arXiv:2302.06777v1 [math.FA] 14 Feb 2023

数值半径不等式的凸块方法

MOHAMMAD SABABHEH、CRISTIAN CONDE 和 HAMID REZA MORAD I

Abstract. 本文采用一种简单的凸方法和块技术，为希尔伯特空间算子的数值半径不等式导出若干新的精细版本。这包括对算子范数、其笛卡尔分量、其数值半径、两个算子乘积的数值半径以及 Aluthge 变换的比较。

1. Introduction

令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示作用于希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的所有有界线性算子所构成的 C^*–代数。若算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足对每个 $x \in \mathcal{H}$，都有 $\langle Tx, x\rangle \geq 0$，则称其为正算子。在这种情况下，我们简记为 $A \geq O$. 正算子在理解希尔伯特空间的几何中发挥着重要作用；这些算子构成了更广泛的自伴算子类中的一个特殊子类；也就是说， $A^* = A$，其中 A^* 表示 A的共轭。自伴算子最基本的性质之一是

$$\|T\| = \omega(T) = r(T),\ T \text{ is normal},$$

其中， $\|\cdot\|$、 ω（·）和 r（·）分别表示算子范数、数值半径和谱半径。事实上，对于一般的 $T \in \mathcal{B}$（$\mathcal{H}$），有

$$\|T\| \geq \omega(T) \geq r(T).$$

虽然 $\|\cdot\|$ 和 $\omega(\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的范数，但 $r(\cdot)$ 不是。事实上，我们有如下等价关系：[6,定理 1.3-1]

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|,\ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{1.1}$$

众多研究人员的核心兴趣一直在于改进上述不等式，并获得 $\|\cdot\|$ 与 $\omega(\cdot)$ 之间新的可能关系。这是因为 $\|\cdot\|$ 比 $\omega(\cdot)$ 更容易计算，更不用说人们对于获得此类新关系的数学兴趣了。

2010年数学主题分类。主要分类：47A12、47A30；次要分类：15A60、47B15。关键词和短语：数值半径、范数不等式、笛卡尔分解、三角不等式。1

的笛卡尔分解 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 $T = \Re T + \mathrm{i}\Im T$，其中 $\Re T = \frac{T+T^*}{2}$和$\Im T = \frac{T-T^*}{2\mathrm{i}}$分别是 的实部和虚部 T。尽管 $\|T\| \geq \omega(T)$ 始终成立，但对于 T的笛卡尔分量，以下逆向关系成立，[8, 见定理 2。1]

$$\|\Re T\| \leq \omega(T), \ \|\Im T\| \leq \omega(T). \tag{1.2}$$

尽管 $\omega(\cdot)$ 的原始定义是基于内积值的上确界（即，$\omega(T) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$），但以下恒等式极为有用 [14]

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left\|\Re \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} T\right\| = \omega(T). \tag{1.3}$$

进一步探究 $\|\cdot\|$ 与 $\omega(\cdot)$ 之间的关系，文献 [8, 定理 2.3] 已证明

$$\|A+B\| \leq 2\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right) \leq \|A\| + \|B\|; \tag{1.4}$$

这是利用矩阵算子的数值半径对范数三角不等式作出的一个有趣改进。

式 (1.4) 中出现矩阵算子项并非偶然。事实上，在研究数值半径不等式时，许多结果都包含此类项。例如，文献 [7,定理 2.4]已证明

$$\frac{\max\{\omega(S+T), \omega(S-T)\}}{2} \leq \omega\left(\begin{bmatrix} O & S \\ T & O \end{bmatrix}\right), \text{ for any } S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \tag{1.5}$$

一个不等式　该不等式已通过形式为 [7,定理 2.4] 的结果以某种方式得到反转

$$\omega\left(\begin{bmatrix} O & S \\ T & O \end{bmatrix}\right) \leq \frac{\omega(S+T) + \omega(S-T)}{2}, \text{ for any } S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{1.6}$$

上述矩阵算子不仅可与数值半径项进行比较，我们还有[13,定理 2。1]

$$2\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right) \leq \max\{\|A\|, \|B\|\} + \frac{1}{2}\left(\left\||A|^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}\right\| + \left\||B^*|^{\frac{1}{2}}|A^*|^{\frac{1}{2}}\right\|\right), \tag{1.7}$$

对于任意 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

后一个不等式的右侧与戴维森–鲍尔不等式有关，该不等式已在[2, 定理 5] 中推广为以下形式

$$\|A+B^*\| \leq \max\{\|A\|, \|B\|\} + \max\{\| \, |A|^{1/2}|B^*|^{1/2}\|, \| \, |A^*|^{1/2}|B|^{1/2}\|\}. \tag{1.8}$$

凸性是推导矩阵不等式的重要工具，无论是标量凸性还是算子凸性。回顾一下，若函数 $f: J \to \mathbb{R}$ 在区间 J 上满足 $f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$，则称其为凸函数，其中 a、$b \in J$和 $0 \leq \lambda \leq 1$均成立。在凸

分析中，Hermite-Hadamard不等式指出，对于定义在 $[0,1]$上的凸函数 f，有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq \frac{f(0)+f(1)}{2}, \tag{1.9}$$

是不可或缺的工具。注意，这个不等式为 f 的中点凸性条件提供了改进。

本文旨在借助矩阵算子和凸函数，进一步探究数值半径与算子范数不等式。为此，我们首先注意到，由于 $\omega(\cdot)$ 和$\|\cdot\|$ 都是范数，因此很容易验证函数

$$f(t)=\omega\left((1-t)T+tT^*\right), \text{ and } g(t)=\|(1-t)T+tT^*\|$$

在 $[0,1]$ 上是凸函数。

随着大量研究致力于凸函数不等式，以下不等式已在[5] 中针对凸函数 f 得出：$[0,1]\to\mathbb{R}$ 并在相关文献中发挥了重要作用

$$f(t)\leq(1-t)f(0)+tf(1)-2r\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

and

$$(1-t)f(0)+tf(1)\leq f(t)+2R\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

其中 $r=\min\{t,1-t\}$, $R=\max\{t,1-t\}$，且 $0\leq t\leq 1$。关于这些不等式的一些应用和进一步讨论，请参阅 [11, 12]。

将上述后续不等式应用于凸函数 f 和 g，可得式（1.2）的以下改进和逆不等式。

$$\frac{\omega(T)-\omega\left((1-t)T+tT^*\right)}{2R}\leq\omega(T)-\|\Re T\|\leq\frac{\omega(T)-\omega\left((1-t)T+tT^*\right)}{2r}. \tag{1.10}$$

此外，

$$\frac{\|T\|-\|(1-t)T+tT^*\|}{2R}\leq\|T\|-\|\Re T\|\leq\frac{\|T\|-\|(1-t)T+tT^*\|}{2r}. \tag{1.11}$$

通过这种方法，我们能够给出上述大多数不等式的精细版本和推广，并得出一些乘积不等式，从而得到一些有趣的关系。我们将支配 $\omega(AB)$ 的不等式称为乘积不等式。众所周知，$\omega(\cdot)$ 不是次乘性的。关于这一性质的进一步讨论，请参阅 [10] 。有趣的是，我们的方法将导出 $\omega(AB)$ 与 $\|A+B\|$之间的一个关系，

并将其应用于矩阵算术-几何平均不等式，该不等式指出 [3, 定理 IX.4。5]

$$\|A^{1/2}B^{1/2}\| \leq \frac{1}{2}\|A+B\|,\ A,B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), A,B \geq O.$$

也就是说，我们利用数值半径得到了这一不等式的一个新改进；关于这一方向的一种新方法，见下文的注记 2.3 。

为实现我们的目标，需要以下一些辅助结果。

引理 1.1. 设 $A,B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

(1) 若 $n \in \mathbb{N}$，则 [6, 定理 2.1-1]

$$\omega(A^n) \leq \omega^n(A). \tag{1.12}$$

(2) 算子范数满足恒等式

$$\left\| \begin{bmatrix} O & A \\ A^* & O \end{bmatrix} \right\| = \|A\|. \tag{1.13}$$

2. Main Result

本节将介绍我们的结果，首先给出一个简单的推论，它可通过对1.9）应用于

$$f(t) = \omega\left((1-t)T + tT^*\right) \text{ and } g(t) = \|(1-t)T + tT^*\|$$

从而改进了（1.2）。

命题 2.1。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\|\Re T\| \leq \int_0^1 \omega\left((1-t)T + tT^*\right)dt \leq \omega(T), \tag{2.1}$$

and

$$\|\Im T\| \leq \int_0^1 \omega\left((1-t)T^* - tT\right)dt \leq \omega(T). \tag{2.2}$$

此外,

$$\|\Re T\| \leq \int_0^1 \|(1-t)T + tT^*\|\,dt \leq \|T\|, \tag{2.3}$$

and

$$\|\Im T\| \leq \int_0^1 \|(1-t)T^* - tT\|\,dt \leq \|T\|. \tag{2.4}$$

恒等式（1.3）提供了另一种计算数值半径的公式，无需借助内积。值得注意的是，不等式（2.1）和（2.2）给出了以下替代恒等式，有助于更好地理解数值半径的性质。

推论 2.1。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\omega(T) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \omega\left((1-t)\, e^{\mathrm{i}\theta} T + t e^{-\mathrm{i}\theta} T^* \right) dt \right) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \omega\left((1-t)\, e^{-\mathrm{i}\theta} T^* - t e^{\mathrm{i}\theta} T \right) dt \right).$$

证明。 将 T 替换为 $e^{\mathrm{i}\theta}T$ 在（2.1）中，我们得到

$$\left\| \Re \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} T \right\| \le \int_0^1 \omega\left((1-t)\, e^{\mathrm{i}\theta} T + t e^{-\mathrm{i}\theta} T^* \right) dt \le \omega(T).$$

对 $\theta \in \mathbb{R}$取上确界， （1.3）推出第一个恒等式。第二个恒等式由（2.2）并注意到

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left\| \Im e^{\mathrm{i}\theta} T \right\| = \omega(T).$$

□

下面的 结果涉及（1.1 ）.

命题 2.2。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\omega(T) \le \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \le \|T\|,$$

其中

$$\lambda_1 = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left\| (1-t)\, e^{\mathrm{i}\theta} T + t e^{-\mathrm{i}\theta} T^* \right\| dt \right) \text{ and } \lambda_2 = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left\| (1-t)\, e^{-\mathrm{i}\theta} T^* - t e^{\mathrm{i}\theta} T \right\| dt \right).$$

证明。 由不等式（2.3），可得

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \|\Re \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} T\| \le \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left\| (1-t)\, e^{i\theta} T + t e^{-i\theta} T^* \right\| dt \right) \le \|T\|.$$

最后，由（1.3）可得

$$\omega(T) \le \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left\| (1-t)\, e^{i\theta} T + t e^{-i\theta} T^* \right\| dt \right) \le \|T\|.$$

通过类似的证明，并借助（2.4），也可得

$$\omega(T) \le \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left\| (1-t)\, e^{-i\theta} T^* - t e^{i\theta} T \right\| dt \right) \le \|T\|.$$

至此，证明完成。 □

不等式（2.1）和（2.2）中的第二个不等式可以如下反向得到。

命题 2.3. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\frac{1}{2}\omega(T) \leq \begin{cases} \int_0^1 \omega\left((1-t)T + tT^*\right) dt, \\ \int_0^1 \omega\left((1-t)T^* - tT\right) dt. \end{cases}$$

证明. 对任意 $0 \leq t \leq 1$，容易证明

$$|1-2t|\,\omega(T) \leq \min\left\{\omega\left((1-t)T + tT^*\right), \omega\left((1-t)T^* - tT\right)\right\}.$$

在区间 $[0,1]$ 上对其积分，即得所需结果。 □

以下结果同样成立。

定理 2.1. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\|T\| \leq 2\int_0^1 \|(1-t)T + tT^*\|\, dt \leq 2\|T\|,$$

and

$$\omega(T) \leq 2\int_0^1 \omega\left((1-t)T + tT^*\right) dt \leq 2\omega(T).$$

证明. 设 $h(T) = \|T\|$ 对任意 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则， h 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的凸函数。对每个$t \in [0,1]$，有

$$h((1-2t)T) + h((2t-1)T^*) = h((1-t)A + tB) + h((1-t)B + tA),$$

其中 $A = (1-t)T + tT^*$和 $B = -(1-t)T^* - tT$。于是，

$$\begin{aligned} h((1-2t)T) + h((2t-1)T^*) &= h((1-t)A + tB) + h((1-t)B + tA) \\ &\leq (1-t)h(A) + th(B) + (1-t)h(B) + th(A) \\ &= h(A) + h(B) \\ &= h((1-t)T + tT^*) + h(-(1-t)T^* - tT) \\ &= h((1-t)T + tT^*) + h((1-t)T^* + tT). \end{aligned}$$

将前一个不等式从 $t = 0$ 积分到 $t = 1$，可得

$$\int_0^1 |1-2t|(\|T\| + \|T^*\|)\, dt \leq 2\int_0^1 \|(1-t)T + tT^*\|\, dt.$$

因此，

$$\|T\| = \frac{1}{2}(\|T\| + \|T^*\|) \leq 2\int_0^1 \|(1-t)T + tT^*\|\, dt.$$

另一方面，

$$\|(1-t)T + tT^*\| \leq (1-t)\|T\| + t\|T^*\| = \|T\|; 0 \leq t \leq 1.$$

对最后一个不等式进行积分，再乘以 2，即可完成第一个不等式的证明。第二个不等式的证明类似。□

继续利用范数的凸性，可使用不等式（1.10）得到（1.1）中第一个不等式的如下改进形式。

定理 2.2. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则对任意 $0 \leq t \leq 1$,

$$\frac{1}{2}\|T\| + \frac{1}{4R}\left(2\omega(T) - \left(\omega\left((1-t)T^* - tT\right) + \omega\left((1-t)T + tT^*\right)\right)\right) \leq \omega(T),$$

其中 $R = \max\{t, 1-t\}$。

证明。（1.10）中的第一个不等式可写为

$$\|\Re T\| + \frac{\omega(T) - \omega\left((1-t)T + tT^*\right)}{2R} \leq \omega(T). \tag{2.5}$$

将 $\mathrm{i}T^*$ 替换为 T，我们推得

$$\|\Im T\| + \frac{\omega(T) - \omega\left((1-t)T^* - tT\right)}{2R} \leq \omega(T). \tag{2.6}$$

由（2.5）和（2.6），可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|T\| + \frac{1}{4R}\left(2\omega(T) - \left(\omega\left((1-t)T^* - tT\right) + \omega\left((1-t)T + tT^*\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\|\Re T + \mathrm{i}\Im T\| + \frac{1}{4R}\left(2\omega(T) - \left(\omega\left((1-t)T^* - tT\right) + \omega\left((1-t)T + tT^*\right)\right)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|\Re T\| + \|\Im T\|\right) + \frac{1}{4R}\left(2\omega(T) - \left(\omega\left((1-t)T^* - tT\right) + \omega\left((1-t)T + tT^*\right)\right)\right)\\
&\qquad \text{（根据通常算子范数的三角不等式）}\\
&\leq \omega(T)。
\end{aligned}$$

证明至此完成。□

作为定理 2.2的推论，我们得到以下推论。我们的结果大幅改进了 [7, (4.3)] 和 [7, (4.2)], 。

推论 2.2. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么，

$$\frac{1}{2}\|T\| + \frac{1}{2}\left|\|\Im T\| - \|\Re T\|\right| \leq \frac{1}{2}\|T\| + \frac{1}{2}\left(2\omega(T) - \left(\|\Im T\| + \|\Re T\|\right)\right) \leq \omega(T).$$

证明。 第二个不等式可由定理 2.2 结合 $t=\frac{1}{2}$. 另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big|\|\Im T\|-\|\Re T\|\Big| &= \frac{1}{2}\Big|\|\Im T\|-\omega(T)+\omega(T)-\|\Re T\|\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\Big|\|\Im T\|-\omega(T)\Big|+\Big|\omega(T)-\|\Re T\|\Big|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega(T)-\|\Im T\|+\omega(T)-\|\Re T\|\right), \quad \text{(by the inequality (1.3))}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

作为推论 2.2的推论，我们刻画了数值半径等于算子范数一半的情形。以下结果与 Yamazaki 先前在 [14]中得到的定理 3.1 有关。

命题 2.4. 设 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么，$\frac{\|T\|}{2}=\omega(T)$ 当且仅当对于任意 $\theta\in\mathbb{R}$.
$\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\frac{\|T\|}{2}$

证明。 若 $\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\frac{\|T\|}{2}$对于任意 $\theta\in\mathbb{R}$，则由（1.3）可得 $\omega(T)=\frac{\|T\|}{2}$。反过来，设 $\omega(T)=\frac{\|T\|}{2}$，于是由推论 2.2可得

$$\frac{1}{2}\|T\|=\frac{1}{2}\|T\|+\frac{1}{2}\Big|\|\Im T\|-\|\Re T\|\Big|=\frac{1}{2}\|T\|+\frac{1}{2}\left(2\omega(T)-(\|\Im T\|+\|\Re T\|)\right)=\omega(T).$$

若将 T 中的 $e^{\mathrm{i}\theta}T$ 替换为 $\theta\in\mathbb{R}$，则有

$$\frac{1}{2}\|T\|=\frac{1}{2}\|T\|+\frac{1}{2}\Big|\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|-\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|\Big|=\frac{1}{2}\|T\|+\frac{1}{2}\left(2\omega(T)-\left(\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|+\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|\right)\right)=\omega(T).$$

这意味着 $\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|$ 且 $2\omega(T)=\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|+\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|$，即对于任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 我们得到

$$\|\Im e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\|=\frac{\|T\|}{2}.$$

□

推论 2.3. 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。则，

$$\begin{aligned}\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right) &\geq \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right\|+\frac{1}{2}\left(2\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)-(\|A-B^*\|+\|A+B^*\|)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right\|+\frac{1}{2}\Big|\|A-B^*\|-\|A+B^*\|\Big|.\end{aligned}$$

证明。 这显然由推论 2.2 通过考虑 $T=\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}$ 以及等式（1.13）可得。

□

另一方面，(1.3) 中第二个不等式的反向不等式可通过如下方式得到。

定理 2.3. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则对于任意 $0 \leq t \leq 1$,

$$\|T\| \leq \omega(T) + \frac{\|T\| - \|(1-t)T + tT^*\|}{2r} - \frac{\omega(T) - \omega((1-t)T + tT^*)}{2R},$$

其中 $r =$最小值 $\{t, 1-t\}$ 且 $R =$最大值 $\{t, 1-t\}$。特别地,

$$\frac{\omega(T) - \omega((1-t)T + tT^*)}{2R} \leq \frac{\|T\| - \|(1-t)T + tT^*\|}{2r}.$$

证明。 不等式 (1.10) 和 (1.11) 可推出

$$\begin{aligned}\|T\| &\leq \|\Re T\| + \frac{\|T\| - \|(1-t)T + tT^*\|}{2r} \\ &\leq \omega(T) + \frac{\|T\| - \|(1-t)T + tT^*\|}{2r} - \frac{\omega(T) - \omega((1-t)T + tT^*)}{2R}.\end{aligned}$$

这就证明了第一个断言。注意到 $\omega(T) \leq \|T\|$.

□, 第二个断言由第一个断言即可得出。

延续本文的主题，在下面的结果中，借助于.....，利用算子矩阵凸组合的数值半径来改进三角不等式

$$\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A + tB \\ (1-t)B^* + tA^* & O \end{bmatrix}\right) \leq \omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right); 0 \leq t \leq 1.$$

定理 2.4。设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么对于任意 $0 \leq t \leq 1$,

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| - \frac{\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right) - \omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A + tB \\ (1-t)B^* + tA^* & O \end{bmatrix}\right)}{R},$$

其中 $R =$最大 $\{t, 1-t\}$。

证明。设 $T=\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}$ 在 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$上。由（1.10），可写为

$$
\begin{aligned}
&\|A+B\| \\
&=\|T+T^*\| \\
&=2\|\Re T\| \\
&\leq 2\omega(T)-\frac{\omega(T)-\omega\left((1-t)T+tT^*\right)}{R} \\
&=2\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\right\|-\frac{\omega(T)-\omega\left((1-t)T+tT^*\right)}{R} \\
&=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{bmatrix} O & e^{\mathrm{i}\theta}A+e^{-\mathrm{i}\theta}B \\ e^{\mathrm{i}\theta}B^*+e^{-\mathrm{i}\theta}A^* & O \end{bmatrix}\right\|-\frac{\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)}{R} \\
&=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|e^{\mathrm{i}\theta}A+e^{-\mathrm{i}\theta}B\right\|-\frac{\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)}{R} \\
&\leq \|A\|+\|B\|-\frac{\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)}{R},
\end{aligned}
$$

其中，利用算子范数的三角不等式得到了最后一个不等式。证明至此完成。

□

注记 2.1. 令 $T=\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)+\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)B-tA \\ (1-t)A^*-tB^* & O \end{bmatrix}\right) \\
&=\omega((1-t)T+tT^*)+\omega((1-t)T^*-tT) \\
&\leq 2\omega(T) \quad (\textit{by the triangle inequality}) \\
&=2\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right),
\end{aligned}
$$

对于任意 $0 \le t \le 1$。因此，注意到 (1.5) 我们有

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\omega\left((1-t)\left(B+A^*\right)-t\left(A+B^*\right)\right),\omega\left((1-t)\left(B-A^*\right)+t\left(B^*-A\right)\right)\right\}\\
&\quad+\max\left\{\omega\left((1-t)\left(A+B^*\right)+t\left(B+A^*\right)\right),\omega\left((1-t)\left(A-B^*\right)+t\left(B-A^*\right)\right)\right\}\\
&\le 2\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)+2\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)B-tA \\ (1-t)A^*-tB^* & O \end{bmatrix}\right)\\
&\le 4\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

特别是,

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\|\Im A-\Im B\|,\|\Re A-\Re B\|\right\}+\max\left\{\|\Re A+\Re B\|,\|\Im A+\Im B\|\right\}\\
&\le \|A+B\|+\|A-B\|\\
&\le 4\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}\tag{2.7}$$

另外注意到 (1.6)，由 (2.7)中的第二个不等式可得以下有趣的不等式

$$\begin{aligned}
\frac{\|A+B\|+\|A-B\|}{2} &\le 2\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right)\\
&\le \omega\left(A+B^*\right)+\omega\left(A-B^*\right).
\end{aligned}$$

下面的结果给出了（1.4）的积分形式；其中，利用算子矩阵凸组合的数值半径来改进三角不等式。由于其证明与定理 2.4类似，故不再详述。

定理 2.5. 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\|A+B\|\le 2\int_0^1 \omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)dt\le \|A\|+\|B\|.$$

矩阵算子 $\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}$ 还可用于得到对（1.8）的以下改进。

定理 2.6. 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么对于任意 $0\le t\le 1$,

$$\begin{aligned}
&\|A+B\|+\frac{\omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix} O & (1-t)A+tB \\ (1-t)B^*+tA^* & O \end{bmatrix}\right)}{R}\\
&\le \max\left\{\|A\|,\|B\|\right\}+\frac{1}{2}\left(\left\||A|^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}\right\|+\left\||B^*|^{\frac{1}{2}}|A^*|^{\frac{1}{2}}\right\|\right),
\end{aligned}$$

其中 $R=\max\{t,1-t\}$。特别地，如果 A 和 B 是自伴的，则得到

$$\|A+B\|+\frac{\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix}O & (1-t)A+tB\\ (1-t)B+tA & O\end{bmatrix}\right)}{R}\leq\max\{\|A\|,\|B\|\}+\left\||A|^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}\right\|.$$

证明。 将（1.7）与不等式（2.5结合起来，即可得到所需结果。 □

注记 2.2。 这里值得一提的是，如果 A 和 B 是正算子，那么定理 *2.6*可化为 [9]

$$\|A+B\|\leq\max\{\|A\|,\|B\|\}+\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\|.$$

这由关于正算子 [1] 的以下结论可得

$$\omega\left(\begin{bmatrix}O & (1-t)A+tB\\ (1-t)B+tA & O\end{bmatrix}\right)=\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\|A+B\|. \tag{2.8}$$

现在我们转而研究关于 $\omega(AB)$ 的不等式，其中 A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。有趣的是，正如我们将在下面的注记 2.3 中看到的，以下数值半径不等式为正算子的算术-几何平均不等式给出了一种新的证明。

定理 2.7. 设 A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。则对于任意 $0\leq t\leq 1$,

$$\omega^{\frac{1}{2}}(AB)\leq\frac{1}{2}\|A+B^*\|+\frac{\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix}O & (1-t)A+tB^*\\ (1-t)B+tA^* & O\end{bmatrix}\right)}{2r},$$

其中 $r=\min\{t,1-t\}$。

证明。 由（1.10）中的第二个不等式可得

$$2\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B^* & O\end{bmatrix}\right)\leq\|A+B\|+\frac{\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B^* & O\end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix}O & (1-t)A+tB\\ (1-t)B^*+tA^* & O\end{bmatrix}\right)}{r}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&2\omega^{\frac{1}{2}}(AB)\\
&\leq 2\max\left\{\omega^{\frac{1}{2}}(AB),\omega^{\frac{1}{2}}(BA)\right\}\\
&=2\omega^{\frac{1}{2}}\left(\begin{bmatrix}AB & O\\ O & BA\end{bmatrix}\right)\\
&=2\omega^{\frac{1}{2}}\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}^2\right)\\
&\leq 2\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)\quad(\text{by (1.12)})\\
&\leq \|A+B^*\|+\frac{\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)-\omega\left(\begin{bmatrix}O & (1-t)A+tB^*\\ (1-t)B+tA^* & O\end{bmatrix}\right)}{r},
\end{aligned}$$

至此证明完毕。 □

现在我们利用定理 2.7 证明以下正算子的算术-几何平均不等式。

注记 2.3. 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是两个正算子。由定理 2.7,

$$\begin{aligned}
\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\| &= r^{\frac{1}{2}}(AB)\quad(by\ [13,\ (2.1)])\\
&\leq \omega^{\frac{1}{2}}(AB)\\
&\leq \frac{1}{2}\|A+B\|,
\end{aligned}$$

其中 (2.8) 并且结合以下事实：对于任意 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $r(T)\leq\omega(T)$。

定理 2.7 给出了 $\omega(AB)$ 关于 $\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}$ 的上界，而我们还可以得到关于同一矩阵算子的下界。

定理 2.8. 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么

$$\omega\left(\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}\right)\leq\sqrt{\max\{\omega(AB),\omega(BA)\}+\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\|\begin{bmatrix}-\lambda I & A\\ B & -\lambda I\end{bmatrix}\right\|^2},$$

其中, I 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的恒等算子。

证明。根据 [4],的主要结果，我们可以写出

$$\begin{aligned}\max\left\{\omega\left(AB^*\right),\omega\left(B^*A\right)\right\} &= \omega\left(\begin{bmatrix} AB^* & O \\ O & B^*A \end{bmatrix}\right) \\ &= \omega\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right) \\ &= \omega\left(T^2\right) \\ &\geq \omega^2\left(T\right) - \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|T-\lambda I\|^2 \\ &= \omega^2\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B^* & O \end{bmatrix}\right) - \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\|\begin{bmatrix} -\lambda I & A \\ B^* & -\lambda I \end{bmatrix}\right\|^2,\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

注记 2.4。 由定理 *2.8* 可知，对于 $X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$,

$$\begin{aligned}&\omega\left(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}\right) \\ &= \omega\left(\begin{bmatrix} X_1 & O \\ O & X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & X_2 \\ X_3 & O \end{bmatrix}\right) \\ &\leq \omega\left(\begin{bmatrix} X_1 & O \\ O & X_4 \end{bmatrix}\right) + \omega\left(\begin{bmatrix} O & X_2 \\ X_3 & O \end{bmatrix}\right) \\ &\leq \max\left\{\omega\left(X_1\right),\omega\left(X_4\right)\right\} + \sqrt{\max\left\{\omega\left(X_2X_3\right),\omega\left(X_3X_2\right)\right\} + \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\|\begin{bmatrix} -\lambda I & X_2 \\ X_3 & -\lambda I \end{bmatrix}\right\|^2}.\end{aligned}$$

注记 2.5. 注意到

$$\begin{aligned}r\left(X_1X_2+X_3X_4\right) &= r\left(\begin{bmatrix} X_1X_2+X_3X_4 & O \\ O & O \end{bmatrix}\right) \\ &= r\left(\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2 & O \\ X_4 & O \end{bmatrix}\right) \\ &= r\left(\begin{bmatrix} X_2 & O \\ X_4 & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ O & O \end{bmatrix}\right) \\ &= r\left(\begin{bmatrix} X_2X_1 & X_2X_3 \\ X_4X_1 & X_4X_3 \end{bmatrix}\right) \\ &\leq \omega\left(\begin{bmatrix} X_2X_1 & X_2X_3 \\ X_4X_1 & X_4X_3 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

若在上述不等式中代入 $X_1 = e^{\mathrm{i}\theta}A$、 $X_2 = B$、 $X_3 = e^{-\mathrm{i}\theta}B^*$ 和 $X_4 = A^*$，则得到

$$\left\|\Re \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}AB\right\| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta}BA & e^{-\mathrm{i}\theta}BB^* \\ e^{\mathrm{i}\theta}A^*A & \left(e^{\mathrm{i}\theta}BA\right)^* \end{bmatrix}\right). \tag{2.9}$$

这表明两个算子的乘积的数值半径与 2×2 算子矩阵的数值半径之间的关系。

情形 $A = U|T|^{1-t}$和 $B = |T|^t$在 (2.9)中蕴含

$$\left\|\Re e^{\mathrm{i}\theta}T\right\| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta}\widetilde{T}_t & e^{-\mathrm{i}\theta}|T|^{2t} \\ e^{\mathrm{i}\theta}|T|^{2(1-t)} & \left(e^{\mathrm{i}\theta}\widetilde{T}_t\right)^* \end{bmatrix}\right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

其中 $\widetilde{T}_t$是 T的加权 Aluthge 变换，定义为 $\widetilde{T}_t = |T|^t U|T|^{1-t}$，其中 U是 $T = U|T|$.的极分解中出现的偏等距

注意，如果在 $A = \sqrt{\frac{\|B\|}{\|A\|}}A$和 $B = \sqrt{\frac{\|A\|}{\|B\|}}B$中将 (2.9)替换为，我们也有

$$\left\|\Re \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}AB\right\| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta}BA & e^{-\mathrm{i}\theta}\frac{\|A\|}{\|B\|}BB^* \\ e^{\mathrm{i}\theta}\frac{\|B\|}{\|A\|}A^*A & \left(e^{\mathrm{i}\theta}BA\right)^* \end{bmatrix}\right), \tag{2.10}$$

and

$$\left\|\Re \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}T\right\| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta}\widetilde{T}_t & e^{-\mathrm{i}\theta}\|T\|^{1-2t}|T|^{2t} \\ e^{\mathrm{i}\theta}\|T\|^{2t-1}|T|^{2(1-t)} & \left(e^{\mathrm{i}\theta}\widetilde{T}_t\right)^* \end{bmatrix}\right).$$

为了更好地理解上述关系如何帮助求得两个算子的乘积的数值半径，我们给出一个例子。回顾一下，在 [1, 推论 2], 中，Abu-Omar 和 Kittaneh 证明，若 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是希尔伯特空间，且 $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ 是一个满足以下条件的算子矩阵 $X_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $X_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $X_3 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, and $X_4 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, 则

$$\omega(\mathbb{X}) \leq \frac{1}{2}\left(\omega(X_1) + \omega(X_4) + \sqrt{(\omega(X_1) - \omega(X_4))^2 + 4\omega^2(\mathbb{E})}\right),$$

其中 $\mathbb{E} = \begin{bmatrix} O & X_2 \\ X_3 & O \end{bmatrix}$。在同一篇论文中（见 [1, 注记 6]），已经证明

$$\omega(\mathbb{E}) \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\left\||X_2|^2 + |X_3^*|^2\right\| + 2\omega(X_3X_2)} \text{ and } \alpha_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\left\||X_2^*|^2 + |X_3|^2\right\| + 2\omega(X_2X_3)}.$$

结合这两个不等式，我们得到

$$\omega\left(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\omega(X_1) + \omega(X_4) + \sqrt{(\omega(X_1) - \omega(X_4))^2 + 4\min\{\alpha_1^2, \alpha_2^2\}}\right).$$

现在，利用这个结果和（2.10），我们有

$$\left\|\Re e^{i\theta}AB\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\omega\left(BA\right)+\min\left\{\beta_1,\beta_2\right\}\right),$$

其中

$$\beta_1=\frac{1}{2}\sqrt{\left\|\frac{\|A\|^2}{\|B\|^2}|B^*|^4+\frac{\|B\|^2}{\|A\|^2}|A|^4\right\|+2\omega\left(|A|^2|B^*|^2\right)},$$

and

$$\beta_2=\frac{1}{2}\sqrt{\left\|\frac{\|A\|^2}{\|B\|^2}|B^*|^4+\frac{\|B\|^2}{\|A\|^2}|A|^4\right\|+2\omega\left(|B^*|^2|A|^2\right)}.$$

这意味着,

$$\omega\left(AB\right)\leq\frac{1}{2}\omega\left(BA\right)+\frac{1}{4}\sqrt{\left\|\frac{\|A\|^2}{\|B\|^2}|B^*|^4+\frac{\|B\|^2}{\|A\|^2}|A|^4\right\|+2\min\left\{\omega\left(|A|^2|B^*|^2\right),\omega\left(|B^*|^2|A|^2\right)\right\}}.$$

由（2.9），我们还可得

$$\omega\left(AB\right)\leq\frac{1}{2}\omega\left(BA\right)+\frac{1}{4}\sqrt{\left\||B^*|^4+|A|^4\right\|+2\min\left\{\omega\left(|A|^2|B^*|^2\right),\omega\left(|B^*|^2|A|^2\right)\right\}}.$$

References

[1] A. Abu-Omar、F. Kittaneh，算子矩阵的数值半径不等式，Linear Algebra Appl. 468 (2015), 18–26.[2] A. Abu-Omar、F. Kittaneh，希尔伯特空间算子的广义谱半径与范数不等式，Int. J. Math. 26(11) (2015), 1550097.[3] R. Bhatia，矩阵分析，Springer，纽约，1997.[4] S. S. Dragomir，关于数值半径与 Krein-Lin 不等式的一则注记，Mathematica. 60(83) (2018), 149–151.[5] S. S. Dragomir，归一化 Jensen 泛函的界，Bull. Austral. Math. Soc. 3 (2006), 471–478.[6] K. Gustafson、D. Rao，数值域：线性算子与矩阵的值域，Springer，1995.[7] O. Hirzallah、F. Kittaneh 和 K. Shebrawi，某些算子矩阵的数值半径不等式，Integr. Equ. Oper. Theory. 71 (2011), 129–147.[8] F. Kittaneh、M. S. Moslehian 和 T. Yamazaki，笛卡尔分解与数值半径不等式，Linear Algebra Appl. 471 (2015), 46–53.[9] F. Kittaneh，某些算子和的范数不等式，J. Funct. Anal. 143 (1997), 337–348.[10] C.-K. Li、Y. T. Poon，二阶可交换矩阵数值半径的次乘性，J. Math. Anal. Appl. 475(1) (2019), 730–735.[11] M. Sababheh，改进的 Jensen 不等式，Math. Inequal. Appl. 20(2) (2017), 389–403.[12] M. Sababheh，通过凸性改进均值，Mediterr. J. Math. 14, 125 (2017). 2×2 K. Shebrawi，某些算子矩阵的数值半径不等式 II，Linear Algebra Appl. 523 (2017), 1–12.[14] T. Yamazaki，关于数值半径的上下界及等号成立条件，Studia Math. 178 (2007), 83–89.

(M. Sababheh) 副校长，Princess Sumaya University for Technology，安曼，约旦*E-mail address:* sababheh@psut.edu.jo; sababheh@yahoo.com (C. Conde) Instituto de Ciencias，Universidad Nacional de General Sarmiento 和 Consejo Nacional de Investigaciones Cient´ıficas y Tecnicas，阿根廷*E-mail address:* cconde@campus.ungs.edu.ar (H. R. Moradi)数学系，Payame Noor University (PNU)，邮政信箱 19395-4697，德黑兰，伊朗*E-mail address:* hrmoradi@mshdiau.ac.ir