arXiv:2302.06742v1 [math.DG] 13 Feb 2023

重标度平均曲率流的收敛速率

RORY MARTIN-HAGEMAYER 和 NATASA SESUM

Abstract. 我们从上方估计闭超曲面上重标度平均曲率流的解收敛到极限自相似解（即收缩子）的速率。我们的主要结果表明，任何收敛到收缩子的速度快于任意固定指数速率的解，本身都必须是收缩子。

Contents

1. 引言 1
2. 几何量与演化方程 4
2.1. 预备计算 4
2.2. 微分算子 $\mathcal{L}$ 5
2.3. 几何量的演化 7
2.4. 二阶导数 9
3. 能量泛函 11
3.1. 能量泛函的演化 11
4. 狄利克雷-爱因斯坦商 13
4.1. 狄利克雷-爱因斯坦商的演化 14
4.2. 项的阶数 $\dot{N}$ 15
5. 控制 $\nabla^l S$ 16
6. 收敛速率 20
参考文献 24

1. Introduction

我们称映射 $\bar{\varphi}\colon M\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ 为一个从嵌入$\varphi_0\colon M\to\mathbb{R}^{n+1}$ 出发的平均曲率流，只要满足

$$\begin{cases}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\tau}(p,\tau)=H(p,\tau)\nu(p,\tau)\\ \bar{\varphi}(p,0)=\bar{\varphi}_0(p)\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$H(p,\tau)$ 是 $\bar{\varphi}(p,\tau)$ 处的平均曲率，而 $\nu(p,\tau)$ 是 $\bar{\varphi}(p,\tau)$ 处的法向量。只要第二基本形式的范数 $|A|^2$ 保持有界，平均曲率流就可以在时间上延拓。换言之，当 $|A|^2$ 趋于无穷时，平均曲率流恰好会形成奇点，并在某个时间 T 形成奇点。围绕奇点对平均曲率流进行缩放有多种方式。给定平均曲率流 $\tilde{\varphi}\colon M\times[-1,0)\to\mathbb{R}^{n+1}$，可以通过以下方程进行缩放

$$\tilde{\varphi}(\cdot,t)=\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\bar{\varphi}(\cdot,\tau)$$

其中 $t=-ln(-\tau)$。可以验证，这个重标度平均曲率流按照下述定义中的方程演化。

定义 1.1. 若 $\tilde{\varphi}: M \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 按照方程演化，则称其为重标度平均曲率流

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(p,t) = H(p,t)\nu(p,t) + \frac{\tilde{\varphi}(p,t)}{2} \tag{1.2}$$

其中，$H(\cdot,t)$ 是在重标度后测得的 $\tilde{\varphi}(\cdot,t)$ 处的平均曲率。

如果 M_t 是一族按（1.2）运动的超曲面，并且当 $t \to \infty$ 时，我们有 $\lim_{t\to\infty} M_t = \Sigma$，其中 Σ 是某个紧非空曲面，那么 Huisken 的单调性公式意味着 Σ 是一个收缩子，满足

$$H + \frac{x \cdot \nu}{2} \equiv 0.$$

在本文中，我们证明以下定理。

定理 1.2. 设 $\tilde{\varphi}: M \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是重标度平均曲率流的一个解，

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial t} = \vec{H} + \frac{x}{2}, \tag{1.3}$$

使得我们可以找到某些 $\tau_1, \tau_2 \in [-1,0)$ $(\tau_1 < \tau_2)$，使相应的（非重标度）平均曲率流 $\varphi: M \times [\tau_1,\tau_2) \to \mathbb{R}^{n+k}$ 在测度意义下充分接近某个（闭）收缩子的齐次收缩流 Σ。那么存在 $T > 0$，使得在 $[T,\infty)$ 上我们可以将 M_t 表示为函数 $v(p,t)$ 在 Σ 上的法向图。此外，以下情况之一必然成立。

(1) 存在 $C, m > 0$，使得 $\|v(\cdot,t_i)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \geq Ce^{-mt_i}$. (2) M_t 通过微分同胚移动，并恒等于 Σ。

该定理类似于 Sun 和 Wang 针对 K¨ahler-Ricci 流 [14] 以及 Kotschwar 针对 Ricci流 [10]所得的结果。在前一篇论文中，Sun 和 Wang 证明，若一个 K¨ahler-Ricci 流始于 K¨ahler-Einstein 流形的充分小邻域 $C^{k,\gamma}$ 且该流形的爱因斯坦常数为 1，那么在他们的归一化 K¨ahler-Ricci 流下，该流必以多项式速率收敛至另一个 K¨ahler-Einstein 度量。在 [10] Kotschwar 证明，若 $(M,\bar{g})$ 是一个闭的里奇孤立子，且 $g(t)$ 是归一化里奇流的光滑解，并且在一列微分同胚 $\psi_i \in \mathrm{Diff}(M)$ 作用下，对于所有 k 以及某个时间序列 $t_i \to \infty$，都有 $\psi_i^* g(t_i) \to \bar{g}$ in $C^k_{\bar{g}}$，那么要么 $\|\psi_i g(t_i) - \bar{g}\|_{C^2_{\bar{g}}} \geq Ce^{-mt_i}$ 对某个 m, $C > 0$ 成立，要么存在一个光滑微分同胚族 $\Phi_t \in \mathrm{Diff}(M)$，使得对所有 $t > 0$，都有 $\Phi_t^* g(t) = \bar{g}$。

我们在此采用的方法与 Kotschwar 的方法颇为相似，而我们的结果与他的结果也更为明显地相似。我们借鉴 Kotschwar 的工作，特别是他的能量泛函方法，从中获得启示，以便为这一结果的证明做好安排。

我们遵循 Kotschwar 在 [10] 的 Ricci流情形中所采用的反证法的一般思路。首先，我们证明可以将流 M_t 表示为收缩子 Σ 在某个时间 T_0之后的法向图。我们运用 Felix Schultze 在 [13] 中的一个定理来确立所需的图形性。该定理使我们能够使用 [13],中针对平均曲率流的 Lojasiewicz 不等式，该不等式源于流的图形表示。我们利用这一点，为文中稍后引入、并用于定理 $E(t)$证明的能量泛函1.2建立所需的界。

更准确地说，假设定理1.2 不成立，则对每个 C， $m > 0$最终都有

$$\|v(\cdot,t_i)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} < Ce^{-mt_i}$$

当 i 足够大时，对于由 $v(t)$ 在 Σ 上的图像给出的超曲面族 M_t，其中 M_t并非收缩子。接着我们证明，这意味着还可以找到常数 C'_m，使得对于 Huisken泛函 $\Omega(M) = \int_M e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu$，有

$$\Omega(M_{t_i}) - \Omega(\Sigma) \leq C'_m e^{-mt_i}. \tag{1.4}$$

实际上，我们选择 $E(t)$，这样回顾 Huisken 单调性公式后，就可以写成

$$\Omega(M_t) - \Omega(M_s) = \int_t^s E(\xi) d\xi.$$

如果我们对 $E(t)$ 有某种指数控制，例如

$$E(t) \geq E(T_0) e^{-K'(t-T_0)}, \tag{1.5}$$

这样便可以（将 $s \to \infty$ 代入 Huisken 单调性公式）写出

$$\Omega(M_t) - \Omega(\Sigma) \geq \frac{E(T_0)}{K'} e^{-K'(t-T_0)},$$

我们可以将其与（1.4）结合，得到

$$E(T_0) \leq C e^{(K'-m)(t_i-T_0)}.$$

如果这样的不等式对所有 i 以及所有足够大的 m 都成立，我们便可得出 $E(T_0) = 0$，从而得出 M_{T_0} 是一个收缩子。在 [8], 中，Hong Huang 证明了平均曲率流具有反向唯一性，因此，如果 M_{T_0} 是一个收缩子，那么我们的流在所有时间都必须是收缩子，这与我们最初的假设矛盾。

以上讨论表明，我们应当集中精力证明（1.5）。受[10] 中证明的启发，我们为此采用的关键工具是分析狄利克雷-爱因斯坦商，下面给出其定义。

定义 1.3。给定一族沿法向重标度平均曲率流（2.1）或重标度平均曲率流（2）运动的超曲面（其并非收缩子），我们通过下式定义狄利克雷-爱因斯坦商 $N(t)$：

$$N(t) = \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = \frac{d}{dt} ln(E(t)). \tag{1.6}$$

狄利克雷-爱因斯坦商的实用性在于，如果我们能够从下方对狄利克雷-爱因斯坦商进行界定，也就是说，能够证明存在某个 $K' > 0$使得

$$N(t) \geq -K'.$$

这便意味着

$$\ln(E(t)) = \ln(E(T_0) + \int_{T_0}^t N(s) ds \geq \ln(E(T_0) - K'(t - T_0)$$

由此我们能够得到（1.5）。

本文的结构如下。在第2 节中，我们推导所需量的演化方程，以便在后续各节中定义能量泛函及其演化方程。在第3 节中，我们定义能量泛函 $E(t)$，它与 Huisken 单调性公式密切相关，并计算其关于时间的一阶和二阶导数。在第4 节中，我们引入 Dirichlet-Einstein 商 $N(t$，计算其关于时间的变化率，并证明 $N(t)$ 关于S 及其导数的下界。

2. Geometric Quantities and Evolution Equations

为了推导某些估计，我们有时会考虑所谓的法向重标度平均曲率流(2.1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{H} + \frac{x^{\perp}}{2}, \tag{2.1}$$

我们将证明它在切向微分同胚意义下等价于（1.1）。为简化计算，我们首先研究在由（2.1）演化的超曲面上，各个量如何演化。为方便起见，我们定义量 $S = H + \frac{x\cdot\nu}{2}$ 并将流（2.1）改写为以下形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = S\nu.$$

稍后，我们将通过以下方程定义能量泛函

$$E(t) = \int_{M_t} S^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu$$

并分析其随时间的演化，以确定其在 $t \to \infty$ 时的行为。本节将计算若干关键几何量的演化方程，这些演化方程将在后文中用于计算能量泛函，并对证明定理 1.3 至关重要。为了计算 $E(t)$ 的演化方程，我们将写出

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) = 2\int_{M_t} S\frac{\partial}{\partial t}Se^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu + \int_{M_t} S^2\frac{\partial}{\partial t}[e^{-\frac{|x|^2}{4}}]d\mu + \int_{M_t} S^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}}\frac{\partial}{\partial t}d\mu$$

因此，我们至少需要循序渐进地推导出 $\partial_t S$、$\partial_t e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ 和 $\partial_t d\mu$ 的计算。下面我们将进行这些推导，并在此过程中计算其他一些重要的演化方程。

2.1. 预备计算。 在本小节中，我们证明以下关于几何量演化的关键引理，这些几何量是我们稍后计算能量泛函所必需的。以下计算针对按（2.1）演化的量进行。由于这些计算都是标准的，我们将省略细节。

引理 2.1。 以下计算对于任意一族按 $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$演化的超曲面均成立 （2.1）

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2A_{ij}S \tag{2.2}$$

$$\partial_t g^{jk} = 2A^{jk}S \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} = -g^{kl}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{il}S) + \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{jl}S) - \frac{\partial}{\partial x_l}(A_{ij}S)\Big] + SA^{kl}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}g_{il} + \frac{\partial}{\partial x_i}g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}\Big] \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\nabla S. \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A_{ij} = \nabla_i\nabla_j S - SA_{jl}A_{il}. \tag{2.6}$$

证明： 在本证明中，我们采用 Mantegazza 在 [11], 第 1.2 节和第 2.3 节中对基本几何量演化所作的计算，但在计算时注意到，对我们而言，$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = S\nu$而不是 $H\nu$。可以使用高斯-魏因加滕关系（例如参见 [11] 第 4 页）

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + A_{ij}\nu \\ \frac{\partial}{\partial x_j}\nu = -A_{jl}g^{ls}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s} \end{cases}$$

并在一点处使用指数坐标，根据第一基本形式的公式计算度量 g_{ij} 在 M_t 上的变化率，具体如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} =&\frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\rangle\\ =&\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}^T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\rangle+\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}^T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle-2\Gamma_{ij}^k\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}^T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\rangle-2A_{ij}\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t},\nu\rangle\\ =&-2A_{ij}S,\end{aligned}$$

由此得到（2.2）。

利用 $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$和（2.2）可计算得

$$\partial_t g^{jk}=2A^{jk}S,$$

即（2.3）。

结合（2.2）、（2.3）和（2.1）即可得到（2.4）。

直接计算可得 $\langle\frac{\partial\nu}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle=-\langle\nu,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x_i}\rangle=-\langle\nu,\partial\frac{(S\nu}{\partial x_i}\rangle=-\frac{\partial S}{\partial x_i})$，可将其更简洁地表示为

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=-\nabla S,$$

由此得到（2.5）。

利用第二基本形式的公式和高斯-魏因加滕关系，我们进行如下计算，以确定在（2.1）下第二基本形式各项的变化率。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}A_{ij} =&\frac{\partial}{\partial t}\langle\nu,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\rangle\\ =&\langle\nu,\frac{\partial^2(S\nu)}{\partial x_i\partial x_j}\rangle-\langle\nabla S,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\rangle\\ =&\frac{\partial^2S}{\partial x_i\partial x_j}-S\langle\nu,\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{jl}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l})\rangle-\langle\frac{\partial S}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}g^{ls},\Gamma_{ij}^k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+A_{ij}\nu\rangle\\ =&\frac{\partial^2S}{\partial x_i\partial x_j}-SA_{jl}A_{il}-\frac{\partial S}{\partial x_l}g^{ls}g_{sk}\Gamma_{ij}^k\\ =&\nabla_i\nabla_jS-SA_{jl}A_{il},\end{aligned}$$

由此得到（2.6）。 ■

2.2. 微分算子 $\mathcal{L}$。Colding 和 Minicozzi 引入了微分算子

$$\mathcal{L}=\Delta-\frac{1}{2}\langle x,\nabla\cdot\rangle$$

它满足以下条件:

$$\int_M f(\mathcal{L}g)e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu=\int_M(\mathcal{L}f)ge^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu=-\int_M\nabla f\nabla ge^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu$$

对每个 f， g 均满足适当的可微性条件。它有时被称为“稳定算子”，在我们计算能量泛函的演化时至关重要，因为它会出现在许多演化方程中，并且是自伴的。

接下来，我们将回顾一些关于收缩子的众所周知的公式，这些公式使用方程 $H=-\frac{x^{\perp}}{2}$。对于余维为一的情形，我们将其改写如下：

$$\mathcal{L}|A|^2=2|\nabla A|^2+2|A|^2(\frac{1}{2}-|A|^2)$$

$$\mathcal{L}H^2=H^2-2H^2|A|^2+2|\nabla H|^2=2|\nabla H|^2+2H^2(\frac{1}{2}-|A|^2),$$

例如参见 Ding 和 Lin [3] 方程 (2.6)、(2.8) 中的更一般形式。

我们将尝试推导类似的公式，但针对的是一般超曲面，而不仅仅是收缩子。我们沿用他们的推导过程，但通过改为从方程 $H=-\frac{x\cdot\nu}{2}+S$ 和 $\frac{x\cdot\nu}{2}=S-H$ 出发来调整这一过程。我们将结果汇总在以下引理中。

Le引理 2.2。以下计算对任意超曲面 $M\subset\mathbb{R}^{n+}$均成立 [1]

$$\nabla_i\nabla_jH=\frac{1}{2}A_{ij}+(S-H)A_{ik}A_{jk}+\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle\nabla_iA_{jk}+\nabla_i\nabla_jS \tag{2.7}$$

$$\mathcal{L}|A|^2=2|\nabla A|^2+2|A|^2(\frac{1}{2}-|A|^2)+2Str(A^3)+2A_{ij}\nabla_i\nabla_jS \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L}H=\frac{1}{2}H+(S-H)|A|^2+\Delta S. \tag{2.9}$$

证明：首先注意到，我们可以利用高斯-魏因加滕关系对 $H=-\frac{x\cdot\nu}{2}+S$ 进行协变微分，得到

$$\nabla_jH=\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle A_{jk}+\nabla_jS.$$

求导并再次使用高斯-魏因加滕关系，我们计算得到

$$\nabla_i\nabla_jH=\frac{1}{2}A_{ij}+\frac{1}{2}\langle x,\nu\rangle A_{ik}A_{jk}+\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle\nabla_iA_{jk}+\nabla_i\nabla_jS,$$

然后代入 $\frac{x\cdot\nu}{2}=S-H$，得到

$$\nabla_i\nabla_jH=\frac{1}{2}A_{ij}+(S-H)A_{ik}A_{jk}+\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle\nabla_iA_{jk}+\nabla_i\nabla_jS,$$

即（2.7）。

我们还可以立即得到另一个有用的方程，以便稍后引用

$$\nabla_i\nabla_jS=\nabla_i\nabla_jH-\frac{1}{2}A_{ij}-(S-H)A_{ik}A_{jk}-\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle\nabla_iA_{jk} \tag{2.10}$$

由（2.7）。

此处，我们参考一个标准计算（对一般超曲面均成立），详见 Ding 和 Lin [3] 方程 (2.2)，其中余维为 1 时有

$$\Delta|A|^2=2|\nabla A|^2+2A_{ij}\nabla_i\nabla_jH+2H\mathrm{tr}(A^3)-2|A|^4.$$

将 $\nabla_i\nabla_jH$ 用（2.7）代入，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|A|^2=&\Delta|A|^2-\frac{1}{2}\langle\nabla|A|^2,x\rangle\\=&2|\nabla A|^2+2A_{ij}\Big[\frac{1}{2}A_{ij}+(S-H)A_{ik}A_{jk}+\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle\nabla_iA_{jk}+\nabla_i\nabla_jS\Big]+2H\mathrm{tr}(A^3)-2|A|^4-\frac{1}{2}\langle\nabla|A|^2,x\rangle\\=&2|\nabla A|^2+2|A|^2(\frac{1}{2}-|A|^2)+2S\mathrm{tr}(A^3)+2A_{ij}\nabla_i\nabla_jS\end{aligned}$$

这表明（2.8）。

我们也可以将（14）与 g^{ij} 收缩，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}H =&g^{ij}\Big[\frac{1}{2}A_{ij}+(S-H)A_{ik}A_{jk}+\frac{1}{2}\langle x,e_k\rangle\nabla_i A_{jk}+\nabla_i\nabla_j S\Big]-\frac{1}{2}\langle x,\nabla H\rangle\\ =&\frac{1}{2}H+(S-H)|A|^2+\Delta S\end{aligned}$$

即2.9)。 ■

备注 在下一小节中，我们将利用本小节中建立的几何关系，计算一些几何量的演化。然而， $\mathcal{L}$ 的独特用途并不止于此，其自伴性对于建立对能量泛函演化所需的控制至关重要。

2.3. 几何量的演化。 在本小节中，我们将运用迄今为止的计算，以本文后续推导最有利的形式，计算一族按（2.1）运动的超曲面的关键几何量的演化方程。对我们而言，关键是尽可能多地用 S 及其协变导数$\nabla^l S$来表示这些量，因为在后文中这些量都会收敛到 0，当 $t\to\infty$。

2.3.1. 正规化引理。 我们将证明一个简短的预备引理，称之为正规化引理，它使我们能够轻松地将关于（1.1）的标量几何量的时间演化，转换为关于（2.1）的标量几何量的时间演化。

引理 2.3.（正规化引理）若 $\varphi(p,t)$ 是超曲面 M 的一族光滑嵌入，并按照 (1.1) 演化，且存在定义在 M 上的函数 $f(p,t)$，以及一族光滑微分同胚 $\psi(p,t)$，使得 $\varphi(\psi(p,t)\ t)$ 是一族按 (2.1) 演化的光滑嵌入，其中

$$D_p\varphi(\psi(p,t),t)(\frac{\partial\psi}{\partial t}(p,t))=-\frac{\varphi(\psi(p,t),t)^T}{2}, \tag{2.11}$$

then

$$\frac{d}{dt}f(\psi(p,t),t)=\frac{\partial}{\partial t}f(\psi(p,t),t)-\frac{1}{2}\langle x,\nabla f\rangle.$$

证明：直接计算f（ψ（p， t） t）即可得到其全导数。注意，(2.11) 定义了微分同胚，借此流 (1.1) 和 (2.1) 等价。■

2.3.2. 演化方程。现在我们可以证明以下引理。

引理 2.4. 以下计算对任意一族超曲面 $M_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$按 (2.1)运动时均成立

$$\frac{\partial}{\partial t}A_{ij}=\mathcal{L}A_{ij}+(|A|^2-\frac{1}{2})A_{ij}-2SA_{ik}A_{jk} \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}|A|^2=2A_{ij}\nabla_i\nabla_j S+2Str(A^3) \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}S=\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu=-S^2e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu \tag{2.15}$$

证明： 方程 (2.6) 可与 (2.8) 结合，计算得

$$\frac{\partial}{\partial t}A_{ij} = \nabla_i\nabla_j H - \frac{1}{2}A_{ij} - (S-H)A_{ik}A_{jk} - \frac{1}{2}\langle x, e_k\rangle\nabla_i A_{jk} - SA_{jl}A_{il}$$

根据 Simon 恒等式

$$\nabla_i\nabla_j H = \Delta A_{ij} + |A|^2 A_{ij} - HA_{il}A_{lj},$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}A_{ij} =&\Delta A_{ij} + (|A|^2 - \frac{1}{2})A_{ij} - \frac{1}{2}\langle x, e_k\rangle\nabla_k A_{ij} - 2SA_{ik}A_{jk}\\ =&\mathcal{L}A_{ij} + (|A|^2 - \frac{1}{2})A_{ij} - 2SA_{ik}A_{jk},\end{aligned}$$

即2.12。

关于重标度平均曲率流的标准计算可参见相关文献。对于按（1.1）运动的超曲面族，我们有

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = -|A|^2 + \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4$$

例如，参见 [11], 结合（2.8）和 Simon 恒等式，我们可以计算得到

$$\begin{aligned}2A_{ij}\nabla_i\nabla_j S =&2A_{ij}\nabla_i\nabla_j H - |A|^2 - 2(S-H)tr(A^3) - \frac{1}{2}\langle x, \nabla|A|^2\rangle\\ =&2A_{ij}\Delta A_{ij} + 2|A|^4 - |A|^2 - 2Str(A^3) - \frac{1}{2}\langle x, \nabla|A|^2\rangle\\ =&\frac{d}{dt}|A|^2 - 2Str(A^3) - \frac{1}{2}\langle x, \nabla|A|^2\rangle,\end{aligned}$$

其中在上述方程 $\frac{d}{dt}|A|^2$ 中，所用的是方程（1.3）对应的重标度平均曲率，而非标准法向重标度平均曲率流（2.1）。我们将正规化引理应用于该方程，并计算得出，对于一族按（2.1）运动的超曲面

$$\frac{d}{dt}|A|^2 =2A_{ij}\nabla_i\nabla_j S + 2Str(A^3)$$

即（2.13）。

关于重标度平均曲率流，可以再次参阅标准计算；对于一族按（1.3）运动的超曲面，我们有

$$\frac{d}{dt}H = -\frac{1}{2}H + \Delta H + H|A|^2$$

例如参见 [11]。我们将其与 (11) 和 Simon 恒等式结合，计算得到

$$\begin{aligned}\Delta S =&g^{ij}\nabla_i\nabla_j S\\ =&g^{ij}\Big[\nabla_i\nabla_j H - \frac{1}{2}A_{ij} - (S-H)A_{ik}A_{jk} - \frac{1}{2}\langle x, e_k\rangle\nabla_i A_{jk}\Big]\\ =&-\frac{1}{2}H - (S-H)|A|^2 - \frac{1}{2}\langle x, \nabla H\rangle\\ &+ g^{ij}\Big[\Delta A_{ij} + |A|^2 A_{ij} - HA_{il}A_{lj}\Big]\\ =&-\frac{1}{2}H - (S-H)|A|^2 - \frac{1}{2}\langle x, \nabla H\rangle\\ &+ \Delta H + |A|^2 H - H|A|^2\\ =&\frac{d}{dt}H - \frac{1}{2}\langle x, \nabla H\rangle - S|A|^2,\end{aligned}$$

这里我们再次指的是 $\frac{d}{dt}H$ 相对于重标度平均曲率流（1.3）。我们将引理 2.3 应用于这个方程，计算得到：对于一族由（2.1）运动的超曲面，我们有

$$\frac{d}{dt}H = \Delta S + |A|^2 S.$$

（2.1）与（2.5）合并可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{x\cdot\nu}{2} = \frac{S}{2} - \langle\frac{x}{2}, \nabla S\rangle.$$

合并前两步计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}S =& \frac{\partial}{\partial t}[H + \frac{x\cdot\nu}{2}]\\ =& \Delta S + |A|^2 S + \frac{S}{2} - \langle\frac{x}{2}, \nabla S\rangle\\ =& \mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S,\end{aligned}$$

即（2.14）。

利用测度 $d\mu$ 变化率的标准公式，我们计算得

$$\frac{d}{dt}d\mu = \frac{1}{2}g^{ij}\frac{d}{dt}g_{ij}d\mu = -SHd\mu.$$

由此可计算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu =& (-SH)e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu + \frac{\partial}{\partial t}[e^{-\frac{|x|^2}{4}}]d\mu\\ =& (-SH - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}[\langle x, x\rangle])e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu\\ =& (-SH - \frac{1}{2}\langle H\nu + \frac{x^\perp}{2}, x\rangle)e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu\\ =& (-SH - \frac{1}{2}S\langle\nu, x\rangle)e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu\\ =& -S^2e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu,\end{aligned}$$

即（2.15）。 ■

2.4. 二阶导数。接下来我们还需要计算 S 的二阶导数，因为这对于计算能量泛函 $E(t)$ 的二阶导数是必要的，而这又是分析能量泛函所必需的。

引理 2.5。 对于一族超曲面 $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 按 (2.1) 运动，有

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}S =& 2SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S + 2A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S - H|\nabla S|^2 + Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H\\ &+ S(2A_{ij}\nabla_i\nabla_j S + 2Str(A^3))\\ &+ \mathcal{L}\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big] + (|A|^2 + \frac{1}{2})\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big]\end{aligned} \tag{2.16}$$

证明： 我们在上一小节的方程（2.14）中看到，

$$\frac{d}{dt}S = \mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S,$$

因此，要计算 $\frac{d^2}{dt^2}S$，除 $\frac{d}{dt}\Delta S$ 外，我们所需的条件都已具备。因此，我们计算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Delta S =&\frac{\partial}{\partial t}\Big[g^{ij}\nabla_i\nabla_j S\Big]\\ =&\frac{\partial}{\partial t}\Big[g^{ij}\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}S-\Gamma_{ij}^k\nabla_k S\big)\Big]\\ =&\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}S-\Gamma_{ij}^k\nabla_k S\big)\\ &+\Delta\frac{\partial}{\partial t}S\\ &-g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}^k\nabla_k S.\end{aligned}$$

利用引理 2.1、方程（2.3）、（2.14）、Simon 恒等式、Codazzi 方程以及某点处的法坐标，我们计算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Delta S =&\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\big(\nabla_i\nabla_j S\big)+\Delta\frac{\partial}{\partial t}S-g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}^k\nabla_k S\\ =&2SA^{ij}\nabla_i\nabla_j S\\ &+\Delta\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]\\ &+g^{ij}g^{kl}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\big(A_{il}S\big)+\frac{\partial}{\partial x_i}\big(A_{jl}S\big)-\frac{\partial}{\partial x_l}\big(A_{ij}S\big)\Big]\nabla_k S\\ =&2SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S\\ &+\Delta\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]\\ &+A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S+A^{ik}\nabla_i S\nabla_k S-H|\nabla S|^2\\ &+2Sg^{ij}\nabla_j A_{il}\nabla_l S-Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H\\ =&2SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S+2A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S\\ &-H|\nabla S|^2+Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H\\ &+\Delta\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big].\end{aligned}\tag{2.17}$$

计算出（2.17）后，我们可以将其代入，计算 $\frac{d^2}{dt^2}S$ 如下

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big] =&\frac{\partial}{\partial t}\Delta S-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle x,\nabla S\rangle+S\frac{\partial}{\partial t}|A|^2+(|A|^2+\frac{1}{2})\frac{\partial}{\partial t}S\\
=&2SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S+2A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S-H|\nabla S|^2+Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H\\
&+\Delta\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle x,\nabla S\rangle\\
&+S(2A_{ij}\nabla_i\nabla_j S+2S\mathrm{tr}(A^3))\\
&+(|A|^2+\frac{1}{2})\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]\\
=&2SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S+2A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S-H|\nabla S|^2+Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H\\
&+S(2A_{ij}\nabla_i\nabla_j S+2S\mathrm{tr}(A^3))\\
&+\mathcal{L}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]+(|A|^2+\frac{1}{2})\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]
\end{aligned}
$$

这就是（2.16）。 ■

3. Energy Functional

本节将介绍我们的能量泛函，并对其进行分析，以控制其在流下的长期行为（2.1）。

定义 3.1。对于一族超曲面 $M_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$，我们通过以下公式定义能量泛函 $E(t)$

$$
E(t)=\int_{M_t}S^2e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu. \tag{3.1}
$$

人们可能会认出，这是重标度 Huisken 单调性公式 (3) 右端的相反数，也就是说，我们可以写成

$$
\int_{M_t}e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu_t-\int_{M_s}e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu_s=\int_t^s E(\xi)d\xi, \tag{3.2}
$$

但从某种意义上说，它也具有物理含义：将 S 视为（2.1）的“速度”，将 $e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu$ 视为“权重”。

3.1. 能量泛函的演化。 本节继续假设 M_t，或者更准确地说， $\varphi(M,t)$ 是一族光滑超曲面，按照法向重标度平均曲率流（2.1）演化。下面我们计算$E(t)$ 的演化方程。第 2 节已经为我们完成了大部分艰难工作。

由于这一量　　经常出现，为了简洁起见，我们将经常把加权测度记作 a　　s

$$
d\tilde{\mu}=e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu
$$

以便使我们的计算更加简洁。

引理 3.2. 对于一族超曲面 $M_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 沿法向重标度平均曲率流 (2.1)运动时，有

$$
\frac{\partial}{\partial t}E(t)=-\int S^4d\tilde{\mu}+2\int S\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu} \tag{3.3}
$$

证明：根据 $E(t)$ 的定义，我们直接计算得到

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t)=2\int_{M_t}S\frac{\partial}{\partial t}Se^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu+\int_{M_t}S^2\frac{\partial}{\partial t}[e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu]$$

并利用 (2.14) 代入 $\frac{\partial}{\partial t}S$并利用 (2.15) 代入 $\frac{\partial}{\partial t}[e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu]$。我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t)=-\int S^4d\tilde{\mu}+2\int S\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}$$

由此得到 (3.3)。 ■

我们还希望计算能量泛函的二阶导数，具体见下面的引理。

引理 3.3。对于一族超曲面 $M_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 沿法向重标度平均曲率流 (2.1)运动，有

$$\begin{aligned}\ddot{E}(t)=&\int\Big[-S^3+2\Big(\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big)\Big]^2d\tilde{\mu}\\&-2\int S^3\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}+2\int S\Big[4SA_{ij}\nabla_i\nabla_jS+Sg^{kl}\nabla_lS\nabla_kH+2S^2tr(A^3)\Big]d\tilde{\mu}\\&+2\int S\Big[2A^{jk}\nabla_jS\nabla_kS-H|\nabla S|^2\Big]d\tilde{\mu}\end{aligned}\tag{3.4}$$

证明：我们先重新考察方程 (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t)=-\int S^4d\tilde{\mu}+2\int S\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}$$

由此以及 (2.14)、(2.15)，我们得到第一个展开式

$$\begin{aligned}\ddot{E}(t)=&\int S^6d\tilde{\mu}-4\int S^3\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}\\&-2\int S^3\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}\\&+2\int\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]^2d\tilde{\mu}\\&+2\int S\frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}.\end{aligned}$$

在此我们回顾方程（2.16），并将其改写为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]=&2SA_{ij}\nabla_i\nabla_jS+2A^{jk}\nabla_jS\nabla_kS-H|\nabla S|^2+Sg^{kl}\nabla_lS\nabla_kH\\&+S(2A_{ij}\nabla_i\nabla_jS+2S\mathrm{tr}(A^3))\\&+\mathcal{L}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]+(|A|^2+\frac{1}{2})\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big],\end{aligned}$$

我们将利用（2.16）来改写

$$\begin{aligned}\int S\frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}=&\int S\Big[\mathcal{L}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]+(|A|^2+\frac{1}{2})\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]\Big]d\tilde{\mu}\\&+\int S^2(2A_{ij}\nabla_i\nabla_jS+2S\mathrm{tr}(A^3))d\tilde{\mu}\\&+\int S\Big[2SA_{ij}\nabla_i\nabla_jS+2A^{jk}\nabla_jS\nabla_kS-H|\nabla S|^2+Sg^{kl}\nabla_lS\nabla_kH\Big]d\tilde{\mu}.\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ 的自伴性使我们可以写出

$$\int S\Big(\mathcal{L}\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]+(|A|^2+\frac{1}{2})\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]\Big)d\tilde{\mu}=\int\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]^2d\tilde{\mu}.$$

结合目前为止的计算可得

$$\begin{aligned}\ddot{E}(t)=&4\int\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]^2d\tilde{\mu}\\&+2\int S\Big[4SA_{ij}\nabla_i\nabla_jS+Sg^{kl}\nabla_lS\nabla_kH+2S^2\mathrm{tr}(A^3)\Big]d\tilde{\mu}\\&+2\int S\Big[2A^{jk}\nabla_jS\nabla_kS-H|\nabla S|^2\Big]d\tilde{\mu}\\&+\int S^6d\tilde{\mu}-6\int S^3\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}\\=&\int S^6d\tilde{\mu}-6\int S^3\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}+4\int\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]^2d\tilde{\mu}\\&+2\int S\Big[4SA_{ij}\nabla_i\nabla_jS+Sg^{kl}\nabla_lS\nabla_kH+2S^2\mathrm{tr}(A^3)\Big]d\tilde{\mu}\\&+2\int S\Big[2A^{jk}\nabla_jS\nabla_kS-H|\nabla S|^2\Big]d\tilde{\mu}\\=&\int\Big[-S^3+2\Big(\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big)\Big]^2d\tilde{\mu}\\&-2\int S^3\Big[\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big]d\tilde{\mu}+2\int S\Big[4SA_{ij}\nabla_i\nabla_jS+Sg^{kl}\nabla_lS\nabla_kH+2S^2\mathrm{tr}(A^3)\Big]d\tilde{\mu}\\&+2\int S\Big[2A^{jk}\nabla_jS\nabla_kS-H|\nabla S|^2\Big]d\tilde{\mu}\end{aligned}$$

即（3.4）。 ■

在下一节中，我们将定义狄利克雷-爱因斯坦商，并探讨它对能量泛函长期行为的意义。

4. Dirichlet-Einstein Quotient

在本节中，我们引入狄利克雷-爱因斯坦商，并分析它随时间的演化，以期更好地理解2.1的长期行为。在1 中，我们已阐述狄利克雷-爱因斯坦商的定义动机。回顾一下，对于一族沿法向重标度平均曲率流2.1或重标度平均曲率流1.3运动的超曲面（它不是收缩子），我们将狄利克雷-爱因斯坦商 $N(t$定义为以下公式

$$N(t)=\frac{\dot{E}(t)}{E(t)}=\frac{d}{dt}\ln(E(t)).\tag{4.1}$$

4.1. 狄利克雷-爱因斯坦商的演化。本小节中，我们研究狄利克雷-爱因斯坦商随时间的演化，并证明以下引理。

引理 **4.1**。 对于一族超曲面 $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 按法向重标度平均曲率流 (2.1)运动，按 (4.1)定义的 **N(t)** 满足演化方程

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) =& \\ &\frac{\int S^2 d\tilde{\mu} \int \Big[-S^3 + 2\Big(\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big)\Big]^2 d\tilde{\mu} - \Big[\int S\Big[-S^3 + 2\Big(\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big)\Big] d\tilde{\mu}\Big]^2}{E(t)^2} \\ &+\frac{1}{E(t)}\Big[-2\int S^3\Big(\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big) d\tilde{\mu} + 2\int S\Big(4SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S + Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H + 2S^2 tr(A^3)\Big) d\tilde{\mu} \\ &+\int S^2\Big(\langle\nabla H, \nabla S\rangle + H\mathcal{L}S\Big) d\tilde{\mu} - 2\int S^2\Big(\nabla_j A^{jk}\nabla_k S + A^{jk}\nabla_j\nabla_k S - 2\frac{x_j}{2}A^{jk}\nabla_k S\Big) d\tilde{\mu}\Big]\end{aligned} \tag{4.2}$$

对所有 t 均成立。

证明：我们先进行显然的计算

$$\dot{N} = \frac{\ddot{E}E - \dot{E}^2}{E^2}$$

这可以直接根据 $N(t)$ 的定义计算得出。

Th这一计算使我们可以利用方程 (3.3) 和 (3.4) 进行计算，得到

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) = \frac{1}{E^2(t)}\Big[&\int S^2 d\tilde{\mu} \int \Big[-S^3 + 2\Big(\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big)\Big]^2 d\tilde{\mu} \\ &- 2\int S^2 d\tilde{\mu} \int S^3\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big] d\tilde{\mu} \\ &+ 2\int S^2 d\tilde{\mu} \int S\Big[4SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S + Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H + 2S^2\mathrm{tr}(A^3)\Big] d\tilde{\mu} \\ &+ 2\int S^2 d\tilde{\mu} \int S\Big[2A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S - H|\nabla S|^2\Big] d\tilde{\mu} \\ &- \Big(\int S^4 d\tilde{\mu} + 2\int S\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big] d\tilde{\mu}\Big)^2\Big].\end{aligned}$$

现在我们将考察其中的一些项。考虑量

$$\int S\Big[2A^{jk}\nabla_j S\nabla_k S - H|\nabla S|^2\Big] d\tilde{\mu}.$$

我们可以逐项进行分部积分，如下所示。我们有

$$\begin{aligned}2\int A^{jk}S\nabla_j S\nabla_k S d\tilde{\mu} &= \int A^{jk}\nabla_j S^2\nabla_k S d\tilde{\mu} \\ &= \int \nabla_j S^2 A^{jk}\nabla_k S e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu \\ &= -\int S^2\Big[\nabla_j A^{jk}\nabla_k S e^{-\frac{|x|^2}{4}} + A^{jk}\nabla_j\nabla_k S e^{-\frac{|x|^2}{4}} + A^{jk}\nabla_k S(-\frac{x_j}{2})e^{-\frac{|x|^2}{4}}\Big] d\mu \\ &= -\int S^2\Big[\nabla_j A^{jk}\nabla_k S + A^{jk}\nabla_j\nabla_k S - \frac{x_j}{2}A^{jk}\nabla_k S\Big] d\tilde{\mu}.\end{aligned}$$

接下来，我们写出

$$
\begin{aligned}
-\int HS|\nabla S|^2 d\tilde{\mu} =& -\frac{1}{2}\int \nabla_j S^2 \big(H\nabla_j S e^{-\frac{|x|^2}{4}}\big) d\mu \\
=& \frac{1}{2}\int S^2\Big[\langle \nabla H, \nabla S\rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} + H\Delta S e^{-\frac{|x|^2}{4}} - H\frac{x_j}{2}\nabla_j S e^{-\frac{|x|^2}{4}}\Big] d\mu \\
=& \frac{1}{2}\int S^2\Big[\langle \nabla H, \nabla S\rangle + H\mathcal{L}S\Big] d\tilde{\mu}.
\end{aligned}
$$

结合这些计算可得

$$
\begin{aligned}
\dot{N}(t) = \frac{1}{E^2(t)}\Big[&\int S^2 d\tilde{\mu}\int \Big[-S^3 + 2\Big(\mathcal{L}S + (|A|^2+\frac{1}{2})S\Big)\Big]^2 d\tilde{\mu} \\
&- 2\int S^2 d\tilde{\mu}\int S^3\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2+\frac{1}{2})S\Big] d\tilde{\mu} \\
&+ 2\int S^2 d\tilde{\mu}\int S\Big[4SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S + Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H + 2S^2\mathrm{tr}(A^3)\Big] d\tilde{\mu} \\
&- 2\int S^2 d\tilde{\mu}\int S^2\Big[\nabla_j A^{jk}\nabla_k S + A^{jk}\nabla_j\nabla_k S - \frac{x_j}{2}A^{jk}\nabla_k S\Big] d\tilde{\mu} \\
&+ \int S^2 d\tilde{\mu}\int S^2\Big[\langle \nabla H, \nabla S\rangle + H\mathcal{L}S\Big] d\tilde{\mu} \\
&- \Big(\int S^4 d\tilde{\mu} + 2\int S\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2+\frac{1}{2})S\Big] d\tilde{\mu}\Big)^2\Big]
\end{aligned}
$$

即式（4.2）。 ■

计算出狄利克雷-爱因斯坦商的演化后，我们现在可以按照引言（第 1 节）中制定的计划，开始对其进行估计。

4.2. N中各项的阶数。本小节证明一个关于 N 的估计，它将成为我们证明的关键。我们将用 S的各种协变导数 $\nabla^l S$ 来估计 $\dot{N}$。当我们趋近于一个收缩子时，由于在收缩子上 $S\equiv 0$，显然在 M_t上有 $\nabla^l S\to 0$。我们希望随后能证明如下形式的某个估计：

$$
\int_{T_0}^{\infty} ||\nabla^{(l)} S(p,t)||_{\infty, M_t} \le C_l(\Sigma, \int_{M_0} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu - \int_{\Sigma} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu).
$$

这样的估计将使我们能够控制

$$
N(t) = N(T_0) + \int_{T_0}^{t} \dot{N}(s) ds
$$

当 $t\to\infty$时。

根据我们上述的工作，下面的推论可直接得出。

推论4.2。 对于一族 $M_t\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 沿法向重标度平均曲率流 (2.1)演化的超曲面，若 $N(t)$ 是狄利克雷-爱因斯坦商，则有

$$
\dot{N}(t) \ge -C(||S||_\infty + ||\nabla S||_\infty + ||\nabla^2 S||_\infty) \tag{4.3}
$$

其中 $C = C(S, |A|, |\nabla A|, H, \nabla H, x)$。

证明： 逐项考察方程（4.2）右端的各项。我们有

$$
-\frac{1}{E(t)}\int S^3\Big(\mathcal{L}S + (|A|^2+\frac{1}{2})S\Big) d\tilde{\mu} \ge -\Big(\|S\mathcal{L}S\|_\infty + \||A|^2+\frac{1}{2}\|_\infty \|S^2\|_\infty\Big)
$$

因此，根据 $|A|^2$ 和 $|\nabla^l S|$ 沿流的一致有界性，这一项有适当的界。接下来我们有

$$\frac{1}{E(t)}\int S\Big(4SA_{ij}\nabla_i\nabla_j S+Sg^{kl}\nabla_l S\nabla_k H+2S^2\mathrm{tr}(A^3)\Big)d\tilde{\mu}\geq$$
$$-\Big(4(\|A\|_\infty\|\nabla^2 S\|_\infty+\|\nabla H\|_\infty\|\nabla S\|_\infty+2\|A^3\|_\infty\|S^2\|_\infty\Big)$$

这再次表明，该项给出了（4.3）中所声称的估计。我们还有

$$\frac{1}{E(t)}\int S^2\Big(\langle\nabla H,\nabla S\rangle+H\mathcal{L}S\Big)d\tilde{\mu}\geq-\Big(\|\nabla H\|_\infty\|\nabla S\|_\infty+\|H\|_\infty(\|\frac{x}{2}\|_\infty\|\nabla S\|_\infty+\|\nabla^2 S\|_\infty)\Big)$$

由于 H 也是一个几何量，且我们对其有一致控制（ $t\to\infty$），同时 x 沿流保持有界，因此它有适当的界。此外，

$$-\frac{1}{E(t)}\int S^2\Big(\nabla_j A^{jk}\nabla_k S+A^{jk}\nabla_j\nabla_k S-2\frac{x_j}{2}A^{jk}\nabla_k S\Big)d\tilde{\mu}\geq$$
$$-\Big(\|\nabla A\|_\infty\|\nabla S\|_\infty+\|A\|_\infty\|\nabla^2 S\|_\infty+\|x\|_\infty\|A\|_\infty\|\nabla S\|_\infty\Big)$$

基于前文讨论的所有理由，它再次具有适当的界。

最后，我们对 S 和 $-S^3+2\Big(\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big)$ 使用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\int S^2 d\tilde{\mu}\int\Big[-S^3+2\Big(\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big)\Big]^2 d\tilde{\mu}-\Big[\int S\Big[-S^3+2\Big(\mathcal{L}S+(|A|^2+\frac{1}{2})S\Big)\Big]d\tilde{\mu}\Big]^2\geq 0.$$

综合上述结果可得

$$\dot{N}(t)\geq -C(S,|A|,|\nabla A|,H,\nabla H,x)(||S||_\infty+||\nabla S||_\infty+||\nabla^2 S||_\infty)$$

这证明了（4.3）。 ■

5. 控制 $\nabla^l S$

为了使用（4.3），我们需要更好地控制 S 及其协变导数。以下命题将对此加以处理。

命题 5.1. 设 Σ 为一个紧致缩子。那么，若 M_t 是由法向重标度平均曲率流 (2.1) 运动的一族超曲面，且满足

$$\Omega(M_t)\geq\Omega(\Sigma)$$

对所有 $t\geq 0$ 均成立，那么我们可以找到 δ 和 T_0，使得若

$$dist(M_0,\Sigma)<\delta, \tag{5.1}$$

那么对于 $t\geq T_0$，我们可以将 M_t 写成 Σ 上 $v(p,t)$ 的法向图，并且使得对每个 $l\geq 0$,

$$\int_{T_0}^{\infty}||\nabla^{(l)}S(p,t)||_{\infty,M_t}\,dt\leq C_l(\Sigma,\int_{M_0}e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu-\int_\Sigma e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu). \tag{5.2}$$

证明：首先，假设 $\varphi:\ M\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是由（2.1）运动的法向重标度平均曲率流。那么我们可以找到一族微分同胚 $\psi(t):\ M\to M$ 使得对每个 t都有

$$\frac{d}{dt}\varphi(\psi(t)(p),t)=H(\psi(t)(p),t)\nu(\psi(t)(p),t)+\frac{\varphi(\psi(t)(p),t)}{2}$$

换言之，$\tilde{\varphi}(p,\ t)=\varphi(\psi(t)(p)$ t按照（原始的）重标度平均曲率流运动~(1.3)。我们将这族按照（1.3）运动的超曲面记为 M_t，并注意到对于~每个 t，都有 $M_t=\psi(t)(M_t)$，也就是说，我们所研究的几何对象是相同的。由于我们

按照（1.3）运动，如果定义新变量 $\tau = -e^{-t}$，以及 $\bar{\varphi}$： $M \times [-1,0) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 由方程

$$\bar{\varphi}(\cdot,\tau) = e^{-\frac{t}{2}}\tilde{\varphi}(\cdot,t),$$

那么 $\bar{\varphi}(M_\tau)$ 按平均曲率流演化（1.1）。我们将这族超曲面记为 M_τ，并且有 $M_{-1} = M_0 = M_0$，其中视为超曲面。另请注意， Σ 是（2.1）的平稳解，而平均曲率流 $\Sigma_\tau = \sqrt{-\tau}\Sigma$在相差切向微分同胚的意义下满足（1.1）。根据我们的假设，有

$$\Omega(M_0) \geq \Omega(\Sigma),$$

因此，由平均曲率流对其初始条件的依赖连续性，我们可以找到 $\tau_2 < 0$以及某个 δ_0，使得若 $dist(M_0,\Sigma) < \delta_0$，则流 $(M_\tau)_{\tau\in(-1,\tau_2)}$ 在测度意义下与流 Σ_τ足够接近。因此，根据 [13] 中的定理 1.1，重标度流（1.3）的解 M_t可写为函数 v 在 Σ 上的法向图，其中 $\frac{-1+\tau_2}{2} < \tau < 0$。于是，对于所有满足 $\log(-\frac{-1+\tau_2}{2}) =: T_0$ 的情形，我们可将 $\tilde{M}_t$ 写为函数 $v(p,t)$ 在 Σ 上的法向图。

再次，利用连续依赖性，我们也可以将 δ_0 选得足够小，使得

$$\|v(T_0)\|_{C^{2,\alpha}} < \sigma_0$$

其中 σ_0和 $\theta \in (\frac{1}{2},1)$ 如 [13],所示，且满足：若 v 是 $C^{2,\alpha}$ 的一个截面，其中 $T^\perp\Sigma$ 满足 $\|v\|_{C^{2,\alpha}} < \sigma_0$，则

$$||\nabla\Omega(v)||_{L^2(\Sigma)} \geq |\Omega(v) - \Omega(0)|^\theta. \tag{5.3}$$

现在，对于 $t > T_0$，我们考虑由下式定义的量 $Q(t)$

$$\tilde{Q}(t) = \Omega(\tilde{M}_t) - \Omega(\Sigma).$$

显然，由 Huisken 单调性公式， $Q(t)$ 单调递减，且 $Q(t) \geq 0$。结合 $Q(t)$ 的单调性可知，若 $Q(t_0) = 0$，则必有 $Q(t) \equiv 0$ 对所有 $t \geq t_0$ 均成立；当然，这意味着

$$\frac{d}{dt}\Omega(\tilde{M}_t) \equiv 0$$

对于 $t \geq t_0$，这意味着 M_t 是一个 $t \geq t_0$ 收缩子，由 Huisken 单调性公式可知。事实上，我们可以应用 [8] 中的反向唯一性结果 M_t，证明 M_t 在所有时间上都是一个收缩子。显然，在这种情况下，由于任何收缩子上都有 $\nabla^l S \equiv 0$，所以 (5.2) 自动成立。

因此，我们现在考虑以下情形： $Q(t) > 0$ 对所有 $t > T_0$均成立。我们采用与[10]类似的方法。固定 $\beta \in (2-\frac{1}{\theta},1)$，可得 $0 < (2-\beta)\theta < 1$，因此直接计算可得

$$-\frac{d}{dt}\tilde{Q}^{1-(2-\beta)\theta} = (1-(2-\beta)\theta)\tilde{Q}^{-(2-\beta)\theta}\frac{d\tilde{Q}}{dt}$$

由 Huisken 单调性公式可得

$$-\frac{d}{dt}\tilde{Q}^{1-(2-\beta)\theta} = (1-(2-\beta)\theta)||S||^2_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu_{M_t})}\tilde{Q}^{-(2-\beta)\theta}.$$

Lojasiewicz不等式（5.3）允许我们写成

$$\tilde{Q}^{-(2-\beta)\theta}||S||^{2-\beta}_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu_{M_t})} = \tilde{Q}^{-(2-\beta)\theta}||\nabla\Omega(M_t)||^{2-\beta}_{L^2(d\mu_{M_t})} \geq 1,$$

这意味着

$$-\frac{d}{dt}\tilde{Q}^{1-(2-\beta)\theta} \geq C_0^{-1}||S||^\beta_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu_{M_t})}$$

对于某个 $C_0 = C_0(\beta,\theta)$。

˜此处我们应当指出，假设我们的超曲面族按重标度平均曲率流 (2) 演化，那么我们对 $Q(t)$ 所做的每一项计算，对 $Q(t)$ 也同样成立，只要我们将 $Q(t)$ 定义为

$$Q(t) = \Omega(M_t) - \Omega(\Sigma)$$

其中 M_t 是通过法向重标度平均曲率流（2.1）运动的相应超曲面族，因为

$$\Omega(M_t) = \Omega(\psi(t)(M_t))$$

对于所有 t 以及任意切向微分同胚族 ψ。因此，从现在起，我们将 $Q(t)$˜ 与 $Q(t)$ 互换使用，并用 $Q(t)$ 表示两者。

因此，对于 $0 < a$、$s < \infty$，我们可以写成

$$\int_a^s ||\partial_t \varphi(p,t)||^{\beta}_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu_{M_t})} dt \leq C(C_0, \beta, \theta, C_L)\Big[Q(a)^{\gamma} - Q(s)^{\gamma}\Big] \tag{5.4}$$

对于 $\gamma = 1 - (2-\beta)\theta$。

重标度平均曲率流（2）的导数估计显然在切向微分同胚下保持不变，因此我们可以写成

$$\|\nabla^l S\|_{\infty, M_t} \leq K_l$$

在 M_t 上一致成立。现在我们将探讨不等式（5.4）的含义。

现在回到眼前的问题，我们将根据 β 与 $1-\beta$ 之间的关系，把证明分成两种情形。

情形 1: $\beta < 1 - \beta$

在此情形下，对于任意 p，我们可以选择 $N = N(p)$，使得

$$\frac{p}{N} \leq \beta$$

因此，当然有 $1 - \frac{p}{N} \geq 1 - \beta$。我们可以利用插值不等式写出，对于 $0 \leq q \leq p$，有

$$\int |\nabla^q(S)|^2 d\mu \leq C\Big[\int |\nabla^N S|^2 d\mu\Big]^{\frac{q}{N}} \Big[\int |S|^2 d\mu\Big]^{1-\frac{q}{N}} \tag{5.5}$$

or

$$\|\nabla^q S\| \leq C \|\nabla^N S\|^{\frac{q}{N}} \|S\|^{1-\frac{q}{N}}.$$

接下来我们考虑量

$$s := 1 - \frac{q}{N} - (1-\beta) = \beta - \frac{q}{N},$$

根据我们对 N 的选择，这保证了 $s \geq 0$。

显然，根据 s 的定义，

$$\|S\|^{1-\frac{q}{N}} = \|S\|^{1-\beta} \|S\|^s.$$

由于 $\|S\| \leq \|S\|_{L^{2,\ N}}$，$\|\nabla^N S\| \leq \|S\|_{L^{2,\ N}}$，且 $s + \frac{q}{N} = \beta$，我们可以写成

$$\|\nabla^q S\| \leq C \|S\|^{1-\beta} \|S\|^{\beta}_{L^{2,N}}$$

对每个 $q \leq p$ 都成立。因此，我们可以找到 $C'(p, m)$，使得我们可以写成

$$\|S\|_{L^{2,p}} \leq C' \|S\|^{1-\beta} \|S\|^{\beta}_{L^{2,N}}.$$

由于 $\beta < 1 - \beta$ 和 $\|S\| \leq \|S\|_{L^{2,\ N}}$，我们可以写成

$$\|S\|_{L^{2,p}} \leq C' \|S\|^{\beta} \|S\|^{1-\beta}_{L^{2,N}}.$$

关于上面的内容我还有个疑问：你们如何使用 $\beta < 1-\beta$? 按目前的写法，这并不成立。我不知道你们之后打算如何使用它。 情况 2： $1-\beta \le \beta$

在这种情况下，给定任意 p，我们可以选择 $N = N(p)$，使得

$$\frac{p}{N} \le 1-\beta$$

因此，当然有 $1-\frac{p}{N} \ge \beta$。

接下来我们考虑量

$$s := 1 - \frac{q}{N} - \beta = (1-\beta) - \frac{q}{N},$$

根据我们对 N 的选择，可保证 $s \ge 0$。

根据 s 的定义，显然有

$$\|S\|^{1-\frac{q}{N}} = \|S\|^{\beta}\|S\|^{s}.$$

由于 $\|S\| \le \|S\|_{L^{2,\ N}}$， $\|\nabla^N S\| \le \|S\|_{L^{2,\ N}}$，且 $s + \frac{q}{N} = 1-\beta$，由插值不等式（5.5），与前一种情况类似，我们有

$$\|\nabla^q S\| \le C\|S\|^{\beta}\|S\|^{1-\beta}_{L^{2,N}}$$

对每个 $q \le p$，这使我们能够找到 $C'(p,m)$，从而可以写成

$$\|S\|_{L^{2,p}} \le C'\|S\|^{\beta}\|S\|^{1-\beta}_{L^{2,N}}.$$

因此，无论哪种情况，由于对于每个 l， $|\nabla^l S|$ 都是一致有界的，并且由于 M_0 是紧的，我们可以写成

$$\|S\|_{L^{2,p}} \le C''(\beta,p,\Sigma,M_0)\|S\|^{\beta}_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}})}.$$

索博列夫嵌入定理表明，如果 n 为奇数，则我们有自然嵌入 $W^{k,\ 2} \subset C^{k-\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}}$；如果 n 为偶数，则对于每个 $\gamma \in (0,1)$，我们有自然嵌入 $W^{k,\ 2} \subset C^{k-1-\frac{n}{2},\ \gamma}$。鉴于我们有

$$\|S\|_{L^{2,k}} \le C''(\beta,k,\Sigma,M_0)\|S\|^{\beta}_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}})}$$

对于任意 k，我们只需尽可能扩大 k，即可声称，由于索博列夫嵌入定理，我们可以找到一个 C''，使得

$$\|S\|_{C^l} \le C''(\beta,l,n,\Sigma,M_0)\|S\|^{\beta}_{L^2(e^{-\frac{|x|^2}{4}})} \tag{5.6}$$

对于任意 l。

回顾一下，对于 $t > T_0$，我们可以将 M_t 表示为函数 $v(t)$ 在 Σ 上的法向图。对于 $T_0 \le a \le s < \infty$，我们有

$$\|v(s) - v(a)\|_{C^l_\Sigma} \le C(l)\int_a^s \|\partial_t \varphi(p,t)\|_{C^l_\Sigma} dt$$

and

$$\int_a^s \|\partial_t \varphi(p,t)\|_{C^l_\Sigma} dt \le C(l,\Sigma,M_0,C'')\int_a^s \|\partial_t \varphi(p,t)\|_{C^l_{M_t}} dt.$$

回忆一下， $\partial_t \varphi = S\nu$ 所以

$$\|S\nu\|_{C^l} \le \sum_{k=0}^{l}\Big(\sum_{p+q=k}\|\nabla^p S\|_\infty \|\nabla^q \nu\|_\infty\Big) \le C\|S\|_{C^l}$$

其中，由于 C 取有限值，这是因为它取决于 ν 及其协变导数，而后者又取决于第二基本形式的协变导数；这些量沿流均有界。并且由于

$$\|S\|_{C^l} = \|S\|_\infty + \|\nabla S\|_\infty + ... + \|\nabla^l S\|_\infty,$$

我们有，不等式 (32) 与不等式 (34) 结合可得

$$\int_a^s \Big[\|S(t)\|_\infty + \|\nabla S(t)\|_\infty + ... + \|\nabla^l S(t)\|_\infty\Big] dt \leq C(C_0, \beta, \theta, C_L, l, \Sigma, M_0)\Big[Q(a)^\gamma - Q(s)^\gamma\Big] \quad (5.7)$$

而 $Q(t)$ 的单调性使我们可以直接写成

$$\int_a^s \Big[\|S(t)\|_\infty + \|\nabla S(t)\|_\infty + ... + \|\nabla^l S(t)\|_\infty\Big] dt \leq C(C_0, \beta, \theta, C_L, l, \Sigma, M_0)\Big[Q(T_0)^\gamma\Big] \quad (5.8)$$

对所有 $a, s \in [T_0, \infty)$ 均成立；并且，由此代入 $s \to \infty$ 和 $a \to T_0$，可得 (30)，这就完成了命题的证明。
■

6. Rate of convergence

在本节中，我们将证明定理 1.2。我们将采用反证法进行证明。首先证明以下引理，称为速率引理；它涉及以 Σ 为底、将 M_t 表示为 $v(t)$ 的图时，图函数的 $C^{2,\alpha}$ 范数。

引理 6.1. 对每个 $m \geq 0$，若我们有 C'_m，使得对于 $t_i > T_0$

$$||v(\cdot, t_i)||_{C^{2,\alpha}} < C'_m e^{-mt_i},$$

那么我们还可以找到常数 C''_m，使得对于 $t > T'$（其中 T' 是第一个 $t_i > T_0$）

$$\int_{M_{t_i}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu - \int_\Sigma e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu \leq C''_m e^{-mt_i}.$$

证明：假设根据我们的假设，对于每个 $m > 0$，我们都可以找到 C'_m，使得对于 $t > T_0$，有

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}} < C'_m e^{-mt_i}$$

对于所有 t_i。

现在我们将 $\int_{M_{t_i}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu$ 改写为一个积分，正如 Schulze 在 [13]，中所做的那样，将其视为在 Σ 上的积分，具体如下

$$\int_{M_{t_i}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu = \int_\Sigma e^{-\frac{|y+v(y,t_i)\,\nu|^2}{4}} |J|(y, v, \nabla^\Sigma v) d\mu(y)$$

其中 $|J|(y, v, \nabla^\Sigma v)$ 是变换 $y \to y + v(y, t_i)\nu$ 的雅可比行列式。现在我们将 $\int_{M_{t_i}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu - \int_\Sigma e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu$ 改写为

$$\int_\Sigma \Big(e^{-\frac{|y+v(y,t_i)\nu|^2}{4}} |J|(y, v, \nabla^\Sigma v) - e^{-\frac{|y|^2}{4}}\Big) d\mu(y).$$

我们通过如下写法进一步简化这个表达式

$$e^{-\frac{|y+v(y,t_i)\nu|^2}{4}} = e^{-\frac{|y|^2}{4}} \cdot e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}} \cdot e^{-\frac{\langle y, v(y,t_i)\nu\rangle}{2}}$$

然后，我们将关键量 $\int_\Sigma \left(e^{-\frac{|y+v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J|\underline{(y,v,\nabla^\Sigma v)} - e^{-\frac{|y|^2}{4}}\right)d\mu(y)$ 改写为以下形式，并将其拆分开来，将雅可比行列式简记为 $|J|$

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \left(e^{-\frac{|y+v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J|(y,v,\nabla^\Sigma v) - e^{-\frac{|y|^2}{4}}\right)d\mu(y) =& \int_\Sigma \left(e^{-\frac{|y+v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J| - e^{-\frac{|y|^2}{4}}\cdot e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J|\right)d\mu(y)\\
&+\int_\Sigma \left(e^{-\frac{|y|^2}{4}}\cdot e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J| - e^{-\frac{|y|^2}{4}}|J|\right)d\mu(y)\\
&+\int_\Sigma \left(e^{-\frac{|y|^2}{4}}|J| - e^{-\frac{|y|^2}{4}}\right)d\mu(y)\\
=& \int_\Sigma \left(e^{-\frac{\langle y,v(y,t_i)\nu\rangle}{2}} - 1\right)e^{-\frac{|y|^2}{4}}\cdot e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J|d\mu(y)\\
&+\int_\Sigma \left(e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}} - 1\right)e^{-\frac{|y|^2}{4}}|J|d\mu(y)\\
&+\int_\Sigma \left(|J|-1\right)e^{-\frac{|y|^2}{4}}d\mu(y)\\
=:& A+B+D.
\end{aligned}$$

由于我们假设流是紧的，因此知道 y 有界；又因为 $v(y,t_i)$ 很小，存在一个一致常数 C，它可以在各行之间以一致的方式变化，使得

$$\begin{aligned}
A =& \int_\Sigma \left(e^{-\frac{\langle y,v(y,t_i)\nu\rangle}{2}} - 1\right)e^{-\frac{|y|^2}{4}}\cdot e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J|d\mu(y)\\
\le& \int_\Sigma \left|\langle y,v(y,t_i)\nu\rangle\right|e^{-\frac{|y|^2}{4}}\cdot e^{-\frac{|v(y,t_i)\nu|^2}{4}}|J|d\mu(y)\\
\le& C\|v\|_{C_0}\int_\Sigma e^{-\frac{|y|^2}{4}}d\mu(y)
\end{aligned}$$

因为 $|J|$ 有界。我们还有一个一致常数 C，它可以在各行之间一致地变化，使得

$$\begin{aligned}
B =& \int_\Sigma \left(e^{-\frac{|v(y,t_i)|^2}{4}} - 1\right)e^{-\frac{|y|^2}{4}}|J|d\mu(y)\\
\le& \int_\Sigma \frac{|v(y,t_i)|^2}{2}e^{-\frac{|y|^2}{4}}|J|d\mu(y)\\
\le& C\|v\|_{C_0}^2\int_\Sigma e^{-\frac{|y|^2}{4}}d\mu(y)\\
\le& C\|v\|_{C_0}\int_\Sigma e^{-\frac{|y|^2}{4}}d\mu(y)
\end{aligned}$$

这里用到了指数函数的泰勒展开以及 v很小这一条件。最后，我们有 D。我们的雅可比行列式 $|J|$ 是变换 $y\to y+v(y,t_i)\nu(y)$ 的雅可比行列式，其对应矩阵 J 的各项为

$$J_{jk} = \partial_j(y+v(y,t_i)\nu(y))_k = \delta_{jk} + \partial_j v(y,t_i)\nu_k - v(y,t_i)h_{jl}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\right)_k.$$

可以看出，$|J|-1$的每一项都包含 v或其一阶导数（当然也包括有界的第二基本形式的各个分量），因此它也只依赖于 $\|v_{C^1}$。通过写出其对应矩阵的各个分量，我们可以看出，$J-1$ 对 v 及其一阶

导数的依赖是次线性的，因此我们可以写成：

$$\int_{M_{t_i}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu - \int_{\Sigma} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu \leq \tilde{C}\|v\|_{C^{2,\alpha}}$$

˜其中 C 是一个一致常数，仅依赖于流过程中有界的量。 ■

现在我们可以继续证明定理1.2。

定理 *1.2* 的证明。我们先陈述 [13], 中的定理 1.1，其内容如下

令 $\mathcal{M} = (\mu_t)_{t\in(t_1,0)}$ 满足 $t < 0$，并设其为一个积分 n-Brakke 流，使得

i) $(\mu_t)_{t\in(t_1,t_2)}$ 在测度意义下充分接近于 $\mathcal{M}_\Sigma$，其中 $t_1 < t_2 < 0$。

ii) $\int_{M_t} \frac{1}{(-4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mathcal{H}^n \geq \int_{\Sigma} \frac{1}{(-4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mathcal{H}^n$.

˜那么 $\mathcal{M}$ 在 $t \in [(t_1 + t_2)/2, 0)$ 上是光滑流，并且重标度曲面 M_t 可以改写为以 Σ为底的法向图，由法丛的光滑截面 $v(t)$给出，其中 $\|v(t)\|_{C^m(T^\perp\Sigma)}$对所有 $t \in [(t_1+t_2)/2, 0)$ 及所有 $m \in \mathbb{N}$均一致有界。此外，存在一个自相似收缩曲面 Σ'，满足

$$\Sigma' = \mathrm{graph}_\Sigma(v')$$

and

$$\|v(t) - v'\|_{C^m} \leq c_m(\log(-1/t))^{-\alpha_m}$$

对于所有 $m \in \mathbb{N}$，存在某些常数 $c_m > 0$ 和指数 $\alpha_m > 0$。

若 $\tilde{\varphi}\colon M \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个按 (1.3) 运动的重标度平均曲率流，则如前所述，我们定义 $\tau = -e^{-t}$，并且 $\varphi\colon M \times [-1,0) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 通过对 $\varphi(\cdot,\tau) = e^{-\frac{t}{2}}\tilde{\varphi}(\cdot,t)$ 进行重标度，按 (1.1) 运动。在未重标度的流中，根据我们的假设，可以找到某些 $\tau_1, \tau_2 \in [-1,0)$ $(\tau_1 < \tau_2)$，使得我们对平均曲率流 $\varphi\colon M \times [\tau_1,\tau_2) \to \mathbb{R}^{n+k}$ 的限制在测度意义下充分接近由收缩子 Σ 产生的齐次收缩流。因此，我们可以应用 [13], 中的定理 1.1，得到按 (1.3) 运动的解可表示为函数 $v(\cdot,\tau)$ 的法向图，其中 $\frac{\tau_1+\tau_2}{2} < \tau < 0$。

因此，我们可以对所有 $t > -\log(-\frac{\tau_1+\tau_2}{2}) =$定义 $v(\cdot,t)$（我们使用相同的 v，只是改变其时间变量）：T_0 使得我们的原始流 $\tilde{\varphi}$ 可表示为 Σ 上的 $v(\cdot,t)$ 的法向图，对所有 $t > T_0$ 均成立。这就确立了所需的图形性。

现在我们将采用反证法进行证明。假设该定理不成立，也就是说，假设 M_t 是一个重标度平均曲率流，使得对每个 $m > 0$，都有 C'_m，并且当 $t_i > T_0$ 时，有

$$\|v(\cdot,t_i)_{C^{2,\alpha}} < C'_m e^{-mt_i}$$

对每个 i 都成立，但 M_t 从来不是收缩子。

根据引理 3.1 的方程 (23)，我们有

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) =& -\int S^4 d\tilde{\mu} + 2\int S\Big[\mathcal{L}S + (|A|^2 + \frac{1}{2})S\Big] d\tilde{\mu} \\
=& -\int S^4 d\tilde{\mu} - 2\int |\nabla S|^2 d\tilde{\mu} + 2\int (|A|^2 + \frac{1}{2})S^2 d\tilde{\mu} \\
\leq& 2\int (|A|^2 + \frac{1}{2})S^2 d\tilde{\mu} \\
\leq& K(|A|^2)E(t)
\end{aligned}$$

因此，对于 $t > T_0$，我们可以写成

$$E(t) \leq E(T_0)e^{K(t-T_0)}.$$

现在我们回顾一下这个量

$$N(t) = \frac{\dot{E}}{E} = \frac{d}{dt}\ln(E).$$

我们声称能够构造某个 $K' > 0$，使得 $E(t) \geq E(T_0)e^{-K'(t-T_0)}$。为此，我们将证明 $\ln(E(t)) \geq -K'(t-T_0) + \ln(E(T_0))$，具体而言，只需证明对所有 t，都有

$$N(t) \geq -K'$$

即对所有时间，N 都有下界。推论 8.1 告诉我们

$$\dot{N}(t) \geq -C(||S||_\infty + ||\nabla S||_\infty + ||\nabla^2 S||_\infty).$$

接着，我们对 $l = 0$、1、2 这几种情况应用命题 5.1 中的不等式 (33)，得到对所有 t,

$$\begin{aligned} N(t) =& \int_0^t \dot{N}(\xi)d\xi \\ \geq& -C\int_0^\infty (\|S(\xi)_\infty + \|\nabla S(\xi)_\infty + \|\nabla^2 S(\xi)_\infty)d\xi \\ =:& K' > -\infty, \end{aligned} \tag{6.1}$$

由此得到适当的 K'，并可写为

$$E(T_0)e^{-K'(t-T_0)} \leq E(t) \leq E(T_0)e^{K(t-T_0)} \tag{6.2}$$

对所有 $t > T_0$。Huisken 单调性公式给出

$$\frac{d}{dt}\Omega(M_t) = -E(t)$$

因此，我们可以利用不等式 (38) 写出：对 $s \geq t$

$$\begin{aligned} \Omega(M_t) - \Omega(M_s) =& \int_t^s E(\zeta)d\zeta \\ \geq& \int_t^s E(T_0)e^{-K'(\zeta-T_0)}d\zeta \\ =& \frac{E(T_0)}{K'}\left[e^{-K'(t-T_0)} - e^{-K'(s-T_0)}\right]. \end{aligned}$$

将 $s \to \infty$ 推进可得

$$\Omega(M_t) - \Omega(\Sigma) \geq \frac{E(T_0)}{K'}e^{-K'(t-T_0)}. \tag{6.3}$$

我们应用速率引理（引理 6.1），从而得出：对于每个 $m > 0$，还必须存在 C''_m，使得对于 $t_i > T_0$，有

$$\int_{M_{t_i}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu - \int_\Sigma e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\mu \leq C''_m e^{-mt_i} \tag{6.4}$$

对于每个 i。

结合不等式（39）和（40）可得

$$E(T_0) \leq Ce^{(K'-m)t_i}$$

对于每个 m 和 i。由于我们可以任意增大 m 和 i，因此可得必有

$$E(T_0) = 0, \tag{6.5}$$

因此 M_{T_0} 必定是一个收缩子。根据[8], 中证明的平均曲率流反向唯一性结果，我们的流在所有时间上都是收缩子，这显然矛盾。剩下的结论是

要么存在 $C, m > 0$ 使得 $\|v(\cdot, t_i)_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \geq Ce^{-mt_i}$，要么 M_t 是一个通过微分同胚运动的收缩子。 ■

□

References

[1] K. Brakke。《 *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*》，普林斯顿遗产图书馆 [2] T. Colding、W. Minicozzi。《一般平均曲率流 1；一般奇点》，《数学年刊》（1.1） 175 2012 2 755 833 （），第 - 期。- Q. Ding、Y.L. Lin。《自缩子的刚性定理》，《美国数学会汇刊》，第 366, 10 2014 5067 5085 卷第 期（月），第 - 页。- [3] K. Ecker。《 *Regularity Theory for Mean Curvature Flow* 》，Birkhäuser [4] K. Ecker 、 G. Huisken。《整体图的平均曲率演化》。《数学年刊》第二辑，第 130 卷，第 3 期。（1989 年 11 月），第 453–471 页。[5] S. Friedberg、A. Insel、L. Spence。《 *Linear Algebra*》，第 4 版，普伦蒂斯霍尔（2003）[6] R. Hamilton。《正里奇曲率三维流形》，《微分几何杂志》17(1.1)：255–306（1982）。DOI：10 4310 1214436922 。/jdg/ H. Huang。《平均曲率流的反向唯一性》，arXiv：0907 0862 4 。v [7] G. Huisken。《平均曲率流奇点的渐近行为》，《微分几何杂志》 [8] 31 1990 285 299 （），- B. Kotschwar。《Ricci流下的最大收敛速率》，《国际数学研究通知》（ 2022 4, 2484 2512 ）- C. Mantegazza。《 *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*》，Birkhäuser [9] B. O'Niell。《 *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*》，学术出版社 [10] F. Schultze。《平均曲率流中紧切流的唯一性》，《纯粹与应用数学杂志》¨ [11] S. Sun、Y. Wang。《K¨ahler–Ricci流在K¨ahler–Einstein度量附近的情形》，《纯粹与应用数学杂志》699（2015），143–158 [12] L. Tu。《 *An Introduction to Manifolds*》，第二版，Springer Universitext