arXiv:2302.06738v2 [math.AP] 8 Mar 2024

极小化 p-调和映射到球面的正则性与尖锐卡托不等式

KATARZYNA MAZOWIECKA 和 MICHA L MISKIEWICZ

ABSTRACT. 我们研究极小化 p-调和映射 $u\colon B^3 \to \mathbb{S}^3$ 对于 p 在区间 $[2,3]$。长期以来，已知正则性结果仅适用于 $p=3$（本质上归功于 Morrey [24]）以及 $p=2$（Schoen–Uhlenbeck [29]），但最近 Gastel [7] 利用 Kato 不等式的一个版本，将后一结果推广到了 $p\in[2,2+\frac{2}{15}]$。在此，我们结合 Morrey 的方法与 Hardt 和 Lin 的延拓定理，为一个小区间 $p\in[2.961,3]$ 建立了正则性结果 [11]。我们还通过证明以下情形的正则性改进了另一项结果：$p\in[2,p_0]$ 其中 $p_0=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\approx 2.366$。关于这一点，我们探讨了 Gastel 提出的问题，并证明了二维区域中 p-调和映射的一个尖锐 Kato 不等式，这一结果本身也具有独立意义。

CONTENTS

1. 引言 2
2. 预备知识 6
3. 动机：赤道映射 7
4. 正则性 p 接近 3 9
5. 正则性 p 接近 2 11
6. 尖锐卡托不等式 14
附录 A. 显式常数估计 18
参考文献 23

2020年数学主题分类：35J92、58E20、53C43。关键词和短语：p-调和映射、Kato不等式、正则性理论。

1. Introduction

我们研究的对象是极小化的 p-调和映射，它们被定义为狄利克雷 p-能量的极小化映射

$$E_p(u) \coloneqq \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}V \qquad \text{for } u \in W^{1,p}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \tag{1.1}$$

具有固定边界数据 $u|_{\partial\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{M}$， $\mathcal{N}$ 是光滑黎曼流形， $\mathcal{M}$ 具有非空边界，而 $\mathcal{N}$ 是闭的。这些映射的正则性理论始于对更经典情形 $p = 2$的研究，在这种情形下，它们就称为极小调和映射。Morrey 的经典结果 [24] 指出，当 $n = 2$时，所有极小调和映射都是正则的， n 其中[28] 是定义域维数。在开创性论文中，Schoen 和 Uhlenbeck 证明，在高维情形下，这些映射在内部除一个豪斯多夫维数至多为 $n - 3$的奇异集外都是正则的。此外，当 $n = 3$时，奇异集是离散的。

Schoen 和 Uhlenbeck 的结果 [28] 是尖锐的：对于三维区域，极小调和映射可能存在点奇异性，如“刺猬”映射所示

$$u\colon B^3 \to \mathbb{S}^2, \quad u(x) = \frac{x}{|x|};$$

例如，参见 [2] 关于极小性的证明。对于一般的 $n \geq 3$，也有类似的例子，表明奇异集确实可能是（$n - 3$）维的。

由于可能出现奇点，因此必须谨慎表述问题。关于这一点的详细讨论将推迟到第 2 节；这里先说明，我们假设 是等距嵌入的，并且 , $^p(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 定义为所有满足 $u(x) \in \mathcal{N}$ 几乎处处成立的 $u \in W^{1,\ p}(\mathcal{M},\mathbb{R}^d)$ 的集合。此外，由于正则性问题具有局部性，为简单起见——按照文献中的惯例——我们可以假设 $\mathcal{M} = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个欧几里得区域。

尽管所引用的结果在一般情况下是尖锐的，但调和映射的正则性性质在很大程度上取决于目标流形的几何 $\mathcal{N}$。例如，当 $\mathcal{N}$ 具有非正截面曲率时，解是正则的 [28], ；另请参阅相关的早期研究 [5, 12]。在后续的一篇论文中，Schoen 和 Uhlenbeck [29] 研究了目标流形为球面的情形 $\mathcal{N} = \mathbb{S}^k$。他们的结果结合 Okayasu 的进一步改进 [27],得到：

定理 1.1（[29], [27]）。任意极小调和映射 $u\colon\ B^n \to \mathbb{S}^k$ 只要$n \leq d(k)$，就正则，其中

$$d(k) = \begin{cases} k & for\ 2 \leq k \leq 5 \\ 5 & for\ 6 \leq k \leq 9 \\ 6 & for\ k \geq 10. \end{cases}$$

如果我们特化 将此结果应用于情形 $n = k$，我们推得所有极小调和映射 s

$$u\colon B^n \to \mathbb{S}^n$$

对 $n = 2$，3，4，5，必须是正则的。极小调和映射 u： $B^6 \to \mathbb{S}^6$ 是连续的。在高维中，J¨ager 和 Kaul [18] 证明，由下式定义的（奇异）赤道映射

$$v\colon B^n \to \mathbb{S}^n, \qquad v(x) := \left(\frac{x}{|x|}, 0\right)$$

当且仅当 $n \geq 7$ [18] 时，它是一个极小调和映射。特别地，当 $n = 6$ 时，赤道映射不是极小调和映射。

现在回到一般指数 p 下的 p-调和映射。这里，极小化 p-调和映射的正则性理论在一定程度上借鉴了 $p = 2$ 的情形。Hardt 和 Lin [11] 证明，极小化 p-调和映射在奇异集之外正则；一般情况下，该奇异集的豪斯多夫维数至多为 $n - \lfloor p \rfloor - 1$，而在 $n = \lfloor p \rfloor + 1$ 的情形下是离散的。特别地，当 $p \geq n$ 时，这些映射是正则的；注意，这个特殊情形也可以通过对 Morrey 的经典论证加以改造而得到。

对于特殊的目标流形，这一结果可能得到改进，Nakauchi [26] 和 Xin–Yang [31]的结果便证明了这一点。当目标流形为球面时，我们有

定理 1.2（[26, 31]）。任意极小化的 p-调和映射 u： $B^n \to \mathbb{S}^k$ 在 $n \leq d(k, p)$ 时都是正则的，其中

$$d(k,p) = \begin{cases} \lfloor p \rfloor + 1 & for\ p+2 \leq k < p+4 \\ \lfloor p \rfloor + 2 & for\ p+4 \leq k < p+6 \\ \min\{\lfloor p \rfloor + 3, \lambda(p)\} & for\ p+6 \leq k < p+8 \\ \min\{\lfloor p \rfloor + 4, \lambda(p)\} & for\ p+8 \leq k, \end{cases}$$

以及 $\lambda(p) = p + 2\sqrt{1 - \frac{p-2}{p-1}}$()

$_2 + \frac{2}{p-1}$。

遗憾的是，这一估计并非最优；特别是，它留下了一个悬而未决的问题：当 u： $B^n \to \mathbb{S}^n$ 和 $p \in [n-1, n)$ 时，极小化的 p-调和映射是否正则。

在最近的一篇论文中，Gastel[7] 利用了 Cosserat 微极弹性理论与 p-调和映射之间的联系。他证明，在连续介质微极弹性的几何非线性 Cosserat 模型中，极小化映射正则性的唯一障碍，是可能存在从 B^3到 $\mathbb{S}^3$的非常数 p-极小切映射。

在这一情形下，Gastel 改进了定理 1.2 ，证明所有从 p到 B^3 的 $\mathbb{S}^3$ -调和映射 $2 \leq p \leq \frac{32}{15} \approx 2.133$在 [11], 时都必须正则。结合 Hardt 和 Lin 的正则性理论 p可知，从

B^3 到 $\mathbb{S}^3$ 的映射对所有 p 都必须正则，其中 $[2, \frac{32}{15}] \cup [3, \infty)$。还要指出，Gastel 的结果由 Li 和 Wang 推广到了稳定平稳解的情形 [19]。

我们的主要目标是研究从 B^3 到 $\mathbb{S}^2$的极小化 p-调和映射的正则性。我们得到：

定理 1.3. 设 $p_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2.366$ 和 $p_1 = 3 - \frac{17-24\ln(2)}{3^{3/2}2^{5/6}} \approx 2.961$。若 $p \in [2, p_0] \cup [p_1, 3]$，则任意极小化 p-调和映射 u: $B^3 \to \mathbb{S}^3$ 都是正则的。

这一结果改进了 Gastel 和 Hardt–Lin 先前的工作。有趣的是，它留下了一个长度约为 0。6 的间隔（p_0, p_1），在这个区间内正则性仍是一个未解决的问题。我们相信，对于这些 p 取值，正则性同样成立；为此，我们通过证明某个“反例候选”不成立提供了一定的依据（见引理 3.1）。然而，该区间内的正则性问题可能与确定极小化调和映射 u: $B^6 \to \mathbb{S}^6$ 是否必定正则一样困难。

接下来，我们决定将定理 1.3 拆分为两个独立的陈述：定理 5.1 针对 $p \in [2, p_0]$，定理 4.1 则针对 $p \in [p_1, 3]$。这样处理的首要原因是，这两种情形需要截然不同的技巧。其次，在这两种情形下，证明方法实际上都能导出更一般的结果。

定理 **1.3** 的证明概要。

对于 $p = 3$，正则性证明沿用 Morrey 的证明思路[24]。给定一个极小化u： $B^3 \to \mathbb{S}^3$并考虑其在 $v := u|_{\partial B_r}$球面上的限制（$r \in [\frac{1}{2}, 1]$），我们可以将 v 扩张为映射 $\overline{v}$: $B_r \to \mathbb{S}^3$，其 p能量受 v的能量控制。对于一般切片，后者受 p的 u 在 $B_1 \setminus B_{1/2}$ 上的能量控制，因此由极小性可得

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{B_r} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{B_r} |\nabla \overline{v}|^p \, \mathrm{d}x \lesssim \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x.$$

填洞技巧现在导出了 $E_p(u)$ 在越来越小的球上的多项式衰减。换句话说， ∇u 属于 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}$ 其中某个较小的 $\lambda > 0$，这意味着 u具有连续性。

这一论证的关键在于能够在能量控制下延拓 v，而 Morrey 的构造并不适用于 $p < 3$。不过，文献中还有另一种构造：Hardt-Lin 延拓定理 [11, 定理 6。2]。这一更精细的拓扑敏感工具对所有 $p \in [2, 3]$都适用，且具有一致的常数，因此使我们能够继续这一论证。由此，我们得到 $\nabla u \in L^{p,\lambda}$ 对于每个这样的 p，均具有一致的 $\lambda > 0$。只要 $p \in (3 - \lambda, 3]$，这种正则性便足以推出 u的连续性。我们在第 4 节给出的论证略有不同：我们选择利用切映射这一概念，以简化论述，并更容易跟踪常数。

我们在 $p \in [2, \frac{3+\sqrt{3}}{2}]$ 情形中采用的方法可以追溯到 Schoen 和 Uhlenbeck[29]。为简便起见，我们在此仅讨论经典例子 $p = 2$，并在必要时提及

其他作者的贡献。证明通过排除非恒定切映射的存在来得出，即具有对称性 $u(\lambda x) = u(x)$ 的极小化映射，其中 $\lambda > 0$。此类映射由其在 $\mathbb{S}^2$ 上的限制所确定，Schoen 和 Uhlenbeck 推导出了以下估计：

$$\frac{1}{3}\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^4 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^2 \leq \int_{\mathbb{S}^2}|\nabla|\nabla u||^2, \quad \int_{\mathbb{S}^2}|\nabla^2 u|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^4 - \int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^2.$$

将这两者结合起来，可得到简单的逐点不等式 $|\nabla|\nabla u||^2 \leq |\nabla^2 u|^2$，从而导出如下形式的不等式

$$A\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^4 + B\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^2 \leq 0.$$

如果只有 A， $B > 0$，这将证明 u 必为常数；事实上，对于映射到 $\mathbb{S}^4$、$\mathbb{S}^5$、$\mathbb{S}^6$.....的情形，也可采用类似的论证。然而，在这里我们有 $A = -\frac{1}{6} < 0$，因此还需要进一步的洞见：Okayasu [27] 指出，对于调和映射，逐点不等式可改进为 $|\nabla|\nabla u||^2 \leq \frac{1}{2}|\nabla^2 u|^2$ —— 我们称之为 Kato不等式。这样便可得到 $A = \frac{1}{12}$ 和 $B = \frac{1}{4}$，从而完成证明（注意，Schoen 和 Uhlenbeck 也涵盖了映射 $B^3 \to \mathbb{S}^3$ 的情形，但采用了完全不同的方法）。

Gastel [7] 对 $p > 2$采用了相同的推理思路，并为此证明了一个非最优的 Kato不等式 $|\nabla|\nabla u||^2 \leq \kappa(p)|\nabla^2 u|^2$，其中 $\kappa(p) \xrightarrow{p\to 2} \frac{1}{2}$。这样，对于接近 2 的 p，仍可得到正则性（数值检验可知，该论证涵盖$p \leq \frac{32}{15} \approx 2.133$）。我们的证明与 Gastel 的证明有两点不同。首先，在映射$\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3$ 的情形下，我们得到一个具有最优常数的 Kato不等式；仅这一点就能将正则性区间扩大到 $p \leq \frac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 2.281$。其次，我们指出了另一个不等式中一种可能的改进——尽管这在技术上相当复杂——从而能够涵盖所有 $p \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2.366$。

本文的组织结构如下。在第2 节中，我们回顾将要用到的 p-调和映射的概念。为探究正则性问题，在第3节中，我们证明，自然候选的奇异 p-调和映射——赤道映射——并非极小化的 p-调和映射（当 $p \in [2,3)$。在第4 节中，我们展示如何利用 Hardt 和 Lin 的延拓定理 [11]，获得映射到 $\mathcal{N} = \mathbb{S}^3$的正则性，其中指数 p接近 3。接下来，在第5 节中，我们改进 Gastel 的论证 [7]，；该论证本身基于 Schoen 和 Uhlenbeck 的原始思路，[29], 并建立了$p \in [2, \frac{3+\sqrt{3}}{2}]$的正则性。最后，在第6 节中，我们讨论二维定义域中 p-调和映射的尖锐卡托不等式，以及它与正则性问题的关系，并简述高维情形下的不等式。本文最后以附录A收尾，其中给出了第4节所用不等式的显式常数估计。

致谢。

- 本项目由波兰国家学术交流局通过波兰人才回流计划共同资助，项目编号为 BPN/PPO/2021/1/00019/U/00001(KM)。

- 本项目由国家科学中心 2022/01/1/ST1/00021 号资助（KM）。
- MM 获得了 NCN Sonatina资助，项目编号为 2020/36/C/ST1/00050。

2. Preliminaries

2.1. 弱意义下的、驻定的和稳定的 p-调和映射。在非光滑解的研究中，区分不同类别的 p- 调和映射十分重要。下文我们只考虑极小化的稳定驻定 p- 调和映射，但为完整起见，也定义弱意义下的 p-调和映射。为简洁起见，这里将映射限制为从开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$的映射。

定义 2.1. (弱意义下的) p-调和映射 $u \in W^{1,p}(\Omega\ \mathbb{S}^k)$ 定义为相对于值域变分的 p-能量临界点，即

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_p(u_t) = 0 \quad where \quad u_t = \frac{u+t\varphi}{|u+t\varphi|} \tag{2.1}$$

对所有 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R}^{k+1})$。等价地，作为方程的解，它满足欧拉–拉格朗日方程

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^p u \quad weakly.$$

此外，它被称为：

- 若其关于定义域变分也是一个临界点，则称为驻定的，即

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_p(u_t) = 0 \quad where \quad u_t(x) = u(x + t\xi(x)) \tag{2.2}$$

  对所有 $\xi \in C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R}^n)$。
- 若其能量在 u 处的二次变分非负，则称为稳定的：

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} E_p(u_t) \geq 0 \quad where \quad u_t = \frac{u+t\varphi}{|u+t\varphi|}, \tag{2.3}$$

  或等价地

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2|\varphi|^2\right)\,\mathrm{d}x + (p-2)\int_\Omega |\nabla u|^{p-4}\left(\nabla u\cdot\nabla\varphi\right)^2\,\mathrm{d}x \geq 0 \tag{2.4}$$

  对所有满足 $\varphi(x)\cdot u(x) = 0$ 几乎处处成立的 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R}^{k+1})$
- 极小化，如果对所有在 $\partial\Omega$ 上具有相同迹的 $v \in W^{1,p}(\Omega\ \mathbb{S}^k)$，都有 $E_p(u) \leq E_p(v)$。

我们有如下不同类别的 p-调和映射之间的包含关系：

$$\text{minimizing} \subset \text{stable stationary} \subset \text{stationary} \subset \text{weak}.$$

我们在此指出，在这种情况下 $k > 2p-1$ 稳定的 p-调和映射是拟极小解 [14,命题 2]。

2.2. 切映射。

定义 2.2。若 p-调和映射 $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{N}$ 称为切映射，如果它是0-齐次的，也就是说，$u(\lambda x) = u(x)$ 对所有 $\lambda > 0$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。此外，若它是一个 p-极小化切映射，则称其为 E_p-能量(1.1) 在$\mathbb{R}^n$的紧子集上取极小值。

极小调和映射的大部分正则性理论都依赖于对极小切映射的研究。Hardt 和 Lin 的下述定理（它是 [28,定理 IV]的推广）使我们能够通过排除非恒定切映射的存在来推出正则性。

定理 2.3（[11, 定理 4.5]）。假设从$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathcal{N}$ 的唯一 p-极小化切映射是常映射。那么，在n维区域上，所有极小化的 p-调和映射 $u\colon \Omega \to \mathcal{N}$ 都是正则的。

注 2.4. 利用稳定平稳 p-调和映射 [15,的紧性引理 4.3] ，上述定理可以改进为以下结论：

假设 $p < 3$。如果从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{S}^3$ 的每个稳定平稳 p-调和切映射都是常数，那么每个稳定平稳 p-调和映射 $u\colon B^3 \to \mathbb{S}^3$ 都是正则的。

3. Motivation: the equatorial map

本节将研究由下式定义的赤道映射 $v\colon B^n \to \mathbb{S}^n$

$$v(x) := \left(\frac{x}{|x|}, 0\right).$$

容易验证，对于任意 $p < n$， v都是弱 p-调和的。对于 $p \in (n - 2\sqrt{n-1}, n)$，我们将证明它不是极小化的 p-调和映射，因为它不稳定。正如引言中所提到的，上述映射 v 在许多情形下都是正则性的一个重要反例。因此，我们的结果促使我们尝试证明，对于接近 n的 p ，一般而言，极小化的 p-调和映射$B^n \to \mathbb{S}^n$ 是正则的。

引理 3.1. 赤道映射 v 对于 $p \in (n - 2\sqrt{n-1}, n)$是不稳定的。

特别地，当 $n \le 6$时，对任意 $p \in [2, 3]$， v 都是不稳定的。让我们将这一结果与“刺猬”映射$\frac{x}{|x|}$的极小性进行比较： $B^n \to \mathbb{S}^{n-1}$，对此我们有：

定理 3.2. 对任意 $1 \le p < n$，映射 $\frac{x}{|x|}\colon B^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ 都是一个极小化的 p-调和映射。

定理 3.2 归功于 J¨ager–Kaul [18] ，在 $p = 2$的情形下 $n \ge 7$；Brezis–Coron–Lieb [2]在 $n = 3$的情形下 $p = 2$；Coron–Gulliver [4] 在 $p = 1$的情形下，2，……， $n - 1$；Lin [21] 在 $n \ge 3$的情形下 $p = 2$；Hardt–Lin–Wang [10] ，在 $p \in [n - 1, n$的情形下）；Hong [13] 在 $1 < p \le n - 1$的情形下。

我们还回顾一下，对于 $p = 2$ ，有

定理 3.3 ([18, 定理 2, §3])。 赤道映射 $\left(\frac{x}{|x|}, 0\right)$： $B^n \to \mathbb{S}^n$ 是极小调和映射，当且仅当 $n \geq 7$。

引理的证明 *3.1.* 我们沿用 [18, 定理 2]的证明。

反设 v 对所有满足 2.4 的 φ $\in C_c^\infty(B^n, \mathbb{R}^{n+1})$ 满足 $v(x) \cdot \varphi(x) = 0$ 几乎处处。取

$$\varphi(x) \coloneqq \eta(|x|)e_{n+1},$$

其中 η: $[0,1] \to \mathbb{R}$，容易得到 $v(x) \cdot \varphi(x) = 0$。此外，由于 $\nabla v \cdot \nabla \varphi = 0$ 在 φ 中是径向的，而 v 在半径方向上是常数，因此 $|\nabla v(x)|^2 = \frac{n-1}{|x|^2}$，对于我们选取的 φ，稳定性不等式将给出

$$\int_{B^n} |x|^{2-p} \left((\eta'(|x|))^2 - \frac{n-1}{|x|^2}\eta^2(|x|) \right) \mathrm{d}x \geq 0, \tag{3.1}$$

对球面 S_r 积分后，这等价于

$$\int_0^1 r^{n-p+1} \left((\eta'(r))^2 - \frac{n-1}{r^2}\eta^2(r) \right) \mathrm{d}r \geq 0. \tag{3.2}$$

为了导出矛盾，我们将构造一个非零函数 η: $[0,1] \to \mathbb{R}$，使其满足常微分方程

$$\begin{cases} \eta''(r) + \frac{n-p+1}{r}\eta'(r) + \frac{n-1-\varepsilon}{r^2}\eta(r) = 0 & \text{for } r \in (r_0, 1), \\ \eta(r_0) = \eta(1) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

对于某些较小的参数 $\varepsilon(p,n)$ $r_0(p,n) > 0$。假设我们有一个解 η，将其由（3.3）零延拓到 $[0, r_0]$，分部积分得到

$$\begin{aligned} &\int_0^1 r^{n-p+1} \left((\eta'(r))^2 - \frac{n-1}{r^2}\eta^2(r) \right) \mathrm{d}r \\ &\quad = -\int_{r_0}^1 r^{n-p+1}\eta(r) \left(\eta''(r) + \frac{n-p+1}{r}\eta'(r) + \frac{n-1}{r^2}\eta(r) \right) \mathrm{d}r \\ &\quad = -\varepsilon \int_{r_0}^1 r^{n-p-1}\varepsilon\eta^2(r)\,\mathrm{d}r < 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

这与（3.2）矛盾。

仍需证明存在一个非零解满足（3.3）。作代换$\zeta(t) = \eta(e^t)$，得到常微分方程

$$\zeta''(t) + (n-p)\zeta'(t) + (n-1-\varepsilon)\zeta(t) = 0, \tag{3.5}$$

其解可显式写出：

$$\zeta(t)=\begin{cases}c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} & \text{if } \Delta>0,\\ e^{\lambda t}(c_1+c_2t) & \text{if } \Delta=0,\\ e^{\lambda t}(c_1\cos(\mu t)+c_2\sin(\mu t)) & \text{if } \Delta<0,\end{cases}$$

取决于行列式 $\Delta_\varepsilon=(n-p)^2-4(n-1-\varepsilon)$ 的符号。不过请注意，当 $\Delta_\varepsilon\geq 0$ 时，边界条件 $\zeta(\ln r_0)=\zeta(0)=0$ 会迫使 ζ 恒等于零。

因此，我们将范围限制在 $p\in(n-2\sqrt{n-1},n+2\sqrt{n-1})$，在此范围内有 $\Delta_0<0$。固定一个较小的 $\varepsilon(n,p)>0$，仍有 $\Delta_\varepsilon<0$，因此 $\zeta(t)=e^{\lambda t}\sin(\mu t)$ 是方程 (3.5) 的一个解，其中 λ,μ 取适当的值（λ 可以很小但为正）。现在我们选取 $r_0\in(0,1)$，使得 $\ln r_0$ 是 $\frac{2\pi}{\lambda}$ 的负倍数；此时 ζ 满足边界条件，并给出方程 (3.3) 的一个解：

$$\eta(r)=r^{\frac{p-n}{2}}\sin(\sqrt{-\Delta_\varepsilon/4}\cdot\ln r).$$

证明至此完成。 □

4. Regularity for p close to 3

作为一个特例，Hardt 和 Lin 的正则性理论 [11, 推论 2.6] 对于极小化p-调和映射表明，任何极小化的 n-调和映射 $u\in W^{1,n}(B^n,\mathcal{N})$ 都是正则的。然而，这个特定的正则性定理也可以用类似于 Morrey [24] 在二维情形下证明极小调和映射正则性的方法来证明，另见[20, 第 2 章1]。结合这两种证明的方法，我们得到了本节的主要结果。

定理 4.1. 存在一个 $\varepsilon(n)>0$，使得每个满足 $n-\varepsilon<p\leq n$ 的极小化 p-调和映射 $u\in W^{1,p}(B^n,\mathbb{S}^n)$ 都是正则的。

在 $n=3$ 的情形下，我们有 $\varepsilon=\frac{17-24\ln 2}{3^{3/2}2^{5/6}}\approx 0.0394$；特别地，若 $p\in[2.961,3]$，则每个极小化的 p-调和映射 $u\colon B^3\to\mathbb{S}^3$ 都是正则的。

注 4.2. 正如通过检查证明可以看出的，唯一取决于目标流形的要素是 Hardt 和 Lin 的延拓定理 [11,定理 6.2], ，而该定理适用于更一般的情形。因此，对于任意 n-连通目标流形 $\mathcal{N}$代替 $\mathbb{S}^n$，同样的正则性定理依然成立，其中 $\varepsilon(n,\mathcal{N})>0$ 现在也取决于 $\mathcal{N}$。更一般地：若$n\geq 4$，对于任意满足 $\pi_1(\mathcal{N})$ 有限且 $\pi_2(\mathcal{N})\simeq\ldots\simeq\pi_n(\mathcal{N})\simeq\{0\}$ 的流形 $\mathcal{N}$，参见[23]。

证明。 Step 1：我们先给出以下断言：

对于任意的 $p \in [n-1, n]$ 和 $w \in W^{1,\,p}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^n)$，存在一个延拓 $v \in W^{1,\,p}(B^n, \mathbb{S}^n)$，使得 $v\big|_{\partial B^n} = w\big|_{\partial B^n}$ 在迹意义下成立，并且

$$\int_{B^n} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \le C_{\mathrm{ext}}(p,n) \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla w|^p \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \tag{4.1}$$

具有常数 $C(p,n)$ 同时依赖于 p 和 n，但关于 $p \in [n-1, n$ 一致有界].

事实上，我们可以使用迹定理的一个变体，将 $w\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ 延拓到 $\bar{v} \in W^{1,\,p}(B^n, \mathbb{R}^{n+1})$，使其满足

$$\int_{B^n} |\nabla \bar{v}|^p \,\mathrm{d}x \le C_T(p,n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla w|^p \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}. \tag{4.2}$$

接下来，由于 $p \le n$ 我们有 $\pi_j(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ 对所有 $j \le \lfloor p-1 \rfloor$，并且我们可以使用 Hardt 和 Lin 的延拓定理 [11, 定理 6。2][1] 来构造 $v \in W^{1,\,p}(B^n, \mathbb{S}^n)$，使得 $v\big|_{\partial B^n} = \bar{v}\big|_{\partial B^n} = u$ 在迹意义下成立，并且满足

$$\int_{B^n} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \le C_{\mathrm{HL}}(p,n) \int_{B^n} |\nabla \bar{v}|^p \,\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

Com将 (4.2) 与 (4.3) 结合起来，我们得到带有 $C_{\mathrm{ext}}(p,n) = C_T(p,n) C_{\mathrm{HL}}(p,n)$ 的 (4.1) .

Step 2: 根据定理2.3，我们只需将注意力集中于 0 次齐次映射。换言之，我们将证明，任意 p-极小化切映射 $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ 必为常数。

$$\int_{B^n} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^1 r^{n-1-p} \,\mathrm{d}r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_T u|^p \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n-p} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_T u|^p \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

现在我们利用 Step 1 构造映射 $v \in W^{1,\,p}(B^n, \mathbb{S}^n)$，使得 $v\big|_{\partial B^n} = u\big|_{\partial B^n}$。结合 u 的极小性与（4.1），可得

$$\frac{1}{n-p} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_T u|^p \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \int_{B^n} |\nabla u_0|^p \,\mathrm{d}x \le \int_{B^n} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \le C_{\mathrm{ext}}(p,n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_T u|^p \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

若 u 不是常数，则必有 $\frac{1}{n-p} \le C_{\mathrm{ext}}(p,n)$。但若碰巧 $C_{\mathrm{ext}}(p,n) < \frac{1}{n-p}$，由此产生的矛盾表明，极小化的 p-调和映射不可能有奇点。因此，当 $\varepsilon(n) = \left(\sup_{p\in[n-1,n]} C_{\mathrm{ext}}(p,n)\right)^{-1}$ 时，定理得证。

Step 3。 $n = 3$ 情形下的显式估计。

根据定理 A.6，在维数3的情况下，我们对常数 $C_T(p,3) = C_T(p)$ 有显式估计，这给出 $\sup_{p\in[2,3]} C_T(p) = C_T(3) = \frac{3^{3/2}}{2^{13/6}}$。根据定理 A.1，我们得到估计

[1]该定理已被多次重新证明，例如参见：[8, 2.3 的证明。引理], [9, 引理 A。1], [1,引理 2。2], [16, 引理 4。7] , [22, 第5节。1]。

for $C_{\mathrm{HL}}(p,3) = C_{\mathrm{HL}}(p)$：我们有 $\sup_{p\in[2,3]} C_{\mathrm{HL}}(p) = C_{\mathrm{HL}}(3) = \frac{8}{17-24\ln 2}$，因此

$$3 - \frac{1}{C_{\mathrm{ext}}(p,3)} = 3 - \frac{1}{C_T(3)C_{\mathrm{HL}}(3)} \le 2.961.$$

这一比较表明，只要 $p \ge 2.961$，所有极小化p-调和映射 $u \in W^{1,p}(B^3,\mathbb{S}^3)$ 都具有正则性。□

5. Regularity for p close to 2

本节将说明如何改进 Gastel 的正则性结果[7, 第 6]节。正如 Gastel 所注意到的，借助改进的 Kato 型不等式，可以用与 Okayasu [26] 和 Xin–Yang [31] 改进 Schoen–Uhlenbeck [27] 结果相同的方式，改进 Nakauchi [29]的结果。正如前文所述，正则性的唯一障碍在于非恒定切映射的存在。结合稳定性不等式、Bochner 公式的一个推论以及混合 Cauchy–Schwarz–Kato[2] 不等式，我们证明任何稳定的驻点切 p-调和映射都必须是常数。

定理 5.1. 如果 $p \in [2, \frac{3+\sqrt{3}}{2}]$，则任意稳定的驻点 p-调和映射 $u\colon B^3 \to \mathbb{S}^3$ 均具有正则性。

我们的证明将表明，任意切映射 $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ 都是常数。正如引言中所概述的，这里有三个要点：

引理 5.2. 对于稳定的驻定 p-调和切映射 $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$，有以下估计：

(a) 稳定性不等式：

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^{p-4}\left(3|\nabla u|^2|\nabla|\nabla u||^2 + (p-2)|\langle \nabla u, \nabla|\nabla u|\rangle|^2\right) \ge (3-p)\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^{p+2} - \frac{3}{4}(3-p)^2\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^p;$$

(b) Bochner 公式推论：

$$\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^{p-2}(|\nabla^2 u|^2 + (p-2)|\nabla|\nabla u||^2) \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^{p+2} - \int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^p;$$

(c) 混合柯西–施瓦茨–Kato不等式：

$$3|\nabla|\nabla u||^2 + (p-2)\left|\left\langle \tfrac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla|\nabla u|\right\rangle\right|^2 \le \frac{3}{p}\left(|\nabla^2 u|^2 + (p-2)|\nabla|\nabla u||^2\right)$$

在所有满足 $\nabla u \neq 0$ 的点上。

[2]在注 5.4 中我们指出，用这个不等式代替最优卡托不等式（我们将在引理 6.7中证明）会得到更好的常数。

注 5.3。 引理 $\frac{3}{p}$ 中的常数 *5.2(c)* 在一种较弱的逐点意义下是锐利的：函数 $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为 $u(x, y) = x + xy$ 满足 p-调和方程于 $(0, 0)$ 处，并使等号成立。只需使用指数坐标，也可以将其修改为具有类似性质的映射 $u\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3$ 。

引理 5.2 (a) 和 (b) 的证明基本上由 Nakauchi 给出。对于 (a)，只需参照 [25, 引理 3] 中的证明，但省略将 $|\langle \nabla u, \nabla|\nabla u|\rangle|$ 由 $|\nabla u||\nabla|\nabla u||$ 控制的步骤。此修改的一个副作用是，p-能量前的常数有所改善：$\frac{3}{4}(3-p)^2$，而不是 $\frac{1}{4}(p+1)(3-p)^2$。不过请注意，这一具体改进与我们的应用无关。对于 (b)，[25, 引理 1] 中的推导适用（另见 [26, 引理 2]），但这次省略步骤 $|\nabla|\nabla u|| \le |\nabla^2 u|$。

注5.4. 引理的部分 *5.2(c)* 比较了 *(a)* 和 *(b)* 两式左侧，并给出了可能的最佳常数 $\frac{3}{p}$。若分别应用柯西–施瓦茨不等式 $|\langle \nabla u, \nabla|\nabla u|\rangle| \le |\nabla u||\nabla|\nabla u||$ 和最优卡托不等式 $2|\nabla|\nabla u||^2 \le |\nabla^2 u|^2$，所得常数将是 $\frac{p+1}{p}$。然而，考察这两个不等式的证明便可发现，它们不可能同时取等。因此，考虑一种特设的混合柯西–施瓦茨–Kato不等式更有优势。

在证明引理 5.2(c)之前，我们先把各部分结合起来，看看如何由引理 p-调和性推出正则性5.2

定理 *5.1*的证明。

假设 $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ 是一个稳定的平稳 p-调和切映射。根据注 2.4，只需证明 u 必为常值映射。

将引理 5.2 应用于 u ——通过利用 (a) 和(b) 的左端，并借助 (c) 进行比较——可得到一个只涉及 $|\nabla u|^p$ 和 $|\nabla u|^{p+2}$的积分的不等式。整理后可写为

$$\tfrac{3}{2}(4 - p(3-p)^2) \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^p + (2p(3-p) - 3) \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^{p+2} \le 0.$$

对于 $p \in [2, 3]$，容易看出 $p(3-p)^2 \le 3 \cdot 1^2$，因此系数 $\frac{3}{2}(4-p(3-p)^2)$ 总为正。然而，系数 $2p(3-p)-3$ 仅当 p 介于 2 和 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 之间时才非负。对于处于此区间内的 p，我们可以得出 $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^p \le 0$，从而 u 为常数。□

引理证明*5.2(c)*。

考虑一点 $q \in \mathbb{S}^2$ 使得 $\nabla u(q) \neq 0$。我们将在 $q \in \mathbb{S}^2$ 附近使用指数坐标，并且 $u(q) \in \mathbb{S}^3$，从而将问题化简为平坦情形。事实上，坐标中的p-调和系统可写为[17, 第 iii 页]

$$-\frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} \partial_\beta \left(\sqrt{\det \gamma} \left(\gamma^{ij} g_{ab} u_i^a u_j^b \right)^{\frac{p-2}{2}} \gamma^{ij} u_i^c \right) = \left(\gamma^{ij} g_{ab} u_i^a u_j^b \right)^{\frac{p-2}{2}} \gamma^{ij} \Gamma_{ab}^c u_i^a u_j^b \quad \text{for } c = 1, 2, 3,$$

其中， u^a 是 u的分量， u_i^a 是其偏导数 $\partial_i u^a$， γ_{ij} 和 g_{ab} 分别是 $\mathbb{S}^2$ 上的度量张量 γ 和 $\mathbb{S}^3$ 上的度量张量 g 的系数（γ^{ij} 表示逆矩阵）， Γ_{ab}^c 是 $\mathbb{S}^3$上的克里斯托费尔符号，并默认按照爱因斯坦求和约定对 i、 j、 a、 b 求和。然而，在指数坐标中， $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$、 $g_{ab} = \delta_{ab}$ 在 q处的一阶范围内成立，因此所有Γ_{ab}^c 在该点也都消失。这使得方程在特定点 $q \in \mathbb{S}^2$ 处简化为

$$0 = \sum_{i=1}^{2} u_{ii}^a + (p-2) \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{b=1}^{3} u_i^a u_j^b u_{ij}^b, \quad \text{for all } a = 1, 2, 3, \tag{5.1}$$

这与 p-调和映射的方程 u相同： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$。由于我们关注的是逐点不等式，因此只会在 5.1 处使用（ q。

使用指数坐标时，我们仍可以选择切空间$T_q\mathbb{S}^2$ 和 $T_{u(q)}\mathbb{S}^3$ 中的坐标，以便于计算，下面就这样做。首先，我们可以假设$|\nabla u(q)| = 1$，因为一般情况下我们只需处理 $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(q)$。为简化坐标计算，我们将选择 $T_q\mathbb{S}^2$ 的一组基，使偏导数$\overline{u_1}$、 $u_2 \in T_{u(q)}\mathbb{S}^3$ 彼此正交。为说明这是可行的，先取任意一组基，并注意到 $\langle u_1, u_2 \rangle$ 在将其旋转 $\pi/2$时会改变符号。因此，我们可以选取一组标准正交基 e_1、 e_2、 $e_3 \in T_{u(q)}\mathbb{S}^3$，使得 $u_1 = \alpha_1 e_1$ 和 $u_2 = \alpha_2 e_2$。采用我们选定的基和记号后，(5.1) 可写成便于使用的形式

$$\begin{cases} 0 = u_{11}^1 + u_{22}^1 + (p-2)\alpha_1(\alpha_1 u_{11}^1 + \alpha_2 u_{12}^2) \\ 0 = u_{22}^2 + u_{11}^2 + (p-2)\alpha_2(\alpha_2 u_{22}^2 + \alpha_1 u_{12}^1) \\ 0 = u_{11}^3 + u_{22}^3. \end{cases} \tag{5.2}$$

我们可以利用前两个方程将 u_{22}^1、 u_{11}^2 表示为其他二阶导数的形式；第三个方程将不予使用。引理 5.2(c)中出现的表达式可写为

$$\begin{aligned} 1 = |\nabla u(q)|^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \\ |\nabla |\nabla u|(q)|^2 &= (\alpha_1 u_{11}^1 + \alpha_2 u_{12}^2)^2 + (\alpha_2 u_{22}^2 + \alpha_1 u_{12}^1)^2, \\ \left| \left\langle \tfrac{\nabla u(q)}{|\nabla u(q)|}, \nabla |\nabla u|(q) \right\rangle \right|^2 &= \alpha_1^2(\alpha_1 u_{11}^1 + \alpha_2 u_{12}^2)^2 + \alpha_2^2(\alpha_2 u_{22}^2 + \alpha_1 u_{12}^1)^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

and

$$\begin{aligned} |\nabla^2 u(q)|^2 &= \big((u_{11}^1)^2 + 2(u_{12}^2)^2 + (u_{22}^1)^2\big) + \big((u_{22}^2)^2 + 2(u_{12}^1)^2 + (u_{11}^2)^2\big) + \sum_{i,j=1}^{2} (u_{ij}^3)^2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{5.4}$$

为了证明引理 5.2(c)，只需证明

$$\begin{aligned} &3(\theta_1 x + \theta_2 y)^2 + (p-2)\theta_1^2(\theta_1 x + \theta_2 y)^2 \\ &\quad \le \frac{3}{p}\Big(x^2 + 2y^2 + (x + (p-2)\theta_1(\theta_1 x + \theta_2 y))^2 + (p-2)(\theta_1 x + \theta_2 y)^2\Big), \end{aligned} \tag{5.5}$$

对于满足 $\theta_1^2+\theta_2^2=1$ 的所有 x、$y\in\mathbb{R}$ 和 θ_1、$\theta_2\in[0,1]$，均成立。

事实上，取 $x=u^1_{11}$, $y=u^2_{12}$, $\theta_1=\alpha_1$, $\theta_2=\alpha_2$，由方程 (5.2) 可知$-u^1_{22}=x+(p-2)\theta_1(\theta_1x+\theta_2y)$，于是 (5.5) 得到引理 5.2(c) 的一部分，即与项 I_1 的比较，其中涉及海森矩阵分量 u^1_{11}, u^2_{12}, u^1_{22}。要得到另一部分（其中涉及项 I_2 及分量 u^2_{22}, u^1_{12}, u^2_{11}），只需交换指标，并取 $x=u^2_{22}$, $y=u^1_{12}$, $\theta_1=\alpha_2$, $\theta_2=\alpha_1$。我们得到的引理 5.2(c) 稍强一些——右端没有 $|\nabla^2u|^2$ 的项 I_3。

因此，我们只需证明初等不等式（5.5）。使用旋转变量后，证明会更容易：用 $z=\theta_1x+\theta_2y$ 和 $w=\theta_2x-\theta_1y$ 代替 x 和 y。经过一些整理，并将两边同乘以 $2^{\frac{p}{(p-2)}}$（注意，在我们的情形下 $p>2$），(5.5) 变为

$$0\le p\theta_1^2z^2+3\theta_1\theta_2zw+\frac{3}{p-2}w^2.$$

将右端看作关于 z、w的二次型，现在很容易验证，对于 θ_1、$\theta_2\in[0,1]$ 和 $p\in[2,3]$的所有取值，判别式均非正。由此便完成了不等式（5.5）的证明，也完成了引理 5.2(c)。□

6. Sharp Kato inequality

如前所述，卡托不等式是研究 p-调和映射正则性的重要工具。定理 5.1 相较于 Gastel 的方法和结果 [7] — 之所以取得进展，是因为下文引理 6.7 证明了二维区域上的尖锐卡托不等式（不过，借助引理 5.2 (c) 中的临时估计，还可以进一步改进最终结果）。正如 Gastel 所指出的，高维情况下卡托不等式的改进将为极小化 p-调和映射带来新的正则性结果。

本节中，我们证明了对于所有 $p\in(1,\infty)$，定义在二维区域上的 p-调和映射满足尖锐的 Kato不等式。我们还对这个问题作出一些一般性评论，并指出若干开放问题。首先定义最优常数。

定义 6.1. 设 $n,d\in\mathbb{N}$, $p\ge1$，并考虑映射 C^2 map $u\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$，它在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 满足 p-调和映射方程 $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$，且 $\nabla u(0)\neq0$。最优Kato常数 $\kappa(p,n,d)>0$ 是满足下述条件的最大数：

$$\kappa(p,n,d)|\nabla|\nabla u|(0)|^2\le|\nabla^2u(0)|^2 \tag{6.1}$$

对于所有这类映射 u,

备注 6.2. 对于 p-流形之间的调和映射 $u\colon\ \mathcal{M}^n\to\mathcal{N}^d$ 不等式 (6.1)仍以相同的常数 $\kappa(p,n,d)$成立。这一点在指数坐标下很容易看出，正如定理 5.1 的证明所示。

注 6.3。注意，关于 u 的唯一相关信息都编码在 $\nabla u(0)$ 和$\nabla^2u(0)$ 中。不失一般性，可以假设它们的长度为 1。因此，

最优Kato常数可以表征为

$$\kappa(p,n,d)^{-1} = \sup_{v,w} \sum_i \left(\sum_{j,a} v_j^a w_{ij}^a \right)^2, \tag{6.2}$$

其中，上确界取遍所有满足约束条件的单位长度向量 $v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$ 以及单位长度的对称 $\mathbb{R}^d$ 值矩阵 $w \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}^d)$

$$0 = \sum_i w_{ii}^a + (p-2) \sum_{i,j,b} v_i^a v_i^b w_{ij}^b \quad \textit{for all } a = 1, \dots, d. \tag{6.3}$$

这一初等刻画有助于求得数值近似。

我们来回顾一下，对于参数 p、n、d 的各种取值，最优Kato常数 $\kappa(p,n,d)$ 有哪些已知结果。

命题 6.4。 设 $\kappa(p, n, d)$ 为 (6.1)中的常数。则有以下结论：

(i) $\kappa(2,n,d) = \frac{n}{n-1}$；(ii) $\kappa(p,n,1) = \min(2, 1 + (\frac{p-1}{n-1})^2)$；(iii) $\kappa(p,2,d) = \kappa(p,2,1) = \min(2, 1+(p-1)^2)$；(iv) $\kappa(p,3,2) < \kappa(p,3,1)$，对某些参数取值成立，特别是对临界指数$p = 1+\sqrt{2}$成立；(v) $\kappa(p,n,d) \geq 1$ 显然成立，但 $\kappa(p,n,d) = 1$ 仅当 $p = 1$ 时成立；(vi) 一般而言，$\kappa(p,n,d)$ 关于 d 单调不增，但对所有 $d \geq n$，$\kappa(p,n,d) = \kappa(p,n,n)$（见下文）。

注 6.5. 有趣的是，$\kappa(p, 2, d)$ 不依赖于 d，但 $\kappa(p, 3, d)$ 却依赖于它！我们的数值模拟表明，$n \geq 3$ 的最优常数确实依赖于 d，但与 $\kappa(p, n, 1)$ 仅有极小差异（见例6.8）。由于这一差异微乎其微，甚至可能仍可利用这些卡托不等式，为 p-调和映射（定义在维数为 ≥ 4的区域上）建立正则性结果，即便常数并非最优。然而，这种差异使人难以想象如何严格证明任何接近最优的卡托不等式。

开放问题 6.6. 确定命题6.4中未提及的其他情形下，卡托不等式的最优常数，首先考虑 $\kappa(p, 3, 2)$ 和 $\kappa(p, 3, 3)$。

本节其余部分将致力于论证命题6.4。

命题的证明 6.4。 Ad (i)：这是 Okayasu 的结果，见 [27, 引理 1。1]。这里我们指出，由于 2-调和方程是解耦的，$\kappa(2, n, d)$ 显然与参数 d无关。

Ad (ii)：这是 Chang–Chen–Wei 的一个结果，参见 [3, 引理 5。4]。

Ad （iii）：这是我们对 Kato不等式中最优常数问题的主要贡献，我们将在引理 6.7中单独证明。

Ad (iv)：我们将在下文的例 6.8 中证明这一点。

Ad (v)：对于平凡不等式 $\kappa(p,n,d) \geq 1$，只需使用（6.2）中的柯西–施瓦茨不等式。如果对于某些 v 和 w 的选择，该不等式恰好成为等式，那么对于所有 i、j、a（以及某个单位 $\lambda \in \mathbb{R}^n$），我们都有 $w_{ij}^a = \lambda_i v_j^a$。但这将导致 $\lambda_i v_j^a = \lambda_j v_i^a$，这意味着所有向量 v_i 都彼此平行：对于某个单位 $z \in \mathbb{R}^d$，有 $v_i^a = \lambda_i z^a$。于是，p-调和系统化为 $(p-1)z = 0$，而这对 $p > 1$ 是不可能的。然而，由（6.2）、（6.3）中的初等刻画可知，最优常数 $\kappa(p,n,d)$ 确实在某些 v、w 处取得。因此，$\kappa(p,n,d) > 1$ 严格成立。

对于 $p = 1$，实际上我们有 $\kappa(1,n,d) = 1$。当 $n = d = 1$ 时这是显然的，因为在这种情况下，任何导数不为零的函数都满足 1-调和方程；在一般情形下，只需在定义域和值域中都添加无关维度即可。

Ad (vi)：注意，任意 p-调和映射 $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ 都可以通过取 p-调和映射 $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d+1}$ 而平凡地延拓为 $v = (u^1, \ldots\ldots, u^d, 0)$。两个映射在（6.1）中得到相同的常数。因此，最优常数 $\kappa(p, n, d)$ 作为 d的函数是非递增的。

另一方面，给定一个 p-调和映射 $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ 满足 $d > n$，注意到其在 0 点处的微分的像至多是 n 维的。为简单起见，我们可以假设它包含于 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 中；于是映射 $v = (u^1, \ldots\ldots, u^n)$ 很容易看出在 0 点满足 p-调和映射方程，并且

$$\kappa(p,n,n)|\nabla|\nabla u|(0)|^2 = \kappa(p,n,n)|\nabla|\nabla v|(0)|^2 = |\nabla^2 v(0)^2| \leq |\nabla^2 u(0)^2|.$$

这表明，最优常数 $\kappa(p,n,d)$ 至少要与 $\kappa(p,n,n)$ 一样大。 □

引理6.7。最优Kato常数 $\kappa(p, 2, d)$ 在 (6.1) 等于 $\min(2, 1+(p-1)^2)$ 对任意 $p \geq 1$ 和 $d \in \mathbb{N}$成立。

证明。我们沿用引理 5.2(c)的证明策略，并对一些技术细节作适当调整。

我们可以选择 $\mathbb{R}^2$ 的一个标准正交基，使偏导数 u_1、u_2 相互正交；然后再选择 $\mathbb{R}^d$ 的一个标准正交基，使得 $u_1 = (\alpha_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$，且 $u_2 = (0, \alpha_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$。记所需的常数为 $\kappa(p) := \min(2, 1+(p-1)^2)$，Kato不等式 $\kappa(p)|\nabla|\nabla u|(0)|^2 \leq |\nabla^2 u(0)|^2$ 便分解为两个独立的不等式：

$$\begin{aligned} \kappa(p)(\alpha_1 u_{11}^1 + \alpha_2 u_{12}^2)^2 &\leq (u_{11}^1)^2 + 2(u_{12}^2)^2 + (u_{22}^1)^2, \\ \kappa(p)(\alpha_2 u_{22}^2 + \alpha_1 u_{12}^1)^2 &\leq (u_{22}^2)^2 + 2(u_{12}^1)^2 + (u_{11}^2)^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

不为负的项 $\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k=3}^{d}(u_{ij}^{k})^2$ 在 $|\nabla^2 u(0)|^2$ 中不会出现在不等式（6.1）右边。为清晰起见，我们将着重证明（6.4）中的第一个不等式。

注意到 p-调和系统的第一个方程

$$0 = u_{11}^1 + u_{22}^1 + (p-2)\alpha_1(\alpha_1 u_{11}^1 + \alpha_2 u_{12}^2)$$

可用于将 u_{22}^1 表示为 u_{11}^1、u_{12}^2的函数。引入辅助变量 $x := u_{11}^1$、$y = u_{12}^2$，然后转换为旋转变量 $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y$、$w = \alpha_2 x - \alpha_1 y$，我们将所需不等式变换为如下形式

$$\begin{aligned}\kappa(p)z^2 &\le x^2 + 2y^2 + (x + (p-2)\alpha_1 z)^2\\ &= 2z^2 + 2w^2 - x^2 + (x + (p-2)\alpha_1 z)^2\\ &= (2 + p(p-2)\alpha_1^2)z^2 + 2(p-2)\alpha_1\alpha_2 zw + 2w^2.\end{aligned}$$

现在我们需要区分以下两种情况：

Case 1: $p > 2$、$\kappa(p) = 2$. 在这里，不等式可进一步简化为

$$0 \le p\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\alpha_2 zw + \frac{2}{p-2}w^2.$$

将右端视为关于 z 和 w的二次型，其判别式为 $4\alpha_1^2(\alpha_2^2 - \frac{2p}{p-2})$，对于所有 α_1、$\alpha_2 \in [0,1]$ 和 $p > 2$均为非正。因此，不等式始终成立。

Case 2: $1 \le p \le 2$, $\kappa(p) = 1 + (p-1)^2$. 不等式的形式为

$$(1 + (p-1)^2)z^2 \le (2 + p(p-2)\alpha_1^2)z^2 + 2(p-2)\alpha_1\alpha_2 zw + 2w^2,$$

将其视为关于 p 的二次不等式最容易进行分析。事实上，它可以改写为 $(1-\alpha_1^2)$ $z^2\cdot p^2 + ap + b \le 0$（其中系数为 a、b）。由于最高次项系数 $(1-\alpha_1^2)$ z^2非负，根据凸性，只需考虑边界情形：$p = 1$ 和 $p = 2$。只要记住等式 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$，两种情形都很容易验证（第一种可化为 $(\alpha_2 z - \alpha_1 w)^2 + (1 + \alpha_2^2)w^2 \ge 0$，第二种可化为 $2w^2 \ge 0$）。证明完毕。□

例 6.8。对于 $p = 1 + \sqrt{2}$，我们有

$$\kappa(p,3,2) \le \frac{25 + 2\sqrt{2}}{14} \approx 1.9877 < 2 = \kappa(p,3,1),$$

如下文这个具体例子所示：

$$\nabla u(0) = \begin{bmatrix}(1,0)\\(0,1)\\(0,0)\end{bmatrix}, \quad \nabla^2 u(0) = \begin{bmatrix}(\alpha,0) & (0,\beta) & (0,0)\\(0,\beta) & (\gamma,0) & (0,0)\\(0,0) & (0,0) & (\gamma,0)\end{bmatrix}$$

其中 $\alpha = -15 + 28\cdot\sqrt{2}$、$\beta = 1 + 14\cdot\sqrt{2}$、$\gamma = -17$。事实上，可以验证，$p$-调和系统可化为 $\frac{p}{2}\alpha + \frac{p-2}{2}\beta + 2\gamma = 0$，而 $|\nabla|\nabla u|(0)|^2 = (\alpha+\beta)^2$ 以及 $|\nabla^2 u(0)|^2 = \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2$。

最后，我们说明如何得到这个例子（以及类似的例子）。如果固定一个单位向量 $v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$，那么（6.2）中的优化问题就只是关于 w的二次优化问题，可以使用标准方法（符号方法或数值方法）求解。对于如例 6.8 中所示的 $\nabla u(0)$ 以及 $v := \frac{\nabla u}{|\nabla u\ (0)\ |}(0)$，最优的 $w \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}^d)$ 正是上文所描述的那个。

然而，即使对于这一特定的 $p = 1 + \sqrt{2}$ 选择，最优常数 $\kappa(p, 3, 2)$ 实际上也略小于 $\frac{25+2\sqrt{2}}{14} \approx 1.9877448$。通过在所有可能的 v 中随机搜索（并针对每种选择优化 w），我们发现 $\kappa(p, 3, 3) \approx \kappa(p, 3, 2) \approx 1.9876817$。此外，我们的模拟表明，间隙现象$\kappa(p, n, 2) < \kappa(p, n, 1)$ 在高维 n 中仍然存在，但只有当 p 接近临界指数 $p(n) = 1 + \sqrt{n-1}$ 时才显著。我们称其为临界，是因为 $\kappa(p, n, 1) = 1 + \frac{(p-1)^2}{n}$ 对于 $p \le p(n)$，而 $\kappa(p, n, 1) = 2$ 对于 $p \ge p(n)$；在这两种情形下，加藤不等式问题有着显著不同的表现。

Appendix A. Explicit constant estimates

本节将推导我们在定理 4.1 的证明步骤 3 中所用常数的精确估计。

A.1. Hardt 和 Lin 的显式常数延拓定理。 我们对 [11, 定理 6。2]中的常数进行了估计（另见 [8, 第556] 页和 [9, 引理 A。1]）。这里提及，在 [11,定理 6。2] 的证明中使用带解析估计的回缩这一想法源自 Federer 和 Fleming，见 [6, 第5节； 6] 他们在证明等周不等式时也采用了这一方法。

定理 A.1. 设 $1 < p < 4$ 和 $v \in W^{1,p}(B^3, \mathbb{R}^4)$ 满足 $|v(x)| = 1$ 对几乎处处的 $x \in \partial B^3$成立。那么存在一个映射 $u \in W^{1,p}(B^3, \mathbb{S}^3)$，使得

$$u\big|_{\partial B^3} = v\big|_{\partial B^3}$$

and

$$\int_{B^3} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \le C_{\mathrm{HL}}(p) \int_{B^3} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x, \tag{A.1}$$

其中 $C_{\mathrm{HL}}(p) = \frac{1}{(4-p)V_p(r)}$ 且 $V_p := \int_0^1 t^3(1+t)^{-p}\,\mathrm{d}t$。特别地，对所有 $p \in [2, 3]$，均有 $C_{\mathrm{HL}}(p) \le C_{HL}(3) = \frac{8}{17-24\ln 2}$。

注 A.2. 公式 (A.1) 中的常数有一个更明确但略逊一筹的表达式：$\widetilde{C}_{\mathrm{HL}}(p) = \frac{2^{p+2}}{4-p}$，见 (A.11)。

定理 *A.1* 的证明。 设 a 是四维球 B_1^4中的一点。我们考虑映射族

$$\tilde{u}_a(x) = \frac{v(x)-a}{|v(x)-a|}, \quad x \in B^3. \tag{A.2}$$

对于任意 $i \in \{1,2,3\}$ ，我们计算

$$\partial_{x_i}\tilde{u}_a = |v-a|^{-1}\partial_{x_i}v - |v-a|^{-3}\langle v-a, \partial_{x_i}v\rangle (v-a), \tag{A.3}$$

由此得到

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i}\tilde{u}_a|^2 &= |v-a|^{-2}|\partial_{x_i}v|^2 + |v-a|^{-6}|\langle v-a, \partial_{x_i}v\rangle|^2|v-a|^2 - 2|v-a|^{-4}|\langle v-a, \partial_{x_i}v\rangle|^2 \\ &= |v-a|^{-2}|\partial_{x_i}v|^2 - |v-a|^{-4}|\langle v-a, \partial_{x_i}v\rangle|^2 \\ &\le |v-a|^{-2}|\partial_{x_i}v|^2. \end{aligned} \tag{A.4}$$

将 (A.4) 对 $i \in \{1,2,3\}$ 求和，得到 $|\nabla\tilde{u}_a|^2 \le |v-a|^{-2}|\nabla v|^2$ 因此

$$|\nabla\tilde{u}_a(x)|^p \le \frac{|\nabla v(x)|^p}{|v(x)-a|^p}. \tag{A.5}$$

现在注意到，对于任意 $z \in \mathbb{R}^4$,

$$\int_{B_1^4} \frac{1}{|z-a|^p}\,\mathrm{d}a \le \int_{B_1^4}\frac{1}{|a|^p}\,\mathrm{d}a = \frac{|\mathbb{S}^3|}{4-p}. \tag{A.6}$$

要理解上述不等式为何成立，需要将两个积分写成相应超水平集的测度。接着可以观察到一个逐点不等式：对于每个 $t>0$ ，超水平集 $\{x \in B_1 : |z-a|^{-p} > t\}$ 的测度小于$\{x \in B_1 : |a|^{-p} > t\}$。

将（A.5）与（A.6结合，可得

$$\int_{B_1^4}\int_{B^3}|\nabla\tilde{u}_a|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \le \int_{B^3}\int_{B_1^4}\frac{|\nabla v(x)|^p}{|v(x)-a|^p}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x \le \frac{|\mathbb{S}^3|}{4-p}\int_{B^3}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \tag{A.7}$$

由于 $|B_1^4| = \frac{1}{4}|\mathbb{S}^3|$，我们可以选取一点 $a_0 \in B_1^4$，使得

$$\int_{B^3}|\nabla\tilde{u}_{a_0}|^p\,\mathrm{d}x \le \frac{|\mathbb{S}^3|}{4-p}|B_1^4|^{-1}\int_{B^3}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x = \frac{4}{4-p}\int_{B^3}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \tag{A.8}$$

限制在 ∂B^3 上时，上述构造的映射 $\tilde{u}_{a_0}$ 是 $P_{a_0}\circ v$，其中

$$P_{a_0}: \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3, \qquad P_{a_0}(z) := \frac{z-a_0}{|z-a_0|}.$$

这与 $v|_{\partial B^3}$ 不同。为修正这一点，我们注意到 P_{a_0}： $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ 是一个光滑微分同胚（只要 a_0 位于 B^4 的内部），因此我们可以设

$$\tilde{u} := P_{a_0}^{-1}\circ\tilde{u}_{a_0}.$$

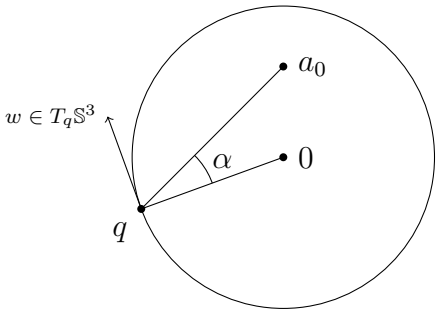

FIGURE 1. 计算 Q_{a_0}

现在 $\nabla\tilde{u} = \nabla P_{a_0}^{-1} \cdot \nabla\tilde{u}_a$，因此

$$|\nabla\tilde{u}| \leq Q_{a_0}|\nabla\tilde{u}_{a_0}|, \tag{A.9}$$

其中，常数 Q_{a_0} 可表征为

$$Q_{a_0} := \sup_{\substack{b\in\mathbb{S}^3,\\ v\in T_b\mathbb{S}^3}} \frac{|\nabla P_{a_0}^{-1}(b)\cdot v|}{|v|} = \sup_{\substack{q\in\mathbb{S}^3,\\ w\in T_q\mathbb{S}^3}} \frac{|w|}{|\nabla P_{a_0}(q)\cdot w|} = \left(\inf_{\substack{q\in\mathbb{S}^3,\\ w\in T_q\mathbb{S}^3}} \frac{|\nabla P_{a_0}(q)\cdot w|}{|w|}\right)^{-1}.$$

通过直接计算可得

$$|\nabla P_{a_0}(q)\cdot w|^2 = |q-a_0|^{-2}\left(|w|^2 - \left(\frac{q-a_0}{|q-a_0|}\cdot w\right)^2\right),$$

这可以解释为

$$\frac{|\nabla P_{a_0}(q)\cdot w|}{|w|} = \frac{\cos(\alpha)}{|q-a_0|},$$

其中 α 表示向量 w 与子空间 $(q-a_0)^\perp$ 之间的夹角。对于 $w \in T_q\mathbb{S}^3$，此类角中的最大角即图 $\angle a_0 q 0$ 中的角 1。

根据余弦定理，我们有 $\cos\alpha = \frac{|q-a_0|^2+1-|a_0|^2}{2|q-a_0|}$，因此对于固定的 $q \in \mathbb{S}^3$，$\left|P_{a_0}\left(\frac{q\cdot w}{|w|}\right)\right|$ 的最小值为 $\frac{|q-a_0|^2+1-|a_0|^2}{2|q-a_0|^2}$。注意，这是 $|q-a_0|$ 的递减函数，因此其在 $q \in \mathbb{S}^3$ 上的最小值在 $q = -\frac{a_0}{|a_0|}$ 且 $|q-a_0| = 1+|a_0|$ 时取得。因此，

$$Q_{a_0} = \left(\frac{(1+|a_0|)^2+1-|a_0|^2}{2(1+|a_0|)^2}\right)^{-1} = 1+|a_0|. \tag{A.10}$$

由于 $a_0 \in B_1^4$，我们有 $1+|a_0| \leq 2$。最后，由 (A.9)、(A.8) 和 (A.10) 可得

$$\int_{B^3} |\nabla\tilde{u}|^p \,\mathrm{d}x \leq \frac{2^{p+2}}{4-p}\int_{B^3} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \tag{A.11}$$

因此，我们得到不等式 (A.1)，其中常数为

$$\widetilde{C}_{\mathrm{HL}}(p)=\frac{2^{p+2}}{4-p},\quad \text{in particular,}\quad \widetilde{C}_{\mathrm{HL}}(2)=8,\quad \widetilde{C}_{\mathrm{HL}}(3)=32. \tag{A.12}$$

然而，只需稍加注意，常数 $C_{\mathrm{HL}}(p)$ 仍可进一步改进。记

$$u_a(x)=P_a^{-1}\left(\frac{v(x)-a}{|v(x)-a|}\right),\quad x\in B^3.$$

该映射已经与 v 在 $\mathbb{S}^3$上一致。根据前面的计算，即（A.5）、（A.9）和（A.10），我们得到逐点估计

$$|\nabla u_a(x)|\le(1+|a|)\frac{|\nabla v(x)|}{|v(x)-a|}.$$

引入权重 $\omega(a):=(1+|a|)^{-p}$，以消去计算中出现的 $1+|a|$ 的幂，进而得到（论证与（A.7）类似）

$$\int_{B_1^4}\int_{B^3}|\nabla u_a|^p\,\mathrm{d}x\,\omega(a)\,\mathrm{d}a\le\int_{B^3}\int_{B_1^4}\frac{|\nabla v(x)|^p}{|v(x)-a|^p}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x\le\frac{|\mathbb{S}^3|}{4-p}\int_{B^3}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \tag{A.13}$$

记 $V_p:=\int_0^1 t^3(1+t)^{-p}\,\mathrm{d}t$，现在可以选取一点 $a_0\in B_1^4$，使得

$$\int_{B^3}|\nabla u_{a_0}|^p\,\mathrm{d}x\le C_{\mathrm{HL}}(p)\int_{B^3}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x, \tag{A.14}$$

其中 $C_{\mathrm{HL}}(p)=\frac{1}{(4-p)V_p}$，显然它关于 p 单调递增。对于 $p=2$，可以找到 3 V_2 和 V_3 的显式公式。我们得到

$$C_{\mathrm{HL}}(2)=\frac{1}{6\ln 2-4}\approx 6.29,\qquad C_{\mathrm{HL}}(3)=\frac{8}{17-24\ln 2}\approx 21.95. \tag{A.15}$$

□

注记 A.3。将 a 限制在某个较小的球 B_r^4 而非 B_1^4 在 (A.2) 并不会得到更优的常数。

A.2。球面上的庞加莱′不等式及其显式常数。由 [30] 可得以下结果。

定理 A.4（[30]）。若 $f\in W^{1,p}(\mathbb{S}^2)$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^2}|f|^{p-2}f=0$，则

$$\int_{\mathbb{S}^2}|f|^p\le C_{P:sc}(p)\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla f|^p, \tag{A.16}$$

其中 $C_{P:sc}(p)=\frac{p^p}{\text{正弦}^p(\frac{\pi}{p})2^{p(p-1)}}$。

推论 ary A.5. 设 $u \in W^{1,\,p}(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^3)$ 对于 $p \in [2,3]$，则存在 $\bar{u} \in \mathbb{R}^4$ 使得 t

$$\int_{\mathbb{S}^2} |u-\bar{u}|^p \le C_P(p) \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^p, \tag{A.17}$$

其中 $C_P(p) = \frac{p^p}{\text{正弦}^p(\frac{\pi}{p})\,4(p-1)}$。特别地，$\sup_{p\in[2,3]} C_P(p) = C_P(3) = \frac{3^{9/2}}{2^6}$。

证明。由于 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$，我们写作 $u = (u^1,u^2,u^3,u^4)$。不难看出，对于每个$i \in \{1,2,3,4\}$，都存在一个 $\bar{u}^i \in \mathbb{R}$ 使 $\int_{\mathbb{S}^2} |u^i - \bar{u}^i|^p$ 取最小值；对于这样的 $\bar{u}^i$，我们有$\int_{\mathbb{S}^2} |u^i-\bar{u}^i|^{p-2}(u^i-\bar{u}^i) = 0$。

由A.16)，我们在每个分支上都有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2} |u-\bar{u}|^p &= \int_{\mathbb{S}^2} \left(\sum_{i=1}^4 (u^i-\bar{u}^i)^2\right)^{\frac{p}{2}} \le 4^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^4 \int_{\mathbb{S}^2} |u^i-\bar{u}^i|^p \\ &\le 2^{p-2} C_{P:sc}(p) \sum_{i=1}^4 \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u^i|^p \le 2^{p-2} C_{P:sc}(p) \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^p,\end{aligned}$$

其中，在 在最后一个不等式中，我们使用了初等不等式 $\|x\|_{\ell^p} \le \|x\|_{\ell^2}$ for $p \ge 2$。 □

A.3. 具有显式常数的迹不等式。我们将证明一个基本的迹不等式

$$\forall\, u\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad \exists\, v\colon B^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad v|_{\mathbb{S}^2} = u, \quad \int_{B^3} |\nabla v|^p \le C_T \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^p.$$

其常数 C_T 具有某种显式形式。

定理 A.6. 假设 $p \in [2,3]$ 和 $u \in W^{1,p}(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^3)$。那么存在一个映射$v \in W^{1,2}(B^3,\mathbb{R}^4)$，使得 $v\big|_{\partial B^3} = u$ 在迹意义下成立，并且

$$\int_{B^3} |\nabla v|^p \le C_T(p) \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^p, \tag{A.18}$$

其中 $C_T(p) = 2^{(p-2)/2} \frac{1+\alpha^p C_P(p)}{3+p(\alpha-1)}$，$\alpha = \frac{2^{5/3}}{3^{3/2}}$，并且 $C_P(p)$ 是球面上的庞加莱不等式中的常数´ $\mathbb{S}^2$ ——推论 A.5。特别地，对所有 $p \in [2,3]$，我们有$C_T(p) \le C_T$（3）$= \frac{3^{3/2}}{2^{13/6}}$。

证明。对于稍后选取的 $\alpha > 0$，定义如下：

$$v(x) := |x|^\alpha u(x/|x|) + (1-|x|^\alpha)\overline{u} \quad \text{for all } x \in B^3,$$

其中 $\overline{u} \in \mathbb{R}^4$ 是 Poincaré 不等式中所需的常数´，参见推论 A.5。映射 v 在每条射线 $\{tx : t \in [0,1]\}$上，在 $u(x)$ 与 $\overline{u}$ 之间进行插值。我们计算 v的能量：

$$|\nabla v(x)|^2 = |x|^{2(\alpha-1)} \left(\alpha^2 |u(x/|x|) - \overline{u}|^2 + |\nabla u(x/|x|)|^2\right),$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{B^3}|\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}x &\le 2^{(p-2)/2}\int_{B^3}|x|^{p(\alpha-1)}\left(\alpha^p|u(x/|x|)-\overline{u}|^p+|\nabla u(x/|x|)|^p\right)\,\mathrm{d}x\\ &= 2^{(p-2)/2}\int_0^1 r^{2+p(\alpha-1)}\,\mathrm{d}r\int_{\mathbb{S}^2}\left(\alpha^p|u(\xi)-\overline{u}|^p+|\nabla u(\xi)|^p\right)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2(\xi)\\ &\le 2^{(p-2)/2}\frac{1+\alpha^pC_P(p)}{3+p(\alpha-1)}\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u(\xi)|^p\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2(\xi).\end{aligned}\tag{A.19}$$

记 $C_T(p,\alpha):=2^{(p-2)/2}\frac{1+\alpha^pC_P(p)}{3+p(\alpha-1)}$，其中 $p\in[2,3]$ 且 $\alpha\in(0,1]$。可以验证，$C_T(p,\alpha)$ 是 p 的增函数，且 $\inf_{\alpha\in(0,1]}C_T(3,\alpha)$ 在$\alpha=\frac{2^{5/3}}{3^{3/2}}$时达到。因此，在 (A.19) 中取此 α 得证。□

References

[1] P. Bousquet、A. C. Ponce 和 J. Van Schaftingen。分数阶索伯列夫映射的强逼近。《不动点理论与应用杂志》，15(1):133–153，2014。10[2] H. Brezis、J.-M. Coron 和 E. H. Lieb。带缺陷的调和映射。《数学物理通讯》，107(4):649–705，1986。2, 7[3] S.-C. Chang、J.-T. Chen 和 S. W. Wei。有限 p 能量 p-调和映射的刘维尔性质。《美国数学会汇刊》，368(2):787–825，2016。15[4] J.-M. Coron 和 R. Gulliver。取值于球面的极小化 p-调和映射。《纯粹与应用数学杂志》，401:82–100，1989。7[5] J. Eells, Jr. 和 J. H. Sampson。黎曼流形之间的调和映射。《美国数学杂志》，86:109–160，1964。2[6] H. Federer 和 W. H. Fleming。正规流与积分流。《数学年刊》（第二辑），72:458–520，1960。18[7] A. Gastel。Cosserat 连续体与 p-调和映射的正则性问题。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，51(6):4287–4310，2019。1, 3, 5, 11, 14[8] R. Hardt、D. Kinderlehrer 和 F.-H. Lin。静态液晶构型的存在性与部分正则性。《数学物理通讯》，105(4):547–570，1986。10, 18[9] R. Hardt、D. Kinderlehrer 和 F.-H. Lin。约束变分原理下极小化映射的稳定缺陷。《庞加莱研究所年刊：非线性分析》，5(4):297–322，1988。10, 18[10] R. Hardt、F. Lin 和 C. Wang。p能量的 $x/|x|$极小性。《分析与几何通讯》，6(1):141–152，1998。7[11] R. Hardt 和 F.-H. Lin。使梯度的 L^p 范数达到极小的映射。《纯粹与应用数学通讯》，40(5):555–588，1987。1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 18[12] S. Hildebrandt、H. Kaul 和 K.-O. Widman。黎曼流形之间调和映射的一个存在性定理。《数学学报》，138(1-2):1–16，1977。2[13] M.-C. Hong。论 p-调和映射 $\frac{x}{|x|}$ 的极小性：$B^n\to S^{n-1}$。《变分法与偏微分方程》，13(4):459–468，2001。7[14] M.-C. Hong。取值于球面的稳定 p-调和映射的部分正则性。《澳大利亚数学会通报》，76(2):297–305，2007。6[15] M.-C. Hong 和 C.-Y. Wang。论稳定驻定调和映射的奇异集。《变分法与偏微分方程》，9(2):141–156，1999。7[16] C. P. Hopper。拟凸泛函全纯约束极小化子的部分正则性。《理性力学与分析文献》，222(1):91–141，2016。10

[17]N. Hungerbuehler。p-调和流。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1994年。博士论文——苏黎世联邦理工学院（瑞士）。12[18] W. J¨ager 和 H. Kaul。从球到球面的旋转对称调和映射，以及椭圆方程组弱解的正则性问题。《纯粹与应用数学杂志》，343:146–161，1983年。3, 7, 8[19] Y. Li 和 C. Wang。模拟 Cosserat 微极弹性的变分问题弱解的正则性。《国际数学研究通知》，(6):4620–4658，2022年。4[20] F. Lin 和 C. Wang。调和映射及其热流的分析。世界科技出版公司有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2008年。9[21] F.-H. Lin。关于映射 $x/|x|$的一个注记。《巴黎科学院报告·数学辑》，305(12):529–531，1987年。7[22] K. Mazowiecka、M. Mi´skiewicz 和 A. Schikorra。极小调和映射奇异集的大小。美国数学会回忆录，即将出版。10[23] P. Mironescu 和 J. Van Schaftingen。取值于流形的 Sobolev 映射的迹理论。《图卢兹数学学院科学年刊》（第六辑），30(2):281–299，2021年。9[24] C. B. Morrey, Jr.。黎曼流形上的 Plateau 问题。《数学年刊》（第二辑），49:807–851，1948年。1, 2, 4, 9[25] N. Nakauchi。取值于球面的极小化 p-调和映射的正则性。《意大利数学联合会通报》（第七辑），10(2):319–332，1996年。12[26] N. Nakauchi。取值于球面的极小化 p-调和映射的正则性。载于《第三届世界非线性分析学家大会论文集》第2部分（卡塔尼亚，2000年），第47卷，第1051–1057页，2001年。3, 11, 12[27] T. Okayasu。取值于 S^4、 S^5 及对称空间的极小调和映射的正则性。《数学年刊》，298(2):193–205，1994年。2, 5, 11, 15[28] R. Schoen 和 K. Uhlenbeck。调和映射的正则性理论。《微分几何杂志》，17(2):307–335，1982年。2, 7[29] R. Schoen 和 K. Uhlenbeck。取值于球面的极小调和映射的正则性。《数学发明》，78(1):89–100，1984年。1, 2, 4, 5, 11[30] D. Valtorta。 p-拉普拉斯算子第一特征值的尖锐估计。《非线性分析》，75(13):4974–4994，2012年。21[31] Y. L. Xin 和 Y. H. Yang。取值于具有正截面曲率的某些流形的 p-调和映射的正则性。《纯粹与应用数学杂志》，466:1–17，1995年。3, 11

（Katarzyna Mazowiecka） Institute of Mathematics、University of Warsaw、 Banacha 2、02-097Warszawa、 Poland

电子邮箱：k.mazowiecka@mimuw.edu.pl

（Micha l Mi´skiewicz） Institute of Mathematics、University of Warsaw、 Banacha 2、02-097Warszawa、 Poland& Institute of Mathematics、 Polish Academy of Sciences、Sniadeckich 8、 00-656 Warszawa、Poland

电子邮箱：m.miskiewicz@mimuw.edu.pl