arXiv:2302.06760v1 [cs.DS] 14 Feb 2023

随机多数意见扩散：稳定时间、吸收态与影响力节点

Ahad N. Zehmakan 澳大利亚
国立大学 澳大利亚堪培拉
ahadn.zehmakan@anu.edu.au

摘要

考虑一个包含 n 个节点和 m 条边的图 G，它表示一个社交网络。假设初始时每个节点的颜色为蓝色或白色（表示其对某个话题的意见）。每一轮中，所有节点同时将自己的颜色更新为其邻域中最常见的颜色。如果节点在平局时保留原有颜色，这称为多数模型（MM）；如果节点以 1/2 的概率选择蓝色，否则选择白色，则称为随机多数模型（RMM）。

我们证明，存在一些图，使得 RMM 需要指数级的轮次才能在期望意义下达到稳定构型，而且这种构型可以有指数级数量的状态（即着色）。这与 MM 形成对比：已知 MM 总能在 $O(m)$ 轮内达到只有一两个状态的稳定构型。对于环图 C_n 这一特殊情形，我们分别证明了 MM 和 RMM 中更强且紧确的界 $\lceil n/2 \rceil - 1$ 和 $O(n^2)$。此外，我们证明，MM 在 C_n 上的稳定着色数量等于 $\Theta(\Phi^n)$，其中 $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例；而 RMM 中该数量为 2。我们的结果表明，平局打破规则等微小的局部变化，可能显著影响这一过程的全局行为。

我们还研究获胜集的最小规模。获胜集是指一组节点，它们在初始着色中对某种颜色达成一致，便能确保过程最终以所有节点都共享该颜色的着色状态结束。我们给出了 MM 和 RMM 中获胜集最小规模的紧确界。

此外，我们分析了初始着色随机的情形：每个节点独立地以概率 p 被着为蓝色，否则被着为白色。通过一些鞅分析和计数论证，我们证明，在环图 C_n上的 MM 和 RMM 中，期望最终蓝色节点数分别为 $(2p^2 - p^3)n/(1 - p + p^2)$ 和 pn。

最后，我们开展了一些实验，以补充理论发现；这些实验也引出了若干引人关注的开放问题和猜想，有待未来工作进一步探讨。

关键词

多数模型；意见扩散；社交网络；马尔可夫链；社会选择；偏好聚合；影响力传播

ACM 参考格式：
Ahad N. Zehmakan. 2023. 随机多数意见扩散：稳定时间、吸收态和有影响力的节点。在 自主代理与多智能体系统第22届国际会议（*AAMAS 2023*）论文集，伦敦，英国，*2023*年*5*月*29*日至*6*月*2*日，IFAAMAS，12页。

第 *22* 届自主代理与多智能体系统国际会议论文集（*AAMAS 2023*），*A. Ricci*、*W. Yeoh*、*N. Agmon*、*B. An*（编），*2023* 年 *5* 月 *29* 日至 *6* 月 *2* 日，英国伦敦。 © 2023 国际自主智能体与多智能体系统基金会（www.ifaamas.org）。保留所有权利。

1 引言

当我们面对一项决策，或对某个主题形成意见时，例如评价一项技术创新的质量或一个政党的成败，我们通常会受到朋友、家人、同事以及那些意见对我们具有重要价值的人物的意见影响。因此，我们的意见会通过与身边人的交互而不断受到影响和塑造。此外，随着 Facebook、Instagram、微信、TikTok 和 Twitter 等在线社交平台的使用广泛增加，意见得以更快地交换和形成。

企业、政党乃至政府都试图借助在线社交平台上的意见形成和影响力传播来实现其商业与政治目标。例如，营销活动经常利用在线社交网络，通过向特定成员群体赠送产品样品或提供误导性信息，来影响人们的意见，使其倾向于自身。因此，意见扩散和错误信息传播会影响我们生活的方方面面，从经济学和政治到时尚与音乐。

人们对深入了解社交网络中的意见形成和信息传播过程的需求日益增长。更深入地了解集体决策和意见扩散过程，将使我们能够控制和规范营销与政治活动的影响，并阻止错误信息的传播。

社会动态的演变一直是众多不同背景的研究者深入研究的课题，例如经济学 [15], 流行病学 [38], 社会心理学 [45], 和统计物理学 [22]。这一主题尤其在理论计算机科学领域广受关注，特别是在快速增长的文献中，研究重点是社会选择与社交网络的交叉领域，参见 [6, 16, 28]。

人们提出了许多模型来模拟意见形成过程。由于这些过程过于复杂，无法用纯粹的数学术语表达，因此要构建能够完美反映现实的模型本身就很困难。因此，合适的模型应力求捕捉意见传播过程的基本性质，同时又足够简单，以便进行准确而深入的数学分析。因此，我们的目标是建立能够合理近似真实意见扩散过程的模型，同时忽略那些不太重要却会造成干扰的参数。对这类近似模型的分析有助于研究者揭示意见扩散过程中的基本原理和反复出现的模式；若不如此，这些规律便会被完整过程的复杂性所掩盖。

每种观点扩散模型都包含三个基本组成部分。首先，需要定义个体之间如何进行交互。一种广受认可的选择是采用图结构，

其中，节点代表一个个体，两个节点之间的边对应于相应个体之间的一种关系，例如友谊或共同兴趣。其次，个体意见的建模方式有多种选择。一种常见做法是为每个节点赋予一个二元值，例如蓝色或白色，以表示该节点对某个特定主题持正面还是负面态度。最后但同样重要的是，任何模型的一个关键组成部分都是其更新规则，该规则定义了节点如何以及按什么顺序更新意见。在众多不同的更新规则中，多数规则备受关注：节点会选择其邻域中出现频率最高的意见（即颜色）。

意见扩散模型的不同方面已得到理论和实验研究：理论研究利用图论和概率论的丰富工具，实验研究则针对来自真实世界社交网络的图数据开展了大量实验。该领域的大量研究都围绕以下三个基本问题展开：

(1) 过程需要多长时间才能达到稳定构型，这种稳定构型是什么样的？(2) 至少需要多少个节点为蓝色，才能确保整个图最终变为蓝色？(3) 从随机初始着色出发，最终蓝色节点数的期望是多少？

本文针对上述问题，研究一般图及特殊类别图（特别是环）上的两种最基本的基于多数的模型。

概述。在本节余下部分，我们首先给出一些基本定义，为更深入地阐述我们的贡献奠定基础；随后简要概述相关的先前研究。我们在第 2、3、4 节中分别介绍针对问题 (1)、(2)、(3) 的理论发现。最后，第 5 节给出实验结果。

1.1 预备知识

图的定义。设 $G=(V,E)$ 是一个简单连通无向图，并定义 $n:=|V|$ 和 $m:=|E|$。对于一个节点 $v\in V$，$N(v)=\{u\in V : uv\in E\}$ 是 v 的邻域。对于一个集合 $S\subset V$，我们定义 $N_S(v):=N(v)\cap S$。此外，$d(v):=|N(v)|$ 是 v 的度，且 $d_S(v):=|N_S(v)|$。请注意，若上下文无法明确图 G，我们会添加上标，例如 $d^G(v)$。

模型。对于一个图 G，着色是一个函数 $C: V\to\{b,w\}$，其中 b 和 w 分别表示蓝色和白色。对于一个节点 $v\in V$，集合 $N_a(v):=\{u\in N(v): C(u)=a\}$ 包含 v 的邻居中在着色 C 下颜色为 $a\in\{b,w\}$ 的节点。此外，对于一个集合 $S\subseteq V$，如果对每个 $v\in S$ 都有 $C(v)=a$，我们就记作 $C|_S=a$。

假设给定图 G 上的初始着色 C_0。在模型 M 中，$C_t(v)$（即节点 v 在第 $t\in\mathbb{N}$ 轮次中的颜色）根据预定义的更新规则确定。我们关注多数模型 $MM(\cdot,\cdot)$，其更新规则如下：

$$C_t(v)=\begin{cases} C_{t-1}(v) & if\ |N_b^{C_{t-1}}(v)|=|N_w^{C_{t-1}}(v)| \\ argmax_{a\in\{b,w\}}|N_a^{C_{t-1}}(v)| & otherwise \end{cases}.$$

换句话说，每个节点都会选择其邻域中出现频率最高的颜色，并在平局时保持原有颜色。随机多数模型（*RMM*）与多数模型相同，只是在平局时，节点会独立地均匀随机选择两种颜色中的一种。

在这些模型中，我们定义 b_t 和 w_t 分别为 C_t 中蓝色节点和白色节点的数量。它们在 RMM 中对应于随机变量；当初始着色为随机着色时，在 MM 中也对应于随机变量。

如果过程达到所有节点均为蓝色（白色）的着色，我们就称其达到蓝色（白色）着色。对于具有偶数 n 的环图 C_n，存在两种着色，使得每两个相邻节点的颜色都不同。我们称这两种着色为交替着色。如果 MM 或 RMM 过程达到两种交替着色中的一种，它就会在两者之间不断切换。我们称该过程已达到闪烁构型。

对于图 G，如果对着色 C 应用一次 MM（类似地，RMM）后确定性地输出 C，我们就称着色 C 为稳定的。（对于 RMM，这意味着不存在平局。）请注意，稳定着色不一定是单色的。此外，对于 $0\le p\le 1$，p-随机着色指每个节点都独立地以概率（w.p.）p 着成蓝色，否则着成白色。

稳定时间与周期性。由于 MM 中的更新规则是确定性的，且存在 2^n 种可能的着色，因此对于任意初始着色，该过程都会到达一个着色循环，并永远停留其中。该过程到达循环所需的轮数称为稳定时间，而循环的长度称为该过程的周期性。

在一个有 n 个节点的图 G 上运行 RMM，对应于一条马尔可夫链。这条马尔可夫链有 2^n 个状态（即 2^n 种可能的着色）；如果在 RMM 中，从 s 转移到 s' 的概率非零，那么状态 s 到 s' 之间就有一条边。由于这是一个有向图，其状态集可以划分为若干极大的强连通分量。（如果一个状态集中的每个状态都能从其他任一状态到达，那么该状态集就是强连通分量；若将任何其他状态加入该集合后，这一性质不再成立，则该分量是极大的。）此外，如果一个极大的强连通分量没有出边，我们就称它为吸收分量。将每个极大的强连通分量收缩为单个状态后，所得图是一个有向无环图。这意味着在 RMM 中，无论初始着色如何，该过程最终都会到达一个吸收分量，并永远停留其中。该过程到达吸收分量所需轮数的期望值称为稳定时间，而吸收分量的大小称为该过程的周期性。简单来说，该过程最终会到达一个状态（着色）子集，并在其中不断转移。稳定时间是到达该子集所需轮数的期望值，而周期性则是该子集中的状态数。

获胜集与韧性集。对于图 $G=(V,E)$ 上的 MM 或 RMM，若一个节点集 $S\subseteq V$ 满足以下条件，我们称其为获胜集：如果其中所有节点 S 均为蓝色（白色），那么无论节点 $V\setminus S$ 的颜色如何，以及随机选择（在 RMM 中）如何，过程最终都会达到蓝色（白色）着色。此外，若节点集 $S\subseteq V$ 满足以下条件，我们称其为韧性集合：如果 S 完全为蓝色（白色），那么无论其他节点的颜色如何，也无论随机选择如何，S 中的所有节点都将永远保持蓝色（白色）。我们注意到，集合 S 在 MM（分别为 RMM）中具有韧性，当且仅当对每个节点 $v\in S$，$|N_S(v)|\ge d(v)/2$（分别为 $|N_S(v)|>d(v)/2$）。

路径划分。考虑一个环 C_n 及一种着色 C。如果一条路径上的所有节点都是蓝色（白色），我们就称该路径为蓝色（白色）路径。一条路径是

单色的，当且仅当它是蓝色或白色路径。此外，如果每两个相邻节点的颜色都相反，则称该路径为交替的。路径的长度是其节点数，偶数（奇数）路径是指长度为偶数（奇数）的路径。除非 n 为偶数且 C 是两种交替着色之一，否则至少存在一条长度为两个或更多节点的单色路径。令 B（分别为 W）表示 C 中长度至少为两个节点的极大蓝色（分别为白色）路径上的节点集合。于是，所有不在 $B \cup W$ 中的节点都可以划分为极大交替路径，而这些路径被上述单色路径包围。我们将这些极大单色路径与交替路径的并集称为 C 中的路径划分。

McDiarmid 不等式。我们使用 McDiarmid 不等式的一个扩展，当输出差异满足一定界限时，该扩展可以给出随机变量输入敏感性的界限。

定义 *1.1*。设 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是概率空间 $\Omega = \{0,1\}^n$ 上的随机变量。若满足以下条件，我们称 X 是*差分有界*的，界限为 (β, c, δ)：(i) 存在一个“坏”子集 $B \subset \Omega$，其中 $|B|/|\Omega| = \delta$；(ii) 若 $\omega, \omega' \in \Omega$ 仅在第 i 个坐标上不同，且 $\omega \notin B$，则 $|X(\omega) - X(\omega')| \le c$；(iii) 对于任意仅在第 i 个坐标上不同的 ω 和 ω'，$|X(\omega) - X(\omega')| \le \beta$。

定理 1.2（McDiarmid 不等式的扩展 [33]）。设随机变量 $X\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ 是差分有界的，界限为 (β, c, δ)，则对于任意 $\epsilon > 0$，概率 $\mathbb{P}[(1-\epsilon)\mathbb{E}[X] \le X \le (1+\epsilon)\mathbb{E}[X]]$ 至少为 $1 - 2\exp\left(\frac{-\epsilon^2 \mathbb{E}[X]^2}{8nc^2}\right) - \frac{2\delta n\beta}{c}$。

高概率。我们假设 n（即 $|V|$）趋于无穷大。当某个事件以概率 $1 - o(1)$ 发生时，我们称该事件以高概率（w.h.p.）发生。

1.2 我们的贡献

贡献 1：稳定时间与周期性。已知 [39] 图 G 上的多数模型（MM）稳定时间为 $O(m)$。然而，RMM 是否也满足类似的界，此前尚无定论。我们通过给出一个明确的图构造和着色，证明答案是否定的：在该构造下，RMM 的稳定时间在 n 中呈指数级。此外，我们研究了底层图为环 C_n 时的稳定时间。我们证明，MM 的上界为 $\lceil n/2 \rceil - 1$，而 RMM 的上界为 $O(n^2)$。对于前者，我们利用了一些组合论证；对于后者，我们分析了相应马尔可夫链的“收敛”时间。我们证明这两个界都是紧的。

MM 的周期性的一个平凡上界是 2^n。然而，Goles 和 Olivos [26] 证明了其周期性为一或二，即该过程总是达到一个固定着色，或在两个着色之间切换。尽管在 RMM 的某些特殊图类上观察到了类似行为（参见 [1],），但我们证明这并不适用于一般情形。更确切地说，我们给出了使 RMM 周期性呈指数级增长的图结构和初始着色。

我们还开展了对稳定着色数量的研究。我们证明，对于一个环，其稳定着色的数量在 RMM 中为 $\Theta(1)$，在 MM 中为 $\Theta(\Phi^n)$，其中 $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例。这进一步表明，对过程局部行为（例如平局打破规则）进行细微调整，可能会对过程的全局行为产生重大影响。

贡献 2：获胜集的最小规模。我们给出了关于最小规模获胜集的一些界限。特别是，在在环 C_n 上的 RMM 中，唯一的获胜集是包含所有节点的集合。在 C_n 上的多数模型中，获胜集的最小规模等于 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$。

贡献 3：随机初始着色。从 p-随机着色出发，求蓝色节点“最终”数量的期望这一问题，已有研究对此进行了探讨（见第 1.3 节）。然而，对于特殊图类，现有研究只给出了一些较宽松的界限，这似乎源于该问题固有的难度。我们在这方面取得了一些进展，给出了环图上的答案。（正如我们稍后将解释的，我们相信这些方法可用于证明更大一类图上的类似结果，即 d 维环面，或更广义地说，点传递图。）我们证明，在 C_n 上的 RMM 中，蓝色节点的期望最终数量等于 pn。另一方面，对于 MM，该数量等于 $(2p^2 - p^3)n/(1 - p + p^2)$（有人提醒我们，[35] 中已证明过类似结果。不过，我们认为我们的证明更直观；更重要的是，我们证明了一个以高概率成立的结论）。

贡献 4：证明技巧。本文的主要贡献之一是提出了多种证明技巧，这些技巧建立在马尔可夫链分析、计数论证、势函数、贪心方法、鞅过程和递归函数的基础上。我们认为，这些技巧将有助于未来推动基于多数规则（更一般地说，基于阈值规则）的意见扩散模型研究。我们投入了相当多的精力，力求使证明易于理解，避免因向模型或底层图结构添加不太重要的组成部分而引入不必要的复杂性。这也是我们专注于两种最基本的模型，并将相当一部分结果展示在环图上的主要原因。我们还说明了如何将其中一些技巧用于在更一般的框架下证明类似结果。

贡献5：实验结果。我们展示了所开展的若干实验的结果。其中一部分实验旨在支持和补充我们的理论发现。然而，一些实验还使我们发现了模型的其他有趣特征。具体而言，我们研究了在底层图结构中添加一些随机边所产生的影响。这引出了若干开放问题和猜想，涉及导通率、顶点传递性等图参数与稳定时间等过程属性之间的联系；这些问题可作为未来研究的潜在方向。

1.3 相关研究

人们提出了众多意见扩散模型，以研究社区成员如何通过社会互动形成自己的意见，参见 [11, 29]。在所有这些模型中，基于多数的模型受到了相当多的关注，参见 [3–5, 17, 49]。

稳定时间与周期性。已证明 [26]，MM的周期性始终为一或二。Chistikov等人 [20]证明，对于给定的有向图的着色，判断其周期性是否为一是PSPACE完全问题。此外，已有证明 [39] 表明，MM的稳定时间上界为$O(m)$。对于特殊图类，已知更强的界。例如，对于具有强导通率的a d-正则图，其稳定时间为$O(\log_d n)$，参见 [48]。稳定化

性质也已针对其他基于多数的模型进行了研究，参见 [1, 13, 25, 36, 46]。

获胜集的最小规模。受病毒式营销的启发，在这种营销中，公司旨在通过说服一部分个体对其产品持正面意见并予以采纳（例如，向他们赠送免费样品），引发更多人采纳该产品的巨大级联，因此，寻找最小获胜集规模的问题已得到广泛研究，参见 [7, 30, 32]。Gärtner 和 Zehmakan [24] 证明，当 d 足够大时，在随机 d正则图上的多数模型中，获胜集的最小规模以高概率接近 $n/2$。利用扩张图混合引理，研究 [48] 证明，对于具有一定导通率的所有图，这一结论实际上都成立，其中包括随机正则图和 Erdős-Rényi 随机图。对于一般图，研究 [6] 证明，在多数模型的异步变体下，每个图都存在一个规模至多为 $n/2$ 的获胜集。研究 [8, 37], 考察了真实世界社交网络的图数据上的获胜集最小规模，研究对象是多数模型的一种变体，其中度最高的节点（称为精英节点）比其他节点具有更大的“影响因子”。

此外，针对给定图 G 寻找最小规模获胜集合的问题，已知在不同的基于多数的模型中均为 NP 困难，参见 [32, 41], ；研究者还提出了基于多种技术的近似算法，例如基于整数规划的公式化方法 [42, 44] 和强化学习 [31], 。对于多数模型和 RMM，已有证明 [34] 表明，除非 P=NP，否则该问题无法在因子 $(\log \Delta \log\log \Delta)$ 范围内近似；但存在一个多项式时间的 $(\log\Delta)$- 近似算法，其中 Δ 为最大度。Chen [19] 证明，该问题在树等特殊图类中可解。

随机初始着色。关于在 p-随机初始着色下，多数模型和 RMM 中蓝色节点期望最终数量的问题，已有针对不同图的研究，例如随机正则图 [24], 、超立方体 [10] 和优先连接图 [2]。受某些相互作用粒子系统中的应用启发，例如岩石中的流体流动和玻璃动力学，该问题在底层图为 d维环面时也得到了广泛研究，参见 [9, 23, 47]。Gray [27] 研究了在过程中加入一些噪声时，环图上的这一问题。粗略地说，上述研究的主要发现是存在一些阈值 p_1 和 p_2，因此，如果 p 充分小于 p_1（类似地，充分大于 p_2），则该过程将达到白色着色（分别为蓝色着色）；而当 p 介于两者之间时，以高概率达到非单色构型。此设定中的主要困难在于确定 p_1 和 p_2的取值。

近年来，许多研究关注于从 p-随机初始着色出发，在 Erdős-Rényi 随机图上研究多数模型。在 [48], 中已经证明，当 p 略大于 1/2 时，该过程将以高概率达到蓝色着色。继承自 [12], 的一个猜想， $p = 1/2$ 的情形也得到了广泛研究，参见 [18, 40, 43]。

2 稳定时间与周期性

2.1 一般图中的稳定时间

如前所述，已证明 [39] MM 的稳定时间为 $O(m)$。不难论证，即使节点异步更新，或采用有偏平局裁决规则（即在平局时始终选择蓝色），这一界仍然成立。然而，对于随机平局裁决能否证明类似的界，仍是一个悬而未决的问题。在定理 2.1 中，我们通过给出一个明确的图构造和着色解决了这一问题：对于该构造，RMM 需要指数级的轮次才能在期望意义下稳定。（我们的证明实际上适用于任意随机平局裁决规则，即节点在平局时以 $0 < q < 1$ 的概率独立选择蓝色，以 $1 - q$ 的概率选择白色。）

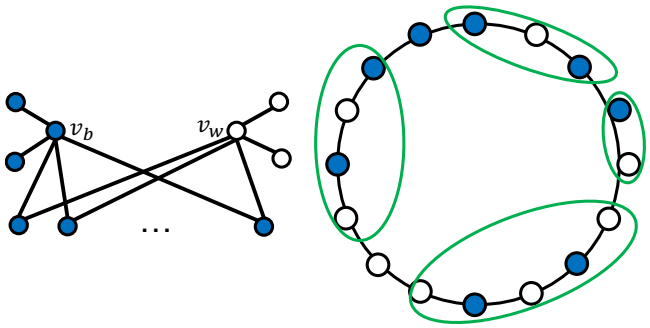


图 1：（左）定理 2.1 中给出的 RMM 指数稳定时间构造。（右）“扩展的”极大交替路径$\mathcal{A}^+$ 由绿色曲线圈出，见定理 2.5 的证明。

定理 2.1. 存在一个图 $G = (V, E)$ 及一种着色 C_0，使得 *RMM* 的稳定时间关于 n 呈指数级增长。

证明。为构造图 G，我们先定义三个较小的图，然后说明如何将它们连接起来以构成 G。我们定义 $\kappa := \lfloor n/3 \rfloor - 1$。令 S_b 为一个星形图，其内部节点为 v_b，并有 $\kappa - 1$ 个叶节点；令 S_w 为一个星形图，其内部节点为 v_w，并有 $n - 2\kappa - 1$ 个叶节点。此外，令 I 为由 κ 个孤立节点构成的图。现在，为了构造图 G，我们为 I中的每个节点添加一条边连接到 v_b，并添加一条边连接到 v_w。（注意，节点总数等于 $|V_{S_b}|+|V_{S_w}|+|V_I| = \kappa+(n-2\kappa)+\kappa = n$。）示例请见图 1（左）。

命题 1。 中的节点 构成一个韧性集合。 S_w 中的每个节点，其邻居中超过一半位于 S_w中。对于所有叶节点而言，这一点显然成立。内部节点 v_w 与 S_w 中的 $n - 2\kappa - 1$ 个叶节点以及 I 中的 κ 个节点相邻，并且有 $n - 2\kappa - 1 > \kappa$。

命题 2。 设 U为满足以下条件的着色集合： S_w 为白色， S_b 为蓝色，且 I 中至少有一个节点为蓝色。对于着色 $C \in U$，在下一轮中，S_b 和 S_w 中的所有节点保持其颜色，而 I 中的每个节点均匀随机地选择一种颜色。 S_w 中的所有节点根据命题 1 保持白色。 S_b 中的所有叶节点恰好有一个蓝色邻居，因此保持蓝色。节点 v_b 的度为 $2\kappa - 1$，且至少有 κ 个蓝色邻居，因此也保持蓝色。 I中的每个节点恰好有一个蓝色邻居（v_b）和一个白色邻居（v_w），因此它会在蓝色和白色之间均匀随机地选择。

假设在 C_0 中， S_w 中的所有节点均为白色，其余节点均为蓝色。显然，C_0 属于 U。我们证明该过程最终会达到白色着色。因此，稳定时间的上界是达到一种不属于 U 的着色所需的期望轮数（因为白色着色显然不属于 U）。注意，根据命题 2，从 U 中的一种着色出发，如果至少有一个节点在 I 中选择蓝色，那么下一轮仍处于 U 中。离开 U 的唯一方式是 I 中的所有节点都选择白色。

由于这种情况发生的概率仅为 $1/2^{\kappa}$，因此期望需要 $2^{\kappa} = 2^{\lfloor n/3 \rfloor - 1}$ 轮才会发生。

剩下需要证明的是，该过程最终会达到白色着色。注意，根据命题 1，S_w 会永远保持白色。因此，只需证明：从任意一种 S_w 完全为白色的着色出发，都有非零概率达到白色着色。设 C 为这样一种着色。下一轮中，I 中的所有节点都有非零概率变为白色（因为它们都有至少一个白色邻居，即 v_w）。再下一轮中，I中的所有节点都有可能保持白色，而 v_b 也变为白色（回顾 $d(v_b) = 2\kappa - 1$）。再过一轮，所有节点都会变成白色。

□

2.2 圈上的稳定时间

我们证明，在一个环 C_n 上，MM 的稳定时间至多为 $\lceil n/2 \rceil - 1$（定理 2.3），而 RMM 的稳定时间为 $O(n^2)$（定理 2.5）。根据下文给出的引理 2.2，可以直接推得定理 2.3。不过，为求完整，我们在附录 A.1 节给出定理 2.3 的证明。此外，为证明定理 2.5，我们依赖引理 2.4 中给出的马尔可夫链分析，其完整证明见附录 A.2 节。

引理 2.2。 在环 C_n 上的多数模型中，对于着色 C，若存在两个颜色相同的相邻节点，则该过程恰好经过 $\lceil l/2 \rceil$ 轮次后达到稳定着色，其中 l 是 C 的路径划分中最长交替路径的长度。

证明。令 B（分别为 W）表示着色 C 的路径划分中蓝色（分别为白色）极大路径上的节点集合。B和W中的所有节点永远保持其颜色。此外，路径划分中的所有交替路径都会持续缩短，直至消失。考虑一条交替路径 $v_1, \cdots v_k$。一轮之后，v_1 和 v_k“并入”相邻的单色路径，因此它缩短为交替路径 $v_2, \cdots v_{k-1}$，其长度为 $k-2$。若 k为偶数，该路径经过 $k/2 = \lceil k/2 \rceil$ 轮次后消失。若 k为奇数，其长度每轮减少二，直至长度为 1。之后还需一轮才能消失。总共需要 $\lceil k/2 \rceil$ 轮次。因此，经过 $\lceil l/2 \rceil$ 轮次后，所有节点都位于长度至少为二的单色路径上，并且永远不会改变颜色。□

定理 2.3. 环 C_n 上多数模型的稳定时间至多为 $\lceil n/2 \rceil - 1$，且此上界是紧的。

引理 *2.4.* 考虑定义在状态集 $S := \{s_0, \cdots s_k\}$ 上、转移矩阵为$P := (p_{s_i s_j})_{s_i, s_j \in S}$ 的时间齐次马尔可夫链，其中对于 $1 \le i \le k-1$，有 $p_{s_i s_i} = \frac{1}{2}$ 和 $p_{s_i, s_{i+1}} = p_{s_i, s_{i-1}} = \frac{1}{4}$；对于 $i = 0, k$，有 $p_{s_i, s_i} = 1$。该链从状态 s_i 到达 s_0 或 s_k 所需的期望轮数等于 $2i(k-i)$。

证明概要。令 T_i 为马尔可夫链从状态 s_i 到达状态 s_0 或 s_k 所需的期望轮数。显然，我们有 $T_0 = T_k = 0$。此外，对于状态 s_i，当 $1 \le i \le k-1$ 时，若以概率 1/4 转移到状态 s_{i+1}，那么除了这一步之外，完成还需要 T_{i+1} 步（期望）。对于转移到 s_{i-1} 和停留在状态 s_i 的情况，类似的论证同样适用，它们发生的概率分别为 1/4 和 1/2。因此，对这三种可能性进行条件化后，我们得出 $T_i = \frac{1}{4}T_{i-1} + \frac{1}{4}T_{i+1} + \frac{1}{2}T_i + 1$，其中 $1 \le i \le k-1$。解这个线性递推可得 $T_i = 2i(k-i)$。（完整证明请参见 A.2 节。）□

定理 2.5. *RMM* 在 C_n 上的稳定时间为 $O(n^2)$。

证明。我们先介绍在 C_n 上的惰性 RMM，它本质上是较慢版本的 RMM。对于一种着色 C，考虑 C_n 上所有长度至少为 2 的极大单色路径，并令 A 表示位于两条此类单色路径之间的极大交替路径集合。其中也包括长度为 0 的交替路径，即两条颜色相反的单色路径彼此相邻时的情形。（这实质上是 C 中路径划分里的交替路径，加上上述长度为 0 的路径。）令 A^+ 表示这样得到的路径集合：对 A 中的每条路径，将其两个相邻节点附加到该路径上。（示例见图 1 右侧。）在惰性 RMM 中，我们不再一次性更新所有节点，而是按任意顺序逐一选取 A^+ 中的路径，然后遵循 RMM 规则，一次性更新所选路径上所有节点的颜色。遍历完 A^+ 后，我们针对新的着色重新生成 A^+，并继续进行。不过请注意，在遍历完 A^+ 中的所有路径之前，我们实际上不会让更新后的颜色生效。可以设想，我们将每个节点更新后的颜色保存在缓冲区中，待 A^+ 为空时再使其生效。

注意，A^+ 中任意两条路径都互不相交（因为我们考虑的是长度至少为二的单色路径）。此外，A^+ 中不属于任何路径的节点在 RMM 中不会改变其颜色，因为它与两个邻居的颜色相同。因此，处理完 A^+ 中的所有元素后生成的着色，与应用 RMM 后得到的着色相同（当然，前提是使用相同的随机源，即在平局时，节点在两个过程中作出相同的随机选择）。此外，当过程到达 A^+ 为空的着色时，惰性 RMM 就会停止。这意味着过程已到达单色／闪烁构型，这等价于 RMM 中的稳定；我们将在定理 2.7 中正式证明这一点。简言之，惰性 RMM 只是 RMM 的较慢版本，它将一轮拆分为更小的子轮次。因此，只需证明惰性 RMM 的所需上界 $O(n^2)$。

令 $P := v_1, \cdots v_k$ 是 A^+ 中的一条路径。我们声称，更新 P 上的节点后，蓝色节点的数量以 1/4 的概率增加（减少）1，以 1/2 的概率保持不变。首先考虑 k 为偶数的情形。由于原来的交替路径 $v_2, \cdots v_{k-1}$ 的长度为偶数，包含 v_1 和 v_k 的相邻单色路径必定颜色相反。不失一般性，假设 v_1 是蓝色的，v_k 是白色的。因此，对于 $2 \le i \le k-1$，当 i 为偶数时，v_i 是白色的；当 i为奇数时，v_i 是蓝色的。总的来说，更新前有 $k/2$ 个蓝色节点。更新后：(i) 对于 $2 \le i \le k-1$，每个节点 v_i 都会确定性地切换颜色，因此有 $(k-2)/2$ 个蓝色节点；(ii) v_1 和 v_k 独立地从均匀分布中随机选择一种颜色。它们以 1/4 的概率都选择蓝色（白色），此时蓝色节点数为 $(k-2)/2 + 2 = k/2 + 1$（分别为 $(k-2)/2 = k/2 - 1$），也就是说蓝色节点的数量增加（分别减少）1。此外，它们以 1/2 的概率一个选择蓝色、另一个选择白色，此时有 $(k-2)/2 + 1 = k/2$ 个蓝色节点，也就是说数量保持不变。对于 k 为奇数的情形，我们也可以用非常相似的论证证明相同结论。

考虑引理 2.4 中所述的 $k = n$马尔可夫链，其中状态 s_i 表示有 i 个蓝色节点。我们声称，该马尔可夫链到达 s_0或 s_n所需轮次数的期望最大值，是以下过程稳定时间的一个上界：

惰性 RMM 过程。正如我们所讨论的，在惰性 RMM 的每一轮中，蓝色节点的数量以 1/4 的概率减少或增加 1，以 1/2 的概率保持不变。对于奇数 n，如果过程尚未达到白色着色或蓝色着色（在马尔可夫链中分别对应状态 s_0 和 s_n），集合 A^+ 非空。因此，该马尔可夫链实际上精确地模拟了惰性 RMM。当 n 为偶数时，我们可能会到达一种 A^+ 为空、但并非蓝色或白色着色的着色（如果过程到达闪烁构型，就会发生这种情况；对应的马尔可夫链处于状态 $s_{n/2}$）。不过，由于我们要寻找的是一个上界，这并不构成问题。因此，从有 i 个蓝色节点的着色开始，稳定时间至多为 $2i(n-i)$ 轮次。由于 $2i(n-i)$ 在 $i = n/2$ 处取得最大值，因此该上界至多为 $n^2/2 = O(n^2)$。

□

定理 2.5 给出的二次界是紧的。在附录 A.3 节中，我们证明，如果初始着色将节点集划分为一条蓝色路径和一条交替路径（两者的大小都约为 $n/2$），那么该过程稳定所需的轮次数期望为 $\Omega(n^2)$。

2.3 一般图和环中的周期性

多数模型和 RMM 的周期性的一个平凡上界是 2^n。已有证明表明，多数模型的周期性始终为 1 或 2。定理 2.6 指出，对于 RMM，2^n 这一平凡上界实际上是可能达到的最优界，误差仅为一个常数因子。另一方面，如果我们只考虑环图，那么 RMM 和多数模型的周期性始终为 1 或 2，参见定理 2.7。

定理 2.6。 对于任意整数 n，都存在一个 n 节点图 G，使得 *RMM* 的周期性为 $\Omega(2^n)$。

证明概要。定义 κ 为小于 $n-6$ 且能被 4 整除的最大整数。考虑路径 $P := v_0, \cdots v_{\kappa-1}$、一个大小为 3 的团 C_w，以及一个大小为 $n-3-\kappa$ 的团 C_b。为构造图G，在 v_0 与 C_w 中的一个节点之间添加一条边，并在 $v_{\kappa-1}$ 与 C_b 中的一个节点之间添加一条边。令 U 为所有满足 C_w 完全为白色且 C_b 完全为蓝色的着色所构成的集合。注意，$|U| = 2^\kappa = \Omega(2^n)$。我们可以证明，对于任意两个着色 C、C′ ∈ U，从 C 到 C′ 都有非零概率可达，并且不存在从 U 中的着色转移到 U 外着色的可能。因此，U 中的着色构成一个吸收强连通分量，从而得到关于周期性的界 $\Omega(2^n)$。完整证明请参阅附录 A.4 节。□

定理 2.7. 在环 C_n上的多数模型中：

- 若 n 为奇数，则该过程总会达到稳定着色。
- 若 n 为偶数，则该过程会达到稳定着色或闪烁构型。

在环 C_n上的 *RMM* 中：

- 若 n 为奇数，则该过程总会达到白色（蓝色）着色。
- 若 n 为偶数，则该过程会达到白色（蓝色）着色或闪烁构型。

证明概要。对于多数模型，如果有两个相邻节点的颜色相同，那么根据引理 2.2，过程会达到稳定着色。否则（这只可能发生在偶数 n时），过程处于闪烁构型。对于 RMM，我们需要一个类似但带有概率性的论证。完整证明见附录 A.5 节。□

稳定着色的数量。 根据定理 2.7，在环 C_n上的 RMM 中，有两种稳定着色，即白色着色和蓝色着色。那么多数模型中稳定着色的数量是多少？定理 2.8 回答了这个问题，其证明见附录 A.6 节。

定理 2.8。 在环 $C_n = (v_0, \cdots v_{n-1})$上的多数模型中，有 $\Theta(\Phi^n)$ 种稳定着色，其中 $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$为黄金比例。

3 获胜集

获胜集可以有多小？Berger [14], 令人惊讶地证明，存在任意大的图，其在多数模型中具有常数大小的获胜集。实际上，已有证明概要表明，无论采用何种平局打破规则，这一结论都成立。定理 3.1 对此作了更正式的陈述；为求完整，附录 A.7 节给出了完整证明。

如果在每一轮中，每个节点都将自己的颜色更新为其邻居中最常见的颜色，并以任意 方式打破平局，我们就称该模型遵循多数规则。这尤其包括多数模型和 RMM。

定理 3.1。 对于每个正整数 k 以及遵循多数规则的模型，都存在一个具有 $n \geq k$ 的 n节点图，该图有一个大小为36的获胜集。

定理 3.2。 在环 $C_n = (v_0, \cdots v_{n-1})$上的 *RMM* 中，唯一的获胜集是所有节点构成的集合。在 C_n上的多数模型中，获胜集的最小规模等于 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$。

证明概要。对于 RMM，我们可以证明，如果初始着色中存在一个白色节点，那么过程可能无法到达蓝色着色。这意味着唯一的获胜集是所有节点构成的集合。

设 B 是多数模型中的一个获胜集。对于任意两个相邻节点，至少有一个必须属于 B。通过对奇数和偶数 n 进行分类讨论，我们可以得出 $|B| \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$。此外，这个界是紧的，因为集合 $\{v_i : (i \bmod 2) = 1\} \cup \{v_0\}$ 是一个大小为 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 的获胜集。完整证明见附录 A.8 节。 □

4 随机初始着色

我们分别在定理 4.1 和 4.2 中确定了环图上从随机着色开始时，多数模型和 RMM 的蓝色节点最终数量的期望。

定理 4.1。 在多数模型中，对于一个环 C_n，若采用 p-随机初始着色，且满足某个 $p \geq 1/2$，则该过程以高概率在$(1 \pm \epsilon)\frac{2p^2-p^3}{1-p+p^2} n$ 轮内达到稳定着色，此时有 $\epsilon > 0$（可任意小）的常数个蓝色节点，$O(\log n)$ 轮。

证明。令 E 表示初始着色中不存在长度大于 $n-4$ 的交替路径这一事件。E 不发生的概率可以上界为 $2n(p(1-p))^{\lfloor (n-4)/2 \rfloor}$，该概率关于 n 呈指数级微小。由于我们的结论需要以高概率成立（即以 $1-o(1)$ 的概率），因此在证明的其余部分中，我们假设 E 发生。（严格来说，在计算中需要以 E 发生为条件，但为简便起见，我们略去这一点。）因此，在初始着色中，节点可以被划分为极大蓝色和

白色路径（长度至少为二）以及大小至多为 $n-4$ 的极大交替路径。从这样的初始着色开始，单色路径不断增长，而交替路径不断缩短，直到该过程达到仅包含单色路径的稳定着色。（更多细节请参见引理 2.2 的证明。）

令 p_f 表示任意节点 v 在最终为蓝色的概率。为计算 p_f，我们考察初始着色的路径划分中，v 属于单色路径、奇数长度交替路径或偶数长度交替路径这三种情况，由此得到方程（1）。(I) 如果 v 位于白色路径上，它永远不会变成蓝色。如果它位于蓝色路径上，则会永远保持蓝色。v 位于蓝色路径上的概率等于 p（$p^2+2p(1-p)$），因为 v 和它至少一个邻居必须是蓝色。（见方程（1）中的第一项。）(II) 奇数长度交替路径与两条颜色相同的单色路径相邻（它们可能是同一条路径），交替路径上的所有节点最终都会选取该单色路径（或这些单色路径）的颜色。v 位于长度为 k、与蓝色路径相邻的奇数长度交替路径上的概率等于 $p^4 k p^{\lfloor k/2 \rfloor}(1-p)^{\lceil k/2 \rceil}$。（项 p^4 表示路径两侧各有两个相邻节点为蓝色。注意，由于我们假设不存在长度大于 $n-4$ 的交替路径，这四个节点互不相同。）对 k 的所有取值求和，得到方程（1）中的第二项。(III) 偶数长度交替路径 P 与一条蓝色路径和一条白色路径相邻。P 上距离蓝色（白色）路径较近的节点至多经过 $|P|/2$ 轮后就会变成蓝色（分别变成白色）。v 位于长度为 k 的偶数长度交替路径上且距离蓝色路径较近的概率等于 $2p^2(1-p)^{2\frac{k}{2}} p^{k/2}(1-p)^{k/2}$。对 k 的所有取值求和，得到方程（1）中的第三项。

$$p_f = \left(2p^2 - p^3\right) + p^4 \sum_{\text{odd } 1\le k\le n-4} k p^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(1-p)^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} + p^2(1-p)^2 \sum_{\text{even } 1\le k\le n-4} k p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{\frac{k}{2}} \tag{1}$$

令 $q := p(1-p)$。于是，最后一个求和可以写成 $2q^2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor} i q^i$。这等于 $2q^2 \frac{q}{(1-q)^2} + O(nq^{\frac{n}{2}})$，这里用到了它是几何级数的导数这一事实。同理，我们可以证明，方程（1）中的第一个求和等于 $p^3\left(\frac{2q}{(1-q)^2} - \frac{q}{1-q}\right) + O(nq^{\frac{n}{2}})$。将这些结果代入方程（1），进行一些基本计算，并利用 n 趋于无穷这一事实，可得 $p_f = \frac{2p^2-p^3}{1-p+p^2}$。（我们忽略了加性项 $O(nq^{\frac{n}{2}})$，因为它趋于 0，可以并入稍后添加的估计 $(1\pm\epsilon)$ 中。）这意味着 $\mathbb{E}[b_f] = \frac{2p^2-p^3}{1-p+p^2} n$，其中 b_f 是最终蓝色节点数。

令 l_p 表示在 C_n 上的 p-随机着色中最长交替路径的长度。那么，对于 $l^* := 8\log_2 n$，我们有

$$\mathbb{P}[l_p \ge l^*] \le 2n(p(1-p))^{l^*/2} \le 2n\left(\frac{1}{2}\right)^{l^*/2} = \frac{2}{n^3}. \tag{2}$$

因此，以至少 $1-2/n^3$ 的概率，该过程会在 l^* 轮次之前结束。

我们声称，随机变量 b_f（定义在 $\Omega = \{w,b\}^n$ 上）是差分有界的，界为（$\beta = n, c = 4l^*+7, \delta = 2/n^3$）。(I) 令 B 为这样的着色集合：其中存在长度至少为 l^* 的交替路径。若设 $p = 1/2$，则从这些着色中均匀随机选取一种着色。根据公式（2），随机选取的着色中含有大小至少为 l^* 的交替路径的概率至多为 $2/n^3$，即 $|B|/|\Omega| \le 2/n^3$。(II) 考虑一种着色 $C \notin B$。由于最长交替路径的长度小于 l^*，过程会在 l^* 轮之前结束。现在，假设我们翻转节点 v 的颜色，得到着色 C'。C' 中最长交替路径的长度不会超过 $2l^*+3$。因此，从 C' 开始的过程至多经过 $t \le 2l^*+3$ 轮便会结束。此外，节点 v 的颜色会影响至多 $2t+1$ 个节点的最终颜色，即与 v 的距离至少为 t 的那些节点。因此，从 C 和 C' 开始时最终蓝色节点数之差至多为 $2(2l^*+3)+1 = 4l^*+7$，也就是说，$|b_f(C) - b_f(C')| \le 4l^*+7$。（实际上，我们在这里的计算相当宽松。）(III) 对于任意两种着色 C 和 C'，显然有 $|b_f(C) - b_f(C')| \le n$。现在应用定理 1.2 可知，对于某个 $\epsilon > 0$，$\mathbb{P}[(1-\epsilon)\mathbb{E}[b_f] \le b_f \le (1+\epsilon)\mathbb{E}[b_f]]$ 至少为 $1 - 2\exp(-(\epsilon^2\mathbb{E}[b_f]^2)/(8n(4l^*+7)^2)) - 4/(n(4l^*+7))$，其中我们使用了 $\beta = n, c = 4l^*+7, \delta = 2/n^3$。利用 $\mathbb{E}[b_f]^2 = (2p^2-p^3)^2 n^2/(1-p+p^2)^2 = \Theta(n^2)$（当 $p \ge 1/2$ 时）以及 $(4l^*+7)^2 = \Theta(\log^2 n)$，上述概率至少为 $1 - \exp(-\Theta(n/\log^2 n)) - 1/\Theta((n\log n)) = 1 - o(1)$。此外，我们已经证明，该过程以高概率在 $8\log_2 n$ 轮之前结束。因此，该过程会在 $O(\log n)$ 轮内以高概率到达一个稳定着色，其中有 $(1\pm\epsilon)\frac{2p^2-p^3}{1-p+p^2} n$ 个蓝色节点。□

定理 4.2. 考虑在 C_n 上的 *RMM*，并假设对于某个 $0 \le p \le 1$，$b_0 = pn$ 成立。那么，对于任意 $t \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathbb{E}[b_t] = pn$。

证明。只需证明序列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 是一个离散时间鞅，即 $\mathbb{E}[b_t | b_0, b_1, \cdots b_{t-1}] = b_{t-1}$。我们稍微换一种方式来表述 RMM。假设每一轮中，一个白色（蓝色）节点向它的两个邻居各发送一颗白色（蓝色）卵石。然后，每个节点均匀且独立地随机选择收到的两颗卵石中的一颗，并采用其颜色。这与 RMM 规则相同，因为如果一个节点的邻居颜色一致，它就以概率 1 选择该颜色；否则，它就独立且均匀随机地选择一种颜色。现在，假设第 $t-1$ 轮有 b 个蓝色节点。那么，这些蓝色节点中的每个节点都会发出两颗蓝色卵石，并且每颗蓝色卵石被选中并产生一个蓝色节点的概率为 1/2。因此，根据期望的线性性，第 t 轮蓝色节点的期望数量等于 $2b*(1/2) = b$。由此完成了序列为鞅的证明。因此，对于任意 $t \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathbb{E}[b_t] = pn$。□

定理 4.2 对任意包含 pn 个蓝色节点的初始着色都成立，与这些节点的位置无关。我们可以将其应用于 p-随机初始着色的情形，因为简单应用切尔诺夫界 [21] 即可推出，初始时蓝色节点的数量以高概率为 pn，误差因子为某个“较小”的值。

推论 4.3。对于 C_n 上的 *RMM*，且 $b_0 = pn$：

- 若 n 为奇数，过程以概率 p 达到蓝色着色，以概率 $1-p$ 达到白色着色。
- 若 n 为偶数，过程以概率 p^2 达到蓝色着色，以概率 $(1-p)^2$ 达到白色着色，以概率 $2p(1-p)$ 达到闪烁构型。

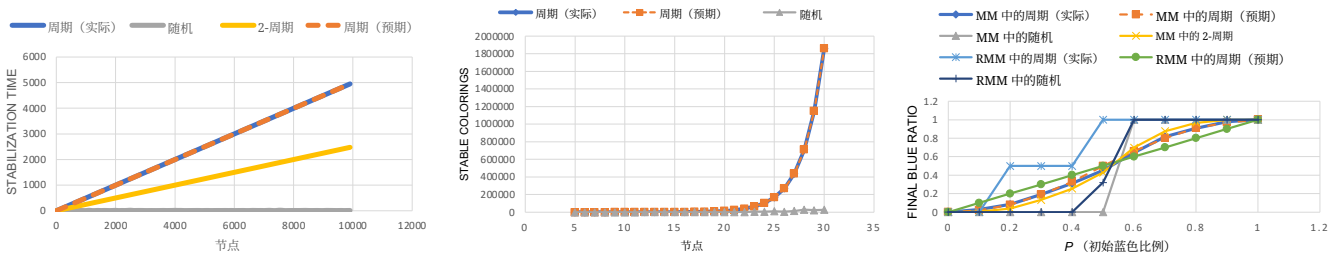


图2：（左）在多数模型中，稳定时间随 n变化的情况，其中包含一条长度为2（或3）的白色路径，以及一条长度为 $n-2$（或 $n-3$）的交替路径；（中）多数模型中稳定着色的数量随 n 变化的情况；（右）从 p-随机着色开始时，不同 p值对应的蓝色节点最终比例。我们用“预期”表示根据理论发现所得的预期结果，用“实际”表示实验的输出。

5 实验

我们还从实验角度研究了多数模型（MM）和 RMM。开展的实验不仅补充了我们的理论发现，也为未来研究图特征（如导通率和顶点传递性）与 MM 和 RMM 行为之间的联系开辟了道路。我们的实验在环、2-周期（构造 2-周期的方法是取一个环 C_n，并在距离为 2 的任意两个节点之间添加一条边）以及某些随机图上进行（随机图通过在一个环 C_n的每个节点上添加两条随机选取的边得到）。

图2（左）展示了在一种极端着色下，多数模型在环图 C_n 上的稳定时间，其中白色路径的长度为 2（或 3），交替路径的长度为 $n-2$（或 $n-3$）。该环图的稳定时间与定理 2.3 中证明的上界 $\lceil n/2 \rceil - 1$ 完全吻合。有趣的是，一旦我们为环上的每个节点添加两个随机邻居（从而得到随机图），过程便会极快地结束（即使 $n = 10,000$ 时，也不到 25 轮）。为了说明这并非只是增加边的效果，而是边的添加方式所致，我们在一个 2-周期图上运行了该过程（其边数与随机图相同）。可以看到，尽管过程略微加快，但仍明显慢于随机情形。随机图（如 Erdős-Rényi 随机图和随机正则图）上的稳定时间，或者更一般地说，具有强导通性质的图上的稳定时间，是否很小，甚至可能是关于 n 的（次）对数级？这是一个开放问题。（值得一提的是，我们对 RMM 的实验也显示出类似的行为变化，但未在图2中列出。）

图2（中）展示了我们通过实验得到的环 C_n 在多数模型中的稳定着色数量，以及定理 2.8 给出的期望估计值 Φ^n。同样，添加随机边会导致行为显著不同，即稳定着色的数量急剧减少。请注意，一个稳定着色对应于将节点划分为韧性集合。因此，如果将图的节点集划分为韧性集合的方式很多，那么就存在许多稳定着色。在具有强导通率性质的图中，例如上述随机图，对于规模不太大的集合，其边界上的边数是集合内部边数的两倍以上。因此，这类集合不会构成韧性集合。我们认为，另一个起作用的参数是顶点传递性，因为它提供了一定程度的“对称性”，可能促成韧性集合的形成。

因此，未来值得研究的是如何根据不同的图参数，尤其是导通率和顶点传递性，刻画稳定着色的数量。

图2（右）展示了在多数模型（MM）和 RMM 中，从 p-随机着色出发，在不同 p 和 $n = 2000$ 取值下，最终蓝色节点比例的变化。对于 C_n 上的 MM，我们的实验结果与定理 4.1 的结论所预期的结果基本吻合。对于 RMM，结果不符合预期的最终密度 p（见定理 4.2），这并不令人意外，因为我们知道该过程总会达到单色着色或闪烁构型（见推论 4.3）。（如果令 n 为奇数，例如 $n = 1999$，那么它只能达到单色着色。）切换到随机图后，该过程呈现出一种称为完美分类的行为，即如果 p 小于（大于）1/2，那么该过程会达到白色（相应地，蓝色）着色。这与先前研究的结果一致，参见 [48], 关于导通率与完美分类之间关系的讨论。另一方面，环图和二环图在一定程度上都表现出一种称为公平分类的性质，即蓝色节点最终比例的期望值“几乎”等于其初始比例 p。

6 结论

我们研究了两种非常基础的基于多数规则的意见扩散过程。通过提出若干新颖的证明技巧，我们为这些过程的稳定时间、周期性、获胜集的最小规模以及最终密度的期望给出了紧确界。

我们证明，对于某些图，RMM 的稳定时间和周期性可能是指数级的。刻画哪些图存在多项式上界将会很有意义。

我们开创了对稳定着色数量的研究，并为 MM 和 RMM 中的环图给出了紧确界。一个潜在的未来研究方向是确定哪些图参数决定稳定着色的数量。基于我们的实验发现，我们提出导通率和顶点传递性可能是候选因素。

先前研究已知，参见 [48],，对于完美分类，图具有强导通性质即可。公平分类的必要且充分条件是什么？

参考文献

[1] Mohammed Amin Abdullah 和 Moez Draief。2015。给定度序列的图上通过局部多数轮询实现全局多数共识。离散应用数学 180 (2015), 1–10。

[2] Mohammed Amin Abdullah 和 Nikolaos Fountoulakis。2018。优先连接图上自举渗流过程演化中的相变。随机结构与算法 52, 3 (2018), 379–418。

[3] Gideon Amir、Rangel Baldasso 和 Nissan Beilin。2023。多数动力学与中位数过程：联系、收敛性及若干新猜想。随机过程及其应用 155 (2023), 437–458。

[4] Aris Anagnostopoulos、Luca Becchetti、Emilio Cruciani、Francesco Pasquale 和 Sara Rizzo。2020。有偏意见动力学：细节决定成败。IJCAI国际人工智能联合会议 (2020), 53–59。

[5] Vincenzo Auletta、Angelo Fanelli 和 Diodato Ferraioli。2019。完全演化环境中的意见形成过程共识。AAAI人工智能会议论文集 (2019), 6022–6029。

[6] Vincenzo Auletta、Diodato Ferraioli 和 Gianluigi Greco。2018。意见通过多数动力学扩散时的共识推理。。载于 IJCAI国际人工智能联合会议。49–55。

[7] Vincenzo Auletta、Diodato Ferraioli 和 Gianluigi Greco。2020。多种产品市场中社会认同推荐的有效性。载于欧洲人工智能会议。19–26。

[8] Chen Avin、Zvi Lotker、Assaf Mizrachi 和 David Peleg。2019。社交网络中的多数投票与垄断。分布式计算与网络国际会议 (2019), 342–351。

[9] Paul Balister、Béla Bollobás、J Robert Johnson 和 Mark Walters。2010。随机多数渗流。随机结构与算法 36, 3 (2010), 315–340。

[10] József Balogh 和 Béla Bollobás。2006。超立方体上的自举渗流。概率论及相关领域 134, 4 (2006), 624–648。

[11] Jacques Bara、Omer Lev 和 Paolo Turrini。2021。预测社群存在时的投票结果。载于第20届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集。151–159。

[12] Itai Benjamini、Siu-On Chan、Ryan O'Donnell、Omer Tamuz 和 Li-Yang Tan。2016。单模图和随机图上多数动力学的收敛、一致与分歧。随机过程及其应用 126, 9 (2016), 2719–2733。

[13] Petra Berenbrink、Martin Hoefer、Dominik Kaaser、Pascal Lenzner、Malin Rau 和 Daniel Schmand。2022。社交网络中的异步意见动力学。载于第21届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集。109–117。

[14] Eli Berger。2001。常数规模的动态垄断集。组合理论杂志B辑 83, 2 (2001), 191–200。

[15] Shishir Bharathi、David Kempe 和 Mahyar Salek。2007。社交网络中的竞争性影响力最大化。载于网络与互联网经济学国际研讨会。Springer，306–311。

[16] Robert Bredereck 和 Edith Elkind。2017。操纵社交网络中的意见扩散。载于 IJCAI国际人工智能联合会议。国际人工智能联合会议。

[17] Markus Brill、Edith Elkind、Ulle Endriss、Umberto Grandi 等。2016。社交网络中偏好排名的成对扩散。IJCAI国际人工智能联合会议 (2016), 130–136。

[18] Debsoumya Chakraborti、Jeong Han Kim、Joonkyung Lee 和 Tuan Tran。2021。稀疏随机图上的多数动力学。随机结构与算法 (2021)。

[19] Ning Chen。2009。社交网络中影响力的可近似性。SIAM离散数学杂志 23, 3 (2009), 1400–1415。

[20] Dmitry Chistikov、Grzegorz Lisowski、Mike Paterson 和 Paolo Turrini。2020。意见扩散的收敛性是PSPACE完全的。AAAI人工智能会议论文集 (2020), 7103–7110。

[21] Devdatt P Dubhashi 和 Alessandro Panconesi。2009。随机化算法分析中的测度集中。剑桥大学出版社。

[22] Serge Galam。2008。社会物理学：Galam模型综述。现代物理学国际期刊C 19, 03 (2008), 409–440。

[23] Bernd Gärtner 和 Ahad N. Zehmakan。2017。颜色战争：基于多数规则的元胞自动机。载于语言与自动机理论及应用：第11届国际会议，LATA 2017，瑞典于默奥，2017年3月6日至9日，会议论文集。Springer，393–404。

[24] Bernd Gärtner 和 Ahad N Zehmakan。2018。随机正则图上的多数模型。载于拉丁美洲理论信息学研讨会。Springer，572–583。

[25] Bernd Gärtner 和 Ahad N Zehmakan。2020。民主意见动力学的阈值行为。统计物理学杂志 178 (2020), 1442–1466。

[26] E. Goles 和 J. Olivos。1980。广义阈值函数的周期行为。离散数学 30, 2 (1980), 187–189。

[27] Lawrence Gray。1987。具有统计力学性质的过程行为。载于渗流理论与无限粒子系统遍历理论。Springer，131–167。

[28] Pei-Ying Huang、Hsin-Yu Liu、Chin-Hui Chen 和 Pu-Jen Cheng。2013。社交多样性与动态影响传播对识别社交网络中影响者的影响。载于《2013年 IEEE/WIC/ACM 网络智能（WI）与智能代理技术（IAT）国际联合会议论文集》，第 1 卷。IEEE，410–416。

[29] Aviram Imber 和 Benny Kimelfeld。2021。独立随机选民选举获胜者的概率推断。载于《第20届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。

[30] Clemens Jeger 和 Ahad N Zehmakan。2019。双向自举渗流中的动态垄断集。《离散应用数学》262（2019），116–126。

[31] Harshavardhan Kamarthi、Priyesh Vijayan、Bryan Wilder、Balaraman Ravindran 和 Milind Tambe。2020。未知社交网络中的影响力最大化：学习有效图采样策略。载于《第19届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。

[32] Neel Karia、Faraaz Mallick 和 Palash Dey。2022。安全贿赂有多难？载于《第21届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。

[33] Samuel Kutin。2002。当差值以高概率有界时对 McDiarmid 不等式的扩展。芝加哥大学计算机科学系，芝加哥，伊利诺伊州，美国，技术报告 TR-2002-04（2002）。

[34] S Mishra、Jaikumar Radhakrishnan 和 Sivaramakrishnan Sivasubramanian。2002。关于近似最小垄断问题的难度。载于《软件技术与理论计算机科学基础国际会议》。Springer，277–288。

[35] Elchanan Mossel、Joe Neeman 和 Omer Tamuz。2014。社交网络中的多数动力学与信息聚合。《自主代理与多智能体系统》28（2014），408–429。

[36] Ahad N. Zehmakan 和 Serge Galam。2020。谣言传播：引发扩散或消退的触发因素。《混沌：非线性科学跨学科期刊》30卷7期（2020），073122。

[37] Charlotte Out 和 Ahad N Zehmakan。2021。社交网络中的多数投票：随机结交朋友，或坚持己见以压制精英节点。载于《IJCAI国际人工智能联合会议》。人工智能国际联合会议。

[38] Romualdo Pastor-Satorras 和 Alessandro Vespignani。2001。无标度网络中的流行病传播。《物理评论快报》86卷14期（2001），3200。

[39] Svatopluk Poljak 和 Daniel Turzík。1986。关于离散影响系统的前周期。《离散应用数学》13卷1期（1986），33–39。

[40] Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney。2021。多数动力学：个体的力量。arXiv 预印本 arXiv:2105.13301（2021）。

[41] Grant Schoenebeck、Biaoshuai Tao 和 Fang-Yi Yu。2020。贪心策略的局限：重新审视无向网络中的影响力最大化。载于《第19届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。

[42] Liangde Tao、Lin Chen、Lei Xu、Weidong Shi、Ahmed Sunny 和 Md Mahabub Uz Zaman。2022。随机选取选民的选举中，贿赂有多难？载于《第21届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。

[43] Linh Tran 和 Van Vu。2020。在随机网络中达成共识：少数个体的力量。载于《近似、随机化与组合优化（APPROX/RANDOM 2020）》。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心。

[44] Bryan Wilder 和 Yevgeniy Vorobeychik。2018。通过社会影响操控选举。载于《第17届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。

[45] Xicheng Yin、Hongwei Wang、Pei Yin 和 Hengmin Zhu。2019。社交网络中的基于代理的观点形成建模：社会心理学视角。《物理学A：统计力学及其应用》532（2019），121786。

[46] Abdolahad N Zehmakan。2019。图中的信息传播。博士学位论文。苏黎世联邦理工学院。

[47] Ahad N Zehmakan。2019。双向自举渗流中的两个相变。载于《第30届算法与计算国际研讨会（ISAAC 2019）论文集》，第149卷。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，5–1。

[48] Ahad N Zehmakan。2020。Erdős–Rényi随机图与扩展图中的意见形成。《离散应用数学》277（2020），280–290。

[49] Ahad N Zehmakan。2021。社交网络中的多数意见扩散：一种对抗性方法。载于《AAAI人工智能会议论文集》，第35卷，5611–5619。

A 附录

A.1 定理 2.3 的证明

我们先考虑初始着色中不存在两个颜色相同的相邻节点的情况。这仅在节点数为偶数时才可能 n。在这种情况下，过程会在两种交替着色之间不断切换，也就是说，过程已进入闪烁配置。在此设定下，稳定时间按定义为零。

现在，假设存在两个相邻的同色节点。那么，路径划分中的最长交替路径长度至多为 $n-2$。因此，根据引理 2.2，该过程至多经过 $\lceil (n-2)/2 \rceil = \lceil n/2 \rceil - 1$ 轮次后结束。

为证明该界是紧的，对于奇数（偶数）n，考虑一种着色，其中两个（三个）相邻节点为白色，其余节点构成一条长度为 $n-2$（分别为 $n-3$）的交替路径。根据引理 2.2，对于奇数 n，该过程需要 $\lceil (n-2)/2 \rceil$ 轮次结束；对于偶数 n，则需要 $\lceil (n-3)/2 \rceil$ 轮次结束。我们注意到，这两个值都等于 $\lceil n/2 \rceil - 1$。因此，该界是紧的。

A.2 引理 2.4 的证明

设 T_i 为马尔可夫链从状态 s_i 到状态 s_0 或 s_k 所需的期望轮数。显然，我们有 $T_0 = T_k = 0$。此外，从状态 s_i 出发，对于 $1 \le i \le k-1$，若以概率 1/4 转移到状态 s_{i+1}，那么除了这一步之外，我们还需要再经过 T_{i+1} 步才能完成。对于以概率 1/4 转移到 s_{i-1} 以及以概率 1/2 留在状态 s_i 的情况，也可作类似论证。因此，根据这三种可能性进行条件分析，我们得到：对于 $1 \le i \le k-1$，有 $T_i = \frac{1}{4}T_{i-1} + \frac{1}{4}T_{i+1} + \frac{1}{2}T_i + 1$。重新整理各项后，可得以下二阶非齐次线性递推：

$$\frac{1}{2}T_{i+1} - T_i + \frac{1}{2}T_{i-1} = -2, \quad T_0 = T_k = 0.$$

首先来看齐次方程 $\frac{1}{2}T_{i+1} - T_i + \frac{1}{2}T_{i-1} = 0$，其特征方程为 $\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$，其中 λ 是待确定的值。特征方程有重根 $\lambda = 1$。因此，通解的形式为 $T_i = A + Bi$，其中 A 和 B 为常数。

现在，我们需要为非齐次方程求一个“特解”。如果代入 Ci^2，并令常数为 C，则得到：

$$-2 = \frac{1}{2}C(i+1)^2 - Ci^2 + \frac{1}{2}C(i-1)^2 = C.$$

因此，非齐次方程的通解等于 $T_i = -2i^2 + A + Bi$。由于 $T_0 = 0$ 和 $T_0 = -2 * 0^2 + A + B * 0 = A$，我们有

$A = 0$ $T_k = 0$ $T_k = -2k^2 + A + Bk =$。此外，... $-2k^2 + Bk$ $B = 2k$
...意味着.....。因此，我们可以得出结论：$T_i = -2i^2 + 0 + 2ki = 2i(k-i)$。

A.3 定理 2.5 的紧致性

令 $l = n-5$ 对应偶数 n，$l = n-4$ 对应奇数 n。（注意，l 是奇数。）我们将一种 k-交替着色 定义为：包含一条长度为 $n-k$ 的蓝色路径，以及一条长度为 k 的交替路径，其中奇数 k 介于 5 和 l 之间。（交替路径以白色节点开始和结束。）考虑 $7 \le k \le l-2$ 时的一种 k-交替着色。通过类似于定理 2.5 证明中的论证，我们可以观察到，从这种着色出发，下一轮以概率

以 1/4 的概率得到 $(k+2)$-交替着色（同样，以 1/4 的概率得到 $(k-2)$-交替着色），以 1/2 的概率得到 k-交替着色。

假设过程从一个 l'-交替着色开始，其中 l' 是最接近 $l/2$ 的奇整数。假设我们将过程达到 5-交替着色或 l-交替着色视为稳定。注意，这显然是原始稳定时间的下界，因为要使过程稳定（即根据定理 2.7 达到白色/蓝色/闪烁构型），必须先达到这两种着色之一。因此，所定义的过程（从一个 l'-交替着色开始运行 RMM，并在达到 5-交替着色或 l-交替着色时停止）等价于引理 2.4 中定义的马尔可夫链，其中，对于 $0 \le i \le k = (l-5)/2$，s_i 对应于处于 $(2i+5)$-交替着色；特别地，s_0 和 s_k 分别对应于处于 5-交替着色和 l-交替着色。根据引理 2.4，达到 5-交替着色或 l-交替着色所需的轮次数为 $2 * \binom{l'-5}{2}\left(\binom{l-5}{2} - \binom{l'-5}{2}\right)$。利用 l' 等于 $l/2 \pm 1/2$ 且 $l \ge n-5$ 这一事实，很容易证明该值为 $\Omega(n^2)$。

A.4 定理 2.6 的证明

我们将 κ 定义为小于 $n-6$ 且能被 4 整除的最大整数。下面逐步说明如何构造图 G。考虑一条路径 $P := v_0, \cdots, v_{\kappa-1}$、一个大小为 3 的团 C_w，以及一个大小为 $n-3-\kappa$ 的团 C_b。要构造图 G，在 v_0 和 C_w 中的一个节点（称为 u_w）之间添加一条边，并在 $v_{\kappa-1}$ 和 C_b 中的一个节点（称为 u_b）之间添加一条边。（注意，所得图恰好有 n 个节点。）示例见图 3。

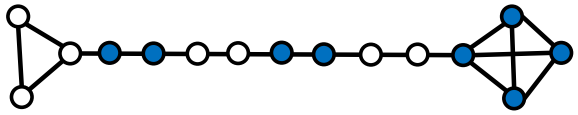


图 3：RMM 中具有指数周期性的构造，其中 $n = 15$。

注意到 C_w（类似地，C_b）是一个韧性集合。C_w（类似地，C_b）中的每个节点 u 都有超过一半的邻居位于 C_w（分别为 C_b）中。对于 u_w（分别为 u_b），这是因为它有 3 个邻居（分别有 $n-\kappa-3 \ge 3$ 个邻居），其中只有一个不在 C_w（分别为 C_b）中。对于其他节点，这显然成立，因为它们的所有邻居都在 C_w（分别为 C_b）中。

令 U 为所有满足 C_w 完全为白色且 C_b 完全为蓝色的着色构成的集合。注意，$|\mathrm{U}| = 2^\kappa = \Omega(2^n)$。我们将证明，对于任意两个着色 C，C′ ∈ U，从 C 到 C′都存在非零概率，即在相应马尔可夫链的底层有向图中存在一条从 C 到 C′的路径。因此，U 中的着色构成一个强连通分量。注意，从 U 中的着色到 U 外部的着色不存在边，因为这要求 C_w 或 C_b 中的某个节点改变其颜色，而这是不可能的，因为它们都是韧性集合。因此，

这实际上是一个吸收强连通分量，这意味着周期性为 $\Omega(2^n)$。

还需证明，对于 C、C′ ∈ U，我们可以从 C 到达 C′。定义着色 C*：当 (i mod 4) = 1 时，节点 i 为蓝色，否则为白色。（示例见图 3。）在 C* 中，路径上的每个节点都有一个蓝色邻居和一个白色邻居，因此会随机选择自己的颜色。这意味着从 C* 出发可以到达 U 中的任意着色。因此，只需证明从 U 中的每种着色 C 都存在一条路径到达 C*。首先，从 C 出发可以到达所有节点均为蓝色的着色。第一轮中，我们可以将节点 1 染成蓝色，因为它至少有一个蓝色邻居，即节点 2。接着，我们可以将节点 2 染成蓝色（同时节点 1 保持蓝色），因为它至少有一个蓝色邻居，即节点 1；以此类推。因此，经过 n 轮后，所有节点均为蓝色。现在，我们说明接下来的四轮中，以非零概率会发生以下更新：(i) 节点 1 变为白色（这是可能的，因为相邻节点 2 是白色）；(ii) 节点 2 变为蓝色（这是可能的，因为节点 1 是蓝色），节点 3 变为白色（这是可能的，因为节点 4 是白色）；(iii) 节点 4 变为白色，节点 5 变为蓝色；(iv) 节点 6 变为白色。（注意，我们假设未提及的节点都保持不变。这是可能的，因为所有其他节点至少有一个颜色相同的相邻节点。）这四轮之后，节点 1、5 为蓝色，节点 2、6 为白色，这与 C* 中它们的着色相同。接下来，我们对节点 9、10、13、14 等重复相同的过程。重复 n/4 次（即 4n 轮）后，我们便到达 C*。总之，可以得出结论：从 U 中任意着色出发，都有非零概率到达 C*。证明完毕。

A.5 定理 2.7 的证明

首先考虑多数模型。如果 n 是奇数，那么对于任意着色，必定至少存在两个相邻的同色节点。因此，根据引理 2.2，该过程必定会达到稳定着色。对于偶数 n，如果存在两个相邻的同色节点，那么同样可以应用上述论证。如果不存在，那么该过程处于闪烁构型。

现在考虑 RMM。设 n 为奇数。只需证明，从任意着色出发，都有可能（即概率非零）达到白色或蓝色着色。考虑任意着色 C。由于 n 为奇数，C 中必定存在两个相邻的同色节点。因此，存在一条单色路径（不妨设为蓝色）P，其长度至少为 2。下一轮中，P 上的所有节点都保持蓝色，且与 P 相邻的节点变为蓝色或保持蓝色的概率非零（因为这些节点都至少有一个蓝色邻居）。因此，路径 P 有可能不断延伸，直至覆盖整个环，从而达到蓝色着色。对于偶数 n，如果至少存在一条长度为 2 或更长的单色路径，那么上述论证仍然适用。否则，该过程处于闪烁构型。

A.6 定理 2.8 的证明

如果一个蓝色（分别为白色）节点的两个邻居都是白色（分别为蓝色），我们就称它为孤立节点。当且仅当着色中不存在孤立节点时，该着色在多数模型中稳定。如果不存在孤立节点，那么每个节点都有一个颜色相同的邻居，因此会保持其颜色；也就是说，该着色是稳定的。如果着色中存在孤立节点，那么它会在下一轮改变颜色；也就是说，该着色不稳定。因此，我们想要确定 $|S_n|$，其中 S_n 是环 C_n 上所有不存在孤立节点的着色所组成的集合。

令 R_n 表示环 C_n 上的红绿着色，其中红色节点的数量为偶数，且不存在两个相邻的红色节点。我们定义映射 $M : S_n \to R_n$。M 将蓝白着色 $C \in S_n$ 映射为红绿着色 $C' \in R_n$，具体如下：对于 $0 \le i \le n-1$，如果 $C(v_i) = C(v_{i+1})$（$i+1$ 按模运算计算 n），那么 $C'(v_i) = g$，否则 $C'(v_i) = r$（其中 g 和 r 分别表示绿色和红色）。生成的红绿着色 C' 属于 R_n，因为如果 C' 中有两个相邻的红色节点，那么 C 中就会有一个孤立节点（但这是不可能的，因为 C 属于 S_n）。此外，由于从蓝色变为白色以及从白色变为蓝色的次数之和必定为偶数，因此红色节点的数量为偶数。我们声称，对于每个 $C' \in R_n$，恰有两种 S_n 中的着色会映射到 C'。下面尝试构造一个预设着色 $C \in S_n$，使其映射到 C'。假设 $C(v_0) = b$；那么，对于 $1 \le i \le n-1$，$C(v_i)$ 由 $C(v_{i-1})$ 和 $C'(v_{i-1})$ 唯一确定。例如，如果 $C'(v_0) = r$，那么 $C(v_1) = w$（因为当 $C'(v_0) = r$ 时，v_0 和 v_1 必须是相反的颜色）；否则 $C(v_1) = b$。因此，对 C 应用映射 M 后，得到的着色按照构造在除 v_0、⋯、v_{n-2} 之外的所有节点上都与 C' 相同。注意，由于红色节点的数量为偶数，$C'(v_{n-1})$ 必须相同。我们可以从将 v_0 着为白色开始，构造另一种同样会映射到 C' 的着色。总之，我们已经论证，S_n 中的每种着色都恰好映射到 R_n 中的一种着色；而对于每个着色 $C' \in R_n$，恰有两种 S_n 中的着色会映射到 C'。这意味着 $|S_n| = 2|R_n|$。

为了计算 $r(n) := |R_n|$，我们先计算 $p(n)$，即长度为 n、不存在两个相邻红色节点且红色节点数为偶数的红绿路径的数量。初始值 $p(1)$、$p(2)$、$p(3)$ 和 $p(4)$ 很容易算出。此外，对于 $n \ge 5$，我们有 $p(n) = p(n-1) + p(n-4) + \cdots + p(1) + 2$。这是因为，对于一条 n 节点的路径 $v_0 \cdots v_{n-1}$，如果我们将 v_0 染成绿色，那么其余部分有 $p(n-1)$ 种着色方式。如果我们将 v_0 染成红色，那么第二个节点必须是绿色，并且从 v_2 到 v_{n-1} 至少有一个红色节点（因为红色节点数必须为偶数）。设 v_j 是介于 2 和 $n-1$ 之间、满足 v_j 为红色的最小 j。若 $j \le n-3$，则 v_{j+1} 必须为绿色，其余部分有 $p(n-j-2)$ 种着色方式。若 $j = n-2$，则 v_{n-1} 必须染成绿色，这只有 1 种着色方式。$j = n-1$ 也对应一种着色方式。这就证明了递推关系：对于 $n \ge 5$，有 $p(n) = p(n-1) + p(n-4) + \cdots + p(1) + 2$。这是一个斐波那契型数列，其上下界在相差一个常数因子的范围内均为 Φ^n。因此，我们得到 $r(n) = \Theta(\Phi^n)$。显然，$r(n) \le p(n)$。此外，若我们将环 $C_n = (v_0, \cdots v_{n-1})$ 中的 v_0 染成绿色，那么其余节点有 $p(n-1)$ 种着色方式。因此，我们有 $\Theta(\Phi^{n-1}) \le r(n) = \Theta(\Phi^n) \le p(n) = \Theta(\Phi^n)$。这意味着 $r(n) = \Theta(\Phi^n)$，因为 $s(n) = 2r(n)$。（实际上，如果准确求解该递推关系，我们会得到 $s(n)$ 等于 Φ^n，相差若干低阶加性项。）

A.7 定理 3.1 的证明

考虑任意正整数 k。根据 [14], 中的定理 1.1，存在一个有 n 个节点的图 $G = (V = \{v_1, \cdots v_n\}, E)$，其中 $n \ge k$ 为某个值，且集合 $B := \{v_1, \cdots v_{18}\}$ 是多数模型中的一个获胜集。考虑图 G 的两个副本，即 $G_1 = (V_1 =$

$\{v(1)_1, \cdots v(1)_n\}$ E_1) 和 $G_2 = (V_2 = \{v(2)_1, \cdots v(2)_n\}$ E_2)。为了构造所需的图 H，若 $d^G(v_i)$ 为偶数，则对每个 $1 \le i \le n$ 添加边 $\{v(1)_i, v(2)_i\}$。

考虑模型 M，它与多数模型 MM 相同，但采用不同的平局打破规则。令 $C_t(v)$ 表示在 MM 中、假设 $C_0|_B = b$ 且 $C_0|_{V \setminus B} = w$ 时，图 G 上节点 $v \in V$ 在第 $t \in \mathbb{N}$ 轮的颜色。令 $C'_t(v)$ 表示在模型 M 中、假设 $C'_0|_H = b$ 且 $C'_0|_{V_H \setminus B_H} = w$ 时，图 H 上节点 $v \in V_H = V_1 \cup V_2$ 在 $t \in \mathbb{N}$ 时的颜色，其中 $B_H := \{v(1)_1, \cdots v(1)_{18}\} \cup \{v(2)_1, \cdots v(2)_{18}\}$。我们声称，对于每个 $t \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le n$，都有 $C_t(v_i) = C'_t(v(1)_i) = C'_t(v(2)_i)$。结合上一陈述与 $C_T|_V = b$ 对某个 $T \in \mathbb{N}$ 成立这一事实，可推出 $C'_T|_{V_H} = b$。因此，H 是一个具有超过 k 个节点的图，并且在模型 M 中拥有一个大小为 36 的获胜集。

利用归纳法，我们证明对于每个 $t \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le n$，都有 $C_t(v_i) = C'_t(v(1)_i) = C'_t(v(2)_i)$。根据构造，这对基例 $t = 0$ 成立。作为归纳假设，假设该命题对某个 $t - 1 \ge 0$成立。我们证明它对 t也成立。考虑任意一个 $1 \le i \le n$。如果 $d^G(v_i)$ 是奇数，那么 $d^G(v_i) = d^H(v(1)_i) = d^H(v(2)_i)$，并且根据归纳假设，$v(1)_i$(同理，$v(2)_i$)在 C'_{t-1} 中的蓝色节点数与 C_{t-1} 中的节点 v_i 完全相同。此外，由于度为奇数，不会出现平局，即 M 和 MM 的更新相同。因此，我们有 $C_t(v_i) = C'_t(v(1)_i) = C'_t(v(2)_i)$。现在，假设 $d^G(v_i)$ 是偶数。我们来关注第 t 轮中 $v(1)_i$的颜色。（同样的论证也适用于 $v(2)_i$。）如果 $|NC_b^{t-1}(v_i)| > |NC_w^{t-1}(v_i)|$，那么实际上我们知道 $|NC_b^{t-1}(v_i)| \ge |NC_w^{t-1}(v_i)| + 2$，因为 $d^G(v_i)$ 是偶数。因此，根据归纳假设，在第 $(t-1)$ 轮中，$v(1)_i$ 在 G_1 中的邻域里，蓝色节点数与白色节点数之差至少为 2。这意味着，无论它的另一个邻居，即 $v(2)_i$，是什么颜色，$v(1)_i$ 都会在下一轮按照模型 M 选择蓝色。对于 $|NC_w^{t-1}(v_i)| > |NC_b^{t-1}(v_i)|$，类似的论证同样成立。还需考虑 $|NC_w^{t-1}(v_i)| = |NC_b^{t-1}(v_i)|$。在这种情况下，节点 v_i 在第 t 轮保持其颜色。对于 $v(1)_i$，情况也一样，因为它在 G_1 中恰好有相同数量的蓝色和白色邻居，因此它会选择其额外邻居（即 $v(2)_i$）的颜色；根据归纳假设，该邻居颜色相同。因此，无论平局打破规则如何，它也会保持自己的颜色。（一般而言，由于 H中的所有节点度数都是奇数，因此不会出现平局。）

A.8 定理 3.2 的证明

对于 RMM，只需证明：如果初始着色中哪怕只有一个白色节点，那么过程不以蓝色着色结束的概率也非零。设一个白色节点构成一条长度为一的交替路径，环的其余部分均为蓝色。此时，交替路径可能在每一轮都从两端扩展。经过 $\lceil n/2 \rceil - 1$ 轮后，过程会到达闪烁构型（如果 n 为偶数），或出现两个相邻白色节点的着色（如果 n 为奇数）。在第一种情况下，过程永远不会到达蓝色着色；在第二种情况下，这条白色路径可能在每一轮都扩展，直到过程到达白色着色。因此，不存在大小为 $n-1$ 或更小的获胜集。

考虑 MM 中的一个获胜集 B。对于任意两个相邻节点，至少有一个必须属于 B。否则，若初始时只有 B 中的节点为蓝色，那么这两个相邻节点会被着为白色，并永远保持白色，这与 B 是获胜集相矛盾。这意味着 $|B| \ge \lceil n/2 \rceil$。当 n 为奇数时，这意味着 $|B| \ge \lfloor n/2 \rfloor + 1$。当 n 为偶数时，如果 B 外不存在两个相邻节点，且 $|B| = \lceil n/2 \rceil = n/2$，那么这就意味着只有奇数（或偶数）位置上的节点属于 B。在这种情况下，B 不是获胜集，因为从只有 B 为蓝色的着色开始，过程会处于闪烁构型。因此，在偶数情况下，我们有 $|B| \ge n/2 + 1 = \lfloor n/2 \rfloor + 1$。此外，$\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 的界是紧的。对于奇数和偶数的 n，集合 $\{v_i : (i \bmod 2) = 1\} \cup \{v_0\}$ 是一个大小为 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 的获胜集。

A.9 推论 4.3 的证明概要

对于奇数 n，根据定理 2.7，该过程必然达到白色或蓝色着色。令 b_f 表示最终着色中蓝色节点的数量。我们有 $\mathbb{E}[b_f] = \sum_{i=1}^{n} i * \mathbb{P}[b_f = i] = n * \mathbb{P}[b_f = n]$，其中最后一个等式使用了上述陈述。此外，根据定理 4.2，我们有 $\mathbb{E}[b_f] = pn$。因此，我们得到 $\mathbb{P}[b_f = n] = p$。

对于偶数 n，由于图 C_n 是一个二部图，其节点集可以划分为两个子集 L 和 R，这两个子集都构成大小为 $n/2$ 的独立集。根据定理 2.7，经过 f 轮次后，对于某个偶数 f，L 中的所有节点（R 中的节点同理）都具有相同的颜色。使用与奇数情形类似的论证，并利用 L 和 R 的对称性，我们可以证明，在第 f 轮，L 中所有节点（R 中的节点同理）均为蓝色的概率等于 p。

此外，通过简单的归纳论证可以证明，在轮次 t（其中t为某个偶整数）中，L中的节点（R同理）的颜色只取决于第 0 轮 L（分别是 R）中节点的颜色（即其初始着色）。这意味着，在轮次 t中，L中节点的颜色独立于 R中节点的颜色。

结合前两段的结论，我们可以得出：在轮次 f，L和 R均为蓝色（即全蓝着色）的概率为 p^2，L和 R均为白色（即全白着色）的概率为$(1-p)_2$，而其中一个为蓝色、另一个为白色（即闪烁构型）的概率为 $2p(1-p)$。