arXiv:2302.06850v1 [math.GT] 14 Feb 2023

映射类群的新边界*

Lixin Liu[1] 和 Yaozhong Shi[2], †

[1]中山大学数学学院，510275，中国广州；
mcsllx@mail.sysu.edu.cn

[2]中山大学数学学院，510275，中国广州；
shiyaozhong314@126.com

摘要

基于映射类群在测地叶状结构空间上的作用，我们构造了映射类群的一个新边界，并研究该边界的结构。作为应用，对于 Teichm¨uller 空间中的任意一点，我们考察映射类群作用下该点的轨道，并描述该轨道在 Thurston紧化和 Teichm¨uller 空间的 Gardiner-Masur 紧化中的闭包。我们还在 Teichm¨uller 空间的 Gardiner-Masur 边界中构造了一些新点。

关键词：映射类群、测度叶状结构、Teichm¨uller 空间 MSC（2010）：
30F60，32G15，57M99

1 引言

为了研究群 G的结构，为其赋予一个边界是很自然的做法。例如，考虑一个有限生成群的 Cayley 图，并用一个可求和函数对边的长度进行缩放，我们就能在这个新度量下得到该图的一个紧完备化。这个完备化的边界就是 G 的 Floyd 边界（参见 [5]）。此外， G 上的一个概率测度 ν 确定了 G上的一个随机游走。这个随机游走也确定了一个边界，称为泊松边界。泊松边界与该随机游走对应的调和函数密切相关（参见 [10]）。

设 S 是一个亏格为 g、有 n 个尖点的定向曲面。我们假设 $N = 3g - 3 + n \geq 1$。本文研究一个特殊的群： S的映射类群 $Mod(S)$。 $Mod(S)$作用于两个空间：$\mathcal{T}(S)$和 $\mathcal{MF}$，其中 $\mathcal{T}(S)$是 S 的 Teichm¨uller 空间，而 $\mathcal{MF}$ 是S上的测地叶状结构空间。设 $\mathcal{PMF} = \mathcal{MF} - \{0\}/R_+$ 为射影测地叶状结构空间。基于$Mod(S)$在 $\mathcal{T}(S)$、 $\mathcal{MF}$和 $\mathcal{PMF}$上的作用，我们可以研究 $Mod(S)$的结构。映射类群研究中最重要的结果或许是 Nielsen-Thurston分类定理，该定理指出，每个$f \in Mod(S)$都属于三种特殊类型之一：周期型、可约型或伪-Anosov型。通过 $Mod(S)$在 $\mathcal{T}(S)$和 $\mathcal{MF}$上的作用，也对 $Mod(S)$的子群结构进行了研究（参见 [14], [9], 等）。

不同的人研究了 $Mod(S)$ 的各种边界（参见 [13], [11], [8], 等）。特别是，Kaimanovich 和 Masur（参见 [11]）研究了 $Mod(S)$ 的泊松边界。他们证明，在某些

*本研究部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11771456）的资助。
†通讯作者。

自然条件下， $Mod(S)$ 的泊松边界 $\mathcal{PMF}$ 配备了唯一的测度。为了得到他们的主要结果，他们考察了 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{PMF}$ 上的作用，并分析了无限序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{PMF}$ 上的作用的渐近行为（参见 [11] 中的第1.5小节）。受他们思路的启发，我们研究 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{MF}$ 上的渐近行为。在 $f_n = f^n$ 对某个固定的 $f \in Mod(S)$ 成立这一特殊情况下，我们知道

(1) 当 f是由简单闭曲线 α确定的德恩扭转时，对任意$F \in \mathcal{MF}$，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f^n(F) = i(\alpha, F)\alpha$；

(2) 当 f是一个伪阿诺索夫映射，且具有 $\lambda > 1$, $f(F^u) = \lambda F^u$, $f(F^s) = \lambda^{-1} F^s$和 $i(F^u, F^s) = 1$时，对任意 $F \in \mathcal{MF}$，$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} f^n(F) = i(F^s, F)F^u$。

这两个经典结果的一个自然推广是

问题1.1. $Mod(S)$在 $\mathcal{MF}$ 上的作用是否“射影相对紧”? 也就是说，对于任意序列 $f_n \in Mod(S)$，是否存在一个子序列 f_{n_k} 和一个正数序列 t_k，使得 $t_k f_{n_k}: \mathcal{MF} \to \mathcal{MF}$收敛到某个映射 $f_0: \mathcal{MF} \to \mathcal{MF}$?

请注意，在问题1.1中，必须取一个子序列 f_{n_k} 并乘以一个正标量 t_k，因为若不进行这两种操作，一般的序列 f_n 不会收敛。

我们通过将 $Mod(S)$ 嵌入适当的空间，并构造 $Mod(S)$ 的新边界，解决问题1.1。为此，我们需要一些记号（见第 3 节）。令 $\Omega(\mathcal{MF})$ 为所有从 $\mathcal{MF}$ 到 $\mathcal{MF}$ 的齐次可测函数构成的集合。注意， R_+ 通过乘法作用于 $\Omega(\mathcal{MF})$。令 $P\Omega(\mathcal{MF}) = \Omega(\mathcal{MF}) - \{0\}/R_+$ 为 $\Omega(\mathcal{MF})$ 的射影空间。赋予 $\Omega(\mathcal{MF})$ 逐点收敛拓扑，并赋予 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 商拓扑。考虑 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{MF}$ 上的作用，可得一个自然映射 $I: Mod(S) \to P\Omega(\mathcal{MF})$（见第 3 节）。除去一个有限正规子群 $ker(I)$ 后，我们可以将$Mod(S)$ 与其像 $I(Mod(S))$ 等同，为简便起见，记作 E。因此， $Mod(S)$ 几乎嵌入 $P\Omega(\mathcal{MF})$，而 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 是解决问题1.1 的适当空间。

沿用这些记号，我们证明 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 中 $E = I(Mod(S))$ 的闭包 $Cl(E)$ 是可度量化且紧的（定理 3.1）。请注意，这一结果彻底回答了问题1.1：根据 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 的定义，将 $Mod(S)$ 视为 $E = I(Mod(S))$， $Cl(E)$ 的紧致性意味着，对于任意序列$f_n \in Mod(S)$，都存在一个子序列 f_{n_k} 和一个正数序列 t_k，使得 $t_k f_{n_k}: \mathcal{MF} \to \mathcal{MF}$ 收敛到一个映射 $f_0: \mathcal{MF} \to \mathcal{MF}$。

将 $Mod(S)$ 视为 $E = I(Mod(S))$， $\partial E = Cl(E) - E$是 $Mod(S)$ 的边界。关于 ∂E 的结构，我们证明（见第 4 节）

- 在 $Cl(E)$ 中， E 是离散的， ∂E 是闭的（命题 4.1）。
- $Mod(S)$ 上的乘法和求逆运算可连续延拓到 $Cl(E)$（命题 4.3、4.4、4.5）。但是， $Cl(E)$ 实际上并不是一个群（注4.6）。
- 任意点 $p \in \partial E$ 都可以表示为 $[\sum_{i=1}^{k} i(E_i, \cdot)F_i]$，其中 $\{F_i\}$ ($\{E_i\}$) 是互不相交的测度叶状结构（定理 4.8）。
- 构造了 ∂E 的一些特殊点（命题 4.13、4.15、4.16）。特别地， $\partial E \neq \emptyset$。

我们还考察 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{T}(S)$ 的 Thurston 紧化 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 Gardiner-Masur 紧化 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 上的作用。Thurston 边界恰为 $\mathcal{PMF}$；而

Gardiner-Masur 边界 GM 的结构则较为复杂。有关 Gardiner-Masur 边界的更多详情，请参见 [6], [15], [16] 和 [18] 。 $Mod(S)$ 自然地作用于 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 上。考察 $Mod(S)$ 在$\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 上的作用，我们得到两个映射

$$\Pi_{Th} : Mod(S) \times \mathcal{T}^{Th}(S) \to \mathcal{T}^{Th}(S),\ (f, p) \mapsto f(p)$$

and

$$\Pi_{GM} : Mod(S) \times \mathcal{T}^{GM}(S) \to \mathcal{T}^{GM}(S),\ (f, p) \mapsto f(p).$$

若赋予 $Mod(S)$ 离散拓扑，则 Π_{Th}和 Π_{GM}均为连续。由于在某种意义上 $Cl(E) = E \bigcup \partial E$是 $Mod(S)$ 的一个完备化，我们分别将 Π_{Th}和 Π_{GM}的定义域扩张为 $Cl(E)\times\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $Cl(E) \times \mathcal{T}^{GM}(S)$（见定理 5.1 和注 5.2）。

作为应用，我们证明了定理 5.4，它回答了以下问题：

问题 1.2。对于 $\mathcal{T}(S)$ 中任意的 x_0，考虑 x_0 在 $Mod(S)$ 的作用下的轨道 $\Gamma(x_0)$，如何描述 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 或 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 中 $\Gamma(x_0)$ 的闭包?

此外，利用新边界 ∂E，我们在 $\mathcal{T}(S)$ 的 Gardiner-Masur 边界中构造了一些新点（见注 5.7）。

新边界 ∂E 与 $Mod(S)$ 的一个特殊边界有关。对于基点 $x \in \mathcal{T}(S)$，通过映射 $Mod(S) \ni f \mapsto f(x) \in \Gamma(x)$ 将$Mod(S)$ 与 x在映射下的轨道 $\Gamma(x)$ 识别起来，然后在 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 中取边界，我们得到一个依赖于基点 x 的 $Mod(S)$ 的边界。请注意，这个边界确实是整个 $\mathcal{PMF}$ （见定理 5.4 ）。因此，我们可以称它为以基点 x 为基点的 $Mod(S)$ 的“Thurston 边界”。于是，新边界 ∂E 覆盖了 $Mod(S)$ 的每一个“Thurston 边界”（见注 5.6）。

研究 $Mod(S)$ 的新边界 ∂E 与 $Mod(S)$ 的一些已知边界之间的关系可能会很有趣，例如 Floyd 边界、泊松边界等。我们将在未来研究这些关系。此外，Hamenst¨adt 引入了 $Mod(S)$ 的一个新边界（见 [7]中的第 8 节）。将我们的新边界与 Hamenst¨adt 的边界进行比较也很有趣。

我们可以考虑比 $\mathcal{MF}$ 更一般的空间，即测地流空间（见 [1]）。注意，测地流空间包含 $\mathcal{MF}$ 和 $\mathcal{T}(S)$。由于新边界∂E 的构造基于 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{MF}$ 上的作用，而 $Mod(S)$ 也在测地流空间上连续作用，因此自然会引出以下有趣的问题：

问题 1.3. 如果我们用测地流空间替代测地叶状结构空间，新边界的构造是否仍然成立?

本文结构安排如下。

第 2 节介绍有关测度叶状结构、Teichm¨uller 空间以及映射类群作用的背景知识。第 3 节构造 $Mod(S)$ 的新边界。第 4 节研究新边界的结构。第 5 节给出我们所构造的新边界的一些应用。

2 预备知识

2.1 测度叶状结构

令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(S)$ 表示 S 上本质简单闭曲线的同伦类集合。对于任意 α、$\beta \in \mathcal{S}$，用 $i(\alpha, \beta)$ 表示 α 与 β 之间的几何交数。

令 $R_{\geq 0}=\{x\in R:\ x\geq 0\}$，以及 $R_+=\{x\in R:\ x>0\}$。令 $R^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$ 表示 $\mathcal{S}$ 上赋予逐点收敛拓扑的非负函数空间。将带权简单闭曲线的集合记为 $R_+\times\mathcal{S}=\{t\cdot\alpha:\ t>0、\ \alpha\in\mathcal{S}\}$。众所周知，

$$i_*:R_+\times\mathcal{S}\to R^{\mathcal{S}}_{\geq 0},$$

$$t\cdot\alpha\mapsto t\cdot i(\alpha,\cdot)$$

is 是单射，并在 $R_+\times\mathcal{S}$ 上诱导一种拓扑。在此拓扑下，i_* 是一个嵌入 .

$i_*(R_+\times\mathcal{S})$ 在 $R^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$ 中的闭包称为 S 上的测度叶状结构空间，记作 $\mathcal{MF}$。R_+ 通过乘法作用于 $R^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$。将 $R^{\mathcal{S}}_{\geq 0}-\{0\}/R_+$ 记作 $PR^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$，将 $\mathcal{MF}-\{0\}/R_+$ 记作 $\mathcal{PMF}$。$\mathcal{PMF}$ 称为射影测度叶状结构空间。对于 $F\in\mathcal{MF}-\{0\}$，记 $[F]\in\mathcal{PMF}$ 为 F 的射影类。注意，$\mathcal{S}$ 嵌入于 $PR^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$ 中，且 $\mathcal{S}$ 在 $PR^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$ 中的闭包为 $\mathcal{PMF}$。众所周知，$\mathcal{MF}$ 与 $R^{6g-6+2n}$ 同胚，且 $\mathcal{PMF}$ 与 $S^{6g-7+2n}$ 同胚（参见 [4]）。

对于两条带权简单闭曲线 $t\alpha$、$s\beta\in R_+\times\mathcal{S}$，用齐次方程 $i(t\alpha,s\beta)=tsi(\alpha,\beta)$ 定义它们的交数。于是，交数函数 i 连续延拓到 $i:\ \mathcal{MF}\times\mathcal{MF}\to R_{\geq 0}$。

任意一个 $F\in\mathcal{MF}-\{0\}$ 都可以表示为带有横截测度 μ 的奇异叶状结构，其含义是，对于任意一条简单闭曲线 α,

$$i(F,\alpha)=\inf_{\alpha'}\int_{\alpha'}d\mu,$$

其中，下确界取遍所有与 α同伦的简单闭曲线 α'。

此外，我们需要给出测地叶状结构的遍历分解的定义。叶状结构的鞍连接是连接两个奇点（不一定彼此不同）的一条叶。叶状结构的临界图定义为所有鞍连接的并集。临界图的补集包含有限个连通分支。每个连通分支要么是由闭叶扫出的圆柱，要么是所谓的极小分支（其中每条叶都稠密）。在每个极小分支 D上，都存在有限个遍历横截测度 μ_1、……、μ_n，使得该分支 D 上的任意横截测度 μ 都可以写成 $\mu=\sum_{j=1}^n f_j\mu_j$，其中系数 $\{f_j\}$均为非负数。测地叶状结构的不可分解分支要么是带有正权重的圆柱，要么是带有遍历测度 μ_j的极小分支 D。如果一个测地叶状结构只包含一个不可分解分支，就称其为不可分解的。采用这些记号，任意测地叶状结构 F 都可以唯一表示为

$$F=\sum_{i=1}^k F_i,$$

其中每个 F_i 都是满足 $i(F_i,F_j)=0$ 且对 $i\neq j$有 $[F_i]\neq[F_j]$ 的不可约测度叶状结构。我们称之为 F的遍历分解。

有限条简单闭曲线 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ 填满 S，如果对于任意 $F\in\mathcal{MF}-\{0\}$,

$$\sum_{i=1}^k i(\alpha_i,F)>0.$$

我们需要以下结果（引理 6.3, [17]）。

引理 2.1. 设 $\{F_i:\ i=0,1,2,...,k\}$ 是一些射影上互异的不可约测度叶状结构，使得 $i(F_i,F_j)=0\,(i\neq j)$。那么，对于任意 $\epsilon>0$，存在一条简单闭曲线 α，使得

$$i(F_i,\alpha)<\epsilon i(F_0,\alpha),\ i=1,2,...,k.$$

2.2 Teichm¨uller 空间及其紧化

令 $\mathcal{T}(S)$ 为 S 的 Teichm¨uller 空间。$\mathcal{T}(S)$ 有两种等价的定义： S 上双曲度量的同伦类集合，以及 S 上共形结构的同伦类集合。若 m_1, m_2 是 S, m_1 上的有限面积双曲度量，则当存在保向同胚 f : $S \to S$ 同伦于恒等映射，且满足 $f_* m_1 = m_2$ 时， m_1 与 m_2 等价；其中 $f_* m_1$ 是 m_1 经 f 推前所得。$\mathcal{T}(S)$ 定义为 S 上有限面积双曲度量的等价类集合。若 μ_1, μ_2 是 S, μ_1 上的共形结构，则当存在保向同胚 f : $S \to S$ 同伦于恒等映射，且满足 $f_* \mu_1 = \mu_2$ 时， μ_1 与 μ_2 等价；其中 $f_* \mu_1$ 是 μ_1 经 f 推前所得。$\mathcal{T}(S)$ 也定义为 S 上共形结构的等价类集合。根据一致化定理，这两种定义是一致的。

对于与双曲度量对应的定义，我们考虑$\mathcal{T}(S)$上的双曲长度函数。对于任意 $x \in \mathcal{T}(S)$ 和 $\alpha \in \mathcal{S}$， 令 $l(x, \alpha)$ 表示在对应于 x 的双曲度量中， 与 α 同伦的测地线长度。简单闭曲线的双曲长度连续延拓为测地叶状结构的双曲长度。映射

$$l(\cdot, \cdot) : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{MF} \to R,$$

$$(x, F) \mapsto l(x, F)$$

是连续的。

Thurston 利用简单闭曲线的双曲长度构造了 Teichm¨uller 空间的紧化。定义映射 $\widetilde{\varphi}_{Th}$ 为

$$\widetilde{\varphi}_{Th} : \mathcal{T}(S) \to R_{\geq 0}^{\mathcal{S}},$$

$$x \mapsto (l(x, \alpha))_{\alpha \in \mathcal{S}}.$$

令 pr： $R_{\geq 0}^{\mathcal{S}} - \{0\} \to PR_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$ 为射影映射。则映射 $\varphi_{Th} = pr \circ \widetilde{\varphi}_{Th}$ 是一个嵌入，且其像的闭包是紧的。此外， $Cl(\mathcal{T}(S)) - \mathcal{T}(S) = \mathcal{PMF}$。因此，我们得到 $\mathcal{T}(S)$的一个紧化，记作 $\mathcal{T}^{Th}(S) = \mathcal{T}(S) \bigcup \mathcal{PMF}$。 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 是 Thurston紧化，而 $\mathcal{PMF}$ 是 Thurston 边界。

序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{T}(S)$，当且仅当存在一个正数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ 且对任意 $\alpha \in \mathcal{S}$, $\lim_{n\to\infty} t_n l(x_n, \alpha) = i(F, \alpha)$，此时该序列收敛到边界点 $[F]$ 属于 $\mathcal{PMF}$。

对于与共形结构相对应的定义，我们考虑 $\mathcal{T}(S)$ 上的极值长度函数。对于任意 $x \in \mathcal{T}(S)$ 和 $\alpha \in \mathcal{S}$， 令 $Ext(x, \alpha)$ 表示 α 在与 x 相对应的共形结构中的极值长度。简单闭曲线的极值长度连续延拓为测地叶状结构的极值长度。关于极值长度的更多细节，请参见 [12]。映射

$$Ext(\cdot, \cdot) : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{MF} \to R,$$

$$(x, F) \mapsto Ext(x, F)$$

是连续的。

Gardiner 和 Masur 利用 [6] 中简单闭曲线的极值长度，构造了 Teichm¨uller 空间的一个紧化。定义映射 $\widetilde{\varphi}_{GM}$ 为

$$\widetilde{\varphi}_{GM} : T(S) \to R_{\geq 0}^{\mathcal{S}},$$

$$x \mapsto (Ext^{\frac{1}{2}}(x,\alpha))_{\alpha\in\mathcal{S}}.$$

映射 $\varphi_{GM} = pr\circ\widetilde{\varphi}_{GM}$ 是一个嵌入，且其像的闭包是紧的。因此，我们得到 $\mathcal{T}(S)$ 的一个紧化，记作 $\mathcal{T}^{GM}(S) = \mathcal{T}(S)\bigcup GM$。 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 是 Gardiner-Masur 紧化，而 GM 是 Gardiner-Masur 边界。

与 Thurston 边界 $\mathcal{PMF}$不同，Gardiner-Masur 边界 GM 的结构要复杂得多。关于其结构的更多细节，参见 [15], [16], [18]。

2.3 映射类群的作用

令 $Mod(S)$ 为曲面 S 的映射类群，即 S 上保持定向的同胚的同伦类集合。 $Mod(S)$ 通过推前作用于 $\mathcal{MF}$ 和 $\mathcal{T}(S)$。具体而言，对于 $f\in Mod(S)$ 和 $x\in\mathcal{T}(S)$，若 m 和 μ 分别是等价类 x 中的双曲度量和共形结构，则将 $f(x)$ 定义为 f_*m 或 $f_*\mu$ 的等价类。对于测地叶状结构 (F,ν)，定义 $f(F,\nu)$ 为 $(f(F)\ f_*\nu)$。它在 $\mathcal{T}(S)$ 上的作用自然延拓至 $\mathcal{T}(S)$ 的 Thurston 紧化和 Gardiner-Masur 紧化。关于 $Mod(S)$ 的更多细节，参见 [3]。

本文采用以下约定：对于任意 $x\in\mathcal{T}(S)$、 $f\in Mod(S)$、 $F\in\mathcal{MF}$，

$$l(f(x),F) = l(x,f^{-1}(F)),\ Ext(f(x),F) = Ext(x,f^{-1}(F)).$$

3 新边界的构造

本节基于 $Mod(S)$ 在测地叶状结构空间 $\mathcal{MF}=\mathcal{MF}(S)$ 上的作用，构造 $Mod(S)$ 的一个新边界。

对于任意 $f\in Mod(S)$， f 在 $\mathcal{MF}$ 上的作用是一个齐次连续映射 $f:\ \mathcal{MF}\to\mathcal{MF}$，因此它特别是可测的。回顾一下，若对于任意 $F\in\mathcal{MF}$、 $k\geq 0$， $f(kF) = kf(F)$，则称 f 为齐次的。记从 $\mathcal{MF}$ 到 $\mathcal{MF}$ 的所有齐次可测映射组成的集合为 $\Omega(\mathcal{MF})$。我们赋予 $\Omega(\mathcal{MF})$ 逐点收敛拓扑。

由于 R_+ 通过乘法作用于 $\mathcal{MF}$，将任意 $f\in\Omega(\mathcal{MF})$ 乘以正数 k，便得到一个齐次可测映射 kf: $\mathcal{MF}\to\mathcal{MF}, F\mapsto kf(F)$。因此， R_+ 也通过乘法作用于 $\Omega(\mathcal{MF})$。于是我们得到射影空间 $P\Omega(\mathcal{MF}) = \Omega(\mathcal{MF})-\{0\}/R_+$，其中 0 是 $\Omega(\mathcal{MF})$ 中的零元。令 $\pi:\Omega(\mathcal{MF})-\{0\}\to P\Omega(\mathcal{MF})$ 为射影映射。记 $[f]=\pi(f)$ 为 $f\in\Omega(\mathcal{MF})$ 的射影类。

我们赋予 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 由 π 诱导的商拓扑。具体而言，对于序列 $\{[f_n]\}_{n=0}^{\infty}$ in$P\Omega(\mathcal{MF})$，$\lim_{n\to\infty}[f_n]=[f_0]$ 当且仅当存在一个正数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 t_nf_n 在逐点收敛拓扑下收敛到 f_0。

将 $f\in Mod(S)$ 映射为其作用 $f:\ \mathcal{MF}\to\mathcal{MF}$，我们得到一个自然映射

$$\widetilde{I}: Mod(S)\to\Omega(\mathcal{MF}).$$

将其与 π 复合，我们得到另一个映射

$$I=\pi\circ\widetilde{I}: Mod(S)\to P\Omega(\mathcal{MF}).$$

核 $ker(I) = \{f\in Mod(S):\ [f:\mathcal{MF}\to\mathcal{MF}] = [id_{\mathcal{MF}}]\}$是有限的。事实上，若 $f\in ker(I)$，则存在一个正数 k，使得对于任意 $F\in\mathcal{MF}$， $kf(F) = F$。由于 $R_+\mathcal{S}$在 $\mathcal{MF}$中稠密，这

等价于对于任意 $\alpha \in \mathcal{S}$， $f(\alpha) = k\alpha$。由于 f 将简单闭曲线映射为简单闭曲线，因此我们有 $k = 1$。于是，$f \in kerI$ 等价于 f 固定每条本质简单闭曲线的同伦类。根据 [3], 第 344 页的结果，我们知道，当 S的拓扑类型 (g, n) 为 (2, 0)、(1, 1)、(1, 2) 或 (0, 4) 时， $ker(I)$ 是一个阶为 2 或 4 的子群；其他情况下， $ker(I)$ 是平凡的。因此，除去有限正规子群 $ker(I)$（其阶为 1、2 或 4），我们可以将 $Mod(S)$ 与其像 $I(Mod(S))$ 视为相同。为简便起见，将像 $I(Mod(S))$ 记为 E。

令 $Cl(E)$ 为 E 在 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 中的闭包。本节的主要结果是

定理 3.1. $Cl(E)$ 是可度量化且紧的。

因此， $Cl(E)$ 是 $Mod(S)$ 的完备化，而 $\partial E = Cl(E) - E$ 是某种意义下 $Mod(S)$ 的边界 se.

为了证明定理 3.1，我们需要做一些准备。为了清晰地描述 $\mathcal{MF}$ 的拓扑，我们选择 N 条填充曲面 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$ 的简单闭曲线 S，使得该映射

$$\Phi : \mathcal{MF} \to R^N,$$

$$F \mapsto \big(i(\alpha_1, F), i(\alpha_2, F), ..., i(\alpha_N, F)\big)$$

是一个嵌入（见 [4]）。因此，我们将 $\mathcal{MF}$ 认定为像 $\Phi(\mathcal{MF})$，该像赋予了 R^N 上的欧几里得度量。

令 $l(\cdot) = \sum_{i=1}^{N} i(\alpha_i, \cdot) : \mathcal{MF} \to R_{\geq 0}$为 $\mathcal{MF}$上与 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$对应的长度函数。由于 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$填满曲面， $l(F) = 0$当且仅当 $F = 0$。回顾 [1]中的一个结果:

引理 3.2. 对任意 $M > 0$, $\{F \in \mathcal{MF} : l(F) \leq M\}$在 $\mathcal{MF}$中是紧的。

由引理 3.2 可得

引理 3.3. $\Phi(\mathcal{MF})$ 在 R^N中是闭的。

证明. 设对某个序列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{MF}$，有 $\lim_{n\to\infty} \Phi(F_n) = f_0$，且 $f_0 = (a_1, a_2, ..., a_N) \in R^N$。那么对 $i = 1, 2, ..., N$，有 $\lim_{n\to\infty} i(\alpha_i, F_n) = a_i$。因此，对某个 $M > 0$，有 $l(F_n) = \sum_{i=1}^{N} i(\alpha_i, F_n) \leq M$。由引理 3.2，存在一个子序列 $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得对某个 $F_0 \in \mathcal{MF}$，$\lim_{k\to\infty} F_{n_k} = F_0$。由于 Φ是连续的，我们有 $\Phi(F_0) = f_0$。因此 $f_0 \in \Phi(\mathcal{MF})$，证毕。 □

令 $\Omega'(\mathcal{MF}) \subseteq \Omega(\mathcal{MF})$ 表示从 $\mathcal{MF}$ 到 $\mathcal{MF}$的齐次连续映射的集合。再令$P\Omega'(\mathcal{MF}) \subseteq P\Omega(\mathcal{MF})$ 表示 $\Omega'(\mathcal{MF})$ 的射影空间。由于 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{MF}$ 上连续作用，$E \subseteq P\Omega'(\mathcal{MF})$。

现在我们继续在 $P\Omega'(\mathcal{MF})$ 上构造一个度量。令 $\mathcal{MF}_1 = \{F \in \mathcal{MF} : l(F) \leq 1\}$。对于任意 $[f]$属于$P\Omega'(\mathcal{MF})$ 的元素，我们将 $[f]$ 到 $\Omega'(\mathcal{MF})$ 的归一化提升定义为

$$\widehat{f}(\cdot) = \frac{f(\cdot)}{L(f)} : \mathcal{MF} \to \mathcal{MF},$$

其中 $L(f) = \sup_{\mathcal{MF}_1} l(f(\cdot))$。注意，由于 $\mathcal{MF}_1$的紧致性， $L(f)$ 是有限的。

令 d为由 Φ在 $\mathcal{MF}$上诱导的欧几里得度量：对于任意 $F, G \in \mathcal{MF}$, $d(F, G) = |\Phi(F) - \Phi(G)|$，其中 $|\cdot|$是 R^N上的欧几里得范数。我们定义映射 $\widehat{d}$: $P\Omega'(\mathcal{MF}) \times P\Omega'(\mathcal{MF}) \to R$如下：对于任意 $[f]$, $[g] \in P\Omega'(\mathcal{MF})$,

$$\widehat{d}([f], [g]) = \sup_{F \in \mathcal{MF}_1} d(\widehat{f}(F), \widehat{g}(F)).$$

注意， $\widehat{d}$ 是 $\Omega'(\mathcal{MF})$ 上的度量。事实上，对称性和三角不等式源自度量 d的这两项性质；正定性则源自归一化提升 f的定义。

对于度量 d，我们有

引理 3.4. 对于任意 $\{[f_n]\}_{n=0}^{\infty} \subseteq P\Omega'(\mathcal{MF})$，$\lim_{n\to\infty} \widehat{d}([f_n],[f_0]) = 0$ 当且仅当存在一个正数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $t_n f_n$ 在 $\mathcal{MF}$ 的任意紧子集上一致收敛到 f_0。

证明. 假设 $\lim_{n\to\infty} d([f_n],[f_0]) = 0$。由度量 d 的定义可知，$f_n(\cdot)/L(f_n)$ 在 $\mathcal{MF}_1$ 上一致收敛到 $f_0(\cdot)/L(f_0)$。对于 $\mathcal{MF}$ 的任意紧子集 A，令 $l(A) = \sup_{F\in A} l(F)$。注意，对于任意 $F \in A$，$F/l(A) \in \mathcal{MF}_1$。因此，我们有 $f_n(\cdot)/l(A)L(f_n)$ 在 A 上一致收敛到 $f_0(\cdot)/l(A)L(f_0)$，这也意味着 $L(f_0)f_n(\cdot)/L(f_n)$ 在 A 上一致收敛到 $f_0(\cdot)$。

反过来，假设存在一个序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq R_+$，使得 $t_n f_n$ 在 $\mathcal{MF}$的任意紧子集上都一致收敛到 f_0。特别地，$t_n f_n$ 在 $\mathcal{MF}_1$上一致收敛到 f_0，这意味着$t_n f_n(\cdot)\ L(t_n f_n)$ 在 $\mathcal{MF}_1$上一致收敛到 $f_0(\cdot)\ L(f_0)$。因此

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}([f_n],[f_0]) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathcal{MF}_1} d(\frac{f_n(\cdot)}{L(f_n)}, \frac{f_0(\cdot)}{L(f_0)}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathcal{MF}_1} d(\frac{t_n f_n(\cdot)}{L(t_n f_n)}, \frac{f_0(\cdot)}{L(f_0)}) = 0.$$

□

在度量空间 $(P\Omega'(\mathcal{MF})\ \widehat{d})$ 中，E是相对紧的：

引理 3.5. 对于任意序列 $\{[f_n]\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$，存在一个子序列 $\{[f_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{d}([f_{n_k}],[f_0]) = 0$$

对某个 $[f_0] \in P\Omega'(\mathcal{MF})$ 成立。

证明。根据 E 的定义，我们假设 $f_n \in Mod(S)$ $(n = 1, 2, ...)$。取一点 $x_0 \in \mathcal{T}(S)$。注意，$Mod(S)$ 在 $\mathcal{T}(S)$ 上的作用是适当不连续的。因此，根据 $\mathcal{T}(S)$ 的 Thurston紧化定义，以下情况之一成立：

(1) 对某个子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，$f_{n_k} \equiv f_0$且 $f_0 \in Mod(S)$；
(2) 对某个子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = [F_0]$ 且 $[F_0] \in \mathcal{PMF}$。

对于情形 (1)，$d([f_{n_k}],[f_0]) \equiv 0$.

对于情形 (2)，存在一个由正数组成的序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于任意 $F \in \mathcal{MF}$，

$$\lim_{k\to\infty} t_k l(x_0, f_{n_k}^{-1}(F)) = \lim_{k\to\infty} t_k l(f_{n_k}(x_0), F) = i(F_0, F).$$

特别地，对于 $i = 1, 2, ..., N$，我们有 $\lim_{k\to\infty} l(x_0, t_k f_{n_k}^{-1}(\alpha_i)) = i(F_0, \alpha_i)$。由于 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N}$填满了曲面，我们有 $l(F_0) = \sum_{i=1}^{N} i(\alpha_i, F_0) > 0$，这意味着对于某些 $m, M > 0$，$m \le \sum_{i=1}^{N} l(x_0, t_k f_{n_k}^{-1}(\alpha_i)) \le M$。注意，$\{F \in \mathcal{MF}:\ l(x_0, F) \le M\}$是紧的。因此再次取一个子序列，设对于某个 $F_i \in \mathcal{MF}$，$\lim_{k\to\infty} t_k f_{n_k}^{-1}(\alpha_i) = F_i$，且对于某个 i_0，$F_{i_0} \neq 0$。

根据 Φ 的定义，我们有

$$t_k \Phi \circ f_{n_k}(\cdot) = \big(i(\alpha_i, t_k f_{n_k}\cdot)\big)_{i=1}^{N} = \big(i(t_k f_{n_k}^{-1}(\alpha_i), \cdot)\big)_{i=1}^{N}.$$

由于 $i(\cdot,\cdot): \mathcal{MF} \times \mathcal{MF} \to R_{\ge 0}$连续，且 $\lim_{k\to\infty} t_k f_{n_k}^{-1}(\alpha_i) = F_i$，我们知道 $t_k \Phi \circ f_{n_k}(\cdot) = \big(i(t_k f_{n_k}^{-1}(\alpha_i)\ \cdot)\big)_{i=1}^{N}$在 $\mathcal{MF}$ 的任意紧子集上一致收敛到 $\big(i(F_i, \cdot)\big)_{i=1}^{N} \neq 0$。根据引理

3.3，对于任意 $F \in \mathcal{MF}$，$\left(i(F_i,F)\right)_{i=1}^N = \lim_{k\to\infty}\left(i(\alpha_i,t_k f_{n_k}(F))\right)_{i=1}^N \in \Phi(\mathcal{MF})$，这意味着 $f_0 = \Phi^{-1}\left(i(F_i,\cdot)\right)_{i=1}^N$ 是从 $\mathcal{MF}$ 到 $\mathcal{MF}$ 的齐次连续映射。由于 Φ 是一个同胚，$\widehat{t_k f_{n_k}}$ 在 $\mathcal{MF}$ 的任意紧子集上一致收敛到 f_0。根据引理 3.4，$\lim_{k\to\infty} d([f_{n_k}],[f_0]) = 0$。 □

由引理 3.4 和引理 3.5，我们现在证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。首先，我们证明 $Cl(E) \subseteq P\Omega'(\mathcal{MF})$。显然，$E \subseteq P\Omega'(\mathcal{MF})$。设序列 $[f_n] \in E$ 在 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 中收敛到 $[f_0] \in Cl(E)$。由引理 3.5，存在一个子序列$\{[f_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于某个 $[f_0'] \in P\Omega'(\mathcal{MF})$，有 $\lim_{k\to\infty}\widehat{d}([f_{n_k}],[f_0']) = 0$。由引理 3.4，存在一个正数序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $t_k f_{n_k}$ 在$\mathcal{MF}$的任意紧子集上一致收敛到 f_0'。由于紧集上的一致收敛强于逐点收敛，$t_k f_{n_k}$在逐点收敛拓扑下收敛到 f_0'。根据 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 的拓扑，$[f_{n_k}]$ 在 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 中收敛到$[f_0']$，这意味着 $[f_0] = [f_0'] \in P\Omega'(\mathcal{MF})$。因此 $Cl(E) \subseteq P\Omega'(\mathcal{MF})$。

其次，我们证明 $Cl(E)$ 上的拓扑与度量 d 所诱导的拓扑一致，也就是说，$Cl(E)$ 是可度量化的。由引理 3.4 以及紧集上一致收敛强于逐点收敛这一事实可知，对于 $Cl(E)$ 中的任意序列 $\{[f_n]\}_{n=0}^{\infty}$，若 $\lim_{n\to\infty} d([f_n],[f_0])$，则 $[f_n]$ 在 $Cl(E)$ 的拓扑下收敛到 $[f_0]$。反过来，假设 $[f_n]$ 在 $Cl(E)$ 的拓扑下收敛到 $[f_0]$。我们希望证明 $\lim_{n\to\infty} d([f_n],[f_0]) = 0$。我们用反证法来证明这一点。假设存在一个子序列 $\{[f_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $d([f_{n_k}],[f_0]) > \varepsilon$。那么由引理 3.5，再次取子序列后，我们可以假设对于某个$[f_0'] \in P\Omega'(\mathcal{MF})$，有 $\lim_{k\to\infty}\widehat{d}([f_{n_k}],[f_0']) = 0$，这意味着 $[f_0'] \in Cl(E)$，且 $[f_{n_k}]$ 在 $Cl(E)$ 的拓扑下收敛到 $[f_0']$。因此$[f_0'] = [f_0]$。由

$$0 = \lim_{k\to\infty}\widehat{d}([f_{n_k}],[f_0']) = \lim_{k\to\infty}\widehat{d}([f_{n_k}],[f_0]) \geq \varepsilon,$$

我们得到了矛盾。

最后，根据引理 3.5，作为度量空间 $(Cl(E)\ d)$ 的稠密子集，E 是相对紧的。因此，$Cl(E)$ 是紧的。 □

根据定理 3.1 的证明，我们得到两个有用的推论。

推论 3.6。边界点集 $\partial E = Cl(E) - E$ 包含于 $P\Omega'(\mathcal{MF})$ 中，即任意边界点 p 都可表示为 $p = [f_p]$，其中 f_p 是从 $\mathcal{MF}$ 到 $\mathcal{MF}$的齐次连续映射。

推论 3.7。对于 $Cl(E)$ 中的任意序列 $\{[f_n]\}_{n=0}^{\infty}$，以下各项等价：

(1) $\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f_0]$;

(2) 存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $t_n f_n$ 在逐点收敛拓扑下收敛到 f_0；

(3) 存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $t_n f_n$ 在 $\mathcal{MF}$的任意紧子集上一致收敛到 f_0。

推论 3.7 表明，在 $Cl(E)$中，逐点收敛与在紧集上的一致收敛是等价的，而一般情况下并非如此。

4 边界的结构

本节将详细研究边界 $\partial E = Cl(E) - E$ 的结构。回想一下，我们赋予 $P\Omega(\mathcal{MF})$ 从 $\Omega(\mathcal{MF})$ 上的逐点收敛诱导的商拓扑。$Cl(E)$ 是 E

在该拓扑中的闭包。

命题 4.1. 在 $Cl(E)$中， E 是离散的，且 ∂E 是闭的。

证明。对于任意 $[f]$ 属于 E，若 $[f]$ 不是 $Cl(E)$中的孤立点，则存在一个序列 $\{[f_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 属于 E，使得对 $n \neq m$ 有 $f_n \neq f_m$，且 $\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f]$。因此，存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f$。取点 x_0 属于 $\mathcal{T}(S)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} t_n l(f_n^{-1}(x_0), \cdot) = \lim_{n\to\infty} l(x_0, t_n f_n(\cdot)) = l(x_0, f(\cdot)) = l(f^{-1}(x_0), \cdot).$$

因此， $f_n^{-1}(x_0)$在 $\mathcal{T}(S)$中收敛到 $f^{-1}(x_0)$，这与$Mod(S)$在 $\mathcal{T}(S)$上的作用是恰当不连续的相矛盾。因此， E 中的任意点都是 $Cl(E)$中的孤立点，这意味着 E 在 $Cl(E)$中是离散的。

由于 E 在 $Cl(E)$中是离散的， E 在 $Cl(E)$中是开集。因此， ∂E 在 $Cl(E)$中是闭集。 □

$Mod(S)$ 上的乘法和求逆运算连续地延拓到 $\widetilde{Cl}(E)$。为此，我们需要一些记号。令 $\widetilde{E} = \pi^{-1}(E)$ 为 E 在 $\Omega(\mathcal{MF})$ 中的原像，令 $\widetilde{Cl}(E)$ 为 E 在 $\Omega(\mathcal{MF})$ 中的闭包。由推论 3.6， $\widetilde{Cl}(\widetilde{E}) \subseteq \Omega'(\mathcal{MF})$。与推论 3.7 类似，我们有

推论 4.2. 对于 $\widetilde{Cl}(E) - \{0\}$中的任意序列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$，以下命题等价：(1) $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$，也就是说， f_n 在逐点收敛拓扑下收敛到 f_0；(2) f_n 在 $\mathcal{MF}$的任意紧子集上一致收敛到 f_0。

证明。由于紧集上一致收敛比逐点收敛更强，(2) 推出 (1)。

对于逆向推导，假设 f_n 在逐点收敛拓扑下收敛到 f_0。那么由推论 3.7，存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $t_n f_n$ 在 $\mathcal{MF}$的任意紧子集上一致收敛到 f_0。特别地， $t_n f_n$ 在逐点收敛拓扑下收敛到 f_0，这意味着 $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$。因此， $f_n = \frac{t_n f_n}{t_n}$在 $\mathcal{MF}$的任意紧子集上一致收敛到 f_0。

□

由推论 4.2 可知

命题 4.3. 映射 $M\colon \widetilde{Cl}(\widetilde{E})-\{0\}\times\widetilde{Cl}(\widetilde{E})-\{0\} \to \Omega'(\mathcal{MF})$ 定义为 $(f,g) \mapsto f\circ g$ 是连续的。并且对于任意 $f, g \in \widetilde{Cl}(E) - \{0\}$, $f \circ g \in \widetilde{Cl}(E)$。

证明。首先，我们证明 M 的连续性。设 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ 和 $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ 在 $\widetilde{Cl}(E)-\{0\}$ 中。由推论 4.2， f_n 和 g_n 分别在 $\mathcal{MF}$ 的任意紧子集上一致地收敛到 f 和 g。我们需要证明 $f_n \circ g_n$ 在逐点收敛拓扑下收敛到 $f \circ g$。

令 d 为由 Φ 诱导的 $\mathcal{MF}$ 上的欧几里得度量。对于任意 $F \in \mathcal{MF}$，由于 $\lim_{n\to\infty} g_n(F) = g(F)$，我们知道对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，使得对于任意 $n > N_1$,

$$d(f \circ g_n(F), f \circ g(F)) < \frac{\epsilon}{2}$$

并且对于某个 B 的紧邻域，有 $\{g_n(F)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$，其中 $g(F)$。

由于 f_n 在 B 上一致地收敛到 f，因此存在 $N_2 > 0$，使得对于任意 $n > N_2$ 和 $F \in B$，都有 $d\big(f_n(F)\ f(F)\big) < \frac{\epsilon}{2}$。

因此，对于任意 $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$d(f_n \circ g_n(F), f \circ g(F)) \leq d(f_n \circ g_n(F), f \circ g_n(F)) + d(f \circ g_n(F), f \circ g(F)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

这意味着 $f_n \circ g_n(F)$ 收敛到 $f \circ g(F)$。因此， M是连续的。

其次，我们证明 $f, g \in Cl(E) - \{0\}$ 蕴含 $f \circ g \in Cl(E)$。取 f_n, $g_n \in Mod(S)$ 和 $t_n, k_n > 0$，使得 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f$ 且 $\lim_{n\to\infty} k_n g_n = g$。由于 M 是连续的，$\lim_{n\to\infty} t_n k_n f_n \circ g_n = f \circ g$，这意味着 $f \circ g \in Cl(E)$。 □

根据命题 4.3，对于 $Cl(E)$ 中的任意两个元素 $[f], [g]$，若 $f \circ g \neq 0$，则可通过 $[f \circ g] \in Cl(E)$ 定义 $[f]$ 和 $[g]$ 的乘积。特别地，将其限制在 $Mod(S)$ 上时，这与 $Mod(S)$ 上的乘法运算一致。因此，除某些退化情形（$f \circ g = 0$）外， $Mod(S)$ 上的乘法运算可连续延拓至 $Cl(E)$。

对于求逆运算，我们有

命题 4.4. 对任意 $f \text{ in } Cl(\widetilde{E})$，存在唯一的元素 $\overline{f} \text{ in } Cl(\widetilde{E})$，使得 $i\big(f(F)\ G\big) = i\big(F,\ \overline{f}(G)\big)$ 对于任意 F, $G \text{ in } \mathcal{MF}$。并且映射 $\varphi\colon Cl(\widetilde{E}) \to Cl(\widetilde{E})\ f \mapsto \overline{f}$ 是一个同胚。

证明。首先，我们证明 $\overline{f}$ 的存在性。对于任意 $f \text{ in } Cl(E)$，若 $f = Kf_0 \text{ for some } K \geq 0 \text{ and } f_0 \in Mod(S)$，则令 $\overline{f} = Kf_0^{-1}$。

对于其他情形，我们假设 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f \text{ for some } t_n > 0,\ f_n \in Mod(S)\ (n = 1, 2, ...)$。于是我们有

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(t_n f_n^{-1}(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} \big(i(\alpha_i, t_n f_n^{-1}(\cdot))\big)_{i=1}^N = \lim_{n\to\infty} \big(i(t_n f_n(\alpha_i), \cdot)\big)_{i=1}^N = \big(i(f(\alpha_i), \cdot)\big)_{i=1}^N.$$

由引理 3.3，令 $f_0 = \Phi^{-1}(\big(i(f(\alpha_i)\ \cdot)\big)_{i=1}^N)$，于是

$$\lim_{n\to\infty} t_n f_n^{-1} = f_0.$$

因此，对于任意 F、$G \in \mathcal{MF}$，我们有

$$i(f(F), G) = \lim_{n\to\infty} i\big(t_n f_n(F), G\big) = \lim_{n\to\infty} i\big(F, t_n f_n^{-1}(G)\big) = i\big(F, f_0(G)\big).$$

因此我们令 $\overline{f} = f_0$。

其次，我们证明 $\overline{f}$ 的唯一性。对于任意 $f \in Cl(E)$，假设存在两个元素 f_1、f_2，使得对于任意 F、$G \in \mathcal{MF}$，

$$i\big(f(F), G\big) = i\big(F, f_1(G)\big) = i\big(F, f_2(G)\big).$$

Then

$$\Phi\big(f_1(\cdot)\big) = \Phi\big(f_2(\cdot)\big) = \big(i(f(\alpha_i), \cdot)\big)_{i=1}^N.$$

由于 Φ 是一个嵌入，我们知道 $f_1 = f_2$。

现在我们证明 φ 是一个同胚。显然，对于任意 $f \in Cl(E)$，我们有 $\overline{\overline{f}} = f$，这意味着 $\varphi^2 = id\colon Cl(\widetilde{E}) \to Cl(\widetilde{E})$。因此，我们只需证明 φ 是连续的。假设对于 $Cl(E)$ 中的 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$，$\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$。那么我们有

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{f_n}(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} \big(i(\alpha_i, \overline{f_n}(\cdot))\big)_{i=1}^N = \lim_{n\to\infty} \big(i(f_n(\alpha_i), \cdot)\big)_{i=1}^N$$

$$= \big(i(f_0(\alpha_i), \cdot)\big)_{i=1}^N = \big(i(\alpha_i, \overline{f_0}(\cdot))\big)_{i=1}^N = \Phi(\overline{f_0}(\cdot)).$$

由于 Φ 是一个嵌入，$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \overline{f_0}$。因此 φ 是连续的。 □

我们将命题 4.4 中定义的 $\overline{f}$称为 f的共轭。对于任意 $[f] \in Cl(E)$，将 $[f]$的共轭定义为 $[\overline{f}]$。特别地，对于任意 $f \in Mod(S)$， f的共轭恰好是 $Mod(S)$中 f的逆。因此， $Mod(S)$上的求逆运算可连续延拓至 $Cl(E)$。

存在 $\sim$在 $Cl(E)$ 上的乘法与共轭之间存在一种自然关系 .

$\sim$命题 4.5. 对任意 $f, g \in Cl(E)$， $\overline{f \circ g} = \overline{g} \circ \overline{f}$。

Pro的。根据共轭运算的定义，我们知道，对于任意 $F, G \in \mathcal{MF}$，

$$i(f \circ g(F), G) = i(g(F), \overline{f}(G)) = i(F, \overline{g} \circ \overline{f}(G)),$$

这意味着 $\overline{f \circ g} = \overline{g} \circ \overline{f}$。 □

注4.6. 根据命题 4.3、4.4、4.5， $Mod(S)$ 上的自然群结构连续延拓至$Cl(E)$。但是， $Cl(E)$ 不是一个群，因为存在一些退化情形，此时乘法未定义，而且 $Cl(E)$ 上的共轭运算实际上并非群的求逆运算。

现在我们证明一个引理:

引理 4.7. 假设 $\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f_0]$ ，其中 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 属于 $Mod(S)$，且 $[f_0] \in \partial E$。那么存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f_0$。

证明. 由于 $\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f_0]$，存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f_0$。现在我们需要证明 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$。

取 $\mathcal{T}(S)$ 中的一点 x_0 ，我们有

$$\lim_{n\to\infty} t_n l(f_n^{-1}(x_0), \cdot) = \lim_{n\to\infty} l(x_0, t_n f_n(\cdot)) = l(x_0, f_0(\cdot)).$$

由 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{T}(S)$ 上的作用是恰当不连续的，我们知道 $f_n^{-1}(x_0) \to \infty$ 属于 $\mathcal{T}(S)$。根据 Thurston紧化的定义，我们知道，对于某个 F 属于 $\mathcal{MF}$，$\lim_{n\to\infty} t_n l(f_n^{-1}(x_0) \cdot) = l(x_0, f_0(\cdot)) = i(F, \cdot)$。于是我们有 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$。 □

现在我们来描述 ∂E 中的点。

定理 4.8. 对任意 $[f] \in \partial E$，有

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} i(E_i, \cdot) F_i,$$

其中 E_i、 F_i 是一些测度叶状结构，满足 $i(E_i, E_j) = 0$ ，且 $i(F_i, F_j) = 0$ ，其中 $i, j = 1, 2, ..., m$。

证明. 由于 $[f] \in \partial E$，存在序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in Mod(S)$，使得 $\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f]$。根据引理 4.7，存在一个正数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ ，且 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f \in \Omega(\mathcal{MF})$。

由于 f 是从 $\mathcal{MF}$ 到 $\mathcal{MF}$ 的映射，令 $Imf = \{f(F) : F \in \mathcal{MF}\} \subseteq \mathcal{MF}$ 为 f 的像。我们断言，对于任意 F、 $G \in Imf$， $i(F, G) = 0$。对于任意 F、 G，在 Imf 中存在 F_1、 $G_1 \in \mathcal{MF}$，使得 $f(F_1) = F$ 且 $f(G_1) = G$。由于 $\lim_{n\to\infty} t_n f_n = f$ 且 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$，我们有

$$i(F, G) = i(f(F_1), f(G_1)) = \lim_{n\to\infty} i(t_n f_n(F_1), t_n f_n(G_1)) = \lim_{n\to\infty} t_n^2 i(F_1, G_1) = 0.$$

由此断言，存在 m 个两两不交的不可分解测度叶状结构 $\{F_i\}_{i=1}^m$ ，以及定义在 $\mathcal{MF}$ 上的某个非负函数 $f_i(\cdot)$，使得

$$f(\cdot)=\sum_{i=1}^m f_i(\cdot)F_i.$$

对于 $1\le i\le m$，由引理 2.1，存在一个由简单闭曲线组成的序列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得

$$i(\gamma_n,F_i)>0,\ \frac{i(\gamma_n,F_j)}{i(\gamma_n,F_i)}<\frac{1}{n}\,(j\ne i).$$

Then

$$\frac{i(\gamma_n,f(\cdot))}{i(\gamma_n,F_i)}=f_i(\cdot)+\sum_{j\ne i}^m\frac{i(\gamma_n,F_j)}{i(\gamma_n,F_i)}f_j(\cdot)\le f_i(\cdot)+\frac{1}{n}\sum_{j\ne i}^m f_j(\cdot).$$

设 $G_n=\ {}_i\ \frac{1}{(\gamma_n,\ F_i)}\ \gamma_n$。那么

$$\lim_{n\to\infty}i(\overline{f}(G_n),\cdot)=\lim_{n\to\infty}\frac{i(\gamma_n,f(\cdot))}{i(\gamma_n,F_i)}=f_i(\cdot).$$

特别地，对于第 3 节中定义的填充曲线 $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ ，

$$\lim_{n\to\infty}i(\overline{f}(G_n),\alpha_j)=f_i(\alpha_j)\ (j=1,2,...,N).$$

因此，存在一个常数 $M>0$ ，使得

$$l(\overline{f}(G_n))=\sum_{j=1}^N i(\overline{f}(G_n),\alpha_j)\le M.$$

由引理 3.2，存在一个子序列 $\{G_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ，使得

$$\lim_{k\to\infty}\overline{f}(G_{n_k})=E_i$$

对于某个 E_i ，其属于 $\mathcal{MF}$。那么我们有

$$f_i(\cdot)=\lim_{k\to\infty}i(\overline{f}(G_{n_k}),\cdot)=i(E_i,\cdot).$$

对于 $1\le i\le m$，我们如上构造一个测度叶状结构 E_i。由于对于任意 $F,G\in Im\overline{f}$, $i(F,G)=0$，都有 $i(E_i,E_j)=0$ ，对于 $i\ne j$。因此我们有

$$f=\sum_{i=1}^m i(E_i,\cdot)F_i,$$

并且 E_i,F_i 是测度叶状结构，其中 $i(E_i,E_j)=0$ ，且 $i(F_i,F_j)=0$ ，对于 $i,j=1,2,...,m$，由此完成证明。 □

注 4.9. 如果 $f(\cdot)=\sum_{i=1}^m i(E_i,\cdot)F_i$，如定理 4.8 所述，那么 $\overline{f}(\cdot)=\sum_{i=1}^m i(F_i,\cdot)E_i$。

问题 4.10. 定理 4.8 的逆命题是否成立：对于任意 $\{E_i\}_{i=1}^m,\{F_i\}_{i=1}^m$ ，若它们属于 $\mathcal{MF}$，且满足 $i(E_i,E_j)=0$以及 $i(F_i,F_j)=0\,(i,j=1,2,...,m)$，则 $[\sum_{i=1}^m i(E_i,\cdot)F_i]\in\partial E$?

现在我们在 ∂E 中构造一些特殊点。首先，考虑 $Mod(S)$ 中某个 f 的序列 $\{f^n\}_{n=1}^\infty$ 的极限。我们需要两个结果（见 [9]）。

命题 4.11. 设 $f = T_{\alpha_1}^{n_1} \circ T_{\alpha_2}^{n_2} \circ \cdots \circ T_{\alpha_k}^{n_k}$，其中 α_1、...、α_k 是两两不相交的简单闭曲线，T_{α_i} 是 α_i 的德恩扭转，且 $n_i \in Z(i = 1, 2, ..., k)$。那么对于任意 $F \in \mathcal{MF}$，有

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{f^n(F)}{|n|} = \sum_{i=1}^{k} |n_i| i(\alpha_i, F)\alpha_i.$$

命题 4.12. 设 $f \in Mod(S)$ 是一个伪阿诺索夫元素，使得 $f(F^s) = \lambda^{-1}F^s$, $f(F^u) = \lambda F^u$with $\lambda > 1$, F^s, $F^u \in \mathcal{MF}$and $i(F^s, F^u) = 1$. 那么对于任意 $F \in \mathcal{MF}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(F)}{\lambda^n} = i(F^s, F)F^u, \ \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-n}(F)}{\lambda^n} = i(F^u, F)F^s.$$

由命题 4.11 和命题 4.12，可得

命题 4.13. (1) 在命题 4.11 的假设下，有

$$\lim_{n\to\pm\infty}[f^n(\cdot)] = [\sum_{i=1}^{k} |n_i| i(\alpha_i, \cdot)\alpha_i] \in \partial E.$$

(2) 在命题 4.12 的假设下，有

$$\lim_{n\to\infty}[f^n(\cdot)] = [i(F^s, \cdot)F^u] \in \partial E \ \lim_{n\to\infty}[f^{-n}(\cdot)] = [i(F^u, \cdot)F^s] \in \partial E.$$

众所周知，$Mod(S)$ 在 $\mathcal{PMF}$ 上的作用是极小的，也就是说，在 $Mod(S)$ 的作用下，$\mathcal{PMF}$ 中任意元素的轨道在 $\mathcal{PMF}$ 中稠密（见 [4]）。我们将这一结果稍作推广：

引理 4.14. 设 $Mod'(S) \subseteq Mod(S)$ 是逐点保持 S 的尖点不变的所有映射类的集合。那么 $Mod'(S)$ 在 $\mathcal{PMF}$ 上的作用是极小的，也就是说，在 $Mod'(S)$ 的作用下，$\mathcal{PMF}$ 中任意元素的轨道在 $\mathcal{PMF}$ 中稠密。

证明。由于 $\mathcal{S}$在 $\mathcal{PMF}$中稠密，我们只需证明，对于任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $\beta \in Cl(Mod'(S)(\alpha))$，其中$Cl(Mod'(S)(\alpha)) \subseteq \mathcal{PMF}$ 是 α 在 $Mod'(S)$ 作用下的轨道闭包。

取 $\gamma \in \mathcal{S}$使得 $i(\alpha, \gamma) \neq 0$且 $i(\beta, \gamma) \neq 0$。令 T_γ和 T_β分别为 γ和 β的德恩扭转。注意到 T_γ和 T_β保持 S的每个穿孔不变。因此 $T_\gamma, T_\beta \in Mod'(S)$。根据定理 4.11，$\lim_{n\to\infty} {}^{T_\gamma^n}(\alpha)_n = i(\alpha, \gamma)\gamma$，这意味着 $\gamma \in Cl(Mod'(S)(\alpha))$。再次使用定理 4.11，我们有$\lim_{n\to\infty} {}^{T_\beta^n}(\gamma)_n = i(\gamma, \beta)\beta$，这意味着 $\beta \in Cl(Mod'(S)(\gamma))$。因此我们有 $\beta \in Cl(Mod'(S)(\alpha))$。 □

由引理 4.14，我们有

命题 4.15. 对任意 $F, G \in \mathcal{MF}$, $[i(F, \cdot)G] \in \partial E$。

证明。由引理 4.14，对于 S 中的一条简单闭曲线 α，存在两个序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 属于 $Mod'(S)$，使得 $\lim_{n\to\infty}[f_n(\alpha)] = [F]$ 且 $\lim_{n\to\infty}[g_n(\alpha)] = [G]$ 属于 $\mathcal{PMF}$。注意，根据命题 4.13(1)，$[f_\alpha(\cdot)] = [i(\alpha, \cdot)\alpha] \in \partial E$。于是 $\lim_{n\to\infty}[g_n \circ f_\alpha \circ f_n^{-1}(\cdot)] = \lim_{n\to\infty}[i(f_n(\alpha) \ \cdot)g_n(\alpha)] = [i(F, \cdot)G] \in \partial E$。 □

我们通过对子曲面进行操作来推广命题 4.15 的结果。设 γ_1，...，γ_p 是 S 中彼此不相交的本质简单闭曲线。沿这些曲线切割后，我们得到一些连通子曲面 S_1，...，S_k。于是有

命题 4.16. 对于任意 $a_i \geq 0 (i = 1, 2, ..., p)$，$F_j, G_j$属于 $\mathcal{MF}(S_j) (j = 1, 2, ..., k)$，

$$[\sum_{i=1}^{p} a_i i(\gamma_i, \cdot)\gamma_i + \sum_{j=1}^{k} i(F_j, \cdot)G_j] \in \partial E.$$

证明. 对于 $j = 1, 2, ..., k$，取一条简单闭曲线 β_j属于 S_j。在每个子曲面 S_j（视为带 puncture 的曲面）中应用引理 4.14，我们可找到两个序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$属于 $Mod(S)$，使得当 $j = 1, 2, ..., k$ 时，$\lim_{n\to\infty}[f_n(\beta_j)] = [F_j]$，$\lim_{n\to\infty}[g_n(\beta_j)] = [G_j]$；并且当 $i = 1, 2, ..., p$ 时，$f_n(\gamma_i) = \gamma_i, g_n(\gamma_i) = \gamma_i$。因此，对于 $j = 1, 2, ..., k$，存在两个正数序列 $\{t_n^j\}_{n=1}^{\infty}, \{s_n^j\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n^j f_n(\beta_j) = F_j, \quad \lim_{n\to\infty} s_n^j g_n(\beta_j) = G_j \ (j = 1, 2, ..., k).$$

Fro由命题 4.13(1)以及有理数在 R中稠密可知,

$$[h_n(\cdot)] = [\sum_{i=1}^{p} a_i i(\gamma_i, \cdot) + \sum_{j=1}^{k} t_n^j s_n^j i(\beta_j, \cdot)\beta_j] \in \partial E \ (n = 1, 2, ...).$$

Thus

$$[g_n \circ h_n \circ f_n^{-1}(\cdot)] = [\sum_{i=1}^{p} a_i i(\gamma_i, \cdot) + \sum_{j=1}^{k} i(t_n^j f_n(\beta_j), \cdot)s_n^j g_n(\beta_j)] \in \partial E \ (n = 1, 2, ...).$$

注意

$$\lim_{n\to\infty} [g_n \circ h_n \circ f_n^{-1}(\cdot)] = [\sum_{i=1}^{p} a_i i(\gamma_i, \cdot)\gamma_i + \sum_{j=1}^{k} i(F_j, \cdot)G_j],$$

这意味着 $[\sum_{i=1}^{p} a_i i(\gamma_i, \cdot)\gamma_i + \sum_{j=1}^{k} i(F_j, \cdot)G_j] \in \partial E$。 □

5 一些应用

由于 $Mod(S)$在 $\mathcal{T}(S)$上的 Thurston紧化 $\mathcal{T}^{Th}(S) = \mathcal{T}(S) \bigcup \mathcal{PMF}$和 Gardiner-Masur 紧化 $\mathcal{T}^{GM}(S) = \mathcal{T}(S) \bigcup GM$ 上连续作用，我们有两个映射

$$\Pi_{Th} : Mod(S) \times \mathcal{T}^{Th}(S) \to \mathcal{T}^{Th}(S), \ (f, p) \mapsto f(p)$$

and

$$\Pi_{GM} : Mod(S) \times \mathcal{T}^{GM}(S) \to \mathcal{T}^{GM}(S), \ (f, p) \mapsto f(p).$$

若赋予 $Mod(S)$离散拓扑，则 Π_{Th}和 Π_{GM}都是连续的。由于 $Cl(E) = E \bigcup \partial E$在某种意义上是 $Mod(S)$的完备化，因此将 Π_{Th}和 Π_{GM}的定义域分别扩展到 $Cl(E) \times \mathcal{T}^{Th}(S)$和 $Cl(E) \times \mathcal{T}^{GM}(S)$或许是自然的。

为此，我们需要 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 的等价模型。根据 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 的定义，$\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 中的点分别由 $[p_1 : \mathcal{S} \to R_{\geq 0}]$ 和 $[p_2 : \mathcal{S} \to R_{\geq 0}]$表示，其中 $[p_i] \in PR_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$ 是 $p_i \in R_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$的射影类。由于 $R_+ \times \mathcal{S}$ 在 $\mathcal{MF}$ 中稠密，p_1 和 p_2 可延拓为 $\mathcal{MF}$ 上的齐次连续函数（见 [1] 和 [15]）。因此，$\mathcal{T}^{Th}(S)$ 或 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 中的点可以表示为 $\mathcal{MF}$ 上某个齐次连续函数的射影类。使用这些记号，$Mod(S)$在 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 上的作用定义如下：对于任意 $f \in Mod(S)$、$p_1 = [p_1 : \mathcal{MF} \to R_{\geq 0}] \in \mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $p_2 = [p_2 : \mathcal{MF} \to R_{\geq 0}] \in \mathcal{T}^{GM}(S)$，$f(p_1) = [p_1 \circ f^{-1}]$以及$f(p_2) = [p_2 \circ f^{-1}]$。由于 $Mod(S)$上的求逆运算 $(\cdot)^{-1}$ 可延拓为$Cl(E)$ 上的共轭运算 $\overline{(\cdot)}$，我们将 Π_{Th} 和 Π_{GM} 的延拓定义为

定理 5.1. 设 $\Delta_1 = \{([f], [p]) \in Cl(E) \times \mathcal{T}^{Th}(S) : p \circ \overline{f}(\cdot) \neq 0\}$且 $\Delta_2 = \{([f], [p]) \in Cl(E) \times \mathcal{T}^{GM}(S) : p \circ \overline{f}(\cdot) \neq 0\}$。由$\Psi_{Th}([f], [p]) = [p \circ \overline{f}(\cdot)]$和 $\Psi_{GM}([f], [p]) = [p \circ \overline{f}(\cdot)]$,分别定义的两个映射 Ψ_{Th}: $\Delta_1 \to \mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 Ψ_{GM}: $\Delta_2 \to \mathcal{T}^{GM}(S)$ 均为连续映射。

证明。我们只证明 证明 Ψ_{GM} 的连续性。 Ψ_{Th} 的连续性可用类似的论证证明 .

假设 $\{[p_n]\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{T}^{GM}(S)$ $\{[f_n]\}_{n=0}^{\infty} \subseteq Cl(E)$ 且 $\lim_{n\to\infty}[p_n] = [p_0]$、$\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f_0]$。不妨调整一些常数，假设 $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ 属于 $\Omega(\mathcal{MF})$，并且 p_n： $\mathcal{MF} \to R_{\geq 0}$ 在 $\mathcal{MF}$ 的任意紧子集上都一致收敛到p_0： $\mathcal{MF} \to R_{\geq 0}$。根据命题 4.4，$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n} = \overline{f_0}$。

注意，对任意 F 属于 $\mathcal{MF}$，

$$|p_0 \circ \overline{f_0}(F) - p_n \circ \overline{f_n}(F)| \leq |p_0 \circ \overline{f_0}(F) - p_0 \circ \overline{f_n}(F)| + |p_0 \circ \overline{f_n}(F) - p_n \circ \overline{f_n}(F)|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} \overline{f_n}(F) = \overline{f_0}(F)$，我们知道，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，使得对任意 $n > N_1$,

$$|p_0 \circ \overline{f_0}(F) - p_0 \circ \overline{f_n}(F)| < \frac{\epsilon}{2}$$

并且 $\{\overline{f_n}(F)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$，其中 M 是 $\mathcal{MF}$的一个紧子集。

由于 $p_n(\cdot)$ 收敛 在紧集 M 上一致地收敛到 $p_0(\cdot)$，存在 $N_2 > 0$，使得对于任意 $n > N_2$,

$$|p_0 \circ \overline{f_n}(F) - p_n \circ \overline{f_n}(F)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此，对于任意 $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$|p_0 \circ \overline{f_0}(F) - p_n \circ \overline{f_n}(F)| < \epsilon,$$

这意味着对于任意 $F \in \mathcal{MF}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_n \circ \overline{f_n}(F) = p_0 \circ \overline{f_0}(F).$$

根据 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 的定义，

$$\Psi_{GM}([f_0], [p_0]) = [p_0 \circ \overline{f_0}(\cdot)] = \lim_{n\to\infty}[p_n \circ \overline{f_n}(\cdot)] = \lim_{n\to\infty} \Psi_{GM}([f_n], [p_n]),$$

由此完成证明。 □

注 5.2. (1) 对于 $[f] \in Cl(E)$、 $[p_1] \in \mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $[p_2] \in \mathcal{T}^{GM}(S)$，可能出现 $p_1 \circ \overline{f}(\cdot) = 0$且 $p_2 \circ \overline{f}(\cdot) = 0$ 的情况，也就是说， p_1、 p_2 在 $\overline{f}$ 的像上的取值为 0。在这些情况下， Ψ_{Th} 和 Ψ_{GM} 分别在 $([f], [p_1])$ 和 $([f], [p_2])$ 处退化。因此，我们分别将 Ψ_{Th} 和 Ψ_{GM} 的定义限制在 Δ_1 和 Δ_2 上。

(2) 对于 $f_0 \in Mod(S)$， $\Psi_{Th}([f_0], \cdot)$ 和 $\Psi_{GM}([f_0], \cdot)$ 分别定义在整个 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 上。并且， $\Psi_{Th}([f_0], \cdot)$ 和 $\Psi_{GM}([f_0], \cdot)$ 分别与 f_0 在 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 和 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 上的作用一致。

(3) 对于 $x_0 \in \mathcal{T}(S)$， $\Psi_{Th}(\cdot, x_0)$ 和 $\Psi_{GM}(\cdot, x_0)$ 都定义在整个 $Cl(E)$ 上。

由定理 5.1，我们有

推论 5.3. 对任意 $x \in \mathcal{T}(S)$ 和序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Mod(S)$，假设对于某个 $[f_0] \in \partial E$，$\lim_{n\to\infty}[f_n] = [f_0]$ 属于 $Cl(E)$，则 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = [l(x, \overline{f_0}(\cdot)] \in \mathcal{PMF}$ 属于 $\mathcal{T}^{Th}(S)$，且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = [Ext^{\frac{1}{2}}(x, \overline{f_0}(\cdot))] \in GM$ 属于 $\mathcal{T}^{GM}(S)$。

根据定理 5.1 和推论 5.3，我们回答问题 1.2：对于任意属于 $\mathcal{T}(S)$ 的 x_0，考虑 $Mod(S)$ 在 x_0 上的作用所产生的轨道 $\Gamma(x_0)$，如何描述 $\Gamma(x_0)$ 在 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 或 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 中的闭包？为此，我们设

$$\partial E^{Th}(x_0) = \{\Psi_{Th}([f], x_0) : [f] \in \partial E\} \subseteq \mathcal{PMF};\ \partial E^{GM}(x_0) = \{\Psi_{GM}([f], x_0) : [f] \in \partial E\} \subseteq GM$$

于是我们有

定理 5.4。在 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 中， $\Gamma(x_0)$ 的闭包是 $\Gamma(x_0) \cup \partial E^{Th}(x_0)$。在 $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 中， $\Gamma(x_0)$ 的闭包是$\Gamma(x_0) \cup \partial E^{GM}(x_0)$。此外， $\partial E^{Th}(x_0) = \mathcal{PMF}$。

证明。根据推论 5.3， $\partial E^{Th}(x_0)$ 包含于 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 中 $\Gamma(x_0)$ 的闭包。反过来，设$p \in \mathcal{T}^{Th}(S)$ 是 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 中 $\Gamma(x_0)$ 的闭包的一个元素，且 $p \notin \Gamma(x_0)$。于是存在一个序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Mod(S)$，使得 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = p$ 属于 $\mathcal{T}^{Th}(S)$。由于 $Mod(S)$ 在$\mathcal{T}(S)$ 上适当不连续地作用，我们知道 $p \in \mathcal{PMF}$。根据定理 3.1 和命题 4.1，存在一个子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于某个 $[f_0] \in \partial E$，$\lim_{k\to\infty}[f_{n_k}] = [f_0]$ 属于 $Cl(E)$。根据推论 5.3，我们有

$$p = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \Psi_{Th}([f_0], x_0) \in \partial E^{Th}(x_0).$$

因此， $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 中 $\Gamma(x_0)$ 的闭包是 $\Gamma(x_0) \cup \partial E^{Th}(x_0)$。

使用一个 类似的论证，我们知道， $\mathcal{T}^{GM}(S)$ 中 $\Gamma(x_0)$ 的闭包是 $\Gamma(x_0) \cup \partial E^{GM}(x_0)$.

现在我们证明 $\partial E^{Th}(x_0) = \mathcal{PMF}$。由命题 4.13(1)，我们知道，对于 S 中任意一条简单闭曲线α， $[i(\alpha, \cdot)\alpha] \in \partial E$。因此 $[i(\alpha, \cdot)] = [l(x_0, i(\alpha, \cdot)\alpha)] \in \partial E^{Th}(x_0)$。由于简单闭曲线的集合在 $\mathcal{PMF}$ 中稠密，我们有 $\partial E^{Th}(x_0) = \mathcal{PMF}$。 □

注 5.5。众所周知， $Mod(S)$ 在 $\mathcal{PMF}$ 上的作用是极小的（见 *[4]*）。这一事实也意味着 $\partial E^{Th}(x_0) = \mathcal{PMF}$：由于 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{T}(S)$ 上适当不连续地作用， $\partial E^{Th}(x_0) \cap \mathcal{PMF} \neq \emptyset$。根据 $Mod(S)$ 在 $\mathcal{PMF}$ 上的极小作用，这意味着 $\partial E^{Th}(x_0) = \mathcal{PMF}$。

注 5.6. 新边界 ∂E 与 $Mod(S)$的一个特殊边界有关。具体而言，固定一个基点 $x \in \mathcal{T}(S)$，将 $f \in Mod(S)$ 映到 $f(x) \in \Gamma(x) \subseteq \mathcal{T}(S)$，我们可以自然地将 $Mod(S)$与轨道 $\Gamma(x)$等同。根据定理 5.4， $\Gamma(x)$在 $\mathcal{T}^{Th}(S)$ 中的边界是 $\partial E^{Th}(x) = \mathcal{PMF}$。因此， $\partial E^{Th}(x) = \mathcal{PMF}$可视为 $Mod(S)$的一个边界。作为 $Mod(S)$的一个边界， $\partial E^{Th}(x)$与 $\mathcal{PMF}$同胚，但很大程度上取决于基点 x。因此我们得到一个边界族 $\{\partial E^{Th}(x) : x \in \mathcal{T}(S)\}$ of $Mod(S)$，其中每个边界都与 $\mathcal{PMF}$同构。我们可以将每个边界 $\partial E^{Th}(x)$称为以基点 x为基点的 Thurston 边界。根据定理 5.1，新边界 ∂E 通过连续满射 $\Psi_x : \partial E \to \partial E^{Th}(x)$ $[f] \mapsto \Psi_{Th}([f], x)$覆盖该边界族中的每个边界 $\partial E^{Th}(x)$。

注 5.7. 与 Thurston紧化的情形不同， $\partial E^{GM}(x_0)$可能并非整个边界 GM。根据 ∂E的紧致性，我们只能知道 $\partial E^{GM}(x_0)$是 GM的一个紧子集。而$\partial E^{GM}(x_0)$包含一些不同于 GM中已知点的新点。 *[2]*构造了一类特殊的边界点：

$$[Ext^{\frac{1}{2}}(x_0, \sum_{i=1}^{k} n_i i(\alpha_i, \cdot)\alpha_i)],$$

其中 α_i 是两两不相交的简单闭曲线，且 $n_i > 0$。根据命题 4.13(1)， $\partial E^{GM}(x_0)$包含这些点。

令 $\mathcal{T}_\epsilon(S) = \{x \in \mathcal{T}(S) : \underline{l}(x) > \epsilon\}$ 表示 $\mathcal{T}(S)$的 ϵ–厚部，其中 $\underline{l}(x) = \min_{\alpha\in\mathcal{S}} l(x, \alpha)$。下面的结果刻画了 $\partial E^{GM}(x_0)$中的点。

定理5.8. 对任意 $p \in GM$, $p \in \partial E^{GM}(x_0)$，存在某个 $x_0 \in \mathcal{T}(S)$ 当且仅当存在一个序列$\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{T}_\epsilon(S)$，使得对某个 $\epsilon > 0$ 有 $\lim_{n\to\infty} p_n = p$。

证明. 假设某个 $x_0 \in \mathcal{T}(S)$ 满足 $p \in \partial E^{GM}(x_0)$。那么，对于某个序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Mod(S)$， $p = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$。注意，$\underline{l}\big(f_n(x_0)\big) \equiv \underline{l}(x_0)$。令 $\epsilon = \frac{1}{2}\underline{l}(x_0)$。那么 $f_n(x_0) \in \mathcal{T}_\epsilon(S)$。

假设对于某个 $\epsilon > 0$ 有 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{T}_\epsilon(S)$，且 $\lim_{n\to\infty} p_n = p$。由 Mumford紧致性判据可知，将其投影到模空间 $\mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)/Mod(S)$ 后，序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 位于相对紧集 $\mathcal{M}_\epsilon(S) = \mathcal{T}_\epsilon(S)/Mod(S)$ 中，该集合是 $\mathcal{M}(S)$ 的 ϵ-厚部。因此取一个子序列后，不妨设存在序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $Mod(S)$，且 x_0 属于 $\mathcal{T}(S)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p_n) = x_0.$$

令 $x_n = f_n(p_n)$。则 $p_n = f_n^{-1}(x_n)$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$。由 $Cl(E)$ 的紧致性，再次取一个子序列后，不妨设 $[f_n^{-1}]$ 收敛到 $Cl(E)$ 中的某个 $[f]$。因此由定理 5.1,

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} f_n^{-1}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Psi_{GM}([f_n^{-1}], x_n) = \Psi_{GM}([f], x_0) = [Ext^{\frac{1}{2}}(x_0, \overline{f}(\cdot))].$$

由于 $[Ext^{\frac{1}{2}}(x_0, \overline{f}(\cdot))] = p \in GM$，我们有 $[f] \in \partial E$。因此 $p \in \partial E^{GM}(x_0)$。 □

参考文献

[1] F. Bonahon. 通过测地流研究 Teichmüller 空间的几何。Invent. Math., 92(1):139–162, 1988年。[2] M. F. Bourque. Teichmüller 度量的 horofunction 紧化中的一条发散等高线，2019年。arXiv:1911.10365。[3] B. Farb 和 D. Margalit. 映射类群入门（pms-49）。普林斯顿大学出版社，2011年。[4] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Po´enaru. Thurston的曲面工作（MN-48），第48卷。普林斯顿大学出版社，2012年。[5] W. J. Floyd. 克莱因群的群完备化与极限集。Invent. Math., 57(3):205–218, 1980年。[6] F. Gardiner 和 H. Masur. Teichmüller 空间的极值长度几何。《复变函数与椭圆方程》，16(2-3):209–237, 1991年。[7] U. Hamenst¨adt. 映射类群几何 IIA：CAT(0)立方复形与边界。http://www.math.uni-bonn.de/people/ursula/noncube.pdf。[8]U. Hamenst¨adt. 映射类群几何 I：边界可 amen 性。Invent. Math., 175(3):545–609, 2009年。[9] N. V. Ivanov. Teichmüller 模群的子群，第115卷。美国数学会，1992年。[10] V. A. Kaimanovich. 不变马尔可夫算子的边界：识别问题。遍历理论代数与数论方面会议论文集（华威，1994），伦敦数学会讲义系列，228:127–176, 1996年。[11] V. A. Kaimanovich 和 H. Masur. 映射类群的泊松边界。Invent. Math., 125(2):221–264, 1996年。

[12] S. P. Kerckhoff. Teichmüller 空间的渐近几何。Topology, 19(1):23–41, 1980年。[13] H. Masur 和 Y. N. Minsky. 曲线复形的几何 I：双曲性。Invent. Math., 138(1):103–149, 1999年。[14] J. D. McCarthy 和 A. Papadopoulos. 射影测地叶状结构的 Thurston 球面上的动力学。Comment. Math. Helv., 64(1):133–166, 1989年。[15] H. Miyachi. Teichmüller 射线与 Teichmüller 空间的 Gardiner-Masur 边界。Geom. Dedicata, 137(1):113–141, 2008年。[16] H. Miyachi. Teichmüller 射线与 Teichmüller 空间的 Gardiner-Masur 边界 II。Geom. Dedicata, 162(1):283–304, 2013年。[17] C. Walsh. Thurston利普希茨度量的视界边界与等距群。《Teichmüller 理论手册》第四卷，第327–353页, 2014年。[18] C. Walsh. Teichmüller 度量的渐近几何。Geom. Dedicata, 200(1):115–152, 2019年。