arXiv:2302.06841v1 [math.DG] 14 Feb 2023

拓扑型低维双哈密顿结构

Yassir Ibrahim Dinar

苏丹卡布斯大学，阿曼

摘要

我们从李代数中与正则半单型非正则幂零元相关联的经典 W-代数构造局部双哈密顿结构，其类型为 A_2 和 A_3。这些结构构成精确的泊松铅笔，具有无色散极限，且其首项定义了对数型或平凡的 Dubrovin-Frobenius 流形。我们计算了相应的中心不变量，预计它们为常数。特别地，我们得到了与聚焦 Schr¨odinger 方程和赫尔维茨空间 $M_{0;1,\ 0}$ 相关联的 Dubrovin-Frobenius 流形，以及相应的拓扑型双哈密顿结构。

1 引言

Dubrovin-Frobenius流形是鲍里斯·杜布罗温提出的一种卓越的几何实现，它对应于满足一组未定偏微分方程的势函数，这组方程称为 Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde（WDVV）方程，用于描述二维拓扑场论的模空间[10]。构造Dubrovin-Frobenius流形的主要方法之一，存在于流体力学型局部双哈密顿结构理论中，即流体力学型局部相容泊松结构 [11]。此外，对具有无色散极限的局部双哈密顿结构进行一定的截断并取其首项，便可得到流体力学型局部双哈密顿结构。另一方面，如果双哈密顿结构的首项定义了一个半单Dubrovin-Frobenius流形，那么便可以计算该双哈密顿结构的中心不变量。此外，若中心不变量为常数且彼此相等，则该双哈密顿结构属于拓扑类型；也就是说，理论上可以运用受 Gromov-Witten 不变量理论启发的某些恒等式，从Dubrovin-Frobenius流形结构构造出该双哈密顿结构 [12]。

在近期的工作中 [5], ，我们给出了一种统一构造代数型杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形的方法，其起点是与单李代数中某类幂零元相关联的 Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构。回顾一下，其中一个相容局部泊松括号被称为（或满足导出）经典 W-代数 [19]。更准确地说，我们在秩为 r的单李代数中固定一个正则半单型的卓越幂零元。根据定义，卓越意味着其伴随轨道在任何真利维子代数 [3] 中都没有代表元，而正则半单型则表示可以构造一个称为对偶嘉当子代数[17]的特定嘉当子代数。接着，我们考察了由相关 Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构的首项定义的公共平衡点空间 N。该空间 N 的维数为 r，我们使用狄拉克约化，在其环空间上得到一种新的局部双哈密顿结构。这种新的双哈密顿结构存在无色散极限，其首项给出一个代数型杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形。这些统一

构造依赖于相关的对偶嘉当子代数。因此，自然会提出这样的问题：能否将这一构造推广到[5] 任意幂零元，并探究由此得到的杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形的类型。

本文研究单李代数 sl_3 和 sl_4 中的正则半单型非 distinguished 幂零元（它们分为三类幂零元），以初步回答上述问题。对于所考虑的任意幂零元，其对应的 Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构可约化为一种双哈密顿结构，该结构在公共平衡点空间的环空间上具有无色散极限，但其首项无法用 [5]中给出的方法定义 Dubrovin-Frobenius 流形结构。然而，从经典的 W代数出发，我们找到了另一种双哈密顿结构，它构成一个精确泊松铅笔，具有无色散极限，且其首项定义了一个对数型、代数的或平凡的 Dubrovin-Frobenius 流形。我们还计算了这些新双哈密顿结构的中心不变量，预计它们是常数（这由双哈密顿结构 [18]的精确性可知）。对于次正则幂零元，该双哈密顿结构的中心不变量彼此相等。此外，在 sl_3 （分别为 sl_4）的情形下，Dubrovin-Frobenius 流形结构与聚焦 Schr¨odinger 方程 [16] 相关联（分别构造在具有两个次数为 2 和 1 [10]的标记点的亏格 0 赫尔维茨空间$M_{0;1,\ 0}$ 上）。因此，我们从经典的 W代数中得到对数型杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形的拓扑类型双哈密顿结构。

本文结构如下。第 2 节和第 3 节回顾杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形和 Drinfeld-Sokolov 约化的概念。随后在第 4 节中，我们回顾 [5] 中给出的代数型杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形的构造。最后一节中，我们详细考察李代数 sl_3 和 sl_4 中正则半单型非特殊幂零元的情形。

2 杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形

设 M 是一个维数为 r 的光滑流形，并在 M 上固定局部坐标 $(u^1, ..., u^r)$。下文中，约定对重复出现的上下指标求和。我们根据 [10] 和 [11]，回顾以下定义。

定义 2.1. 若对称双线性型 (., .) 在 T^*M 上的一个开稠密子集 $M_0 \subseteq M$ 上可逆，则称其为逆变度量。对于逆变度量 (., .)，定义其逆变克里斯托费尔符号 Γ^{ij}_k 如下：

$$\Gamma^{ij}_k := -\Omega^{im}\Gamma^j_{mk}$$

其中 Γ^j_{mk} 是度量 $< .. >$ 的克里斯托费尔符号，该度量由矩阵 $\Omega^{ij}(u) = (du^i, du^j)$ 的逆在 TM_0 上定义。若 $< ., . >$ 是平坦的，则称度量 (., .) 为平坦度量。

注意，定义 2.1 中给出的克里斯托费尔符号确定了度量 Ω 的逆变（分别为协变）导数 ∇^i (分别为 ∇_i)，沿余向量 du^i (分别为向量场 ∂_{u^i}) 。它们通过单位元关系 $\nabla^i = \Omega^{ij}(u)\nabla_j$相关。我们将 Ω 沿向量场 V的李导数记为 $\mathfrak{L}_V\Omega$。

定义 2.2. M 上的平坦度量铅笔（FPM）是由两个平坦逆变度量 Ω_2,Ω_1 组成的一对 (Ω_2,Ω_1)，其中 Ω_2 和 Ω_1 定义在 M 上，并满足

1. 对一般常数 λ，$\Omega_2 + \lambda\Omega_1$ 在 T^*M 上定义一个平坦度量，
2. $\Omega_2 + \lambda\Omega_1$ 的克里斯托费尔符号为 $\Gamma^{ij}_{2k} + \lambda\Gamma^{ij}_{1k}$，其中 Γ^{ij}_{2k} 和 Γ^{ij}_{1k} 分别是Ω_2 和Ω_1, 的克里斯托费尔符号。

定义 2.3. 若 M 上的平坦度量铅笔（Ω_2,Ω_1）满足以下条件，则称其为次数为 d 的拟齐次平坦度量铅笔（QFPM）：存在 M 上的函数 τ，使得由下式定义的向量场 E 和 e

$$\begin{aligned} E &= \nabla_2\tau, \quad E^i = \Omega_2^{ij}(u)\partial_{u^j}\tau \\ e &= \nabla_1\tau, \quad e^i = \Omega_1^{ij}(u)\partial_{u^j}\tau \end{aligned} \tag{2.1}$$

满足

$$[e, E] = e, \quad \mathfrak{L}_E\Omega_2 = (d-1)\Omega_2, \quad \mathfrak{L}_e\Omega_2 = \Omega_1 \quad \text{and} \quad \mathfrak{L}_e\Omega_1 = 0. \tag{2.2}$$

如果 (1,1)型张量

$$R_i^j = \frac{d-1}{2}\delta_i^j + \nabla_{1i}E^j \tag{2.3}$$

在 M 上非退化。

Dubrovin-Frobenius流形是这样一种流形：在每一点的切空间上都具有光滑的 Frobenius代数结构，并满足某些相容条件。所谓 Frobenius代数，是指带有单位元的交换结合代数 e 以及一个非退化双线性形式 Π，该双线性形式在乘积下保持不变，即 $\Pi(a\cdot b, c) = \Pi(a, b\cdot c)$。在整体上，我们要求度量 Π是平坦的，且单位向量场 e 相对于该度量为常向量场。关于杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形及相关主题的详细信息，可参见 [10]。

设 M 是一个Dubrovin-Frobenius流形。在平直坐标 $(t^1, ..., t^r)$ 下，对于 Π，其中 $e = \partial_{t^r}$，相容条件意味着存在一个函数 $\mathbb{F}(t^1,...,t^r)$，它刻画了Dubrovin-Frobenius流形结构，即平坦度量由下式给出

$$\Pi_{ij}(t) = \Pi(\partial_{t^i}, \partial_{t^j}) = \partial_{t^r}\partial_{t^i}\partial_{t^j}\mathbb{F}(t) \tag{2.4}$$

并令 $\Omega_1(t)$为矩阵 $\Pi(t)$ 的逆矩阵，Frobenius代数的结构常数为

$$C_{ij}^k(t) = \Omega_1^{kp}(t)\partial_{t^p}\partial_{t^i}\partial_{t^j}\mathbb{F}(t)$$

Frobenius代数的结合律意味着 $\mathbb{F}(t)$ 满足 WDVV方程

$$\partial_{t^i}\partial_{t^j}\partial_{t^k}\mathbb{F}(t)\ \Omega_1^{kp}\ \partial_{t^p}\partial_{t^q}\partial_{t^n}\mathbb{F}(t) = \partial_{t^n}\partial_{t^j}\partial_{t^k}\mathbb{F}(t)\ \Omega_1^{kp}\ \partial_{t^p}\partial_{t^q}\partial_{t^i}\mathbb{F}(t), \quad \forall i, j, q, n. \tag{2.5}$$

Dubrovin-Frobenius流形的定义包括存在一个形如 E $E = (a_i^j t^i + b^j)\partial_{t^j}$ 的欧拉向量场，其满足

$$E\mathbb{F}(t) = (3-d)\,\mathbb{F}(t) + \frac{1}{2}A_{ij}t^it^j + B_it^i + c.$$

其中 a_i^j 、 b_j、 c、 A_{ij} 和 B_i 为满足 $a_r^r \neq 0$ 的常数。若势函数是代数的（分别地，对数的），则称 Dubrovin-Frobenius流形是代数的（分别地，对数的）。此外，与 M 上的 Frobenius结构相关联的、次数为 d 的拟齐次平坦度量铅笔（不必正则）由逆变度量、交叉形式 Ω_2^{ij} 和平坦度量 Ω_1^{ij} 组成，其中

$$\Omega_2^{ij} := E^p(t)\eta^{ik}\eta^{jm}\partial_{t^m}\partial_{t^k}\partial_{t^p}\mathbb{F}(t). \tag{2.6}$$

另一方面， M 上的任意正则拟齐次平坦度量铅笔都在 M [11]上定义了唯一的Dubrovin-Frobenius流形结构。

3 Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构

设 $\mathfrak{g}$ 为秩为 r 的复单李代数，其李括号为 $[\cdot,\cdot]$。定义伴随表示 ad： $\mathfrak{g}\to$ End($\mathfrak{g}$)，使得 ad$_{g_1}(g_2)$: $=[g_1,g_2]$。对于 $g\in\mathfrak{g}$，令 $\mathcal{O}_g$ 表示 g 在伴随群作用下的轨道，令 $\mathfrak{g}^g$ 表示 g 在 $\mathfrak{g}$中的中心化子，即 $\mathfrak{g}^g$: $=$ ker ad$_g$。如果 ad$_g$在 End($\mathfrak{g}$)中是幂零的，则称元素 g 为幂零元。如果幂零元 g 满足 dim $\mathfrak{g}^g=r$（相应地，dim $\mathfrak{g}^g=r+2$），则称其为正则（相应地，次正则）幂零元。 $\mathfrak{g}$ 中的所有正则（相应地，次正则）幂零元构成一个完整的伴随轨道。

我们固定一个幂零元 L_1 属于 $\mathfrak{g}$。如果从 $\mathcal{O}_{L_1}$ 中选择另一个代表元，以下构造将得到相同的结果（更多细节请参见[6] 及其中的参考文献）。根据 Jacobson-Morozov 定理，我们固定一个幂零元 f和一个半单元 h，使得 $A:=\{L_1,h,f\}\subseteq\mathfrak{g}$是一个$sl_2$-三元组，其关系为

$$[h,L_1]=L_1,\quad [h,f]=-f,\quad [L_1,f]=2h. \tag{3.1}$$

我们对 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型进行归一化，得到一个不变双线性型 $\langle.|.\rangle$，使得 $\langle L_1|f\rangle=1$。ad$_h$ 的特征值为整数和半整数，并由此得到 Dynkin 分次

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\frac{\mathbb{Z}}{2}}\mathfrak{g}_i;\qquad \mathfrak{g}_i:=\{g\in\mathfrak{g}:\mathrm{ad}_h g=ig\}. \tag{3.2}$$

令 η_r 表示 ad$_h$ 的最大特征值。我们固定一个元素 $K_1\in\mathfrak{g}_{-\eta_r}$。令 $n:=$维 $\mathfrak{g}^f$，且η_1、.....、 η_n 是 ad$_h$ 在 $\mathfrak{g}^{L_1}$ 上的特征值。

我们考虑环代数 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$，即从单位圆到 $\mathfrak{g}$ 的光滑函数空间。我们将 $\langle.|.\rangle$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的定义扩展到 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$，定义如下

$$(g_1|g_2)=\int_{S^1}\langle g_1(x)|g_2(x)\rangle dx;\quad g_1,g_2\in\mathfrak{L}(\mathfrak{g}). \tag{3.3}$$

然后我们定义梯 度 $\delta\mathcal{F}(g)$：对于定义在 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ 上的泛函 $\mathcal{F}$，它是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ 中满足以下条件的唯一元素 g

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{F}(g+\theta\mathrm{w})\,|_{\theta=0}=(\delta\mathcal{F}(g)|\mathrm{w})\quad \text{for all } \mathrm{w}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{g}). \tag{3.4}$$

由此我们可以引入以下标准的相容局部泊松括号 $\{.,.\}_2$ 和 $\{.,.\}_1$，定义在 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ 上：对于定义在 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ 上的任意泛函 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{F},\mathcal{I}\}_2(g(x)) &:= \Big([K_1,\delta\mathcal{I}(g(x))]\Big|\delta\mathcal{F}(g(x))\Big),\\ \{\mathcal{F},\mathcal{I}\}_1(g(x)) &:= \Big(\partial_x\delta\mathcal{I}(g(x))+[g(x),\delta\mathcal{I}(g(x))]\Big|\delta\mathcal{F}(g(x))\Big).\end{aligned} \tag{3.5}$$

我们分别用 $\mathbb{B}_2$ 和 $\mathbb{B}_1$ 表示它们的泊松结构或张量。泊松括号 $\mathbb{B}_2$ 和 $\mathbb{B}_1$ 构成一个精确泊松铅笔，即存在一个称为 Liouville 向量场的向量场 V，使得 $\mathfrak{L}_V\mathbb{B}_2=\mathbb{B}_1$ 和 $\mathfrak{L}_V\mathbb{B}_1=0$。

我们固定 Slodowy 切片 $Q:=L_1+\mathfrak{g}^f$，它是 $\mathcal{O}_{L_1}$ 在 L_1 处的横截子空间。我们为 Q 引入坐标 $(z^1,\ldots,z^n)$，使得

$$Q=L_1+\sum z^iX_i,\ ,X_i\in\mathfrak{g}^f,\mathrm{ad}_hX_i=-\eta_iX_i,i=1,\ldots,n. \tag{3.6}$$

其中 $X_r=K_1$。我们赋予 $z^i=\eta_i+1$ 次数，并考虑仿射环空间 $\mathcal{Q}:=L_1+\mathfrak{L}(\mathfrak{g}^f)$

定理 3.1. *[6]* 空间 $\mathcal{Q}$ 分别从 $\mathbb{B}_2$ 和$\mathbb{B}_1$继承了相容的局部泊松结构 $\mathbb{B}_2^{\mathcal{Q}}$和 $\mathbb{B}_1^{\mathcal{Q}}$。通过使用泊松张量方法进行双哈密顿约化、狄拉克约化以及广义 Drinfeld-Sokolov 约化，均可得到这些结构。

下面总结如何使用泊松张量方法计算约化双哈密顿结构。设 $z \in \mathcal{Q} \cong \mathfrak{L}(\mathfrak{g}^f)$ 且 $w \in T_z^*\mathcal{Q}$。利用来自 $\langle .|. \rangle$ 的双线性形式，我们将 $T_z^*\mathcal{Q}$ 与 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}^{L_1})$ 识别。于是存在唯一的提升 $v \in T_z^*\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$，使得 w 满足 $\mathbb{B}_2(v) \in T_z\mathcal{Q}$。此时约化泊松结构 $\mathbb{B}_2^{\mathcal{Q}}$由下式给出

$$\mathbb{B}_2^Q(w) = \mathbb{B}_2(v). \tag{3.7}$$

我们将基 X_i 在 $\mathfrak{g}^f$ 上扩展为整个 $\mathfrak{g}$上的基。局部泊松括号 $\mathbb{B}_2^Q$ 被称为与 W-代数相关的经典 L_1 （定义见 [19] ），并且与 $\mathbb{B}_1^Q$ 关于 Liouville 向量场 ∂_{z^r}构成一个精确泊松铅笔。泊松括号是以下形式的有限项求和： [12]

$$\begin{aligned}
\{z^i(x), z^j(y)\}_m &= \sum_{k\geq -1} \{z^i(x), z^j(y)\}_m^{[k]};\ m = 1, 2;\quad i, j = 1, \ldots, n, \\
\{z^i(x), z^j(y)\}_m^{[-1]} &= F_m^{ij}(z(x))\delta(x-y) \\
\{z^i(x), z^j(y)\}_m^{[0]} &= \Omega_m^{ij}(z(x))\delta'(x-y) + \Gamma_{k,m}^{ij}(z(x))z_x^k\delta(x-y), \\
\{z^i(x), z^j(x)\}_m^{[k]} &= S_{m;k}^{ij}(z(x))\delta^{k+1}(x-y) + \ldots,\quad k > 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中， $\delta(x-y)$ 是由 $\int_{S^1} f(y)\delta(x-y)dy = f(x)$ 定义的狄拉克 δ 函数。我们回顾一下，这种局部双哈密顿结构在矩阵 $F_m^{ij} = 0$、 $m = 1$、2 存在时具有无色散极限。此外，如果它具有无量纲极限，则局部泊松括号 $\{z^i(x)\ z^j(y)\}_m^{[0]}$定义了一个流体力学型的局部双哈密顿结构。此外，如果矩阵 Ω_m^{ij} 是非退化的，则泊松结构的相容性意味着它们定义了一个平坦度量铅笔 [14]。这建立了局部双哈密顿结构与用于构造 Dubrovin-Frobenius流形实例的平坦度量铅笔之间的联系。

3.1 公共平衡点

我们将 Slodowy 切片 Q 与 $\mathcal{Q}$的常值环子空间等同。于是， $F_2^{ij}(z)$ 和 $F_1^{ij}(z)$ 分别在 Q 上定义了相容的泊松结构 B_2^Q 和 B_1^Q （一个双哈密顿结构）。此外，B_2^Q 是 $\mathfrak{g}$ [6]上的李–泊松结构的横截泊松结构。

利用切瓦莱定理，我们固定伴随群作用下不变多项式环的一组完备齐次生成元 $P_1, \ldots, P_r$。令 $\overline{P}_i^0$ 表示不变多项式 P_i 在 Q上的限制。则对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$， $\overline{P}_1^0(q + \lambda K_1) \ldots, \overline{P}_r^0(q + \lambda K_1)$ 构成泊松铅笔 $B_\lambda^Q := B_2^Q + \lambda B_1^Q$的一组完备且相互独立的卡西米尔函数。按照论证平移法 [1],，我们考虑以下函数族

$$\mathbf{F} := \cup_{\lambda\in\overline{\mathbb{C}}}\{P'_\lambda : P'_\lambda \text{ is a Casimir of } B_\lambda^Q\}. \tag{3.9}$$

该族中的函数关于两个泊松括号都两两对易。应用论证平移法的主要目的是证明族 $\mathbf{F}$ 中包含足够多的函数独立函数，从而为 B_2^Q 得到一个完全可积系统。我们在 [7] 中探讨了这一问题。

我们关注族 $\mathbf{F}$ 的公共平衡点空间 N

$$N := \{q \in Q : B_\lambda^Q(dP')(q) = 0,\ \forall P' \in \mathbf{F}, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}\} \tag{3.10}$$

该结构在 [1] 中被引入并针对任意有限维双哈密顿结构进行了研究。

4 正则半单型的幂零元

从本节及后续各节起，我们假设 L_1 是正则半单型的幂零元。此类元素的分类已在 [17] 中给出。根据定义，我们可以且将固定K_1，使得 $h' := L_1 + K_1$ 是正则半单元。因此， $\mathfrak{h}' := \ker \mathrm{ad}_{h'}$ 是一个嘉当子代数，称为对偶嘉当子代数。伴随群元素 $w := \exp\ ^{2\pi \mathfrak{i}\frac{}{\eta_r+1}}\mathrm{ad}_h$ 作用于 $\mathfrak{h}'$，作为韦伊群 $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ 中阶为 η_r+1 或 $2\eta_r+2$ 的正则共轭类的代表。我们可以且将安排基 $L'_j s$，使得对于 $i=1,\ldots,r$，存在 $K_i \in \oplus_{i\le 0}\mathfrak{g}_i$，使得$Y_i = L_i + K_i \in \mathfrak{h}'$，并且 $Y_1,\ldots,Y_r$ 构成 $\mathfrak{h}'$ 的一组基。此外，我们可以且将安排 $\mathfrak{g}^f$ 的基 X_i，使得 $\langle X_i | L_j\rangle = \delta_{ij}$，并假设 $0 \le \eta_1 \le \ldots \le \eta_r$。

为便于比较并统一记号，我们简要概述 [5] 的结果。若元素 L_1 所在的轨道 $\mathcal{O}_{L_1}$ 在 $\mathfrak{g}$ 的任何真利维子代数中都没有代表元，则称 L_1 为卓越元。若 L_1 是正则半单型的卓越幂零元，则 w 将是正则尖点共轭类 [4] 的一个代表元。这一关系在单李代数中的卓越幂零轨道与韦伊群中的正则尖点共轭类之间建立了对应关系。此外， w 的特征值具有如下形式： $\exp\ ^{2\pi \mathfrak{i}\frac{\eta_i}{\eta_r+1}}$, $i=1,\ldots,r$。

在本节余下部分，我们假设 L_1 是正则半单型的卓越幂零元。此时，事实证明在 Q 上存在如下形式的准齐次坐标变换

$$t^i = \begin{cases} z^1, & \text{i=1,} \\ z^i + \text{non linear terms}, & \text{i=2,...,r,} \\ z^i, & \text{i=r+1,...,n.} \end{cases} \tag{4.1}$$

使得

1. $\deg\ t^i = \deg z^i = \eta_i + 1$
2. $t^1,\ldots,t^r$ 构成 B_1^Q 的一组完备卡西米尔函数，并且关于 B_2^Q 彼此对合。
3. 对于 $1 \le i \le r$， t^i 是由不变多项式 $\overline{P}_j^0$ 及其关于 z^r的导数组成的线性组合。

特殊的 坐标（$t^1,\ldots,t^r$）是证明下述定理的关键要素 s.

定理4.1。 *[5]* 对于每个半单型的卓越幂零元，族 F 都是完备的（包含一个关于 B_2^Q 的完全可积系统）。特别地，秩 $B_1^Q = n - r$ 并

$$N = \{q \in Q : \ker B_1^Q(q) = \ker B_2^Q(q)\}. \tag{4.2}$$

定理4.2。 *[5]* 设 $\mathfrak{g}$ 是秩为 r的复单李代数。在李代数 $\mathfrak{g}$的韦伊群 $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$中，固定一个正则尖点共轭类$[w]$。假设 $[w]$ 中代表元的阶为 η_r+1，特征值为 ϵ^{η_i}, $i=1,\ldots,r$，其中 ϵ是一个本原的(η_r+1)次单位根。设 $\mathcal{O}_{L_1}$是在对偶嘉当子代数的概念下与 $[w]$ 相关联的半单型卓越幂零轨道。考虑由与 $\mathcal{O}_{L_1}$的代表元 L_1 相关联的Drinfled-Sokolov双哈密顿结构的首项构成的有限双哈密顿结构。其公共平衡点空间具有一个荷为 $\frac{\eta_r-1}{\eta_r+1}$ 、次数为 $\frac{\eta_i+1}{\eta_r+1}$ 的代数型Dubrovin-Frobenius流形结构。该结构仅取决于共轭类。

设 s 为与 L_1相关联的加权戴金图中的零标记数量。那么，经过归一化后，空间 N 定义为

$$N \quad = \quad \{t : \partial_{t^\beta}\overline{P}_j^0(t) = 0; j = r-s+1,\ldots,r, \quad \beta = r+1,\ldots,n\}. \tag{4.3}$$

此外，$(t^1,\dots,t^r)$ 给出了 N一般点附近的局部坐标。设 $\mathcal{N}=\mathfrak{L}(N)$ 为 N的环空间。那么，将泊松铅笔 $\mathbb{B}^{\mathcal{Q}}_{\lambda}:=\mathbb{B}^{\mathcal{Q}}_{2}+\lambda\mathbb{B}^{\mathcal{Q}}_{1}$狄拉克约化到 $\mathcal{N}$是良定义的，并导出相容局部泊松括号 $\{.,.\}^{\mathcal{N}}_{\alpha}$, $\alpha=1,\ 2$；这些括号存在无色散极限，并相对于向量场 ∂_{t^r}构成一个精确泊松铅笔。此外， $\{.,.\}^{\mathcal{N}}_{2}$是一个经典的 W-代数。

定义在 $\mathcal{N}$ 上的局部泊松括号，只需对坐标（3.8）下的泊松括号取左上子式即可得到，即t^1、.....、 t^n,

$$\begin{aligned}\{t^a(x),t^b(y)\}^{[-1]}_{\alpha} &= 0,\ a,b=1,\dots r,\ \alpha=1,2.\\ \{t^a(x),t^b(y)\}^{[0]}_{\alpha} &= \Omega^{ab}_{\alpha}(t(x))\delta'(x-y)+\Gamma^{ab}_{\alpha k}(t(x))t^k_x\delta(x-y)\\ \{t^a(x),t^b(x)\}^{[k]}_{\alpha} &= S^{ab}_{\alpha;k}(t(x))\delta^{k+1}(x-y)+\dots,\quad k>0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中 t^k、 $k>r$是定义 N的多项式方程（4.3）的解。矩阵 $\Omega^{ab}_{\alpha}(t)$ 的非退化性可由双线性型从 $\langle.|.\rangle$ 限制到 $\mathfrak{h}'$后的非退化性推出。此外，它们在 N 上定义了一个次数为$d=\frac{\eta_n-1}{\eta_n+1}$ 的正则拟齐次平坦度量铅笔，由此得到一个代数的 Dubrovin-Frobenius结构。

4.1 中心不变量

我们回顾 [13] 中的以下内容。设双哈密顿结构具有形式（4.4），且由 Ω_2 和 Ω_1 定义的平坦度量铅笔导出一个 Dubrovin-Frobenius流形结构。若特征多项式的根 u^1、.....、 u^r

$$\Psi(\lambda;t):=\det(\Omega^{uv}_2(t)-\lambda\Omega^{uv}_1(t))\tag{4.5}$$

在 M 的一般点处两两不同。在这种情况下，$(u^1,\dots,u^r)$ 定义了局部坐标。此外，在广义 Miura 型变换 [13] 下，我们可以定义局部双哈密顿结构的中心不变量 $c^1(u^1)\dots,c^r(u^r)$。当 $\{t^a(x)\ t^b(x)\}^{[1]}_{\alpha}=0$ 时，中心不变量可以通过以下公式计算：

$$c_i(u^i):=\frac{1}{3}[\frac{d\Psi}{d\lambda}(u^i;t)]^2\frac{\frac{\partial\Psi(\lambda;t)}{\partial t^k}\frac{\partial\Psi(\lambda;t)}{\partial t^l}(S^{kl}_{2;2}(t)-\lambda S^{kl}_{1;2}(t))}{[\frac{\partial\Psi(\lambda;t)}{\partial t^k}\frac{\partial\Psi(\lambda;t)}{\partial t^l}\Omega^{kl}_1(t)]^2}\Big|_{\lambda=u^i}.\tag{4.6}$$

我们回顾一下，通过线性组合改变双哈密顿结构的代表元，会导致中心不变量发生分式线性变换。特别地，在乘以常数 κ 进行缩放时，即:

$$\{.,.\}_{\alpha}\mapsto\kappa\{.,.\}_{\alpha},\quad \alpha=1,2.\tag{4.7}$$

我们得到 $c^i\mapsto\kappa^{-1}c^i$ ，以及一个等价的 Frobenius流形结构 [10]。注意，如果局部双哈密顿结构构成一个精确泊松铅笔，那么中心不变量为常数 [18]。

假设所有中心不变量都相等且为常数。那么该双哈密顿结构属于拓扑类型，即它是与 Dubrovin-Frobenius 流形结构 [12] 的主层级相关联的双哈密顿结构。注意，经过适当缩放后，所有中心不变量都等于 $_{1\ 24}$ ，这是 [12] 中得到的数值。

假设幂零元 L_1 是正则的。那么我们得到标准的 Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构 [9]。这里，$Q=N$ 而定理 4.2 导出多项式 Dubrovin-Frobenius 流形结构。在这种情况下，中心不变量的计算见 [13]。结果表明，只有当李代数 $\mathfrak{g}$ 是单边时，该双哈密顿结构才具有拓扑类型。由定理4.2 得到的、与代数非多项式 Dubrovin-Frobenius 流形相关的双哈密顿结构的中心不变量尚未计算。

有关中心不变量这一概念及其应用的信息可见于 [15], [20] 和[22]。

5 李代数 A_3 和 A_4

在本文接下来的部分，我们遵循第4 节的步骤，研究李代数 sl_3 或 sl_4 中的正则半单型非 distinguished 幂零元；其中 sl_3 和 sl_4 分别是 A_3 型和 A_4型的单李代数。具体而言，在通过 n的整数分拆对 sl_n 中的幂零轨道进行分类时，我们假设 L_1 是 sl_4中对应于分拆 [2,2], [3,1] 的幂零轨道的一个代表元，或者是 sl_3 [17]中对应于分拆[2,1] 的幂零轨道的一个代表元。次正则幂零轨道的分拆形式为 $[n-1,1]$。令$\varepsilon_{i,j}$ 表示一个基本方阵，其（i， j）项为 1。

5.1 划分 $[2,1]$ 在 sl_3

我们取 $L_1 := \varepsilon_{1,\ 3}$ 作为 sl_3中幂零轨道 $[2,1]$ 的一个代表元。我们固定 sl_2-三元组

$$L_1 = \varepsilon_{1,3},\ h = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{1,1} - \varepsilon_{3,3}\right),\ f = \varepsilon_{3,1}. \tag{5.1}$$

按照第4 节给出的标准顺序， $\eta_i' s$ 中的数为 1、0、1 2、1 2。Slodowy-切片的元素将具有以下形式

$$q = L_1 + \sum_{i=1}^{4} z_i X_i = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_3 & -2z_1 & 0 \\ z_2 & z_4 & z_1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

对于不变多项式在 Q上的限制，我们固定

$$\overline{P}_1^0 = z_2 + 3z_1^2,\ \overline{P}_2^0 = z_2 z_1 - z_1^3 + \frac{1}{2} z_3 z_4. \tag{5.3}$$

设 $\mathcal{I}$是 Q 上的一个泛函，且 $\delta\mathcal{I} = (\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_1}, \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_2}, \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_3}, \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_4})$。使用泊松张量方法， $\delta\mathcal{I}$ 在 $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$中的提升 $\overline{\delta\mathcal{I}}$ 具有以下形式

$$\overline{\delta\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_1} + v_1 & \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_3} & \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_2} \\ v_3 & -\frac{1}{3}\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_1} & \frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_4} \\ v_2 & v_4 & \frac{1}{6}\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta z_1} - v_1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

其中， v_1、 . . .、 v_4的值由以下要求唯一确定

$$\partial_x \overline{\delta\mathcal{I}} + [q(x), \overline{\delta\mathcal{I}}] \in T_q\mathcal{Q} \cong \mathfrak{L}(\mathfrak{g}^f). \tag{5.5}$$

那么， $\mathcal{Q}$ 上两个泛函 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{I}$ 的局部泊松括号 $\mathbb{B}_2^Q$ 由以下公式给出

y

$$\{\mathcal{F}[q(x)], \mathcal{I}[q(y)]\}_2^{L_1} = \left\langle \overline{\delta\mathcal{F}} | \frac{d}{dx}(\overline{\delta\mathcal{I}}) + [q(x), \overline{\delta\mathcal{I}}] \right\rangle. \tag{5.6}$$

在坐标中， $\mathbb{B}_2^Q$ （经典的 W-代数）具有以下非零括号。

$$\begin{aligned}
\{z_1(x), z_1(y)\} &= \frac{1}{6}\delta',\ \{z_1(x), z_3(y)\} = -\frac{1}{2} z_3 \delta,\ \{z_1(x), z_4(y)\} = \frac{1}{2} z_4 \delta \\
\{z_2(x), z_2(y)\} &= z_2'\delta + 2z_2\delta' - \frac{1}{2}\delta^{(3)},\ \{z_2(x), z_3(y)\} = \frac{1}{2}\left(\left(z_3' + 6z_1 z_3\right)\delta + 3z_3\delta'\right) \\
\{z_2(x), z_4(y)\} &= \frac{1}{2}\left(\left(z_4' - 6z_1(x) z_4\right)\delta + 3z_4\delta\right),\ \{z_2(x), z_4(y)\} = \frac{1}{2} z_4 \delta \\
\{z_3(x), z_4(y)\} &= -\left(3z_1' - 9z_1^2 + z_2\right)\delta - 6z_1\delta' + \delta''.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

此处及下文中，对于局部泊松括号，右侧的所有函数都是x 的函数，我们用 δ 代替 $\delta(x-y)$。

文献中与这个经典 W-代数相关的双哈密顿结构有两种：一种是利用上述对偶嘉当子代数理论构造的，另一种与分数阶 KdV 层次相关[2]。我们将在下文详细讨论它们。

5.1.1 使用对偶嘉当子代数

对偶嘉当子代数的基为 X_1和 L_1+f。于是，Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构由 $\mathbb{B}_2^Q$和$\mathbb{B}_1^{\mathcal{Q}}=\mathfrak{L}_{\partial_{z_2}}\mathbb{B}_2^{\mathcal{Q}}$构成。按照（3.8）中的记号，我们有

$$F_2^{ij}(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}z_3 & \frac{1}{2}z_4 \\ 0 & 0 & 3z_1z_3 & -3z_1z_4 \\ \frac{1}{2}z_3 & -3z_1z_3 & 0 & 9z_1^2-z_2 \\ -\frac{1}{2}z_4 & 3z_1z_4 & z_2-9z_1^2 & 0 \end{pmatrix},\quad \Omega_2^{ij}(z)=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2z_2 & \frac{3}{2}z_3 & \frac{3}{2}z_4 \\ 0 & \frac{3}{2}z_3 & 0 & -6z_1 \\ 0 & \frac{3}{2}z_4 & -6z_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

公共平衡点空间 N 定义为

$$N:=\{q\in Q:\partial_{z_3}\overline{P}_2^0=0=\partial_{z_4}\overline{P}_2^0\}=\{q\in Q:z_3=0=z_4\} \tag{5.9}$$

特殊坐标（$t_1,\dots,t_4$）定义为

$$t_1=\overline{P}_1^0,\ t_2=\partial_{z_2}\overline{P}_2^0=z_1,\ t_3=z_3,\ t_4=z_4. \tag{5.10}$$

于是（t_1,t_2）构成 N 上的局部坐标，而利用狄拉克约化得到的环空间$\mathcal{N}:=\mathfrak{L}(N)$上的约化双哈密顿结构，其首项为。

$$\Omega_2^{ab}(t)=\begin{pmatrix} 2t_1 & t_2 \\ t_2 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, S_{2;1}^{ab}=0, S_{2;2}^{ab}(t)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

与特殊幂零元的情形不同，$\Omega_1^{ab}=\mathfrak{L}_{\partial_{t_1}}\Omega_2^{ab}$是退化的，无法在 N上定义度量。然而，$\mathfrak{L}^2_{\partial_{t_2}}\Omega_2^{ab}=0$和 $\mathfrak{L}_{\partial_{t_2}}\Omega_2^{ab}$是非退化的。结果表明，$\mathfrak{L}^2_{\partial_{t_2}}\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}=0$。因此，$\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}$和 $\overline{\mathbb{B}}_1^{\mathcal{N}}:=\mathfrak{L}_{\partial_{t_2}}\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}=0$在$\mathcal{N}$ [23]上构成一种新的双哈密顿结构。此外，矩阵Ω_2^{ab}和 $\mathfrak{L}_{\partial_{t_2}}\Omega_2^{ab}=0$在 N上构成正则拟齐次度量平坦铅笔。相应的 N 上的Dubrovin-Frobenius流形结构，等价于在赫尔维茨空间$M_{0;1,\ 0}$上构造的Dubrovin-Frobenius流形结构。其势函数为

$$\mathbb{F}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}t_2^2t_1+\frac{1}{24}t_1^2\log t_1. \tag{5.12}$$

欧拉向量场为 $E=2t_1\partial_{t_1}+t_2\partial_{t_2}$，荷为 $d=-1$。注意，$E\mathbb{F}=(3-d)\mathbb{F}+\frac{1}{12}t_1^2$。利用公式（4.6），我们计算相应双哈密顿结构的中心不变量，结果为 $-\frac{1}{24}$。因此，该双哈密顿结构属于拓扑类型。

5.1.2 分数阶 KdV 层次

我们提到，对于某些 K_1 的取值，可以在非 distinguished 幂零元上获得更多双哈密顿结构 $\mathcal{Q}$ 。在 (3.5) 中 B_1 的定义处，我们固定 $K_1=\varepsilon_{2,1}+\varepsilon_{2,3}$，而不是 $\varepsilon_{3,1}$。然后我们得到一个与 $\mathbb{B}_2^Q$ 相容的局部泊松括号 $\mathbb{B}_1^Q$，并且它们构成一个精确泊松铅笔，使用（with

微小修改）定理中提到的约化3。1 [6]。为求得 $\mathbb{B}_1^Q$ ，我们只需引入坐标变换

$$t_1 = 2z_1^2 + \frac{2z_2}{3}, t_2 = z_3 + z_4, t_3 = z_3 - z_4, t_4 = z_1.$$

then

$$\mathbb{B}_1^Q = \mathfrak{L}_{\partial_{t_2}} \mathbb{B}_2^Q.$$

这里，不变多项式的限制将是

$$\overline{P}_1^0(t) = t_1,\ \overline{P}_2^0(t) = -8t_4^3 + 3t_1t_4 + \frac{t_2^2}{4} - \frac{t_3^2}{4}$$

and

$$F_2^{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t_1 - 24t_4^2 & \frac{t_3}{2} \\ 0 & 24t_4^2 - 3t_1 & 0 & \frac{t_2}{2} \\ 0 & -\frac{t_3}{2} & -\frac{t_2}{2} & 0 \end{pmatrix},\ \Omega_2^{ij}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4t_1}{3} & t_2 & t_3 & \frac{2t_4}{3} \\ t_2 & -12t_4 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 12t_4 & 0 \\ \frac{2t_4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

公共平衡点空间 N 由以下条件定义

$$N := \{q \in Q : \partial_{t_3}\overline{P}_2^0 = 0 = \partial_{t_4}\overline{P}_2^0\} = \{q \in Q : t_3 = 0,\ t_4 = \sqrt{\frac{t^1}{8}}\}. \tag{5.13}$$

这里，(t_1, t_2) 构成 N 上的局部坐标，而 $\mathfrak{L}(N)$ 上的约化双哈密顿结构的首项为。

$$\Omega_2^{ab}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4t_1}{3} & t_2 \\ t_2 & 3\sqrt{2}\sqrt{t_1} \end{pmatrix},\ S_{2;1}^{ab} = 0, S_{2;2}^{ab}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

注意，$\Omega_1^{ab} = \mathfrak{L}_{\partial_{t_2}}\Omega_2^{ab}$来自一个以 Ω_2^{ab} 为正则的拟齐次平坦度量铅笔。 N 上相应的 Dubrovin-Frobenius 流形结构具有如下势函数

$$\mathbb{F}(t_1, t_2) = \frac{6}{5}\sqrt{2}t_1^{5/2} + \frac{1}{2}t_2^2t_1 \tag{5.15}$$

欧拉向量场为 $E = \frac{4}{3}t_1\partial_{t_1} + t_2\partial_{t_2}$，荷为 $d = -\frac{1}{3}$。我们计算了中心不变量，它们都等于 $-\frac{1}{54}$，并且 $\mathcal{N}$ 上的双哈密顿结构属于拓扑类型。

5.2 sl_4 中的划分 $[3, 1]$

我们固定 $L_1 = \varepsilon_{1、2} + \varepsilon_{2、3}$ 作为李代数 sl_4 中类型为 $[3, 1]$ 的幂零轨道的一个代表。我们引入 sl_2-三元组

$$L_1 = \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3},\ h = \varepsilon_{1,1} - \varepsilon_{3,3},\ f = 2\varepsilon_{2,1} + 2\varepsilon_{3,2}$$

那么，dim $\mathfrak{g}^f = 5$ 以及数值 $\eta_{1、}$ ……、 η_5 依次为 1、0、2、1、1。我们将 Slodowy 切片中的元素写成如下形式

$$Q = L_1 + \sum_{i=1}^{5} z_iX_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 & 1 & 0 & 0 \\ 2z_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 & 1 & 0 \\ 4z_3 & 2z_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 & 2z_4 - 2z_5 \\ 2z_4 + 2z_5 & 0 & 0 & -\sqrt{3}z_2 \end{pmatrix}$$

其中 $X_i \in \mathfrak{g}^f$ 且 $\mathrm{ad}_h X_i = -2\eta_i$。固定不变多项式，使其限制满足

$$\begin{aligned} \overline{P}_1^0 &= z_1 + \frac{1}{2}z_2^2, \quad \overline{P}_2^0 = z_3 - \frac{2}{3\sqrt{3}}z_2^3 + \frac{2}{\sqrt{3}}z_1 z_2 \\ \overline{P}_3^0 &= \frac{7}{12}z_2^4 + z_1 z_2^2 + \sqrt{3}z_3 z_2 + 2z_1^2 + z_4^2 - z_5^2 \end{aligned} \tag{5.16}$$

泊松结构 $\mathbb{B}_2^{\mathcal{Q}}$具有以下非零括号。

$$\begin{aligned}
\{z_1(x), z_1(y)\} &= z_1'\delta + 2z_1\delta' - \frac{1}{2}\delta^{(3)}, \quad \{z_1(x), z_3(y)\} = 2z_3'\delta + 3z_3\delta' \\
\{z_1(x), z_4(y)\} &= \left(z_4' - \frac{4}{\sqrt{3}}z_2 z_5\right)\delta + 2z_4\delta', \quad \{z_1(x), z_5(y)\} = \left(z_5' - \frac{4}{\sqrt{3}}z_2 z_4\right)\delta + 2z_5\delta' \\
\{z_2(x), z_2(y)\} &= \delta', \quad \{z_2(x), z_4(y)\} = \frac{4}{\sqrt{3}}z_5\delta, \quad \{z_2(x), z_5(y)\} = \frac{4}{\sqrt{3}}z_4\delta \\
\{z_3(x), z_3(y)\} &= \frac{1}{12}\left(-9z_1'' + 32z_1^2 + 48z_4^2 - 48z_5^2\right)\delta' + \frac{1}{24}\Big(-30z_1'\delta'' - 20z_1\delta^{(3)} + \delta^{(5)}\Big) \\
&+ \frac{1}{6}\left(16z_1 z_1' + 24z_4 z_4' - 24z_5 z_5' + z_1^{(3)}\right)\delta \\
\{z_3(x), z_4(y)\} &= -\frac{1}{6}\Big(4\sqrt{3}z_2 z_4' + 12\sqrt{3}z_4 z_2' - 32z_5 z_2^2 - z_5'' + 16z_1 z_5\Big)\delta + \frac{5}{6}\left(z_5' - 4\sqrt{3}z_2 z_4\right)\delta' + \frac{5}{3}z_5\delta'' \\
\{z_3(x), z_5(y)\} &= \frac{5}{6}\left(z_4' - 4\sqrt{3}z_2 z_5\right)\delta' + \frac{5}{3}z_4\delta'' - \frac{1}{6}\Big(4\sqrt{3}z_2 z_5' + 12\sqrt{3}z_5 z_2' - 32z_4 z_2^2 - z_4'' + 16z_1 z_4\Big)\delta \\
\{z_4(x), z_4(y)\} &= -\left(z_1' - 8z_2 z_2'\right)\delta + \frac{1}{2}\delta^{(3)} - 2\left(z_1 - 4z_2^2\right)\delta' \\
\{z_4(x), z_5(y)\} &= \frac{2}{9}\left(-3\sqrt{3}z_2'' - 16\sqrt{3}z_2^3 + 12\sqrt{3}z_1 z_2 - 9z_3\right)\delta - 2\sqrt{3}\left(z_2'\delta' + z_2\delta''\right) \\
\{z_5(x), z_5(y)\} &= \left(z_1' - 8z_2 z_2'\right)\delta - \frac{1}{2}\delta^{(3)} + 2\left(z_1 - 4z_2^2\right)\delta'
\end{aligned} \tag{5.17}$$

回想一下，泊松结构 $\mathbb{B}_1^{\mathcal{Q}}$是 $\mathbb{B}_2^{\mathcal{Q}}$沿 ∂_{z_3}的李导数。使用方程（3.8）中的记号，横截泊松结构 B_2^Q 将具有以下矩阵

$$F_2^{ij}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{4z_2}{\sqrt{3}}z_5 & -\frac{4}{\sqrt{3}}z_2 z_4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}}z_5 & \frac{4}{\sqrt{3}}z_4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{3}z_2^2 z_5 - \frac{8}{3}z_1 z_5 & \frac{16}{3}z_2^2 z_4 - \frac{8}{3}z_1 z_4 \\ * & * & * & 0 & -\frac{32}{3\sqrt{3}}z_2^3 + \frac{8}{\sqrt{3}}z_1 z_2 - 2z_3 \\ * & * & * & \frac{32}{3\sqrt{3}}z_2^3 - \frac{8}{\sqrt{3}}z_1 z_2 + 2z_3 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\Omega_2^{ij}(z) = \begin{pmatrix} 2z_1 & 0 & 3z_3 & 2z_4 & 2z_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3z_3 & 0 & \frac{1}{24}\left(64z_1^2 + 96z_4^2 - 96z_5^2\right) & -\frac{10}{\sqrt{3}}z_2 z_4 & -\frac{10}{\sqrt{3}}z_2 z_5 \\ 2z_4 & 0 & -\frac{10}{\sqrt{3}}z_2 z_4 & \frac{1}{4}\left(32z_2^2 - 8z_1\right) & 0 \\ 2z_5 & 0 & -\frac{10}{\sqrt{3}}z_2 z_5 & 0 & \frac{1}{4}\left(8z_1 - 32z_2^2\right) \end{pmatrix}$$

并且我们注意到，矩阵 $S_2^{ij}{}_{;1}$ 不为零。

公共平衡点的空间 N 定义为

$$N := \{q \in Q : \partial_{z_4}\overline{P}_3^0 = 0 = \partial_{z_5}\overline{P}_3^0\} = \{q \in Q : z_5 = 0 = z_4\} \tag{5.18}$$

考虑环空间上的约化双哈密顿结构 $\mathcal{N}$，它存在无色散极限，且形式为（4.4）。矩阵 $\Omega_2^{ab}(z)$ 由 $\Omega_2^{ij}(z)$ 的左上子式得到，其中 $z_4 = z_5 = 0$。然后矩阵 $\Omega_1^{ab} = \mathfrak{L}\partial_{z_3}\Omega_2^{ab}$ 在 N 上退化。

我们尝试寻找另一个度量，使其与 Ω_2^{ab} 构成平坦度量铅笔。根据条件（2.2），我们寻求一个向量场 e，使得 $\mathfrak{L}_e\Omega_2^{ab}$ 非退化，并且 $\mathfrak{L}_e^2\Omega_2^{ab} = 0$。通过试探，我们发现向量场

$$e = \partial_{z_1} + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}z_2\partial_{z_3} \tag{5.19}$$

满足所需条件。结果表明，$\mathfrak{L}_e^2\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}} = 0$。因此，我们在 $\mathcal{N}$ 上得到一个新的局部双哈密顿结构，由 $\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}$ 和 $\mathfrak{L}_e\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}$ [23] 构成；它存在无色散极限，并构成精确泊松铅笔。此外，其首项定义了一个正则准齐次平坦度量铅笔。在以下坐标中

$$t_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2^2,\ t_2 = i\sqrt{\frac{3}{2}}z_2,\ t_3 = z_3 - \frac{4}{3}i\sqrt{\frac{2}{3}}z_2^3 - 2i\sqrt{\frac{2}{3}}z_1z_2 \tag{5.20}$$

我们得到

$$\Omega_2^{ab}(t) = \begin{pmatrix} 2t_1 & t_2 & 3t_3 \\ t_2 & -\frac{3}{2} & 2t_1 - 2t_2^2 \\ 3t_3 & 2t_1 - 2t_2^2 & -8t_2t_3 \end{pmatrix},\quad S_{2;2}^{ab}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3}t_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}t_2 & 0 & -\frac{7}{6}t_2^2 - \frac{5}{6}t_1 \end{pmatrix},\ S_{1;2}^{ab} = 0, \tag{5.21}$$

以及 $e = \partial_{t_1}$。所得的 Dubrovin-Frobenius流形结构等价于赫尔维茨空间 $M_{0;1,\ 0}$（[10], 例 5.5）上的 Dubrovin-Frobenius 结构。其对数势函数为

$$\mathbb{F} = \frac{t_1^3}{12} + \frac{1}{2}t_2t_3t_1 - \frac{1}{6}t_2^3t_3 - \frac{1}{8}t_3^2\log t_3 \tag{5.22}$$

其欧拉向量场为 $E = \frac{1}{2}\sum\Omega^{1i}\partial_{t_i}$，荷为 0。注意 $E\mathbb{F} = 3\mathbb{F} - \frac{3}{16}t_3^2$。然后利用公式（4.6），我们发现所有中心不变量均为 $-\frac{1}{96}$。因此，$\mathcal{N}$相应的双哈密顿结构属于拓扑类型。

5.3 类型为 $[2,2]$ 的幂零轨道

我们固定以下 sl_2-三元组，其中 L_1 是 sl_4 中类型为 $[2,2]$ 的幂零轨道的一个代表元。

$$L_1 = \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,4},\ h = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1,1} - \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{3,3} - \varepsilon_{4,4}),\ f = \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{4,3}$$

于是，数值 $\eta_1, \ldots, \eta_7$ 分别为 1,0,1,1, 0, 0, 1。我们将 Slodowy 切片中的元素写成如下形式

$$Q = L_1 + \sum_{i=1}^{7} z_iX_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(z_5 - z_6) & 0 \\ z_1 + z_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 & z_4 + z_7 & \frac{1}{\sqrt{2}}(z_5 - z_6) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(z_5 + z_6) & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}z_2 & 1 \\ z_7 - z_4 & \frac{1}{\sqrt{2}}(z_5 + z_6) & z_1 - z_3 & -\frac{1}{\sqrt{2}}z_2 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

我们固定在 Q 上的限制等于

$$\begin{aligned} \overline{P}_1^0 &= \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_5^2 - \frac{1}{2}z_6^2 + z_1,\ \overline{P}_2^0 = z_2z_3 + z_4z_6 + z_5z_7 \\ \overline{P}_3^0 &= \frac{1}{4}z_2^4 + \frac{1}{2}z_5^2z_2^2 - \frac{1}{2}z_6^2z_2^2 - z_1z_2^2 + \frac{1}{4}z_5^4 + \frac{1}{4}z_6^4 + z_1^2 - z_3^2 + z_4^2 - z_1z_5^2 - \frac{1}{2}z_5^2z_6^2 + z_1z_6^2 - z_7^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

那么 $\mathbb{B}_2^Q$ 的非零括号为

$$
\begin{aligned}
\{z_1(x),z_1(y)\} &= -\frac{1}{2}\delta^{(3)}+z_1'\delta+2z_1\delta' \qquad (5.25)\\
\{z_1(x),z_3(y)\} &= \delta\left(z_3'-\sqrt{2}z_4z_5-\sqrt{2}z_6z_7\right)+2z_3\delta'\\
\{z_1(x),z_4(y)\} &= \left(z_4'-\sqrt{2}z_3z_5+\sqrt{2}z_2z_7\right)\delta+2z_4\delta'\\
\{z_1(x),z_7(y)\} &= \left(z_7'+\sqrt{2}z_2z_4+\sqrt{2}z_3z_6\right)\delta+2z_7\delta'\\
\{z_2(x),z_2(y)\} &= \delta',\ \{z_2(x),z_4(y)\}=-\sqrt{2}z_7\delta,\ \{z_2(x),z_5(y)\}=\sqrt{2}z_6\delta\\
\{z_2(x),z_6(y)\} &= \sqrt{2}z_5\delta,\ \ \{z_2(x),z_7(y)\}=-\sqrt{2}z_4\delta\\
\{z_3(x),z_3(y)\} &= \left(z_1'-3z_5z_5'+3z_6z_6'\right)\delta+\left(-3z_5^2+3z_6^2+2z_1\right)\delta'-\frac{1}{2}\delta^{(3)}\\
\{z_3(x),z_4(y)\} &= (-2z_6z_2'-z_2z_6'+\frac{1}{\sqrt{2}}z_5''+\sqrt{2}z_5^3+\sqrt{2}z_2^2z_5-\sqrt{2}z_6^2z_5-2\sqrt{2}z_1z_5)\delta\\
&\quad +(\frac{3}{\sqrt{2}}z_5'-3z_2z_6)\delta'+\frac{3}{\sqrt{2}}z_5\delta''\\
\{z_3(x),z_5(y)\} &= -\sqrt{2}z_4\delta,\ \{z_3(x),z_6(y)\}=\sqrt{2}z_7\delta\\
\{z_3(x),z_7(y)\} &= (2z_5z_2'+z_2z_5'-\frac{1}{\sqrt{2}}z_6''+\sqrt{2}z_6^3-\sqrt{2}z_2^2z_6-\sqrt{2}z_5^2z_6+2\sqrt{2}z_1z_6)\delta\\
&\quad +(3z_2z_5-\frac{3}{\sqrt{2}}z_6')\delta'-\frac{3}{\sqrt{2}}z_6\delta''\\
\{z_4(x),z_4(y)\} &= \left(-z_1'+3z_2z_2'+3z_5z_5'\right)\delta+\left(3z_2^2+3z_5^2-2z_1\right)\delta'+\frac{1}{2}\delta^{(3)}\\
\{z_4(x),z_7(y)\} &= (-z_6z_5'-2z_5z_6'+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2''+\sqrt{2}z_2^3+\sqrt{2}z_5^2z_2-\sqrt{2}z_6^2z_2-2\sqrt{2}z_1z_2)\delta\\
&\quad +(\frac{3}{\sqrt{2}}z_2'-3z_5z_6)\delta'+\frac{3}{\sqrt{2}}z_2\delta''\\
\{z_4(x),z_5(y)\} &= -\sqrt{2}z_3\delta,\ \{z_5(x),z_5(y)\}=\delta',\ \{z_5(x),z_6(y)\}=-\sqrt{2}z_2\delta\\
\{z_6(x),z_6(y)\} &= -\delta',\ \{z_6(x),z_7(y)\}=\sqrt{2}z_3\delta\\
\{z_7(x),z_7(y)\} &= (z_1'-3z_2z_2'+3z_6z_6')\delta+(-3z_2^2+3z_6^2+2z_1)\delta'-\frac{1}{2}\delta^{(3)},
\end{aligned}
$$

和 $\mathbb{B}_1^{\mathcal{Q}}=\mathfrak{L}_{\partial_{z_3}}\mathbb{B}_2^{\mathcal{Q}}$。局部泊松括号的首项为

$$
F_2^{ij}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}
0 & 0 & -z_4z_5-z_6z_7 & z_2z_7-z_3z_5 & 0 & 0 & z_2z_4+z_3z_6\\
* & 0 & 0 & -z_7 & z_6 & z_5 & -z_4\\
* & * & 0 & z_5^3+z_2^2z_5-z_6^2z_5-2z_1z_5 & -z_4 & z_7 & z_6^3-z_2^2z_6-z_5^2z_6+2z_1z_6\\
* & * & * & 0 & -z_3 & 0 & z_2^3+z_5^2z_2-z_6^2z_2-2z_1z_2\\
* & * & * & * & 0 & -z_2 & 0\\
* & * & * & * & * & 0 & z_3\\
* & * & * & * & * & * & 0
\end{pmatrix}
$$

$$\Omega_2^{ij}=\begin{pmatrix} 2z_1 & 0 & 2z_3 & 2z_4 & 0 & 0 & 2z_7\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2z_3 & 0 & -3z_5^2+3z_6^2+2z_1 & -3z_2z_6 & 0 & 0 & 3z_2z_5\\ 2z_4 & 0 & -3z_2z_6 & 3z_2^2+3z_5^2-2z_1 & 0 & 0 & -3z_5z_6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 2z_7 & 0 & 3z_2z_5 & -3z_5z_6 & 0 & 0 & -3z_2^2+3z_6^2+2z_1 \end{pmatrix}$$

and

$$S_{1;2}^{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}z_5 & 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}}z_6\\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}}z_5 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}z_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}z_6 & -\frac{3}{\sqrt{2}}z_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

公共平衡点空间 N 定义为

$$N:=\{q\in Q:\partial_{z_\alpha}\overline{P}_j^0=0,\ \alpha=4,5,6,7,j=1,2,3\}=\{q\in Q:z_4=z_5=z_5=z_7=0\}\tag{5.26}$$

考虑环空间上的约化双哈密顿结构 $\mathcal{N}$，它具有无色散极限。因此，矩阵 Ω_2^{ab}可由 Ω 的左上子式$_2^{ij}$ 在限制条件（5.26）下得到。在此情形下，首项矩阵 Ω_2^{ab}和 $\Omega_1^{ab}=\partial_{z_3}\Omega_2^{ab}$并未定义平坦度量铅笔，因为 $\det\Omega_1^{ab}=0$。然而，矩阵 $S_{2;1}^{ab}=0$。

如上所述，我们寻求一个向量场 e，使得 $\mathfrak{L}_e^2\Omega_2^{ab}=0$ 和 $\mathfrak{L}_e\Omega_2^{ab}$ 定义一个平坦逆变度量。通过试探，我们得到

$$e=-\partial_{z_1}+z_2^{-1}\partial_{z_2}$$

满足所需条件。此外，$\mathfrak{L}_e^2\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}=0$。因此，我们在 $\mathcal{N}$ 上得到一个新的局部双哈密顿结构，由 $\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}$ 和 $\overline{\mathbb{B}}_1^{\mathcal{N}}:=\mathfrak{L}_e\mathbb{B}_2^{\mathcal{N}}$ 构成，并具有无色散极限。此外，首项定义了一个正则准齐次平坦度量铅笔，由 Ω_2^{ab} 和 $\Omega_1^{ab}:=\mathfrak{L}_e\Omega_2^{ab}$ 构成，次数为 0。

在坐标中

$$t_1=z_1+\frac{1}{2}z_2^2,\ t_2=\frac{z_2^2}{2},\ t_3=z_3.$$

我们得到

$$\Omega_2^{ab}(t)=\begin{pmatrix} 2t_1 & 2t_2 & 2t_3\\ 2t_2 & 2t_2 & 0\\ 2t_3 & 0 & 2t_1-2t_2 \end{pmatrix},\ S_{1;2}^{ab}=0,\ \widetilde{\Omega}_1^{ab}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以及 $e=\partial_{t_2}$。由此得到的 Dubrovin-Frobenius 流形结构是平凡的，即切空间上的 Frobenius 代数与点的位置无关。其势函数为

$$\mathbb{F}=\frac{t_1^3}{12}-\frac{1}{4}t_2t_1^2+\frac{1}{4}t_2^2t_1+\frac{1}{4}t_3^2t_1-\frac{1}{4}t_2t_3^2.$$

欧拉向量场为 $E=\sum t_i\partial_{t_i}$，满足 $E\mathbb{F}=3\mathbb{F}$。为求中心不变量，我们有

$$S^{ab}_{2;2}(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

然后利用方程（4.6），可得相应双哈密顿结构的中心不变量为 0、$-\frac{1}{48}$ 和 $-\frac{1}{48}$。特别地，$\mathcal{N}$ 上的双哈密顿结构不属于拓扑类型。对于这种情形下不均匀常数中心不变量的出现，我们尚无解释。

5.4 结论

我们从相应的经典 W-代数出发，给出了与半单型幂零元相关的拓扑型双哈密顿结构的示例。对于 sl_3 和 sl_4 中的次正则幂零元，相应的杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形是对数型的。此外，文献 [21] 证明了这些双哈密顿结构与约束 KP 层次相关。对于 sl_n、$n>2$中的其他次正则幂零元，这种重合似乎也成立。在未来的工作中，我们将利用经典 W-代数，为对数型杜布罗文-弗罗贝尼乌斯流形的拓扑型双哈密顿结构给出统一构造，并分析它们与约束 KP 层次所对应的双哈密顿结构之间的联系。

致谢。作者感谢 Marco Pedroni 抽出时间阅读本文初稿，并提出有益建议，建议加入与分数阶 KdV 层次相关的双哈密顿结构示例，还提醒作者关注论文 [21]。其中给出的代数的 Dubrovin-Frobenius结构最初由 Yougin Zhang 于2017年访问苏丹卡布斯大学期间计算得出。作者感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所在开展本研究期间，通过色散流体力学项目提供支持与款待（英国工程与自然科学研究委员会拨款编号：EP/R014604/1）。

经费资助 本研究部分由苏丹卡布斯大学内部拨款（IG/SCI/DOMS/19/08）资助。

数据可用性 不适用。

声明

利益冲突　　突 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益　　.

参考文献

[1] Bolsinov, A.V., Oshemkov, A.A.；双哈密顿结构与可积系统的奇点。Regul. Chaot. Dyn. 14, 431–454 (2009)。[2] Burroughs, N.、de Groot, M.、Hollowood, T. 和 Miramontes, J.；广义 Drinfeld-Sokolov 层次 II：哈密顿结构，《Comm. Math. Phys.》153, 187 (1993)。[3] Collingwood, D. H., McGovern, W. M.；半单李代数中的幂零轨道。Van Nostrand Reinhold 数学丛书。ISBN: 0-534-18834-6 (1993)。[4] Delduc, F.；Feher, L.，韦伊群中的正则共轭类与可积层次。《J. Phys. A》28, no. 20, 5843–5882 (1995)。

[5] Dinar, Yassir；代数经典 W-代数与 Frobenius 流形。《Lett Math Phys》111, 115 (2021)。[6] Dinar, Yassir； W-代数与双哈密顿、Drinfeld-Sokolov 及 Dirac 约化的等价性。《J. Geom. Phys.》84, 30-42 (2014)。[7] Dinar, Y.；关于幂零元横向 Lie-Poisson 结构的可积性。《Journal of Geometry and Physics》，第 155 卷，103690，ISSN 0393-0440 (2020)。[8] Dijkgraaf, R.、Verlinde, H. 和 Verlinde, E.； $d1$中的拓扑弦。《Nucl. Phys. B》352, 59 (1991)。[9] Drinfeld, V. G.、Sokolov, V. V.；李代数与 Korteweg-de Vries 型方程。（俄文）《数学中的当前问题》，第 24 卷，81–180，Itogi Nauki i Tekhniki，苏联科学院，苏联全联盟科学技术信息研究所，莫斯科 (1984)。[10] Dubrovin, Boris；二维拓扑场论的几何。《可积系统与量子群》（Montecatini Terme，1993），120–348，《数学讲义》第 1620 卷，Springer，柏林 (1996)。[11] Dubrovin, Boris；度量的平坦铅笔与 Frobenius 流形。《可积系统与代数几何》（Kobe/Kyoto，1997），47–72，World Sci. Publ. (1998)。[12] Dubrovin, B.、Zhang, Y.；可积偏微分方程层次、Frobenius 流形与 Gromov-Witten 不变量的标准形，www.arxiv.org math/0108160。[13] Dubrovin, B.、Liu, Si-Qi、Zhang, Y.；Drinfeld-Sokolov 双哈密顿结构的 Frobenius 流形与中心不变量，《Advances in Mathematics》，第 219 卷，第 3 期，780-837 (2008)。[14] Dubrovin, B. A.、Novikov, S. P.；流体力学型的泊松括号。（俄文）《Dokl. Akad. Nauk SSSR》279, no. 2, 294–297 (1984)。[15] Dubrovin, B.、Liu, S.-Q.、Zhang, Y.；关于守恒律双曲系统的哈密顿扰动。I. 双哈密顿扰动的拟平凡性。《Comm. Pure Appl. Math.》59, 559–615 (2006)。[16] Dubrovin, B.；关于哈密顿偏微分方程中临界行为的普适性，《Amer. Math. Soc. Transl.》224, pp 59–109 (2008)。[17] Elashvili, A. G.；Kac, V. G.；Vinberg, E. B.；半单李代数中的循环元。《Transform. Groups》18, no. 1,97-130 (2013)。[18] Falqui, G.、Lorenzoni, P.；精确泊松铅笔、 τ-结构与拓扑层次。《Phys. D》241, no. 23-24, 2178–2187 (2012)。[19] Feher, L.、O'Raifeartaigh, L.、Ruelle, P.、Tsutsui, I.；关于通过 DS 约化获得的经典W-代数集合的完备性。《Comm. Math. Phys.》162, no. 2, 399–431 (1994)。[20] Liu, S.-Q.、Zhang, Y.：流体力学型半单双哈密顿结构的变形。《J. Geom. Phys.》54, 427–453 (2005)。[21] Liu, S.、Zhang, Y.、Zhou, Xu；约束 KP 层次的中心不变量。《J. Geom. Phys.》97, 177-189 (2015)。[22] Lorenzoni, P.；流体力学型双哈密顿结构的变形。《J. Geom. Phys.》44, 331–375 (2002)。

[23] Sergyeyev, A. A；将哈密顿系统转化为双哈密顿系统的简单方法。《Acta Applicandae Mathematicae》83，183–197（2004）。

Yassir Dinar，阿曼苏丹卡布斯
大学理学院数学系，
dinar@squ.edu.om。