C\|f\|_{H^p}$，那么对于所有 $g \in A^p$，$\|Sg\|_{A^p} \leq C\|g\|_{A^p}$。

证明。(1) 根据Fubini定理，我们有如下恒等式

$$\|f\|_{A^p}^p = \int_0^1 \|f_r\|_{H^p}^p \, 2r\, dr.$$

由于 $\|f_r\|_{H^p} \le \|f\|_{H_p}$ $\forall r \in (0,1)$，我们得到

$\|f\|_{A^p}^p \le \int_0^1 \|f\|_{H^p}^p \, 2r\, dr = \|f\|_{H^p}^p$。

(2) 再次利用上述恒等式，若 $f \in A^p$，则

$$\|Sf\|_{A^p}^p = \int_0^1 \|(Sf)_r\|_{H^p}^p \, 2r\, dr = \int_0^1 \|S(f_r)\|_{H^p}^p \, 2r\, dr$$
$$\le C^p \int_0^1 \|f_r\|_{H^p}^p \, 2r\, dr = C^p \|f\|_{A^p}^p. \qquad \square$$

注。事实上，Hardy和Littlewood的一个结果表明，我们甚至有 $H^p \subset A^{2p}$。关于这一点的简单证明，以及一个表明$2p$ 是尖锐的例子，请参见 Vukoti´c [18] 的文章。不过，这里不需要用到这一点。

定理 5.5 的证明。假设对所有 $f \in H^p$，$\|S_n^A(f) - f\|_{H^p} \to 0$。根据引理的第 (1) 部分，对所有 $f \in H^p$，$\|S_n^A(f) - f\|_{A^p} \to 0$。根据引理的第 (2) 部分，$\|S_n^A\colon A^p \to A^p\| \le \|S_n^A\colon H^p \to H^p\|$ 对所有 n 成立，并由 Banach–Steinhaus定理可得 $\sup_n \|S_n^A\colon H^p \to H^p\| < \infty$。现在，标准的稠密性论证给出，对所有 $g \in A^p$，$\|S_n^A(g) - g\|_{A^p} \to 0$。$\square$

我们再次通过将上述工作应用于经典 Ces`aro 平均来结束本节。

T定理 5.7。(1) 若 $1 < p < \infty$，则 $\|s_n(g) - g\|_{A^p} \to 0$。(2) 存在 $g \in A^1$，使得 $s_n(g) \not\to g$ 属于 (A^1, w)。(3) 存在 $f \in \mathcal{B}_0$，使得 $s_n(f) \not\to f$ 属于 $(\mathcal{B}_0, w)$。

证明。(1) 是 H^p 中的相应结果（众所周知）与定理 5.5 的推论。根据 Zhu 的一个结果 [19, 定理 9], ，存在$g \in A^1$ 使得 $\|s_n(g) - g\|_{A^1} \not\to 0$。(2) 和 (3) 均可由应用定理 5.4 中的等价关系得出。$\square$

注。Zhu 先前已证明，存在 $f \in \mathcal{B}_0$ 使得$\|s_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} \not\to 0$ （见 [19, 推论 11]）。Anderson、Clunie 和 Pommerenke [2], 也曾得到相同结果，但对 $\mathcal{B}_0$ 的对偶空间和 $\mathcal{B}$的前对偶空间的识别略有不同。

定理 5.8。设 $\alpha > 0$。

(1) $\|\sigma_n^\alpha(g) - g\|_{A^1} \to 0$ 对所有 $g \in A^1$成立。(
2) $\sigma_n^\alpha(h) \to h$ 属于 $(\mathcal{B}, w^*)$，对所有 $h \in \mathcal{B}$成立。
(3) $\|\sigma_n^\alpha(f) - f\|_{\mathcal{B}} \to 0$ 对所有 $f \in \mathcal{B}_0$成立。

证明。(1) 由关于 H^1 的相应结果以及定理 5.5 得出。(2) 和 (3) 是 (1) 的推论，使用定理 5.4 中的等价关系即可。□

6. Applications in Hilbert spaces

6.1. 抽象框架。在希尔伯特空间的情形下，我们可以用内积代替对偶配对，重复 §3 中的分析。由于内积是半双线性而非双线性的，这两种理论之间会有一些细微差异。

在本节中，H 表示一个内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的复希尔伯特空间。此外，如果 T 是 H 上的有界线性算子，那么 T^* 表示 T 的希尔伯特空间伴随算子，即 H 上满足下述条件的唯一算子

$$\langle Tg, h\rangle = \langle g, T^*h\rangle \quad (g, h \in H).$$

下述定理是定理 2.1 的对应版本。证明方法完全相同，因此省略细节。当然，由于希尔伯特空间是自反的，弱收敛与弱*收敛之间没有区别。

定理 6.1. 设 $(T_n)_{n\geq 1}$ 是 H 上一列有界的有限秩算子，使得

$$T_nT_m(H) \subset T_m(H) \quad and \quad T_n^*T_m^*(H) \subset T_m^*(H) \qquad (m, n \geq 0).$$

那么，以下命题等价：

(i) 对所有 $h \in H$，$T_nh \to h$ 弱收敛；

(ii) 对所有 $h \in H$，$T_nh \to h$ 在范数下收敛；

(iii) 对所有 $h \in H$，$T_n^*h \to h$ 弱收敛；(i

v) 对所有 $h \in H$，$T_n^*h \to h$ 在范数下收敛。

现在假设 $(e_k)_{k\geq 0}$ 和 $(f_k)_{k\geq 0}$ 是 H 中的两个序列，满足

$$\begin{cases} \langle e_j, f_k\rangle = 0, & \forall j, k,\ j \neq k, \\ \langle e_k, f_k\rangle \neq 0, & \forall k. \end{cases}$$

对每个 $k \geq 0$，定义 $P_k\colon H \to H$ 如下：

$$P_k := \frac{e_k \otimes f_k}{\langle e_k, f_k\rangle}.$$

具体而言，

$$P_k(h) := \frac{\langle h, f_k\rangle}{\langle e_k, f_k\rangle} e_k \quad (h \in H).$$

显然，如果 $j \neq k$，则 $P_k(e_k) = e_k$ 且 $P_k(e_j) = 0$。容易看出，P_k 是一个秩一投影，其

$$\|P_k\| = \frac{\|e_k\|\|f_k\|}{|\langle e_k, f_k\rangle|}.$$

其伴随算子 $P_k^*\colon H \to H$ 由下式给出

$$P_k^* = \frac{f_k \otimes e_k}{\langle f_k, e_k\rangle}.$$

设 $A = (a_{nk})_{n,k\geq 0}$ 是一个复数标量无限矩阵，并且对每个 $n \geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0} |a_{nk}|\|P_k\| < \infty.$$

我们通过绝对收敛级数定义相应的求和算子 $S_n^A\colon H \to H$ $(n \geq 0)$

$$S_n^A := \sum_{k\geq 0} a_{nk} P_k.$$

具体而言，我们有

$$S_n^A(h) = \sum_{k\geq 0} a_{nk} \frac{\langle h, f_k\rangle}{\langle e_k, f_k\rangle} e_k \quad (h \in H),$$

$$(S_n^A)^*(h) = \sum_{k\geq 0} \overline{a}_{nk} \frac{\langle h, e_k\rangle}{\langle f_k, e_k\rangle} f_k \quad (h \in H).$$

建立此记号后，我们得到以下等价定理。它由定理 6.1 推出，方式与定理 3.1 由定理 2.1 推出的方式完全相同。细节从略。

定理 6.2。以下各陈述等价：

(i) 对所有 $h \in H$， $S_n^A(h) \to h$ 弱收敛。
(ii) 对所有 $h \in H$， $S_n^A(h) \to h$ 按范数收敛。
(iii) 对所有 $h \in H$，$(S_n^A)^*(h) \to h$ 弱收敛。(iv)
对所有 $h \in H$，$(S_n^A)^*(h) \to h$ 按范数收敛。

极限定理（定理 3.2 和定理 3.4）也有希尔伯特空间版本。证明与前面相同。

定理 6.3。假设对所有 $x \in H$， $S_n^A(x) \to x$ （弱收敛或按范数收敛），并且 A 存在左逆 B。那么，记 $B_j := \sum_{n\geq 0} |b_{jn}|$，我们有

$$\frac{\|e_j\|\|f_j\|}{|\langle e_j, f_j\rangle|} = O(B_j) \quad (j \to \infty).$$

定理 6.4。设 $\alpha \geq 0$。如果对于所有$x \in H$， $\sigma_n^\alpha(x) \to x$ （弱收敛或按范数收敛），则

$$\frac{\|e_j\|\|f_j\|}{|\langle e_j, f_j\rangle|} = O(j^\alpha) \quad (j \to \infty).$$

6.2. 全纯函数的再生核空间。现在我们将这些思想应用于单位圆盘上的全纯函数再生核空间。

设 H 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数希尔伯特空间，并满足：

- 在 H 的范数下收敛意味着在 $\mathbb{D}$ 上逐点收敛；
- H 包含多项式。

第一个假设意味着，对每个 $w \in \mathbb{D}$，泛函 $h \mapsto h(w)$ 在 H 上连续，因此，根据里斯表示定理，存在唯一的 $k_w \in H$，使得

$$h(w) = \langle h, k_w \rangle \quad (h \in H).$$

我们定义 $K\colon\ H \times H \to \mathbb{C}$ 为

$$K(z, w) := k_w(z) = \langle k_w, k_z \rangle \quad (z, w \in \mathbb{D}).$$

函数 K 是 H的再生核。显然，它满足$K(w, z) = K(z, w)$，并且对每个固定的 w，$K(z, w)$ 关于 z是全纯的。因此，对每个固定的 z，它关于 w 是反全纯的。我们将需要下面这个关于 K的导数的简单引理。

引理 6.5. 对于每个 $w \in \mathbb{D}$ 和每个 $n \geq 0$，令

$$k_{w,n}(z) := \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \overline{w}^n} K(z, w) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

则 $k_{w,\ n} \in H$ 以及

$$\langle h, k_{w,n} \rangle = \frac{h^{(n)}(w)}{n!} \quad (h \in H). \tag{6.1}$$

证明。由于 H 中的范数收敛蕴含在 $\mathbb{D}$上的局部一致收敛，映射 $h \mapsto h^{(n)}(w)/n!$ 是 H上的连续线性泛函，因此根据黎斯定理，再次存在 $k_{w,\ n} \in H$，使得（6.1）成立。剩下的工作是确定 $k_{w,\ n}$，具体如下。对于每个 $z \in \mathbb{D}$，我们有

$$\begin{aligned} k_{w,n}(z) &= \langle k_{w,n}, k_z \rangle = \overline{\langle k_z, k_{w,n} \rangle} \\ &= \overline{\frac{k_z^{(n)}(w)}{n!}} = \overline{\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial w^n} K(w, z)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \overline{w}^n} K(z, w). \end{aligned}$$

□

现在我们在 H 中定义序列 $(e_j)_{j \geq 0}$ 和 $(f_j)_{j \geq 0}$，定义如下：$e_j := z^j$ 和 $f_j := k_{0,\ j}$。注意，若 $h \in H$，则

$$\langle h, f_j \rangle = \frac{h^{(j)}(0)}{j!} = \widehat{h}(j).$$

特别地，$\langle e_i、 f_j\rangle = \delta_{ij}$，因此 §6.1 中概述的理论适用。另请注意，$\|e_j\| = \|z^j\|_H$ 和

$$\|f_j\|^2 = \|k_{0,j}\|^2 = \langle k_{0,j}, k_{0,j}\rangle = \frac{1}{j!}k_{0,j}^{(j)}(0) = \frac{1}{j!^2}\frac{\partial^{2j}K}{\partial z^j \partial \overline{w}^j}(0,0).$$

定理 6.2 导出如下结果。

定理 6.6。设 $(a_{nj})_{n,j\geq 0}$ 是一个复数标量无限矩阵，满足 $\sum_{j\geq 0}|a_{nj}|\|z^j\|\|k_{0,j}\| < \infty$ 对每个 $n \geq 0$ 都成立。那么以下各命题等价：

(i) $\sum_{j\geq 0} a_{nj}\widehat{h}(j)z^j \to h$ 随 $n \to \infty$ 弱收敛，对所有 $h \in H$ 均成立；
(ii) $\sum_{j\geq 0} a_{nj}\widehat{h}(j)z^j \to h$ 随 $n \to \infty$ 在范数下收敛，对所有 $h \in H$ 均成立；(iii) $\sum_{j\geq 0} \overline{a}_{nj}\langle h, z^j\rangle k_{0,j} \to h$ 随 $n \to \infty$ 弱收敛，对所有 $h \in H$ 均成立；(iv) $\sum_{j\geq 0} \overline{a}_{nj}\langle h, z^j\rangle k_{0,j} \to h$ 随 $n \to \infty$ 在范数下收敛，对所有 $h \in H$ 均成立。

以下结果是再生核空间的一个限制定理。它是定理 6.4 的直接推论。

定理 6.7. 设 H 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数再生核空间，且包含多项式。若对所有 $h \in H$，$\alpha \geq 0$ 和 $\sigma_n^\alpha(h) \to h$（弱收敛或依范数收敛），则

$$\|z^j\|\|k_{0,j}\| = O(j^\alpha) \quad (j \to \infty).$$

6.3. de Branges–Rovnyak 空间。现在我们专门讨论 $H = \mathcal{H}(b)$的情形，即符号为 b的 de Branges–Rovnyak 空间。这里，b 是 H^∞的单位球中的一个元素。根据定义，$\mathcal{H}(b)$是定义在 $\mathbb{D}$ 上的再生核空间，其核为

$$K(z,w) = \frac{1 - b(z)\overline{b(w)}}{1 - z\overline{w}} \quad (z, w \in \mathbb{D}).$$

空间 $\mathcal{H}(b)$包含多项式，当且仅当 b 是 H^∞单位球中的一个非极端点；在这种情况下，多项式在$\mathcal{H}(b)$中稠密。已知 b 是非极端点，当且仅当其边界值满足 $\log(1 - |b|^2) \in L^1(\mathbb{T})$。下文均假设这一条件成立。关于 $\mathcal{H}(b)$-空间的更多信息，请参阅 [16] 和 [4, 5]。

下面的结果将在后文中发挥作用。

命题 6.8. 设 b 是 H^∞ 的单位球中的一个非极端点。那么 $\inf_{j\geq 0}\|k_{0,j}\|_{\mathcal{H}(b)} > 0$。

证明。我们计算 $k_{0,j}$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中的一个表达式。根据莱布尼茨定理，我们有

$$\begin{aligned} k_{0,j}(z) &= \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \overline{w}^j} K(z,0) \\ &= \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^i}{\partial \overline{w}^i}\Big(1 - b(z)\overline{b(w)}\Big)\Big|_{w=0} \frac{\partial^{j-i}}{\partial \overline{w}^{j-i}}\Big(1 - z\overline{w}\Big)^{-1}\Big|_{w=0} \\ &= z^j - b(z)\sum_{i=0}^{j} \overline{\widehat{b}(i)} z^{j-i}. \end{aligned}$$

因此，视为定义在 $\mathbb{T}$ 上的函数，

$$k_{0,j} = z^j(1 - b\overline{s_j(b)}).$$

此外，将 $K(z,w) = (1 - b(z)b(w))/(\overline{1 - z\overline{w}})$ 展开为关于 z、$\overline{w}$ 的二重幂级数，并计算 $z^j\overline{w}^j$ 的系数，我们得到

$$\|k_{0,j}\|^2_{\mathcal{H}(b)} = \frac{1}{j!^2}\frac{\partial^{2j}K}{\partial z^j \partial \overline{w}^j}(0,0) = 1 - \sum_{i=0}^{j} |\widehat{b}(i)|^2 = 1 - \|s_j(b)\|^2_{H^2}.$$

特别地，我们有

$$1 \geq \|k_{0,j}\|^2_{\mathcal{H}(b)} \geq 1 - \|b\|^2_{H^2} \quad (j \geq 0).$$

由于 b 是非极端的，$\|b\|_{H^2} < \|b\|_{H^\infty} \leq 1$ 或 $\|b\|_{H^2} = \|b\|_{H^\infty} < 1$。无论哪种情况，$1 - \|b\|^2_{H^2} > 0$。因此 $\inf_{j\geq 0} \|k_{0,\ j}\|_{\mathcal{H}(b)} > 0$，如所声称。□

注。类似的结果也适用于 Aleman 和 Malman 在 [1] 中研究的更一般的有限秩 $\mathcal{H}[B]$ 空间。然而，并非所有再生核函数空间都具有这一性质。例如，在单位圆盘上的经典狄利克雷空间中，我们有 $\|k_{0,\ j}\| \asymp 1/j$。

将这些信息代入 §6.2 的结果，我们可推导出以下结果。（我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ 表示 $\mathcal{H}(b)$ 中的内积。）

定理 6.9. 设 b 是 H^∞ 单位球中的一个非极端点。设 $(a_{nj})_{n,j\geq 0}$ 是一个复数标量矩阵，使得对于每个 $n \geq 0$ 都有 $\sum_{j\geq 0} |a_{nj}| \|z^j\|_{\mathcal{H}(b)} < \infty$。则以下陈述等价：

(i) $\sum_{j\geq 0} a_{nj}\widehat{h}(j)z^j \to h$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中弱收敛，对所有 $h \in \mathcal{H}(b)$ 均成立；(ii) $\sum_{j\geq 0} a_{nj}\widehat{h}(j)z^j \to h$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中按范数收敛，对所有 $h \in \mathcal{H}(b)$ 均成立；(iii) $\sum_{j\geq 0} \overline{a}_{nj}(1 - bs_j(b))\langle h, z^j\rangle_b z^j \to h$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中弱收敛，对所有 $h \in \mathcal{H}(b)$ 均成立；(iv) $\sum_{j\geq 0} \overline{a}_{nj}(1 - bs_j(b))\langle h, z^j\rangle_b z^j \to h$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中按范数收敛，对所有 $h \in \mathcal{H}(b)$ 均成立。

定理 6.10。设 b 是 H^∞ 的单位球的一个非极端点。若对于所有 $h \in \mathcal{H}(b)$, $\alpha \geq 0$ 且 $\sigma_n^\alpha(h) \to h$ （弱收敛或按范数收敛），则

$$\|z^j\|_{\mathcal{H}(b)} = O(j^\alpha) \quad (j \to \infty).$$

下面这个推论值得特别指出。

推论 6.11. 设 b 是 H^∞单位球中的一个非极端点。若对所有 $h \in \mathcal{H}(b)$, $s_n(h)$ 都 $\to h$ （弱收敛或按范数收敛），则 $\sup_{j\geq 0} \|z^j\|_{\mathcal{H}(b)} < \infty$。

在 de Branges–Rovnyak 空间中， z 的幂按范数有界的空间本身构成一个有趣的类别。例如，它们恰好是包含 H^∞的 $\mathcal{H}(b)$-空间。此外，它们还可以用条件 $1/(1-|b|^2) \in L^1(\mathbb{T})$ 来刻画。有关更多内容，请参见[15, §4]。

对于 $\alpha > 0$，对每个 $h \in \mathcal{H}(b)$， $\sigma_n^\alpha(h)$ 收敛到 h 也会对 b产生影响。为推导这些结论，我们需要$\|z^j\|_{\mathcal{H}(b)}$的显式公式，这要求我们进一步探究 de Branges–Rovnyak 空间理论。详情见 [16] 和 [5]。

如前所述，若 b 是H^∞单位球中的一个非极端点，则 $\log(1-|b|^2) \in L^1(\mathbb{T})$。这意味着存在唯一的外函数 a 定义在 $\mathbb{D}$ 上，且满足 $a(0) > 0$，使得 $|b|^2 + |a|^2 = 1$ 在$\mathbb{T}$上几乎处处成立。这个函数 a 有时称为 b的勾股补函数。记作 $\phi := b/a$，我们得到一个属于 Smirnov 类 N^+ 的函数，也就是分母为外函数的 H^∞函数的商所构成的空间。反过来，所有 Smirnov 函数都可以如此得到。因此， $b \leftrightarrow \phi$之间存在一一对应关系： H^∞ 单位球中的非极端点 b 与函数 $\phi \in N^+$相对应。将 $\phi(z)$展开为泰勒级数，设 $\phi(z) = \sum_{j\geq 0} c_j z^j$，则有

$$\|z^j\|^2_{\mathcal{H}(b)} = 1 + \sum_{i=0}^{j} |c_i|^2. \tag{6.2}$$

关于 (6.2) 的一个简单证明，例如可见于 [15, 第81]页。

定理 6.12。设 b 是 H^∞ 的单位球中的一个非极端点， ϕ 是相应的 Smirnov 类函数。如果对所有 $h \in \mathcal{H}$（b）， $\alpha \geq 0$ 和 σ_n^α（h）$\to h$ （弱收敛或在范数意义下收敛），那么

$$\phi(z) = O\Big((1-|z|)^{-\alpha-1/2}\Big) \quad (|z| \to 1^-). \tag{6.3}$$

证明。如上所述，记 $\phi(z) = \sum_{j\geq 0} c_j z^j$。分部求和可得

$$|\phi(z)| \leq \sum_{j\geq 0} |c_j||z|^j = (1-|z|)\sum_{j\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{j}|c_i|\Big)|z|^j \quad (|z|<1).$$

由柯西–施瓦茨不等式和公式 (6.2),

$$\sum_{i=0}^{j}|c_i|\le (j+1)^{1/2}\Big(\sum_{i=0}^{j}|c_i|^2\Big)^{1/2}\le (j+1)^{1/2}\|z^j\|_{\mathcal{H}(b)}\quad (j\ge 0).$$

由定理 6.10 可知

$$\sum_{i=0}^{j}|c_i| = O(j^{\alpha+1/2})\quad (j\to\infty).$$

将这一信息代回关于 ϕ 的不等式，我们得到存在常数 C 使得

$$|\phi(z)|\le C(1-|z|)\sum_{j\ge 0} j^{\alpha+1/2}|z|^j\quad (|z|<1).$$

结论 (6.3) 得证。 □

最后给出两个具体例子。

推论 6.13。设 $\phi(z):=z/(1-z)$，并设 b 为 H^∞ 的单位球中相应的非极端点。若对于所有 $h\in\mathcal{H}(b)$ 都有 $\sigma_n^\alpha(h)\to h$，则 $\alpha\ge 1/2$。

注。在此情况下，可以明确确定 b，即为

$$b(z)=\frac{(1-w_0)z}{1-w_0 z},$$

其中 $w_0:=(3-\sqrt{5})/2$。此例取自 [17],，其中证明了，对于 b 的这一特定选择，de Branges–Rovynak 空间 $\mathcal{H}(b)$ 等于局部狄利克雷空间 $\mathcal{D}(\delta_1)$（具有相同的范数）。[9] 中证明了，如果 $\alpha>1/2$，那么对于所有 $h\in\mathcal{D}(\delta_1)$，$\sigma_n^\alpha(h)$ 在范数意义下 $\to h$，但存在 $h_0\in\mathcal{D}(\delta_1)$ 使得 $\sigma_n^{1/2}(h_0)\not\to h_0$。因此，推论 6.13 中的常数 $1/2$ 是最佳的。

推论 6.14。设

$$\phi(z):=\exp\Big(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\Big)\quad (z\in\mathbb{D}).$$

则 $\phi\in N^+$。如果 b 是 H^∞ 的单位球中相应的非极端点，那么不存在 $\alpha\ge 0$ 使得对于所有 $h\in\mathcal{H}(b)$，$\sigma_n^\alpha(h)\to h$。

证明。函数 $\sqrt{(1+z)/(1-z)}$ 属于 $\overline{H^1}$。因此，它的指数函数是一个外函数，所以 $\phi\in N^+$。现在应用定理 6.12。□

注。因此，在这种情况下，尽管多项式在 $\mathcal{H}(b)$ 中稠密，却不存在一种总能收敛的 Ces`aro 可和方法。此前， [3] 和 [12] 通过归纳构造得到了这类例子。我们的方法的优点是，它给出了一个（相当简单的）显式函数 ϕ，能够达到这一目的。

致谢。感谢 Ryan Gibara 提供的有益讨论。

References

[1] A. Aleman 和 B. Malman. 具有压缩反向移位的解析函数希尔伯特空间. *J. Funct. Anal.*, 277(1):157–199, 2019. [2] J. M. Anderson, J. Clunie 和 Ch. Pommerenke. 关于布洛赫函数和正规函数. *J. Reine Angew. Math.*, 270:12–37, 1974.[3] O. El-Fallah、E. Fricain、K. Kellay、J. Mashreghi 和 T. Ransford. de Branges-Rovnyak 空间中的构造性逼近. *Constr. Approx.*, 44 281, 2016 2 269( ): – .[4] E. Fricain 和 J. Mashreghi. *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 1, New Mathematical Monographs*第20卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2016. [5] E. Fricain 和 J. Mashreghi. *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 2, New Mathematical Monographs* 第21卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2016.[6] J. B. Garnett. *Bounded analytic functions* 236 *Graduate Texts in Mathematics* , 第 2007 卷, . Springer，纽约，再版自第一版，.[7] G. H. Hardy. 论傅里叶级数的可和性 . *Proc. London Math. Soc. (2)* , : – . 12 365 372, 1913
[8] G. H. Hardy. *Divergent series*. Chelsea，纽约，再版自第二版，1991.[9] J. Mashreghi、P.-O. Paris´e 和 T. Ransford. 加权狄利克雷空间中泰勒级数的 Ces`aro 可和性. *Complex Anal. Oper. Theory*, 15 7, 8, 2021 1( ):论文编号 . [10] J. Mashreghi、P.-O. Paris´e 和 T. Ransford. 奇函数无法由奇多项式逼近. *Constr. Approx.*, 56(1):35–43, 2022. [11] J. Mashreghi、P.-O. Paris´e 和 T. Ransford. de Branges–Rovnyak 空间中的幂级数求和方法. *Integral Equations Operator Theory*, 94(2):论文编号 20, 17, 2022.[12] J. Mashreghi 和 T. Ransford. de Branges–Rovnyak 空间中的外函数与发散. *Complex Anal. Oper. Theory*, 12(4):987–995, 2018. [13] J. Mashreghi 和 T. Ransford. 巴拿赫全纯函数空间中的线性多项式逼近方案. *Anal. Math. Phys.*, 9(2):899–905, 2019. [14] M. Riesz. 关于狄利克雷级数和整级数， . *C. R. Acad. Sci. Paris*, 149 309: –312, 1911.[15] D. Sarason. H^2中的双重移位不变空间. *J. Operator Theory*, 16(1):75– 97, 1986.[16] D. Sarason. *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk* 10 *University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences* , 第 卷, . John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1994. Wiley-Interscience 出版物. [17] D. Sarason. 局部狄利克雷空间作为 de Branges-Rovnyak 空间. *Proc. Amer. Math. Soc.* , ( ): – 125 7 2133 2139, 1997
. [18] D. Vukoti´c. 等周不等式与 Hardy 和 Littlewood 的一个定理 . *Amer. Math. Monthly*, 110(6):532–536, 2003.

[19] K. Zhu. Bloch 空间的对偶性与泰勒级数的范数收敛. *Michigan Math. J.* 38 1 89 , ( ): – 101, 1991. [20] K. Zhu. *Operator theory in function spaces* 138 *Mathematical Sur-* , 第 *veys and Monographs* 卷, . 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 第二版, 2007.

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec City (Québec), Canada G1V 0A6.*Email address*: ghara90@gmail.com

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec City (Québec), Canada G1V 0A6.*Email address*: javad.mashreghi@mat.ulaval.ca

Département de mathématiques et de statistique Université Laval Québec , City (Québec) Canada G1V 0A6.

, ,*Email address*, 通讯作者: thomas.ransford@mat.ulaval.ca