arXiv:2302.06788v1 [math.SP] 14 Feb 2023

某些矩阵多项式的特征值位置

PALLAVI. B、SHRINATH HADIMANI 和 SACHINDRANATH JAYARAMAN

Abstract. 众所周知，系数为酉矩阵的矩阵多项式，其特征值位于环形区域 $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$ 内。本文证明，在某些假设下，系数为双随机矩阵或舒尔稳定矩阵的矩阵多项式，其特征值也位于类似的环形区域内。

1. Introduction

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行讨论。 $M_n(\mathbb{C})$表示$n \times n$ 上矩阵的空间。记号 $||\cdot||_2$ 和 $||\cdot||_\infty$ 分别表示谱范数和最大行和范数。大小为$_{mn}$、次数为 m 的矩阵多项式是一个函数 P，从 $\mathbb{C}$ 映射到 $M_n(\mathbb{C})$，定义为 $P(\lambda) = \sum A_i\lambda^i$，$_{i=0}$其中 $A_i \in M_n(\mathbb{C})$且 $A_m \neq 0$。若存在非零向量 $v \in \mathbb{C}^n$使得 $P(\lambda_0)v = 0$，则称标量 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 为 $P(\lambda)$的一个特征值。满足方程 $P(\lambda_0)v = 0$ 的非零向量 $v \in \mathbb{C}^n$ 称为对应于特征值 λ_0的 $P(\lambda)$的特征向量。等价地，对于给定的矩阵多项式 $P(\lambda)$，若 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 是一个特征值，则 $\det P(\lambda_0) = 0$。注意，对于大小为 n、次数为 m 的矩阵多项式，特征值的个数至多为 mn。此外，$\lambda_0 = 0$ 是 $P(\lambda)$的特征值，当且仅当 A_0 是奇异的。若反转矩阵多项式 $\widehat{P}(\lambda) := \lambda^m P(\frac{1}{\lambda})$ $= A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m$以零为特征值，则称 ∞ 是 $P(\lambda)$的一个特征值。因此，若首项系数非奇异，则 $P(\lambda)$恰有 mn 个有限特征值（按重数计）。若 $P(\lambda)$的首项系数是非奇异矩阵，则定义与 $P(\lambda)$对应的首一矩阵多项式为 $P_U(\lambda) := I\lambda^m + U_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + U_1\lambda + U_0$，其中$U_i = A_m^{-1}A_i$对 $i = 0$而言，1，...，$m-1$，以及对应的分块伴随矩阵

2010年数学主题分类。15A18、15A22、15B51、47A56。关键词和短语：双随机矩阵；舒尔稳定矩阵；矩阵多项式的分块伴随矩阵；矩阵多项式的特征值位置。

to $P(\lambda)$ as $C := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -U_0 & -U_1 & -U_2 & \cdots & -U_{m-1} \end{bmatrix}$. The eigenvalues of $P(\lambda)$, $P_U($是同一个特征值。([6] f d il)

矩阵多项式的特征值位置是一个颇具挑战性的问题，在应用数学中有着有趣的应用。例如，关于特征值位置的信息有助于确定矩阵多项式 [9] 的伪谱。论文 [1] 和 [10] 是很好的范例来源。文献中已有若干用于界定矩阵多项式特征值的方法（例如参见 [6, 2] 和 [7]）。本文旨在为系数为双随机矩阵或舒尔稳定矩阵的矩阵多项式提供特征值界。本节最后给出一个由柯西提出、后文将用到的引理。

引理 1.1（[4]）。设 p（λ）$= a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 是一个次数为 n 的多项式。若 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 是 p（λ）的一个根，则 $|\lambda_0| \leq 1 + \max\left\{\frac{|a_0|}{|a_n|}、\frac{|a_1|}{|a_n|}、\ldots\ldots、\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}$。

2. Main Results

本节将介绍主要结果。为便于阅读，本节分为若干小节，各小节的内容顾名思义。

2.1. 双随机矩阵系数矩阵多项式的特征值位置。

本节中，我们考虑系数为双随机矩阵的矩阵多项式。若一个非负方阵的所有行和与列和均为 1，则称其为双随机矩阵。Cameron 最近的一项结果（定理 3.2，[3]）指出，若 λ_0 是一个系数为酉矩阵的矩阵多项式的特征值，则 $\frac{1}{2} < |\lambda_0| < 2$。双随机矩阵是置换矩阵的凸组合，因此自然会产生一个问题：系数为双随机矩阵的矩阵多项式的特征值是否落在某个环形区域内？结果表明，这些特征值落在与酉矩阵情形相同的环形区域内。由于对于任意双随机矩阵 A，$||A||_2 = 1$，证明与酉矩阵情形非常相似。因此，我们不加证明地陈述该定理。在陈述定理之前，先引入一些记号。令

$\mathcal{D} = \{P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0$：$A_i$ 是 $n \times n$ 双随机矩阵，且 A_m、A_0 是 $n \times n$ 置换矩阵，n、$m \in \mathbb{N}\}$，并令 $\sigma(\mathcal{D}) = \{|\lambda_0|$：$\lambda_0$ 是 $P(\lambda) \in \mathcal{D}\}$ 的特征值。

定理 2.1。设 $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0 \in \mathcal{D}$。如果 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 是 $P(\lambda)$ 的特征值，则 $\frac{1}{2} < |\lambda_0| < 2$。

定理 2.1 给出的界是最优的，下面将对此进行证明。

定理 2.2。$\inf(\sigma(\mathcal{D})) = \frac{1}{2}$ 且 $\sup(\sigma(\mathcal{D})) = 2$。

证明。根据定理 2.1，1 2 是- $\sigma(\mathcal{D})$ 的下界。我们证明，任何大于 1 2 的数都不能作为 $\sigma(\mathcal{D})$ 的下界。-如果 $\frac{1}{2} < r < 1$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} r^i > 1$。因此存在 $d \in \mathbb{N}$，使得 $\sum_{i=1}^{d} r^i > 1$。考虑 $q(\lambda)$：$= \lambda^d + \lambda^{d-1} + \cdots + \lambda - 1$。于是 $q(r) = \sum_{i=1}^{d} r^i - 1 > 0$，且 $q(1\,2) = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{2}\right)^i - 1 < 0$。介值定理保证 $q(\lambda)$ 在区间 $(1\,2, r)$ 内有一个根。现在考虑矩阵多项式 $P(\lambda)$：$= I\lambda^d + I\lambda^{d-1} + \cdots + I\lambda + I' \in \mathcal{D}$，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $I' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。于是有 $P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^d + \lambda^{d-1} + \cdots + \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^d + \lambda^{d-1} + \cdots + \lambda \end{bmatrix}$。

因此 $\det P(\lambda) = (\lambda^d + \lambda^{d-1} + \cdots + \lambda)^2 - 1 = (\lambda^d + \lambda^{d-1} + \cdots + \lambda + 1)(\lambda^d + \lambda^{d-1} + \cdots + \lambda - 1)$。所以 $q(\lambda)$ 是 $\det P(\lambda)$ 的一个因子。由于 $q(\lambda)$ 在区间 $(1\,2, r)$ 内有一个根，$P(\lambda)$ 有一个模小于 r 的特征值。因此，r 不是 $\sigma(\mathcal{D})$ 的下界，从而证明了 $\inf(\sigma(\mathcal{D})) = \frac{1}{2}$。再次根据定理 2.1，2 是 $\sigma(\mathcal{D})$ 的上界。现在我们证明，任何小于 2 的数都不能作为 $\sigma(\mathcal{D})$ 的上界。设 $1 < R < 2$。对 $m \in \mathbb{N}$，定义 $w_m(\lambda) = \lambda^m - \lambda^{m-1} - \cdots - \lambda - 1$。假设 R 是 $\sigma(\mathcal{D})$ 的上界，则 $R^m \geq R^{m-1} + \cdots + R + 1$。否则，$R^m < R^{m-1} + \cdots + R + 1$。这意味着 $w_m(R) = R^m - R^{m-1} - \cdots - R - 1 < 0$。我们还有 $w_m(2) > 0$。再次由介值定理，$w_m(\lambda)$ 在区间 $(R, 2)$ 内有一个根。现在考虑 $Q(\lambda)$：$= I\lambda^m + I'\lambda^{m-1} + \cdots + I'\lambda + I' \in \mathcal{D}$。于是有 $Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^m & \lambda^{m-1} + \cdots + \lambda + 1 \\ \lambda^{m-1} + \cdots + \lambda + 1 & \lambda^m \end{bmatrix}$。因此 $\det Q(\lambda) = (\lambda^m)^2 - (\lambda^{m-1} + \cdots + \lambda + 1)^2 = (\lambda^m - \lambda^{m-1} - \cdots - \lambda - 1)(\lambda^m + \lambda^{m-1} + \cdots + \lambda + 1)$。因此，$w_m(\lambda)$ 是 $\det Q(\lambda)$ 的一个因子。由于 $w_m(\lambda)$ 在区间 $(R, 2)$ 内有一个根，$Q(\lambda)$ 有一个模大于 R 的特征值。这

与假设 R 是 $\sigma(\mathcal{D})$ 的一个上界矛盾。因此 $R^m \geq R^{m-1}+\cdots+R+1 = \dfrac{1-R^m}{1-R}$。由于 $1-R<0$，我们有 $(1-R)R^m \leq 1-R^m$，这意味着 $2-R \leq \dfrac{1}{R^m}$。由于这对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都成立，且 $m \to \infty$，我们得到 $2-R \leq 0$；也就是说，$2 \leq R$，这与 R 的选取矛盾。因此，R 不是 $\sigma(\mathcal{D})$ 的上界。因此 $\sup(\sigma(\mathcal{D})) = 2$。□

注 2.3. 如果首项系数或常数项是双随机矩阵，但不是置换矩阵，那么特征值不一定落在区域 $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$ 内。详情请参见 [8] 的注 2.9。我们还想指出，定理 2.1 和定理 2.2 曾在 [8] 中陈述，但未给出证明。

现在我们证明，集合$\mathcal{D}$ 中的任意次数至少为 2 的矩阵多项式都有两个不同的特征值。注意，双随机矩阵的特征值的绝对值小于或等于 1。

推论 2.4. 设 $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$ 是一个 $n \times n$ 矩阵多项式，其中 A_i 是双随机矩阵，且A_m、A_0 是置换矩阵，满足 $m \geq 2$。那么 $P(\lambda)$ 至少有两个不同的特征值。

证明。我们通过反证法证明这一点。假设 $P(\lambda)$ 的所有特征值都相同，记为 λ_0。与 $P(\lambda)$ 对应的首一矩阵多项式为 $P_U(\lambda) = I\lambda^m + B_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$ 其中，$B_i = A_m^{-1}A_i$ 对于 $1 \leq i \leq m-1$。由于 A_m 是一个置换矩阵，矩阵 B_i's 是双随机矩阵，而 B_0 是一个置换矩阵。考虑相应的

$$\text{block companion matrix of } P(\lambda),\ C = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -B_0 & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_{m-1} \end{bmatrix}.\ \text{Then}$$

我们有，迹 $C(\ ) = -$迹 $B_{m-1}(\ )$。设 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ 是 B_{m-1} 的特征值。于是有 $\sum_{i=1}^{mn} \lambda_0 = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i$。这意味着 $mn\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i$。取模后，得到 $mn|\lambda_0| = \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$。因此 $|\lambda_0| \leq \frac{1}{m} \leq 1/2$，这与定理 2.1 矛盾。因此 $P(\lambda)$ 至少有两个不同的特征值。□

从上述证明可以看出，当所有系数都是酉矩阵时，推论 2.4 也成立。下面我们证明，具有双随机矩阵系数的 m^{th} 次矩阵多项式在单位圆上至少有 m 个不同的特征值。

定理 2.5. 设 $P(\lambda) = A_m\lambda^m + \cdots + A_1\lambda + A_0$，其中 A_i's 是 $n \times n$ 双随机矩阵。则 $P(\lambda)$ 在单位圆上至少有 m 个不同的特征值。

证明。由于系数是双随机矩阵，我们可以写成:

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1(n-1)}^{(k)} & 1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(k)} & 1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1}^{(k)} & a_{(n-1)2}^{(k)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(k)} & 1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{(n-1)j}^{(k)} \\ 1-\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}^{(k)} & 1-\sum_{i=1}^{n-1} a_{i2}^{(k)} & \dots & 1-\sum_{i=1}^{n-1} a_{i(n-1)}^{(k)} & \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)} - (n-2) \end{bmatrix}$$

对于 $k = 0$, 1, ..., m 和 $0 \le a_{ij}^{(k)} \le 1$ 对于 i, $j = 1$, 2, ..., $n-1$。因此，$P(\lambda) =$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m} a_{11}^{(k)}\lambda^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} a_{1(n-1)}^{(k)}\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}^{(k)}\Big)\lambda^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{m} a_{(n-1)1}^{(k)}\lambda^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} a_{(n-1)(n-1)}^{(k)}\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{(n-1)j}^{(k)}\Big)\lambda^k \\ \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}^{(k)}\Big)\lambda^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_{i(n-1)}^{(k)}\Big)\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)} - n + 2\Big)\lambda^k \end{bmatrix}.$$

现在通过执行以下初等行变换，我们得到一列矩阵多项式

$$P(\lambda) \xrightarrow{R_n \to R_n + R_1} P_1(\lambda) \xrightarrow{R_n \to R_n + R_2} P_2(\lambda) \xrightarrow{R_n \to R_n + R_3} \cdots \xrightarrow{R_n \to R_n + R_{n-1}} \widetilde{P}(\lambda).$$

在第（$n-1$）th 步，我们得到矩阵多项式

$$\widetilde{P}(\lambda)=\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m} a_{11}^{(k)}\lambda^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} a_{1(n-1)}^{(k)}\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}^{(k)}\Big)\lambda^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{m} a_{(n-1)1}^{(k)}\lambda^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} a_{(n-1)(n-1)}^{(k)}\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{(n-1)j}^{(k)}\Big)\lambda^k \\ \sum_{k=0}^{m}\lambda^k & \cdots & \sum_{k=0}^{m}\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}\lambda^k \end{bmatrix}.$$

~注意， $P(\lambda)$ 的行列式与 $P(\lambda)$ 的行列式相同（见第 ~S1.1, [5] 节）。也就是说， $\det P(\lambda) = \det P(\lambda) = (\lambda^m+\cdots+\lambda+1)q(\lambda)$。结论由此得出，因为 $\lambda^m+\cdots+\lambda+1$ 的根是 $P(\lambda)$ 的特征值。□

需要指出的是，推论 2.4 可由定理 2.5 推出。我们补充了推论 2.4 的证明，以阐释定理 2.1。

2.2. 舒尔稳定矩阵系数的矩阵多项式的特征值位置。

现在我们转而讨论系数为舒尔稳定矩阵的矩阵多项式。回顾一下，若方阵 A 的所有特征值的模都小于 1，则称其为舒尔稳定矩阵。本节将确定系数为舒尔稳定矩阵的矩阵多项式的特征值位置；更一般地，我们考虑特征值的模小于 r 的矩阵系数，其中 $r>0$ 为某个给定量。令 M_r 表示所有特征值的模小于 r 的方阵的集合，其中 $r>0$ 为某个给定量。令 $\mathcal{S}_r = \{P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+A_0 :\ A_i \in M_r$ 是可交换的 $n\times n$ 矩阵，且 m、$n\in\mathbb{N}\}$；并令 $\sigma(\mathcal{S}_r) = \{|\lambda_0| :\ \lambda_0$ 是 $P(\lambda)\in\mathcal{S}_r\}$ 的一个特征值。我们的第一个结果如下。

定理 2.6. 设 $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+A_0 \in \mathcal{S}_r$。若 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 是 $P(\lambda)$ 的特征值，则 $|\lambda_0| < r+1$。

证明。考虑 $P(\lambda)$ 对应的分块伴随矩阵，如下所示：$C = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{m-1} \end{bmatrix}$。由于 A_i 彼此可交换，因此

存在 是酉矩阵 U，使得 $U^*A_iU = T_i$ 对所有 $i=0$、1、$\cdots$、$m-1$ 均成立，其中 e,

特征值位置
矩阵 T_i 均为上三角矩阵。令我们写作 $T_i = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1n}^{(i)} \\ 0 & a_{22}^{(i)} & \cdots & a_{1n}^{(i)} \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(i)} \end{bmatrix}$ 7

对于 $i = 0, 1, \cdots, m-1$。那么 $a_{11}^{(i)}, a_{22}^{(i)}, \cdots, a_{nn}^{(i)}$ 是 A_i 的特征值。因此，对于 $k = 1, 2, \cdots, n$ 和 $i = 0, 1, ..., m-1$。令 $Q(\lambda) := U^* P(\lambda) U = I\lambda^m + T_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + T_1\lambda + T_0$。于是我们有 $\det(P(\lambda)) = \det(Q(\lambda)) = \prod_n \left(\lambda^m + a_{kk}^{(m-1)}\lambda^{m-1} + \cdots + a_{kk}^{(0)}\right)$。因此， $P(\lambda)$ 的特征值是多项式 $\lambda^m + a_{kk}^{(m-1)}\lambda^{m-1} + \cdots + a_{kk}^{(0)}$ 的根，其中 $1 \le k \le n$。因此，若 λ_0 是 $P(\lambda)$ 的特征值，则 λ_0 是多项式 $\lambda^m + \lambda^{m-1}a_{kk}^{(m-1)} +$ 的根

$\cdots + a_{(0)\,kk}$ 对于某些 k, $1 \le k \le n$。由引理 1.1 可得， $|\lambda_0| \le 1 + \max\{|a_{(m-1)\,kk}|, \cdots, |a_{(0)\,kk}|\} < r + 1$。因此， $|\lambda_0| < r + 1$。定理得证。□

下面的推论是显然的。

推论 2.7. 设 $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0$，其中 A_i 是两两可交换的舒尔稳定矩阵。若 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 是 $P(\lambda)$ 的一个特征值，则 $|\lambda_0| < 2$。

这类问题在应用中出现的一个典型例子如下。该例取自 [1]。考虑如下由线性阻尼弹簧-质量系统导出的二次特征值问题:

$$P(\lambda)v = (M\lambda^2 + C\lambda + K)v = 0,$$

其中 $M = I$、$C = 10T$、$K = 5T$， T 是由 $T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ 给出的三对角矩阵.

。注意到 $||T||_\infty = 5$，因此 $||C||_\infty = 50$、$||K||_\infty = 25$。因此,3 对于任意 $\epsilon > 0$， M、C 和 K 的特征值都位于半径为 $50+\epsilon$ 的圆盘内。于是，根据定理 2.6，如果 λ_0 是 $P(\lambda)$ 的一个特征值，则 $|\lambda_0| < 50+\epsilon+1$。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，我们推知 $|\lambda_0| \le 51$。对于足够大的矩阵，这些结论也已通过数值计算得到验证。现在我们证明定理 2.6 中得到的界是最优的。

定理 2.8. $\sup(\sigma(\mathcal{S}_r)) = r + 1$ 和 $\inf(\sigma(\mathcal{S}_r)) = 0$。

证明。设 $P(\lambda) = I\lambda + A_0 \in \mathcal{S}_r$，其中 A_0 是一个 $n \times n$ 零矩阵。因此，0 是 $P(\lambda)$ 的特征值。于是 $0 \in \sigma(\mathcal{S}_r)$。因此 $\inf(\sigma(\mathcal{S}_r)) = 0$。现在证明 $\sup(\sigma(\mathcal{S}_r)) = r + 1$。根据定理 2.6， $r + 1$ 是 $\sigma(\mathcal{S}_r)$ 的一个上界。

设 $1 < R < r+1$。假设 R 是 $\sigma(\mathcal{S}_r)$ 的一个上界。对于 $m \in \mathbb{N}$，定义$w_m(\lambda)$：$= \lambda^m - (r-\frac{1}{n})\lambda^{m-1} - \cdots - (r-\frac{1}{n})\lambda - (r-\frac{1}{n})$，其中 $n \in \mathbb{N}$满足$r > \frac{1}{n}$。那么 $R^m \geq (r-\frac{1}{n})(R^{m-1}+\cdots+R+1)$。否则，$R^m < (r-\frac{1}{n})(R^{m-1}+\cdots+R+1)$，由此可见 $w_m(R) = R^m - (r-\frac{1}{n})(R^{m-1}+\cdots+R+1) < 0$。我们还有，$(r+1)^m > r\big((r+1)^{m-1}+\cdots+(r+1)+1\big) > (r-\frac{1}{n})\big((r+1)^{m-1}+\cdots+(r+1)+1\big)$。因此 $w_m(r+1) > 0$。于是，介值定理保证 $w_m(\lambda)$ 在区间 $(R, r+1)$ 内有一个根，记为 λ_0。现在考虑，$P(\lambda) = I\lambda^m + A\lambda^{m-1} + \cdots + A\lambda + A$，其中 $A = \begin{bmatrix} -(r-\frac{1}{n}) & 0 & \cdots & -(r-\frac{1}{n}) \end{bmatrix} \in M_r$。则 $\det(P(\lambda)) = \Big(\lambda^m - (r-\frac{1}{n})\lambda^{m-1} - \cdots - (r-\frac{1}{n})\lambda - (r-\frac{1}{n})\Big)^2 = (w_m(\lambda))^2$。因此，$\lambda_0 \in (R, r+1)$ 是 $P(\lambda)$ 的一个特征值。这意味着 $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{S}_r)$，这与 R 是 $\sigma(\mathcal{S}_r)$ 的一个上界这一假设矛盾。因此我们有，$R^m \geq (r-\frac{1}{n})(R^{m-1}+\cdots+R+1) = (r-\frac{1}{n})\Big(\frac{1-R^m}{1-R}\Big)$。由于 $1-R<0$，我们有 $(1-R)R^m \leq \Big(r-\frac{1}{n}\Big)(1-R^m)$。这意味着对于所有满足 $r > \frac{1}{n}$ 的 $m, n \in \mathbb{N}$，都有 $r+1-R-\frac{1}{n} \leq \Big(r-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{R^m}$。令 $n, m \to \infty$，则有 $r+1-R \leq 0$；即 $r+1 \leq R$，这与 R 的选取矛盾。因此，$\sup(\sigma(\mathcal{S}_r)) = r+1$。□

注 2.9. 如果去掉 $\mathcal{S}_r$ 中矩阵多项式系数的交换性条件，那么 $\sigma(\mathcal{S}_r)$ 无界。为说明这一点，考虑 $P_n(\lambda) = I\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -n & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 其中 $n \in \mathbb{N}$。系数矩阵不交换，且唯一的特征值为 0。因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 及任意 $r > 0$，$P_n(\lambda) \in \mathcal{S}_r$。$P_n(\lambda)$ 的分块伴随矩阵 C_n 为 $C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{bmatrix}$，其特征多项式为 $(\lambda^3 - n^2)$。因此，C_n 的特征值，以及 $P_n(\lambda)$ 的特征值，均为 0、$n^{\frac{2}{3}}$、$\Big(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)n^{\frac{2}{3}}$ 和 $\Big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)n^{\frac{2}{3}}$。由于 $n^{\frac{2}{3}} \in \sigma(\mathcal{S}_r)$，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\sigma(\mathcal{S}_r)$ 无界。

致谢：Pallavi .B 和 Shrinath Hadimani 感谢印度政府科学与工业研究理事会（CSIR）和大学拨款委员会（UGC）通过研究奖学金提供的资助。

References

1. T. Betcke、N. J. Higham、V. Mehrmann、C. Schr¨oder 和 F. Tisseur，《NLEVP：非线性特征值问题集》，计算机协会，《数学软件汇刊》，39(2)（2013），第7篇，28页。 2. D. A. Bini、V. Noferini 和 M. Sharify，《矩阵多项式的特征值定位》，《SIAM矩阵分析与应用杂志》，34(4)（2013），1708-1727。 3. T. R. Cameron，《酉系数矩阵多项式的谱界》，《电子线性代数杂志》，30（2015），585-591。 4. A. L. Cauchy，《数学练习》，《著作集》，9（1829），122。 5. I. Gohberg、P. Lancaster 和 L. Rodman，《矩阵多项式》，2nd 版，SIAM，2009。 6. N. J. Higham 和 F. Tisseur，《矩阵多项式特征值界》，《线性代数及其应用》，358（2003），5-22。 7. C. T. Le、T. H. B. Du 和 T. D. Nguyen，《关于矩阵多项式特征值的位置》，《算子与矩阵》，13(4)（2019），937-954。 8. Pallavi .B、Shrinath Hadimani 和 Sachindranath Jayaraman，《某些矩阵多项式块伴随矩阵的 Hoffman-Wielandt 型不等式》，arXiv:2208.10149。 9. F. Tisseur 和 N. J. Higham，《多项式特征值问题的结构化伪谱及其应用》，《SIAM矩阵分析与应用杂志》，23(1)（2001），187-208。 10. F. Tisseur 和 K. Meerbergen，《二次特征值问题》，《SIAM评论》，43(2)（2021），235-286。

School of Mathematics,
Indian Institute of Science Education and ResearchThiruvananthapuram,
Maruthamala P.O., Vithura, Thiruvananthapuram – 695551, Kerala, India.
电子邮件地址：(pallavipoorna20, srinathsh3320, sachindranathj)@iisertvm.ac.in, sachindranathj@gmail.com