arXiv:2302.06800v2 [math.CO] 4 Sep 2023

某些无叉图的完全可除性与着色*

DiWu[1,†], Baogang Xu[1,‡]

[1]南京师范大学数学科学学院数学研究所，南京市文苑路1号，邮编210023

摘要

A $hole$是长度至少为四的诱导圈，奇洞是长度为奇数的洞。叉图是由$K_{1,\ 3}$ 通过将一条边细分一次得到的图。奇气球是由一个奇洞与$K_{1,\ 3}$的两个叶分别与奇洞上两个相邻顶点识别而得到的图。宝石图是由一个 P_4 以及一个与 P_4的所有顶点相邻的顶点组成的图。蝴蝶图是由两个三角形恰好共享一个顶点而得到的图。若对于 G的每个导出子图 H ， G (H)都能划分为 A 和 B ，使得 $H[A]$ 是完美图且 $\omega(H[B]) < \omega(H)$，则称图 G 完美可分。本文证明，(奇气球，叉图)-无图是完美可分的（这推广了 Karthick等人的一些结果）。作为一项应用，我们证明，若 G 是(叉图，宝石图)-无图或(叉图，蝴蝶图)-无图，则 $\chi(G) \leq \binom{\omega(G)+1}{2}$ 。

关键词和短语：完美可除性、叉图、色数*AMS 2000*主题分类：
05C15,05C75

*本研究部分得到国家自然科学基金项目 11931006 和 12126339 的资助
†电子邮箱：1975335772@qq.com
‡电子邮箱：baogxu@njnu.edu.cn 或 baogxu@hotmail.com。

1 引言

本文中讨论的所有图都是有限简单图。对于未定义的记号和术语，我们遵循 [1] 。我们分别用 P_k 和 C_k 表示顶点数为 k 的路径和圈。设G 为一个图， $v \in V(G)$，且 X 和 Y 是 $V(G)$的两个子集。若 v 中的每个顶点都与 X 中的所有顶点相邻，我们称 v 与 X 完全相邻；若 v 中的顶点均不与 X 中的任何顶点相邻，则称 v 与 X 全不邻接。若 X 中的每个顶点都与 Y 完全相邻（分别全不邻接），则称 X 与 Y 完全相邻（分别全不邻接）。若 $1 < |X| < |V(G)|$，且 $V(G) \setminus X$ 中的每个顶点都与 X完全相邻或全不邻接，则称 X 为一个齐性集。我们用 $G[X]$ 表示 G 由 X诱导的子图；若 $G[X]$ 是完全图，则称 X 为一个团。 G 的团数 $\omega(G)$是 G中所有团的最大规模。

对于 $v \in V(G)$ 和 $X \subseteq V(G)$，令 $N_G(v)$ 表示与 v 相邻的顶点集， $d_G(v) = |N_G(v)|$, $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$， $M_G(v) = V(G) \setminus N_G[v]$; 令 $N_G(X) = \{u \in V(G) \setminus X \mid u \text{ 在 } X\}$ 中有一个邻点，且 $M_G(X) = V(G) \setminus (X \cup N_G(X))$。若不会引起混淆，我们通常省略下标 G，直接写作 $N(v)$ $d(v)$ $N[v]$， $M(v)$ $N(X)$ 和 $M(X)$。令 $\delta(G)$ 表示 G 的最小度。

设 G 和 H 是两个顶点不相交的图。并 $G \cup H$ 是满足 $V(G \cup H) = V(G) \cup (H)$ 且 $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ 的图。联图 $G + H$ 是满足 $V(G + H) = V(G) + V(H)$ 且 $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy \mid x \in V(G)\ y \in V(H)\}$ 的图。同一个图 G 的 k 个副本的并记作 kG。如果 G 有一个与 H 同构的导出子图，我们称 G 导出 H；否则称 G 是 H-自由的。类似地，对于图族 $\mathcal{H}$，若 G 不导出 $\mathcal{H}$ 中的任何成员，则称 G 是 $\mathcal{H}$-自由的。

对于 $u, v \in V(G)$，若 $uv \in E(G)$，我们简写为 $u \sim v$；若 $uv \notin E(G)$，则简写为 $u \not\sim v$。G 中的一个洞是长度至少为 4 的诱导圈，而 k-洞 是长度为 k 的洞。若 k 为奇数，则称 k-洞为奇洞；否则称为偶洞。反洞 是某个洞的补图。奇反洞（偶反洞）的定义类似。

设 k为正整数，并设 $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$。 G的一个 k-着色是一个映射$c: V(G) \mapsto [k]$，满足：只要 $u \sim v$ 属于 G，就有 $c(u) \neq c(v)$。 G的色数 $\chi(G)$ 是使得 G 存在 k-着色的最小整数 k。显然， $\chi(G) \geq \omega(G)$。如果对于其所有导出子图 H，都有 $\chi(H) = \omega(H)$，则称该图为完美图。著名的强完美图定理 [4] 指出，一个图是完美图，当且仅当它既不含奇洞，也不含奇反洞作为诱导子图。如果对于每个导出子图 H， $V(H)$ 都可以划分为 A 和 B，使得 $H[A]$ 是完美图，且 $\omega(H[B]) < \omega(H)$，则称该图 [7] 完美可分。通过对 $\omega(G)$ 作简单归纳可知，对于每个完美可分图，都有 $\chi(G) \leq \binom{\omega(G)+1}{2}$。

叉图是通过将$K_{1,3}$ （通常称为爪图）的一条边细分一次得到的图（见图1）。爪图自由图是无叉图的一个子类。探究爪图自由图的哪些性质也适用于无叉图，是很自然的。Sivaraman 提出了以下尚未解决的猜想（见 [8]）。

猜想1.1 无叉图这一类是完美可分的。

这里列出了一些与某些小图 H 对应的（叉图, H）-无图的相关结果；关于猜想1.1及相关问题的更多信息，请参阅 [3, 8] 。

镖图 是图 $K_1+(K_1\cup P_3)$，横幅图 是由一个 C_4 加上一条悬挂边构成的图，爪图 是从$K_{1,3}$添加一条连接其两个叶子的边得到的图，余飞镖是 K_1 与一个爪图的并，公牛 是由一个三角形和两条互不相交的悬挂边构成的图，菱形图 是图 K_1+P_3，补蟋蟀图 是 K_1与一个菱形图的并，锤子是将三角形的一个顶点与 P_3的一个端点合并得到的图，宝石图是图 K_1+P_4，蝴蝶图 是图 K_1+2K_2。气球图 是将一个洞中两个相邻顶点分别与$K_{1,3}$的两个叶子合并得到的图。 i-气球图 是指其洞有 i 个顶点的气球图。若 i 为奇数，则称 i-气球图为奇气球 。（这些构形见图1）

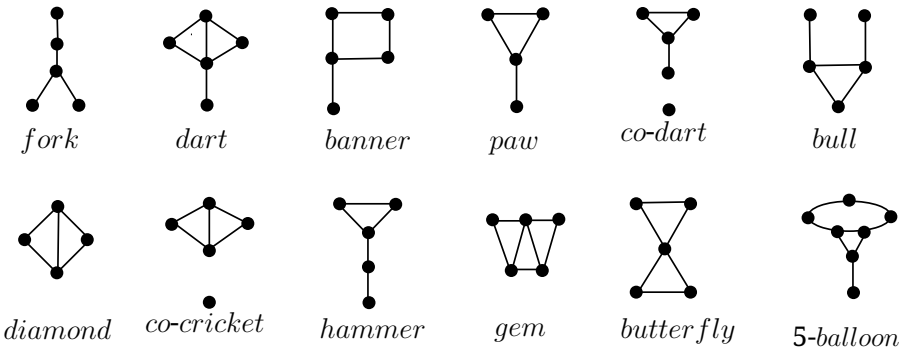


图1：叉图及一些禁配置的示意图。

设 $\mathcal{G}$ 是一个图族。若存在一个函数 f，使得对于每个图 $G\in\mathcal{G}$，都有 $\chi(G)\le f(\omega(G))$，则称 $\mathcal{G}$ 是由绑定函数 f [6] χ-有界的 。

在 [2, 3, 11], 中，作者证明了当$H\in\{C_4, K_4,$为菱形图、 $K_3\cup K_1$、爪图、 $P_3\cup 2K_1$、K_5-e、反叉}时，（叉图， H）-无图是线性 χ-有界的，其中反叉 是叉图的补图。

Kierstead 和 Penrice [9] 证明，对于任意半径为二的树 T， T自由图的类是 χ有界的。作为推论，我们看到无叉图是 χ有界的。在 [8, 12],中，作者提出，对于无叉图是否存在一个多项式（特别是二次） χ绑定函数。最近，Liu 等 [10] 解决了这一问题，并证明对于每个无叉图 G，$\chi(G)\le 7.5\omega^2(G)$。这是关于猜想1.1的一项重要进展，促使我们更加关注无叉图的完全可除性。

Karthick、Kaufmann 和 Sivaraman [8] 证明，当 $F\in\{P_6,$ 为余飞镖、公牛}时，猜想1.1对（叉图， F）自由图成立。他们还证明，当 $F\in\{$ 为镖图、横幅图、补蟋蟀图}时，（叉图， H）自由图的类要么是爪图自由的，要么是完美可分的。

本文推广了 Karthick等人在 [8] 中的一些结果，并证明了以下定理。

定理 1.1 （叉图、奇气球）-无图是完美可分的。

作为推论，当 $F\in\{P_6,$ 余飞镖、公牛、锤子、奇洞}时，(叉图，F)-无图类是完美可分的。作为定理 1.1 的一项应用，我们还证明了

定理 1.2 $\chi(G) \leq \binom{\omega(G)+1}{2}$ 若 G 是<亭 id='11'>(</亭>叉图, 宝石图)-无图。

定理 1.3 $\chi(G) \leq \binom{\omega(G)+1}{2}$ 若 G 是(叉图、蝴蝶图)-自由的。

我们将在第 2 节证明定理 1.1，在第 3 节证明定理 1.2，并在第 4 节证明定理 1.3。

2 （叉图、奇气球）-自由图

我们将在本节证明定理 1.1。设 X 是 $V(G)$ 的一个子集。若由补图 G 中的 X 诱导的子图是连通的，则称 X 在 G 中是反连通的。G 中的反路是 G 的一条路径的补图。若一个图类 $\mathcal{C}$ 满足 $G \in \mathcal{C}$，则 G 的所有诱导子图也都属于 $\mathcal{C}$，称该图类 $\mathcal{C}$ 为遗传的。以下两个引理将在证明中使用。

引理 2.1 [5] 极小非完美可分图不含齐性集。

引理 2.2 [8] 设 $\mathcal{C}$ 是一个图的遗传类。假设每个图 $H \in \mathcal{C}$ 都有一个顶点 v，使得 $H[M_H(v)]$ 是完美图。那么 $\mathcal{C}$ 中的每个图都是完美可分的。

借鉴 Karthick 等人在 [8], 中使用的类似技巧，我们证明下面的引理 a.

引理 2.3 设 G 是一个连通无叉图。若 G 是极小非完美可分图，那么对于每个顶点 $v \in V(G)$, $M(v)$ 中除 C_5外不含奇反洞。

证明。反设，设 G 是一个极小非完美可分图，且令 $v \in V(G)$满足： $G[M(v)]$ 包含一个由 X_0 诱导、且具有 $|X_0| \geq 7$的奇反洞。令 $X_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 满足：当且仅当 $|i-j| \neq 1$ 时，$v_i \sim v_j$ 成立（下标模 n计算）。

我们构造一个顶点子集序列 X_0，X_1，.....，X_t，$\cdots$，使得对于每个 $i \geq 1$，X_i都可以由 X_{i-1} 添加一个顶点 x_i 得到，其中该顶点在 X_{i-1}中既有邻点又有非邻点。令 X 为以这种方式得到的极大顶点集。由其极大性可知，V（G）中的每个顶点都与 X完全相邻或全不邻接。我们将证明 $X \neq V$（G）。于是，X 是一个齐性集，这与引理 2.1 矛盾。令 $A = M$（X_0）。显然，$A \neq \emptyset$，因为 $v \in A$。首先，我们将证明

$$N(A) \text{ is complete to } X_0. \tag{1}$$

反设存在一个顶点 $b \in N$（A），它在 X_0 中有一个非邻点。令a 为 b 在 A中的一个邻点。由于 $b \notin A$，我们有 b 在 X_0中有邻点。

如果 b 在 X_0 中有两个连续的邻点，那么存在某个 i，使得 v_i，$v_{i+1} \in N(b)$ 且 $v_{i+2} \notin N(b)$，这意味着由 $\{v_{i+2}, v_i, b, v_{i+1}, a\}$ 诱导出一个叉图。这说明 b 在 X_0 中没有两个连续的邻点。

不失一般性，设 $b \sim v_1$。那么 $b \not\sim v_2$ 且 $b \not\sim v_n$。

若 $b \sim v_3$，则 $b \not\sim v_4$，从而 $b \sim v_5$，因为否则 $\{a, b, v_1, v_4, v_5\}$ 诱导出一个叉图，并且因此，对 $j \in \{3, 5, 7, \ldots, n-2\}$ 有 $b \sim v_j$，对 $k \in \{2, 4, 6, \ldots, n-1\}$ 有 $b \not\sim v_k$。特别地，

$b \sim v_{n-4}$ 和 $b \not\sim v_{n-1}$，这意味着 $b \sim v_n$，因为否则 $\{a, b, v_{n-4}, v_{n-1}, v_n\}$诱导出一个叉图，矛盾。因此，$b \not\sim v_3$。于是，为了禁止在 $\{a, b, v_1, v_3, v_4\}$ 上出现叉图，我们有 $b \sim v_4$；又由于 b 在 X_0 中没有两个连续的邻点，故有 $b \not\sim v_5$；并且有 $b \sim v_6$，因为否则 $\{a, b, v_1, v_5, v_6\}$ 诱导出一个叉图。但现在，$\{a, b, v_6, v_2, v_3\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了 (1)。

接下来，我们证明

$$\text{for } i \geq 0,\ X_i \text{ is complete to } N(A), \text{ and } X_i \cap (A \cup N(A)) = \emptyset. \tag{2}$$

由 (1)，可知 (2) 对 $i = 0$ 成立。设 $i \geq 1$，并假设 (2) 对 X_{i-1} 成立。回忆一下，$X_i = X_{i-1} \cup \{x_i\}$，其中 x_i 在 X_{i-1} 中有一个邻点和一个非邻点。假设 X_i 与 $N(A)$ 并非完全相邻，并令 $b \in N(A)$ 为 x_i 的一个非邻点。由于 x_i 在 X_{i-1} 中有一个邻点，且 $N(A) \cap X_{i-1} = \emptyset$，因此 $x_i \notin A$。由于 x_i 在 X_{i-1} 中有一个非邻点，且 $N(A)$ 与 X_{i-1} 完全相邻，因此 $x_i \notin N(A)$。由归纳法可知，$X_i \cap (A \cup N(A)) = \emptyset$。

由于 $x_i \notin A$，x_i 在 X_0 中有一个邻点，利用对称性，不妨设为 v_1。注意，对每个 i，X_i 都是反连通的。令 P 为一条从 x_i 到 v_1 的最短反路。那么，P 至少有三个顶点。设 $P = w_1 w_2 \dots w_t$，其中 $x_i = w_1$ 且 $v_1 = w_t$。由于 X_{i-1} 与 $N(A)$ 完全相邻，且 $w_2, w_3 \in X_{i-1}$，因此 $b \sim w_2$ 且 $b \sim w_3$，于是 $\{x_i, w_2, b, w_3, a\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。因此，x_i 在 $N(A)$ 中没有非邻点，这意味着 X_i 与 $N(A)$ 完全相邻。这就证明了 (2)。

由 (2) 可直接得出 $X \cap (A \cup N(A)) = \emptyset$。由于 $A \neq \emptyset$，我们有 $X \neq V(G)$，这意味着 X 是齐性集。引理 2.3 的证明至此完成。 ∎

设 G 是一个极小非完美可除叉图-free 图，且 v 是 G的一个顶点。根据引理 2.2，$G[M(v)]$ 不是完美图，并且根据引理 2.3，它必定包含某个奇洞。

引理 *2.4* 设 G 是一个无叉图，且 $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ 是包含在 G中的一个奇洞。若 $V(G) \setminus V(C)$ 中存在两个相邻顶点 u和 v，使得 u与 $V(C)$并非全不邻接，而 v与其全不邻接，则对于某个 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$，有 $N(u) \cap V(C) = \{v_j, v_{j+1}\}$；或者 $N(u) \cap V(C) = V(C)$。

证明。设 $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ 使得 $n \geq 5$ 且 n 为奇数。由对称性，不妨设$u \sim v_1$。根据 v的定义，我们有 $u \sim v$，且 v 与 V全不邻接（C）。假设$N(u) \cap V(C) \notin \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_n\}\}$。

若 $u \not\sim v_2$ 且 $u \not\sim v_n$，则 $\{v_1, v_2, v_n, u, v\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。

若 u 在 $\{v_2, v_n\}$中恰有一个邻点，我们由对称性假设 $u \sim v_n$，并令 t 为 $\{3, 4, \dots, n-1\}$ 中满足 $u \sim v_t$ 的最小整数，则当 $t = n-1$时，$\{v_1, v_{t-1}, v_t, u, v\}$ 诱导出一个叉图；当 $t \neq n-1$ 时，$\{v_{t-1}, v_t, v_n, u, v\}$ 诱导出一个叉图，二者均矛盾。

假设 $u \sim v_2$和 $u \sim v_n$。若 u并未与 $\{v_3, v_4, \dots v_{n-2}\}$完全相邻，令 t'为 $\{3, 4, \dots, n-2\}$ 中满足 $u \not\sim v_{t'}$的最小整数，则 $\{v_{t'-1}, v_{t'}, v_n, u, v\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这说明 u与 $\{v_3, v_4, \dots v_{n-2}\}$完全相邻。此外，$u \sim v_{n-1}$，否则 $\{v_2, v_{n-1}, v_n, u, v\}$ 会诱导出一个叉图，矛盾。因此，u与 V完全相邻（C）。这证明了引理 2.4。

∎

引理 2.5 设 G 是一个连通极小非完美可分叉自由图， $v \in V(G)$，且 C是包含在 $G[M(v)]$中的奇洞。那么 $N(M(C))$与 $V(C)$并非完全相邻。

证明。反设，令 $C = v_1v_2 \dots v_nv_1$满足 $n \geq 5$且 n为奇数， $A = M$（C）、$X = N$（A）与 V（C）完全相邻。由于 $v \in A$，我们有 $A \neq \emptyset$，因此 $X \neq \emptyset$，因为 G是连通的。令 $Z = N$（C）$\setminus X$。显然， V（G）$= V$（C）$\cup X \cup A \cup Z$。

由于 $V(C)$与 A全不邻接，且根据我们的假设，与 X 完全相邻，因此有$Z \neq \emptyset$，否则 $V(C)$是一个齐性集，这与引理 2.1 矛盾。此外，根据 Z的定义， Z 与 A全不邻接。

如果 Z 与 $V(C)$完全相邻，那么 $V(C)$就是一个齐性集。如果 Z 与 X完全相邻，那么 $V(C) \cup Z$ 就是一个齐性集。这两种情况都与引理 2.1 矛盾。因此，我们有

$$Z \text{ is neither complete to } V(C) \text{ nor complete to } X. \tag{3}$$

设 Z' 为 Z 中与 X完全相邻的顶点集，令 $Z'' = Z \setminus Z'$。我们将证明

$$Z'' \neq \emptyset \text{ and } Z'' \text{ is complete to } V(C), \text{ and } Z' \neq \emptyset. \tag{4}$$

由 (3) 可知， Z 与 X并非完全相邻，这意味着 $Z'' \neq \emptyset$。由于 Z'' 中没有顶点与 X完全相邻， Z'' 中的每个顶点 z 在 X中都有一个非邻点，例如 x。令 $a \in A$ 满足$a \sim x$，不妨利用对称性设 $v_1 \sim z$。那么 z与 $V(C) \setminus \{v_2, v_n\}$ 完全相邻，否则 $\{v', v_1, z, x, a\}$ 会诱导出一个叉图，其中 v'是 $V(C) \setminus \{v_2, v_n\}$中 z的一个非邻点，矛盾。因此， z与 $\{v_2, v_n\}$ 完全相邻，否则当 $z \not\sim v_2$时， $\{v_2, v_{n-1}, x, z, a\}$ 会诱导出一个叉图；当 $z \not\sim v_n$时， $\{v_3, v_n, x, z, a\}$ 会诱导出一个叉图，均矛盾。因此， z 与 $V(C)$完全相邻，这意味着 Z'' 与 $V(C)$完全相邻。如果 $Z' = \emptyset$，那么 $Z = Z''$ 与 $V(C)$完全相邻，这与 (3) 矛盾。因此， $Z' \neq \emptyset$。这证明了 (4)。

令 T为 Z' 中与 Z''完全相邻的顶点集，令 $T' = Z' \setminus T$。接下来，我们证明

$$T \neq \emptyset \text{ and } T' \neq \emptyset. \tag{5}$$

若 $T' = \emptyset$。则 Z' 与 Z''完全相邻，这意味着 $V(C) \cup Z'$ 是一个齐性集，因为 $V(C) \cup Z'$ 与 $X \cup Z''$ 完全相邻，且与 A全不邻接，这与引理 2.1 矛盾。这说明 $T' \neq \emptyset$。

假设 $T = \emptyset$。则 Z' 中的每个顶点在 Z''中都有一个非邻点。由 (3) 和 (4)，可知 Z' 与 $V(C)$并非完全相邻。令 $z' \in Z'$ 为在 $V(C)$中有一个非邻点的顶点，记作 v_1；令 $z'' \in Z''$ 为 z'的一个非邻点。根据 Z''的定义， z'' 在 X中有一个非邻点，记作 x''。令 a'' 为 A中与 x'' 相邻的一个顶点。由于 X 与 $V(C) \cup Z'$完全相邻，我们有 $x'' \sim v_1$ 和$x'' \sim z'$。由 (4)， Z'' 与 $V(C)$完全相邻，特别地， $z'' \sim v_1$。因此， $\{z'', v_1, z', x'', a''\}$诱导出一个叉图，矛盾。这证明了 (5)。

假设 T与 T'并非完全相邻。令 $t \in T$和 $t' \in T'$ 满足 $t \not\sim t'$。那么 t' 在 Z''中有一个非邻点 b， b 在 X中有一个非邻点 b'， 而 b' 在 A中有一个邻点 c。由于 X 完全相邻

于 Z'，且 T与 Z''完全相邻，因此有 $b' \sim t$， $b' \sim t'$和 $t \sim b$。现在， $\{t, t', b, b', c\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。因此， T 与 T'完全相邻。

最后，假设 T' 与 $V(C)$并非完全相邻。由对称性，不妨设 $d \in T'$，使得 $d \not\sim v_1$。注意， T' 中的每个顶点在 Z'' 中都有一个非邻点，而 Z''中的每个顶点在 X中都有一个非邻点。我们假设 $d' \in Z''$ ，使得 $d' \not\sim d$。因此，我们假设 $d'' \in X$ ，使得 $d'' \not\sim d'$。回顾一下， Z' 与 X完全相邻。由此可得 $d \sim d''$。根据（4），我们有 $d' \sim v_1$。现在， $\{d, d', v_1, d'', v\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。因此， T' 与$V(C)$完全相邻。

因此， $V(C) \cup T$是一个齐性集，因为 $V(C) \cup T$与 $X \cup T' \cup Z''$ 完全相邻，且与 A全不邻接，这与引理 2.1矛盾。引理 2.5得证。 ∎

定理 *1.1* 的证明。 反设结论不成立。设 G 是一个极小的、非完美可分的无叉图和奇气球图的图。显然， G 是连通的。

由引理 2.2， $G[M(v)]$ 对于 G中的任意顶点 v 都不是完美图。根据强完美图定理和引理 2.3, $G[M(v)]$ 包含一个奇洞，记为 $C = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$，使得$n \geq 5$且 n为奇数。设 $A = M(C)$ 和 u 是 $N(A)$ 中的一个顶点。则 u 在 $V(C)$ 中有一个邻点，并在 A 中有一个邻点。由引理 2.4 可知，对于某个$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，若 $N(u) \cap V(C) \neq V(C)$，则 $N(u) \cap V(C) = \{v_j, v_{j+1}\}$。

设 $W_1 = \{v \in N(A) | N(v) \cap V(C) = V(C)\}$，设 $W_2 = N(A) \setminus W_1$。由于 G是无奇气球图，因此我们有 $W_2 =$Ø，这与引理 2.5 矛盾。至此，定理 1.1 的证明完成。

∎

3 无叉图且无宝石图

本节中，我们研究无叉图且无宝石图，并证明定理 1.2。若一个图的某个顶点的邻域是两个团的并，则称该顶点为双单纯的 。我们需要以下引理 3.1，它建立了无叉图且无宝石图中的奇气球与双单纯顶点之间的联系。设 B 是 G 中的一个诱导奇气球，且 $u \in V(B)$。我们称 u 为 B 的中心 ，当且仅当 $d_B(u) = 3$ ，并且 u 在 B 中有一个度为 1 的邻点；如果 $|V(B)|$ 在 G 的所有诱导奇气球中最小，则称 B 为一个最小诱导奇气球。

引理 3.1 设 G 是一个无（叉图、宝石图）的图。若 G 含有一个诱导奇气球，则 G 有一个双单纯顶点。

证明。设 B 是 G 的一个最小诱导奇气球， u 是 B 的中心。设 $C =$$v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ 是 B 的奇洞，且 $n \geq 5$ 与 n 之间的路径为奇数长；设 s 是 B 中度为 1 的顶点。不失一般性，可假设 u 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻，且与 $\{v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ 全不邻接。

由于 G 是无宝石图，我们有

V（G）中的任何顶点都不能在 V（C）中有四个连续邻点。 (6)

令 A 表示与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻且与 $\{v_3, v_4\}$全不邻接的顶点集。如果A 中有两个不相邻顶点 a_1 和 a_2，那么 $\{a_1, a_2, v_2, v_3, v_4\}$ 会诱导出一个叉图，矛盾。因此，我们有

$$A \text{ is a clique.} \tag{7}$$

令 D表示 $N(u)$ 中与 $V(C)$ 全不邻接的顶点集。显然，$s \in D$。若 D 有两个不相邻顶点 d_1 和 d_2，则 $\{d_1, d_2, u, v_2, v_3\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。因此，

$$D \text{ is a clique.} \tag{8}$$

令 U 为 $N(u)$ 中与 D 完全相邻的顶点集。我们将在接下来的两个断言中证明，$N(u)$、$\setminus (U \cup D)$ 和 $U \cup D$ 都是团。

断言 3.1 令 T 为 $N(u) \setminus \{v_1, v_2\}$ 中与 s 不相邻的顶点集。则 T 是一个团。

证明。 首先，我们证明

$$\text{all vertices of } T \text{ are complete to } \{v_1, v_2\}. \tag{9}$$

反设不然。令 t 为 T 中的一个顶点，使得 $t \not\sim v_2$，由对称性可知。为避免出现叉图 $\{s, t, u, v_2, v_3\}$，我们有 $t \sim v_3$。假设 $t \sim v_n$、$\{s, u, t, v_3, v_n\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了 $t \not\sim v_n$。为避免出现叉图 $\{s, t, u, v_1, v_n\}$，我们有 $t \sim v_1$。若 $t \sim v_{n-1}$，则 $\{s, u, t, v_2, v_{n-1}\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了 $t \not\sim v_{n-1}$。但此时，$\{t, v_1, v_2, v_{n-1}, v_n\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了 (9)。

接下来，我们证明

$$\text{if } t \in T, \text{ then } N(t) \cap V(C) \in \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_n\}\} \tag{10}$$

反设。由 (9) 可知，t 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻，这意味着存在一个整数 $j \in \{4, \ldots, n-1\}$，使得 $t \sim v_j$。由 (6) 可知，$t \not\sim v_3$ 或 $t \not\sim v_n$。若 t 在 $\{v_3, v_n\}$ 中恰有一个邻点，根据对称性，不妨设 $t \sim v_3$。由 (6) 可知，$t \not\sim v_4$。设 $j' \in \{5, \ldots, n-1\}$ 为满足 $t \sim v_{j'}$ 的最小整数。则 $\{t, v_3, v_{j'}, u, s\}$ 导出一个叉图，矛盾。因此，我们假设 $t \not\sim v_3$ 且 $t \not\sim v_n$。

若 $n = 5$，则 $t \not\sim v_3$，$t \not\sim v_5$ 且 $t \sim v_4$，这意味着 $\{v_3, v_4, v_5, t, u\}$ 导出一个叉图，矛盾。因此，我们可以假设 $n \geq 7$。

如果 t 与 $V(C) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_j, v_n\}$ 全不邻接，则 $\{v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, t, u\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。因此，存在一个整数 $i \in \{4, \ldots, n-1\} \setminus \{j\}$ 使得 $t \sim v_i$。如果 $i \notin \{j-1, j+1\}$，则 $\{v_i, v_j, t, u, s\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了 $i \in \{j-1, j+1\}$。如果 t 在 $\{v_{j-1}, v_{j+1}\}$ 中恰有一个邻点，不妨根据对称性设 $t \sim v_{j-1}$，则 $N(t) \cap \{v_4, \ldots, v_{n-1}\} = \{v_{j-1}, v_j\}$，这意味着 $\{v_j, \ldots, v_n, v_1, t, u, s\}$ 或 $\{v_2, v_3, \ldots, v_{j-1}, t, u, s\}$ 诱导出一个更小的奇气球，因为 $n \geq 7$，矛盾。因此，

$t \sim v_{j-1}$ 和 $t \sim v_{j+1}$，从而 $\{v_{j-1}, v_{j+1}, t, u, s\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了（10）。

令 T_1为 T的子集，使得 $N(T_1) \cap V(C) = \{v_1, v_2\}$；令 T_2为 T的子集，使得$N(T_2)\cap V(C) = \{v_1, v_2, v_3\}$；并令 T_3 为 T 的子集，使得 $N(T_3)\cap V(C) = \{v_1, v_2, v_n\}$。于是，由 (10) 得 $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$。由 (7)， T_1 是一个团。若 T_2 不是团，取两个不相邻顶点 $t', t'' \in T_2$，则 $\{t', t'', v_3, v_4, v_5\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。因此， T_2 是一个团。类似地， T_3 是一个团。

假设 T不是团。取 T中的两个不相邻顶点 t_1和 t_2。由于 T_1, T_2和 T_3 都是团，因此 t_1 和 t_2 属于 $\{T_1, T_2, T_3\}$中的不同元素。若$t_1 \in T_2$和 $t_2 \in T_3$，则 $\{t_2, t_1, u, s, v_n\}$ 诱导出一个叉图。否则，根据对称性，不妨设 $t_1 \in T_1$和 $t_2 \in T_2$，则 $\{t_1, t_2, v_1, v_n, v_3\}$ 诱导出一个叉图。两种情况都矛盾。这证明了断言 3.1。

∎

断言 3.2 U 是一个团。

证明。 反设不然。令 u_1 和 u_2 为 U中的两个不相邻顶点。根据 U的定义， u_1 和 u_2 都与 D完全相邻。我们将证明

$$\{u_1, u_2\} \text{ is anticomplete to } \{v_3, v_n\}. \tag{11}$$

若情况并非如此，由对称性，不妨设 $u_2 \sim v_3$。由于 $u_2 \sim s$ 和 s 与 V（C）全不邻接，根据引理 2.4 和 (6)，可得 N（u_2）$\cap V$（C）$\subseteq \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$。

因此， $u_2 \not\sim v_1$，这意味着 $u_1 \sim v_1$或 $u_1 \sim v_3$，以避免在 $\{v_1, u_1, u, u_2, v_3\}$上形成叉图。设 $u_1 \sim v_1$。那么 $u_1 \sim v_2$，以避免在 $\{v_1, v_2, u_1, u, s\}$上形成宝石图；进而， $v_2 \sim u_2$，以避免在 $\{v_2, u_1, u, u_2, s\}$上形成宝石图，这与 $\{v_2, v_3, u_2, u, s\}$ 诱导出一个宝石图矛盾。因此 $u_1 \not\sim v_1$，从而 $u_1 \sim v_3$。由于 $u_1 \sim s$ 和 s 与 V（C）全不邻接，根据引理 2.4 和 (6)，可得 N（u_1）$\cap V$（C）$\subseteq \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$。

因此， $\{u_1, u_2\}$与 $\{v_1, v_n\}$全不邻接。但此时， $\{u_1, u_2, u, v_1, v_n\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了（11）。

接下来，我们证明

$$\{u_1, u_2\} \text{ is anticomplete to } \{v_1, v_2\}. \tag{12}$$

反之，设不妨由对称性可假设 $u_2 \sim v_2$。由于 $u_2 \sim s$ 和 s 与 V（C）全不邻接，根据引理 2.4和（6），我们有 N（u_2）$\cap VC \subseteq \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$。由于根据（11）有 $u_2 \not\sim v_3$，我们有 N（u_2）$\cap V$ $C = \{v_1, v_2\}$。此外， $u_1 \sim v_2$以禁止在 $\{v_2, u_1, u, u_2, s\}$上出现一个宝石图。同理，我们有 N（u_1）$\cap V$ $C = N$（u_2）$\cap V$（C）$= \{v_1, v_2\}$。现在， $\{u_1, u_2, v_2, v_3, v_4\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这证明了（12）。

由（11）和（12）可知， $\{u_1, u_2\}$与 $\{v_1, v_2, v_3, v_n\}$全不邻接，这意味着 $\{u_1, u_2, u, v_2, v_3\}$诱导出一个叉图，矛盾。这证明了断言 3.2。 ∎

令 T^+为 $N(u) \setminus (D \cup \{v_1, v_2\})$ 中不与 D 完全相邻的顶点集。我们将证明

T^+ 是一个团。 (13)

假设 T^+ 不是团。令 t_3 和 t_4 为 T^+ 中的两个不相邻顶点。若 D 中有一个顶点，例如 d，同时与 t_3 和 t_4 不相邻，则在断言 3.1 中用 d 替换 s，可得 $t_3 \sim t_4$，矛盾。因此，存在 d_3，$d_4 \in D$，使得 $t_3 \sim d_3, t_3 \not\sim d_4, t_4 \sim d_4$ 且 $t_4 \not\sim d_3$。由 (8) 可知 D 是一个团，因此 $d_3 \sim d_4$，这意味着 $\{u, t_3, t_4, d_3, d_4\}$ 诱导出一个宝石图，矛盾。这证明了 (13)。

由 (9)，T 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻。由于 T^+ 中的每个顶点 t^+ 在 D 中都有一个非邻点，设为 d^+，在断言 3.1 中用 d^+ 替换 s，可得 t^+ 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻，因此 T^+ 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻。因此，由 (13)，$N(u) \setminus (U \cup D) = T^+ \cup \{v_1, v_2\}$ 是一个团。根据 U 的定义和断言 3.2，由于 D 是一个团，$U \cup D$ 也是一个团。也就是说，u 是 G 的一个双单纯顶点。引理 3.1 的证明至此完成。

∎

定理 1.2 的证明。若 G 含有一个诱导奇气球，则根据引理 3.1，G 有一个双单纯顶点，设为 u，使得 $d(u) \leq 2\omega(G) - 2$。由归纳法，可不妨设 $\chi(G-u) \leq \frac{1}{2}\omega^2(G-u) + \frac{1}{2}\omega(G-u) \leq \frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G)$。由于对于任意 $\omega(G) \geq 1$，$\frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G) - (2\omega(G) - 2) \geq 1$，我们可以任取 $G-u$ 的一个 $\chi(G-u)$-着色，并将其扩展为 G 的一个 $(\frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G))$-着色。

如果 G 没有诱导奇气球，那么根据定理 1.1，G 是完美可分的，因此 $\chi(G) \leq \frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G)$。由此完成定理 1.2 的证明。 ∎

4 无叉图且无蝴蝶图的图

本节中，我们研究无叉图且无蝴蝶图的图，并证明定理 1.3。若一个图的某个顶点的邻域是三个团的并，则称该顶点为三单纯的 。采用定理 1.2 证明中使用的类似技巧，我们可以在无叉图且无蝴蝶图的图中建立奇气球与三单纯顶点之间的联系。已知，对于无叉图 G，$\chi(G) \leq 3$ 若 $\omega(G) = 2$，且 $\chi(G) \leq 4$ 若 $\omega(G) = 3$ [11]。因此，本节中我们可以假设 $\omega(G) \geq 4$。

引理 4.1 设 G 是一个(无叉图、无蝴蝶图)。若 G 包含一个诱导奇气球，则 G 有一个三单纯顶点。

证明。设 B 是 G 的一个最小诱导奇气球，u 是 B 的中心。设 $C = v_1v_2 \ldots v_nv_1$ 是 B 的奇洞，使得 $n \geq 5$ 和 n 为奇数，并设 s 是 B 中度为 1 的顶点。不失一般性，我们可以假设 u 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻，且与 $\{v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ 全不邻接。

令 A 表示与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻且与 $\{v_3, v_4\}$ 全不邻接的顶点集。用证明 (7) 时相同的论证，我们可以证明

A is a clique. (14)

令 D 表示 $N(u) \setminus \{v_1, v_2\}$ 中与 $V(C)$ 全不邻接的顶点集。显然， $s \in D$。用证明 (8) 时相同的论证，我们可以证明 D 是一个团。特别地，若 D 含有两个不同的顶点，记为 d_1 和 d_2，则 $\{v_1, v_2, u, d_1, d_2\}$ 诱导出一个蝴蝶图，矛盾。这证明了 $D = \{s\}$。

令 T 为 $N(u)$ 中与 s 不相邻的顶点集。用证明 (9) 时所用的相同论证，可以证明

$$\text{all vertices of } T \text{ are complete to } \{v_1, v_2\}. \tag{15}$$

接下来，我们将证明

$$\text{no vertex of } T \text{ may have four consecutive neighbors in } V(C). \tag{16}$$

若此结论不成立，令 t 为 T 中在 $V(C)$ 中有四个连续邻点 $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ 的一个顶点。由 (15)，可知 t 与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻。根据 t 的选取，不妨设 $|\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\} \cap \{v_1, v_2\}| \in \{0, 2\}$。

若 $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$，不妨设 $i \geq 4$ 和 $i + 3 \leq n - 1$，则 $\{v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, t, u\}$ 诱导出一个蝴蝶图，矛盾。因此， $|\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\} \cap \{v_1, v_2\}| = 2$，这意味着 $i \in \{1, n-1, n\}$。若 $i = n$，则 $\{v_3, v_n, t, u, s\}$ 诱导出一个叉图，因为 $t \not\sim s$，且 u 与 $\{v_3, v_n\}$ 全不邻接，矛盾。因此， $i = 1$ 或 $i = n - 1$；由对称性，不妨设 $i = 1$。于是 $\{v_1, v_3, v_4, t, u\}$ 诱导出一个蝴蝶图，矛盾。因此 $|\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\} \cap \{v_1, v_2\}| \neq 2$。这证明了 (16)。

分别用（14）和（16）替换（7）和（6），我们便可用证明命题 3.1 时相同的论证证明（17）和（18）。

$$\text{If } t \in T, \text{ then } N(t) \cap V(C) \in \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_n\}\} \tag{17}$$

and

$$T \text{ is a clique.} \tag{18}$$

令 U 为 N（u）中与 s 相邻的顶点集。若 u' 是 U 中与 V（C）完全相邻的顶点，则 $\{v_3, v_4, u', u, s\}$ 诱导出一个蝴蝶图。若 u'' 是 U 中与 $\{v_1, v_2\}$ 全不邻接的顶点，则 $\{v_1, v_2, u'', u, s\}$ 诱导出一个蝴蝶图。两者均矛盾。因此，我们有

$$\text{不存在 vertex of } U \text{ is complete to } V(C), \text{ and no vertex of } U \text{ is anticomplete to } \{v_1, v_2 \tag{19}$$

令 U_1 为 U 中与 $\{v_1, v_2\}$ 完全相邻的顶点集，并令 $U_2 = U \setminus U_1$。由于 U_1 的每个顶点都与 s 相邻，由引理 2.4 和 (19)， $N(U_1) \cap V(C) = \{v_1, v_2\}$。若 U_1 有两个不相邻顶点 u_1' 和 u_1''，则 $\{u_1', u_1'', v_2, v_3, v_4\}$ 诱导出一个叉图，矛盾，因此 U_1 是一个团。接下来，我们将证明

$$T \cup U_1 \text{ is a clique.} \tag{20}$$

反设存在 $T \cup U_1$中的两个不相邻顶点 t 和 u_1。由于 T和 U_1 都是团，不妨设 $t \in T$和 $u_1 \in U_1$。由 (17)， $N(t) \cap V(C) \subseteq \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_n\}\}$。此外，由引理 2.4 和 (19)， $N(u_1) \cap V(C) = \{v_1, v_2\}$，因为 $N(U_1) \cap V(C) = \{v_1, v_2\}$。若 $N(t) \cap V(C) \subseteq \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_n\}\}$，则 $\{t, u_1, v_2, v_3, v_4\}$诱导出一个叉图。若 $N(t) \cap V(C) = \{v_1, v_2, v_3\}$，则 $\{t, u_1, v_1, v_{n-1}, v_n\}$ 诱导出一个叉图。两种情况都导致矛盾。这就证明了 (20)。

对于 $i \in \{1, 2\}$，令 $U_2^i = U_2 \cap N(v_i)$。由于根据 (19)， U 中没有顶点与 $\{v_1, v_2\}$ 全不邻接，因此我们有 v_2 与 U_2^1 全不邻接，且 v_1 与 U_2^2 全不邻接，并且 $U_2 = U_2^1 \cup U_2^2$。现在，我们将证明

$$U_2^1 \text{ and } U_2^2 \text{ are both cliques.} \tag{21}$$

若情况并非如此，我们可不失一般性地利用对称性假设 U_2^1 不是团，于是 U_2^1 中存在两个不相邻顶点 w 和 w'。由于 w 和 w' 均与 v_1 和 s 相邻，根据引理 2.4 和 (19)，我们有 $N(w) \cap V(C) \in \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_n\}\}$，且 $N(w') \cap V(C) \in \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_n\}\}$。因此， $N(w) \cap V(C) = N(w') \cap V(C) = \{v_1, v_n\}$，因为 v_2 与 U_2^1 全不邻接。但此时， $\{w, w', v_1, v_2, v_3\}$ 诱导出一个叉图，矛盾。这就证明了 (21)。

根据 U_1的定义， U_1 与 $\{v_1, v_2\}$完全相邻。根据（15）， T 也与 $\{v_1, v_2\}$完全相邻。因此， $T \cup U_1 \cup \{v_1, v_2\}$ 是一个团，因为根据（20）， $T \cup U_1$ 是一个团。根据 U的定义，我们有 s与 U_2^1 完全相邻，这意味着 $U_2^1 \cup \{s\}$是一个团，因为根据（21）， U_2^1是一个团。由于$U_2 \cup \{s\} = （U_2^1 \cup \{s\}）\cup U_2^2 = N（u）\setminus （T \cup U_1 \cup \{v_1, v_2\}）$，我们有 u是G的三单纯顶点，因为 $U_2^1 \cup \{s\}$， U_2^2和 $T \cup U_1 \cup \{v_1, v_2\}$都是团。引理 4.1 的证明到此完成。

∎

定理 1.3 的证明。如果 G 含有诱导奇气球，那么根据引理 4.1， G 含有一个三单纯顶点，记为 u，使得 $d(u) \leq 3\omega(G) - 3$。通过归纳法，不妨设 $\chi(G-u) \leq \frac{1}{2}\omega^2(G-u) + \frac{1}{2}\omega(G-u) \leq \frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G)$。由于对于任意 $\omega(G) \geq 4$， $\frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G) - (3\omega(G) - 3) \geq 1$，我们可以对 $G-u$进行任意 $\chi(G-u)$-着色，并将其扩展为 G的 $(\frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G))$-着色。

如果 G 不含有诱导奇气球，那么根据定理 1.1， G 是完美可分的，因此 $\chi(G) \leq \frac{1}{2}\omega^2(G) + \frac{1}{2}\omega(G)$。定理 1.3 的证明至此完成。 ∎

参考文献

[1] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty。《图论》，Springer，纽约，2008年。

[2] M. Chudnovsky、L. Cook 和 P. Seymour。《排除叉图与反叉》。《离散数学》343 (2020)，111786。

[3] M. Chudnovsky、S. Huang、T. Karthick 和 J. Kaufmann。《无诱导叉图的无平方图》。《电子组合学杂志》28(2) (2021) #P2.20。

[4] M. Chudnovsky、N. Robertson、P. Seymour 和 R. Thomas。强完美图定理。《数学年刊》164(1)（2006）51-229。

[5] M. Chudnovsky 和 V. Sivaraman。完全可除性与 2-可除性。《图论杂志》90（2019）54-60。[6] A. Gy´arf´as。关于 Ramsey 覆盖数。*Colloquia Mathematic Societatis J´anos Bolyai 10,* 无限集与有限集。North-Holland/American Elsevier，纽约。（1975）801- 816。[7] C. T. Ho´ang。关于（横幅图，奇洞）无图的结构。《图论杂志》89（2018）395–412。[8] T. Karthick、J. Kaufmann 和 V. Sivaraman。通过完全可除性对不含诱导叉图的图类进行着色。《组合学电子期刊》29(3)（2022）#P3.19。[9] H. A. Kierstead 和 S. G. Penrice。半径二树确定了 χ-有界类。《图论杂志》18(2)（1994）119-129。[10] X. Liu、J. Schroeder、Z. Wang 和 X. Yu。χ-绑定函数的多项式界：对于不含 t-扫帚图的图。arXiv 预印本 arXiv:2106.08871（2021）。[11] B. Randerath。基于禁对的色数 Vizing 上界。博士论文，亚琛工业大学，Shaker 出版社，1993。[12] B. Randerath 和 I. Schiermeyer。顶点着色与禁子图——综述。《图与组合》20(1)（2004）1-40。