arXiv:2302.06722v1 [math.FA] 13 Feb 2023

算子序列的渐近等度连续性与 Banach–Steinhaus 型定理

Javad Mashreghi 和 Thomas Ransford

Abstract. 我们引入线性算子的渐近等度连续序列这一概念，并用它证明以下结果。若 X、Y是拓扑向量空间，若 T_n、T: $X \to Y$是连续线性映射，且若 D 是 X的稠密子集，则以下陈述等价：(i) 对所有 $x \in X$，$T_n x \to Tx$成立；(ii) 对所有 $x \in D$，$T_n x \to Tx$成立，且序列 (T_n)渐近等度连续。

1. 引言

以下定理是《泛函分析》中的一个标准习题。

定理 1.1. 设 X 和 Y 是 Banach空间，设 $(T_n)_{n\geq 1}$ 和 T 是从 X 到 Y的连续线性映射，并设 D 是 X的稠密子集。则以下陈述等价：

(i) $T_n x \to Tx$ 对所有 $x \in X$成立；(ii) $T_n x \to Tx$ 对所有 $x \in D$ 成立，且 $\sup_n \|T_n\| < \infty$。

(ii)⇒(i) 的推论是一个简单的 $\epsilon/3$ 论证。(i)⇒(ii) 的推论是 Banach–Steinhaus定理的一个应用；事实上，这可以追溯到 Banach 和 Steinhaus 的原始论文 [1]。

这里实际上不需要 Y 的完备性，因为我们总可以将 Y 嵌入其完备化中。然而，Banach–Steinhaus定理需要 X 的完备性。没有这一条件，(i)⇒(ii) 的推论实际上可能不成立。

例1.2。 令 $X = c_{00}$ 为实数的有限支撑序列空间，赋予上确界范数，并令 $Y = \mathbb{R}$。令 $\pi_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ 为第 n 个坐标泛函，令 $T_n := n\pi_n$，并令 $T := 0$。

对于每个 $x \in c_{00}$，当 n 足够大时，我们有 $T_n x = 0$，因此 (i) 成立。然而，对于所有 n，我们有 $\|T_n\| = n$，因此 (ii) 不成立。

定理 1.1 有一个关于弱拓扑的推论。

推论 1.3. 设 X 和 Y 为 Banach空间，设 $(T_n)_{n\geq 1}$ 和 T 为从 X 到 Y 的连续线性映射，并设 D 是 X 的一个弱稠密子集。则以下陈述等价：

Mashreghi 获得了 NSERC 探索基金的资助。Ransford 获得了 NSERC 和加拿大研究讲席计划的资助。1

(i) 对所有 $x \in X$， $T_n x \to Tx$ 弱收敛；(ii) 对所有 $x \in D$， $T_n x \to Tx$ 弱收敛，且 $\sup_n \|T_n\| < \infty$。

证明。蕴含关系 (i)⇒(ii) 成立，是因为根据 Banach–Steinhaus定理，弱有界蕴含范数有界。

对于蕴含关系 (ii)⇒(i)，令 $\phi \in Y^*$ 为 Y 的对偶空间。若 (ii) 成立，则对于所有 $x \in D$，有 $(\phi \circ T_n)x \to (\phi \circ T)x$，因此对于 x 的线性张成中的所有元素也成立；若后者是弱稠密的，那么它也是范数稠密的（例如参见 [3,定理 3.12] 的推论）。因此，我们可以应用定理 1.1，推出对于所有 $x \in X$，有 $(\phi \circ T_n)x \to (\phi \circ T)x$。由于这对每个 $\phi \in Y^*$ 都成立，我们得出 (i) 成立。□

如果 X 和 Y 恰好是对偶空间，那么我们还可以问，推论 1.3 的类似结论是否也适用于弱*拓扑。这个问题最近在 [2] 中关于可求和算子的研究背景下出现。事实证明，答案是否定的。有趣的是，这一次失效的是蕴含关系 (ii)⇒(i)。

例 1.4。令 $X = \ell^\infty$ 为有界序列空间，并赋予上确界范数，令 $Y = \mathbb{R}$。令 $\pi_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ 为第 n 个坐标泛函，令 $T_n := \pi_n$，并令 $T := 0$。令 $D = c_0$ 为 ℓ^∞ 的子空间，其中包含所有趋于零的序列。

由于 c_0 的双对偶是 ℓ^∞，因此可知 c_0 在 ℓ^∞ 中弱星稠密（例如参见 [3，第 4 章，习题 1]）。此外，对于所有 $x \in c_0$ 都有 $T_n x \to 0$，且 $\sup_n \|T_n\| = 1 < \infty$，所以 (ii) 成立。然而，如果 x 是常值序列 (1,1,...)，那么 $x \in \ell^\infty$ 且 $T_n x \not\to 0$，因此 (i) 不成立。

有人或许会合理地认为，为了得到推论 1.3 的真正弱*版本，还应将条件 $\sup_n \|T_n\| < \infty$ 替换为一个与 X 和 Y上的弱*拓扑联系更紧密的条件。一个自然的候选条件是，序列 (T_n) 弱* 等度连续，即对于 Y中的每个弱* 0-邻域 V，都存在 X 中的一个弱* 0-邻域 U，使得对所有 n， $T_n(U) \subset V$。作此修改后，(ii) 确实蕴含 (i)（对于弱*拓扑）。然而，正如下例所示，此时我们将失去蕴含关系 (i)⇒(ii)。

例 1.5。设 $X = \ell^2$，赋予通常的 ℓ^2范数，并设 $Y = \mathbb{R}$。令$\pi_n : \ell^2 \to \mathbb{R}$ 为第 n个坐标泛函，令 $T_n := \pi_n$，并令 $T := 0$。

对于每个 $x \in \ell^2$，我们都有 $T_n x \to 0$ 属于 $\mathbb{R}$，因此 (i) 成立。然而，如果 U 是 ℓ^2中的任意弱* 0-邻域，那么 U 包含 ℓ^2 的一个非零子空间（例如参见 [3, 第 66] 页），由此容易得出，对于所有 n， $T_n(U) = \mathbb{R}$。我们得出结论，序列 (T_n) 不是弱* 等度连续的，因此在这种情形下 (ii) 不成立。

在文章 [2]，中，我们通过利用所涉及的特定算子的结构，克服了这些困难。但对于一般算子，这个问题依然存在。本文旨在提出一种解决方案，即用适当的条件替换定理 1.1 中的 $\sup_n \|T_n\| < \infty$

条件，使得等价关系 (i) $\iff$ (ii) 对弱*拓扑成立，事实上，对任意拓扑向量空间也成立。

2. Asymptotic equicontinuity

给定集合 X 和 X 的子集序列（F_n），我们将 $\liminf_n F_n$ 记作属于 F_n 中除有限多个 n 外所有集合的 $x \in X$ 所组成的集合。

定义 2.1。设 X、Y 为拓扑向量空间，且（T_n）是从 X 到 Y 的连续线性映射序列。若对于 Y 中的每个零邻域 V，集合 $\liminf_n T_n^{-1}(V)$ 是 X 中的一个零邻域，则称（T_n）是渐近等度连续的。

我们明确说明如下：（T_n）是渐近等度连续的，当且仅当对于 Y 中的每个零邻域 V，存在 X 中的一个零邻域 U，使得只要 $x \in U$，则对于所有足够大的 n，都有 $T_n x \in V$。

显然，若 (T_n) 关于 X 和 Y等度连续，则它是渐近等度连续的。

若 X 和 Y 是Banach空间，则逆命题成立。事实上，在这种情况下，(T_n)渐近等度连续意味着对每个$x \in X$，都有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$；进而由Banach–Steinhaus定理可得 $\sup_n \|T_n\| < \infty$，因此(T_n)等度连续。

然而，一般而言，渐近等度连续并不意味着等度连续。例如，例1.2中的序列(T_n)范数无界，因而并非等度连续。然而，它是渐近等度连续的：这可由下文的定理 2.2推出，也很容易直接验证。

现在我们可以陈述主要结果。

定理 2.2. 设 X 和 Y 是拓扑向量空间，$(T_n)_{n\geq 1}$ 和 T是从 X 到 Y的连续线性映射，且 D 是 X的稠密子集。那么以下命题等价：

(i) 对所有 $x \in X$，$T_n x \to Tx$；(ii) 对所有 $x \in D$，$T_n x \to Tx$，且序列 (T_n) 渐近等度连续。

为了证明定理 2.2，我们需要一个引理。

引理 2.3. 如果 (S_n) 和 (T_n) 是从 X 到 Y的线性映射的渐近等度连续序列，那么 ($S_n + T_n$) 也是如此。

证明。令 V 为 Y 中的一个零邻域。令 W 为 Y 中的一个零邻域，使得 $W + W \subset V$。由于 (S_n) 和 (T_n) 是渐近等度连续序列，集合 $U_1 := \liminf S_n^{-1}(W)$ 和 $U_2 := \liminf T_n^{-1}(W)$ 是 X 中的零邻域。令 $U := U_1 \cap U_2$。那么 U 是 X 中的一个零邻域，并且若 $x \in U$，则对所有充分大的 n，都有 $S_n x \in W$ 和 $T_n x \in W$，因此 $(S_n + T_n)x \in W + W \subset V$。这表明 $U \subset \liminf (S_n + T_n)^{-1}(V)$。□

定理 2.2 的证明。(i)⇒(ii)：假设对所有 $x \in X$，都有 $T_n x \to Tx$。显然，这一点尤其对所有 $x \in D$ 都成立。此外，对 Y 中的每个零邻域 V，根据 $T_n x$ 收敛到 Tx 的定义，显然有 $\liminf (T_n - T)^{-1}(V) = X$。因此，序列 $(T_n - T)$ 是渐近等度连续的。显然，常值序列 (T) 是渐近等度连续的，所以根据引理，(T_n) 是渐近等度连续的。

(ii)⇒(i)：假设 (ii) 中的条件成立。令 $R_n := T_n - T$。则 $R_n x \to 0$ 对所有 $x \in D$都成立，并且根据引理，序列 (R_n) 是渐近等度连续的。我们需要证明对所有$x \in X$， $R_n x \to 0$都成立。

设 $x \in X$ 和 V 是 Y中的一个零邻域。我们将证明，对所有足够大的 n，$R_n x \in V$ 成立。我们可以在 Y中选取另一个零邻域W，使得 $W - W \subset V$。由于 (R_n) 是渐近等度连续的，$U := \liminf R_n^{-1}(W)$ 是 X中的一个零邻域。由于 D 在 X 中稠密，存在 $x' \in D$ 使得 $x' \in x + U$。由于 $x' - x \in U$，存在 N 使得

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad R_n(x' - x) \in W.$$

此外，由于 $x' \in D$，我们有 $R_n x' \to 0$，因此存在 N' 使得

$$n \geq N' \quad \Rightarrow \quad R_n x' \in W.$$

因此，最后，

$$n \geq \max(N, N') \quad \Rightarrow \quad R_n x = R_n(x') - R_n(x' - x) \in W - W \subset V.$$

证明至此完成。 □

3. Concluding remarks

我们已经为算子序列表述了渐近连续性的概念。然而，鉴于我们的主要结果定理 2.2 讨论的是不一定可度量化的拓扑向量空间，或许将渐近连续性定义在网上而非序列上更为合理。本节讨论为实现这一点而对上一节所需作出的（相对较小的）修改。

设 X 为一个集合，且 $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 X的一个子集网，即由有向集 A索引的一族子集。我们将 $\liminf_\alpha F_\alpha$ 记为具有以下性质的$x \in X$ 集合：存在 $\alpha_0 \in A$ （依赖于 x），使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，均有 $x \in F_\alpha$。

定义 3.1. 设 X、Y 为拓扑向量空间，且 (T_α) 是从 X 到 Y 的连续线性映射网。若对于 Y 中的每个零邻域 V，集合 $\liminf_\alpha T_\alpha^{-1}(V)$ 是 X 中的零邻域，则称 (T_α) 渐近等度连续。

以下结果将引理 2.3 和定理 2.2 推广到了网。证明只需对序列情形的论证作显而易见的修改，细节从略。

引理 3.2. 若 (S_α) 和 (T_α) 是从 X 到 Y、由同一个有向集索引的渐近等度连续线性映射网，则 $(S_\alpha + T_\alpha)$ 也是渐近等度连续网。

定理 3.3。设 X 和 Y 是拓扑向量空间，设 (T_α) 是从 X 到 Y 的连续线性映射网，设 $T\colon X \to Y$ 是另一个连续线性映射，并设 D 是 X 的稠密子集。则以下陈述等价：

(i) 对所有 $x \in X$，$T_\alpha x \to Tx$；(ii) 对所有 $x \in D$，$T_\alpha x \to Tx$，且网 (T_α) 渐近等度连续。

References

[1] S Banach, H Steinhaus, .《奇点凝聚原理》，（），–。[2] S. Ghara、J. Mashreghi、T. Ransford，《可和性与对偶性》，*Publ. Mat.*，即将出版。[3] W. Rudin, *Functional Analysis*，第 2 版，麦格劳-希尔，纽约，1991 年。

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec City (Québec), Canada G1V 0A6.*Email address*: javad.mashreghi@mat.ulaval.ca

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec City (Québec), Canada G1V 0A6.*Email address*，通讯作者：thomas.ransford@mat.ulaval.ca