arXiv:2302.06735v1 [math.GN] 13 Feb 2023

不被弧分离的齐性空间

ALEXANDRE KARASSEV 和 VESKO VALOV

Abstract. 文献 [4] 证明了，在维数为 ≥ 2 的强局部齐性局部紧可分度量空间中，区域不会被弧分离。我们将强局部齐性替换为齐性，从而改进了这一结果。此外，我们证明了当弧只有一个端点位于区域内部时，该结论仍然成立。

1. Introduction

假设所有空间都是可分度量空间，所有映射都是连续的。下文中，$\mathbb{S}^1$ 表示圆。回顾一下，称空间 X为：

- 齐性的，如果对任意 x、$y \in X$，都存在一个同胚$f\colon X \to Y$，使得 $f(x) = y$.；- 强局部齐性（SLH）的，如果对任意 $x \in X$，都存在 x 的邻域基 $\mathcal{B}$，使得对任意 $B \in \mathcal{B}$ 以及任意 y、$z \in B$，都存在一个同胚 $f\colon X \to X$，使得 $f(y) = z$，并且 f 在 $X \setminus B$上是恒等映射。

连通强局部齐性空间是齐性的，但反过来并不成立（例如，任何螺线体都是齐性的，但不是强局部齐性空间）。文献 [2] 证明了，局部连通、单连通的齐性度量连续统不能被弧分离。文献 [2]也提出了是否必须假设单连通性这一问题。文献 [4] 证明，对于任意维数为 ≥ 2 的局部紧强局部齐性空间 X，其任一区域 G 都不能被完全包含在 G中的一条弧分离。这里，空间 X 中的区域是指 X的开连通子空间。本文改进了文献 [4] 的结果，并对文献 [2] 提出的问题给出肯定答案，具体如下。

2020年数学主题分类。主要分类 54F15；次要分类 54F45。关键词和短语：强局部齐性、齐性、弧、分离。第一作者的部分研究经费来自加拿大自然科学与工程研究委员会第 257231-15 号拨款。第二作者的部分研究经费来自加拿大自然科学与工程研究委员会第 261914-19 号拨款。

定理 1.1. 设 X 是维数为 $X = 2$ 的局部紧齐性空间，且 G 是 X中的一个区域。设 J 是 X 中的一条弧，满足$J \setminus \{p\} \subset G$，其中 p是 J的一个端点。那么， J不能分离 G。

请注意， [3] 的结果表明，齐性局部紧空间 X 中维数为 $\dim X = n \geq 1$ 的区域，不能被维数为 $\leq n-2$的闭子集分离。因此，定理 1.1 在 $\dim X > 2$.的情况下也成立。

2. Preliminary statements

假设 $f\colon A \to \mathbb{S}^1$ 是定义在紧空间 K 的闭子集 A 上的映射，且无法延拓到 K上。应用佐恩引理可证明，存在一个紧致体 $M = M(A, f) \subset K$，包含 A，使得 f 无法延拓到 M上，但可以延拓到 M 的任何包含 A 的真闭子集上（注意，$M(A, f)$并不唯一）。这样的集合 $M(A, f)$称为张成于.....上的 f-膜： A。

我们还使用以下记号。假设 A是空间Z 中位于两个不相交闭集 P、$Q \subset Z$ 之间的分割。那么，存在 Z 的两个不相交开子集 W_P和 W_Q，分别包含 P和 Q，使得 $Z \setminus A = W_P \cup W_Q$。我们记作 $\Lambda_P = W_P \cup A$和 $\Lambda_Q = W_Q \cup A$。

引理 2.1. 设 X 如定理 1.1 所述。对于每个 $x \in X$，存在一个紧致体 Φ 以及 X 中的一个局部基 $\mathcal{B}_x$，具有如下性质。对于每个 U，若 $V \in \mathcal{B}_x$ 满足$\overline{V} \subset U$，则存在映射 $f_{U,\,V}\colon \Phi(U,V) \to \mathbb{S}^1$，其中 $\Phi(U,V) = (\overline{U} \setminus V) \cap \Phi$，使得：

(i) 存在一个紧致体 $M_V \subset \overline{V}$，它是映射 $f_V = f_{U,\,V}|(\Phi \cap \operatorname{Bd} \overline{V})$ 的、张成于 $\Phi \cap \operatorname{Bd} \overline{V}$ 上的膜；(ii) $f_U = f_{U,\,V}|(\Phi \cap \operatorname{Bd} \overline{U})$ 不能延拓到 $\Phi \cap \overline{U}$ 上；(iii) 若 $\Phi(U,V)$ 中的一个分割 A 位于 $\Phi \cap \operatorname{Bd}\overline{U}$ 与 $\Phi \cap \operatorname{Bd}\overline{V}$ 之间，则对于任意真闭集 $B \subset M_V$，$f_A = f_{U,\,V}|A$ 都可延拓到 $\Lambda_{\operatorname{Bd}\overline{V}} \cup B$ 上，但不能延拓到 $\Lambda_{\operatorname{Bd}\overline{V}} \cup \overline{V}$ 上。

证明。由于 X 是可数个紧集的并，因此存在一个紧致体 $Y \subset X$，使得 $\dim Y = 2$ （否则，根据维数的可数和定理，$\dim X \leq 1$）。由于 $\dim Y = 2$，存在一个真闭子集 $F \subset Y$和一个映射 $f\colon F \to \mathbb{S}^1$，使得 f 不能延拓到 Y上。因此，存在一个包含 F的紧集 $\Phi \subset Y$，使得 Φ是一个张成于 F上的 f-膜。由于 X是齐性的，我们可以假设 $x \in \Phi \setminus F$。现在，令 $\mathcal{B}_x$ 为 X 中满足以下条件的所有开集 U 组成的族：

$$U = \operatorname{int} \overline{U} \text{ and } \overline{U} \cap F = \varnothing.$$

设 $U, V \in \mathcal{B}_x$ 满足 $\overline{V} \subset U$。则 $\Phi \backslash V$ 是 Φ 的一个包含 F 的真闭子集。因此存在 $f'\colon \Phi \backslash V \to \mathbb{S}^1$ 延拓 f，使得 f' 不能延拓到 $\Phi \cap \overline{V}$ 上。令 $f_{U,V} = f'|\Phi(U,V)$。则 $f_V = f_{U,V}|(\Phi \cap \mathrm{Bd}\overline{V})$ 不能延拓到 $\Phi \cap \overline{V}$ 上，否则 f 就可以延拓到 Φ 上。因此存在一个紧致体 $M_V \subset \overline{V}$，它是张成于 $\Phi \cap \mathrm{Bd}\,\overline{V}$ 上的 f_V-膜。类似地，$f_U = f_{U,V}|(\Phi \cap \mathrm{Bd}\,\overline{U})$ 不能延拓到 $\Phi \cap \overline{U}$ 上。

为证明条目（iii），设 A 是 $\Phi(U,V)$ 中位于 $\Phi \cap \mathrm{Bd}\,\overline{U}$ 与 $\Phi \cap \mathrm{Bd}\ \overline{V}$ 之间的一个分割。那么 f_A 是 $f_{\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{V}}}$ 在 A 上的限制，其中 $f_{\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{V}}} = f_{U,\ V}|\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{V}}$。此外，$f_V$ 可延拓到任意真闭集 $B \subset M_V$ 上。因此，对于任意闭真集 $B \subset M_V$，f_A 都可延拓到 $\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{V}} \cup B$ 上。另一方面，f_A 是 $f_{\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{U}}} = f_{U,\ V}|\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{U}}$ 在 A 上的限制。这意味着 f_A 不能延拓到 $\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{V}} \cup \overline{V}$ 上，因为 $f_{\Lambda_{\mathrm{Bd}\,\overline{U}}}$ 也不能。□

我们需要以下版本的 Effros定理 [1]，其适用于局部紧空间，见 [3]。

定理 2.2。设 X 是一个带度量 ρ 的齐性局部紧空间，$a \in X$ 和 $\varepsilon > 0$。则存在 $\delta > 0$，使得对于每个满足 $\rho(x,a)$ 的 $x \in X$，$< \delta$ 存在一个同胚 h: $X \to X$，满足 $h(a) = x$ 以及 $\rho(h(y)\ y) < \varepsilon$，对所有 $y \in X$ 均成立。

以下是命题 2.3 的一个略微修改版本，[4], 其证明与 [4] 中给出的证明相同。

命题 2.3. 设 φ: $A \to \mathbb{S}^1$ 是定义在空间 Y 的一个闭子空间上的映射。假设 Y 的闭子集 Y_1 和 Y_2 满足以下条件:

- $Y = Y_1 \cup Y_2$;
- $|Y_1 \cap Y_2 \cap A| \leq 1$;
- $\varphi|Y_i \cap A$ 可延拓至 Y_i, $i = 1, 2$;
- φ 不可延拓至 Y.

那么存在 ψ: $Y_1 \cap Y_2 \to \mathbb{S}^1$，它不是零伦的。

3. Main theorem

本节证明定理 1.1。设 X 是一个齐性局部紧可分度量空间，G 是 X 中一个维数为 $X = 2$ 的区域。注意，X 的齐性和可数和定理意味着 X 处处为 2 维。设 J 是 G 中的一条弧，其一个端点（记作 b）位于 G 中，另一个端点（记作 a）位于 $\mathrm{Bd}\,G$ 中，且 $J \setminus \{a\} \subset G$（$J \subset G$ 的情形证明类似）。我们将证明 J 不分离 G。假设它

确实分离了。仿照 [4], 中引理 3.2 的证明，我们不妨假设 G 存在两个不相交的非空开子集，分别为 $G \setminus J = G_1 \cup G_2$ 和 $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G = S \setminus \{a\}$，使得 $b = \max\{s\colon\ s \in S\}$，并且 S 是 J 的一个无孤立点的闭子集。

根据引理 2.1，存在一个包含点 b 的紧致体 Φ，以及 b 在 X 中的一个局部基 $\mathcal{B}_b$，满足该引理的陈述。我们可以假设对所有 $U \in \mathcal{B}_b$, $\overline{U} \subset G$ 都成立。沿用引理 2.1 中的记号，我们还可以假设 $b \in M_V \setminus \operatorname{Bd} V$，其中 U、$V \in \mathcal{B}_b$ 满足 $\overline{V} \subset U$。事实上，应用定理 2.2，我们可以找到与点 b 对应的 $\delta > 0$ 和 $\operatorname{dist}(\overline{U}, X \setminus G)$，并选取足够小的 V，使其直径小于 δ. 。于是存在一个同胚$h\colon\ X \to X$，它与恒等映射的距离小于 δ，且满足 $h(b) \in M_V \setminus \operatorname{Bd} V$。现在，我们可以用集合 $h^{-1}(U)$ $h^{-1}(V)$ 和 $h^{-1}(M_V)$，分别替代U、V 和 M_V。

此外，由于 f_V无法延拓到 M_V上，我们有维数 $M_V = 2$。这意味着 $M_V \cap G_1 \neq \varnothing$ 或 $M_V \cap G_2 \neq \varnothing$。如果 $M_V \cap G_1 \neq \varnothing$，我们取 $x \in M_V \cap G_1$，并令 $\varepsilon_1 = \min\{\alpha, \beta\}$，其中 $\alpha =$是$\operatorname{dist}(\operatorname{Bd} U, X \setminus G)$，而 $\beta =$是$\operatorname{dist}(x, \overline{G}_2 \cup \operatorname{Bd} V)$。再次应用定理 2.2，我们可以通过一个 δ_1-小的同胚 h将 M_V 推向 G_2，其中 δ_1对应于 b和 ε_1，使得 $h(M_V) \cap G_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$，并且$h(V)$仍包含 b。因此，在以下各处我们均可假设$b \in M_V \setminus \operatorname{Bd} V$和 $M_V \setminus \operatorname{Bd} V$ 同时与 G_1 和 G_2.相交

由于 $S \cap \operatorname{Bd} V$和 $S \cap \operatorname{Bd} U$是 $S \cap \Phi(U, V)$中的闭不交子集，因此在 $S \cap \operatorname{Bd} V$与 $S \cap \operatorname{Bd} U$之间存在一个分割 $H = \{c\} \in S$in $S \cap \Phi(U, V)$（如果 $S \cap (U \setminus \overline{V}) \cap \Phi = \varnothing$，则取 $H = \varnothing$）。根据 [5,推论 3.5]，在 $\Phi \cap \operatorname{Bd} V$与 $\Phi \cap \operatorname{Bd} U$之间存在一个分割 Tin $\Phi(U, V)$，满足 $T \cap S \subset H$。于是，$A = T \cup H$ 是 $\Phi(U, V)$中介于$\sim \Phi \cap \operatorname{Bd} V$与 $\Phi \cap \operatorname{Bd} U$之间的一个分割，并满足 $A \cap S = H$。令$M = M_V \cup \Lambda_{\operatorname{Bd} \overline{V}}$。有两种可能的情形：

(1) f_A 不能在 M 上延拓；
(2) f_A 可以在 M 上延拓。

我们将证明这些情形都不可能。事实上，首先假设 f_A不能延拓到 M上，并令$S_U = S \cap U$和 $K = M \cup S_U$。由于 f_A 不能延拓到 M上，f_A 不能延拓到 K上。令$P_i = S_U \cup (K \cap \overline{G}_i)$，$i = 1$，2。显然，$P_1 \cup P_2 = K$和 $P_1 \cap P_2 = S_U$。由于每个$M_V \cap \overline{G}_i$ 都是 M_V的真子集，f_A 都可以延拓到集合 $A \cup (K \cap \overline{G}_i)$ 上。最后，由于维数 $S_U \leq 1$，f_A 都可以延拓到集合 $A \cup P_i$上。因此，我们可以应用命题 2.3

并得出存在一个映射 $\beta\colon\ S \to \mathbb{S}^1$，它不是零伦的。这与 $S \subset J$ 矛盾，因为从J 到 $\mathbb{S}^1$ 的每个映射都是零伦的。

现在假设 f_A 在 M 上可延拓。由于 f_A 不能延拓到 $\Lambda_{\mathrm{bd}\overline{V}} \cup \overline{V}$ 上，因此存在 $\Lambda_{\mathrm{bd}\overline{V}} \cup \overline{V}\widetilde{\ }$ 的一个包含 M 的极小子集 M_A，使得 M_A 是一个张成于 A 上的 f_A-膜。由于 M_A 包含 M_V，M_A 同时与 G_1 和 G_2 相交。因此，我们可以像前一种情形那样，用 M_A 替换 M_V，再次得到矛盾。

References

[1] E. Effros, 《变换群与 C^*-代数》, 《数学年刊》81（1965）, 38–55。[2] M. Kallipoliti 和 P. Papasoglu, 《单连通齐性连续统不被弧分隔》, 《拓扑学及其应用》154（2007）, 3039–3047。[3] P. Krupski, 《关于齐性曲线和 ANR 的最新结果》, 《拓扑学会议录》16（1991）, 109–118。[4] J. van Mill 和 V. Valov, 《不被弧分隔的齐性连续统》, 《匈牙利数学学报》157（2019）, 364–370。[5]J. van Mill, 《函数空间的无限维拓扑》, North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹，2001。

Department of Computer Science and Mathematics, Nipissing University, 100 College Drive, P.O. Box 5002, North Bay, ON, P1B 8L7,Canada

电子邮箱地址：alexandk@nipissingu.ca

Department of Computer Science and Mathematics, Nipissing University, 100 College Drive, P.O. Box 5002, North Bay, ON, P1B 8L7,Canada

电子邮箱地址：veskov@nipissingu.ca