arXiv:2302.06851v1 [math.CT] 14 Feb 2023

超连通商的内部参数化

RYUYA HORA

Abstract. 拓扑斯理论中最基本的事实之一，是子拓扑斯的内部参数化：子拓扑斯与 Lawvere-Tierney 拓扑之间存在双射对应。本文引入一个新颖而基础的概念——“局部状态分类器”，并给出超连通商（即来自某个拓扑斯的超连通几何态射）的类似内部参数化。作为推论，我们解决了 Lawvere 开问题中的第一个问题在布尔情形下的版本。

Contents

1. 引言 2 概述 5 2. 术语与预备知识 6 2.1. 超连通几何态射 6 3. 局部状态分类器 7 3.1. 必要性与必然性 8 3.2. 定义与直观 8 3.3 示例 10 3.4. 格罗滕迪克拓扑斯的局部状态分类器 14 3.5. 内部半格结构 20 4. 超连通商的内部参数化 25 4.1. 更广泛的对应 26 4.2. 主定理 27 5. 示例与应用 31 5.1. 超连通商的数量 31 5.2. 玩具例子：有向图拓扑斯 31 5.3. 局部化 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器 32 5.4. 布尔托扑斯的商 32 5.5. （拓扑）群作用的拓扑斯 33 6. 结论与未来工作 36 致谢 37 附录 A. 内部半格与泛滤子 37 附录 B. 局部状态分类器的存在性定理 41 参考文献 44

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18B25.*Key words and phrases.* 拓扑斯、超连通几何态射、内部半格。东京大学数理科学研究科。 hora@ms.u-tokyo.ac.jp.

1. Introduction

Lawvere 在 [Law16] 中列出了托扑斯理论中的开放问题。第一个问题如下：

> “是否存在某个格罗滕迪克拓扑斯，使得这类商的数量并不小？
> 在另一个极端，能否像子拓扑斯那样对它们进行内部参数化？”

他询问格罗滕迪克拓扑斯的商的数量是否很小。这里，拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的商指从 $\mathcal{E}$ 出发的（适当的等价类）连通几何态射，也就是说，其逆像部分是全忠实的几何态射。

此外，对于商的数量很小的情形，Lawvere 进一步要求对它们进行内部参数化。这里的“内部参数化”指商与“内部结构”之间的双射对应。回想一下 Lawvere 在引文中提到的子拓扑斯情形。子拓扑斯的内部参数化，是拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的子拓扑斯（即嵌入 $\mathcal{E}$ 的几何嵌入）与 $\mathcal{E}$ [中的 Lawvere-Tierney 拓扑之间的双射对应，见 Joh02a，定理 A4.4。8]。由于 Lawvere-Tierney 拓扑被定义为一种内部结构（即子对象分类器上的内部半格幂等同态），这种双射对应值得称为子拓扑斯的内部参数化。Lawvere 希望为商拓扑斯寻求类似的内部参数化。

对商进行内部参数化有多种动机。首先，这使我们能够只研究拓扑斯中的某个特定对象，就对所有商进行分类，而不必处理有关整个范畴的大量数据。此外，与内部结构的对应为理解商提供了新的视角，并可能引出商类上的一种新运算。（正如我们将在几段后更具体地说明的那样，我们对超连通商的内部参数化兼具这两项优势。）

然而，只有少数已有研究关注商的内部参数化。尽管包括 [Fre80][Ros82][EV02]，在内的一些论文对某些有限类别的商进行了分类，但其关注点并非内部参数化。一个例外是 Henry 关于局部化同位群的研究 [Hen18]，该研究利用内部结构对所有原子商进行了分类。然而，作为商的一个子类，原子商类相对较小。（事实上，我们主定理的适用范围——超连通商——严格包含原子商（见例 2.6）。）

本文的主要结果是给出超连通商的内部参数化。（在本文中，从拓扑斯 $\mathcal{E}$ 出发的超连通几何态射称为拓扑斯 $\mathcal{E}$的超连通商，以强调其作为拓扑斯 $\mathcal{E}$的商这一方面。）具体而言，我们引入局部状态分类器的概念，并证明以下主定理。

定理（4.1）。设 $\mathcal{E}$ 是一个具有局部状态分类器 $\{\xi_X$的拓扑斯：$X \to \Xi\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$（例如，任意格罗滕迪克拓扑斯）。那么，以下三个概念一一对应。

(1) $\mathcal{E}$ 的超连通商 (2) Ξ 的内部滤子

(3) 内部半格同态 $\Xi \to \Omega$

我们的结果从两个方面部分解决了这个开放问题。首先，由于超连通商是商的一种特殊情形，因此该结果解决了商这一子类的情况。其次，虽然这并非显而易见，但我们的结果解决了布尔托扑斯的情形（推论 5.5）。对于商自动具有超连通性的布尔格罗滕迪克托扑斯，我们在本文中建立了所有商的内部参数化（推论 5.4）。因此，本文或许是解决这一开放问题的新一步，尤其是从内部参数化的角度来看。

然而，超连通商并非只是为了部分解决开放问题而采用的技术性假设，它在托扑斯理论中也备受关注。它在托扑斯理论中自然地处处出现，并发挥着重要的理论作用。例如，对于一个拓扑群 (G, τ)，其连续作用托扑斯 Cont(G, τ) 是其离散作用托扑斯 集合$^{G^{\mathrm{op}}}$ [MM12, III.9. 和 VII.3.][Joh02a, A4.6] 的一个超连通商。托扑斯的良基部分也是该托扑斯的一个超连通商 [Fre80, section 8]。托扑斯理论还有其他超连通商的基本例子（见小节 2.1）。它也具有理论重要性。例如，它在几何态射的分解系统——超连通-局部化分解中发挥核心作用，该分解由 [Joh81] 引入。

描述所有超连通商本身并非新尝试。在[Ros82], Rosenthal表明，格罗滕迪克拓扑斯的所有超连通商都可以利用称为商系统的数据来构造。

然而，我们的结果在以下三个方面是新的。我们对超连通商的描述是内部的，适用于更广泛的一类拓扑斯，并采用了一个新概念，即局部状态分类器。我们将对这些方面逐一进行详细说明。

第一个也是决定性的要点是，我们的结果实现了内部参数化。尽管 Rosenthal 的结果穷尽了所有超连通商，但它既没有构造自然的双射对应，也没有使用内部结构。在本文中，我们引入了拓扑斯的局部状态分类器这一概念 Ξ，并在超连通商、 Ξ的内部滤子以及 $\Xi \to \Omega$ 的内部半格同态之间建立了自然的双射对应。这使我们只需考察一个对象——局部状态分类器 Ξ——即可对所有超连通商进行分类，而无需考察整个范畴的数据。例如，正如我们在第 5 节中所见，有向图托扑斯、群作用托扑斯和组合物种托扑斯的所有超连通商的分类，分别归结为对一个特定有限图、 G的子群格以及对称群的子群的计算。内部参数化还使我们能够考察它与其他内部结构之间的关系。例如，在第 6 节中，我们观察到 Lawvere-Tierney 拓扑自然地作用于超连通商类。

第二个相对次要的新意在于，我们理论的适用范围比格罗滕迪克拓扑斯这一类更广。虽然我们的理论并不适用于所有初等拓扑斯，但适用于其中足够广泛的一类，包括所有格罗滕迪克拓扑斯。

第三项创新是局部状态分类器这一新概念本身。这个概念在本文中发挥着核心作用，其定义采用了初等范畴论术语。因此，我们可以在一般范畴中研究它，而不局限于拓扑斯。它

	嵌入	超连通
the “小” 部分	满射-嵌入因子-化	超连通-局部化的 fac-化
（外部）描述	格罗滕迪克拓扑（针对一个预层拓扑斯)	商系统 [Ros82] (对于格罗滕迪克拓扑斯)
the 中心半格	Ω：子对象分类器	Ξ：局部状态分类器（定义 3.3）
在预层拓扑斯中，	Ω 由.....的子对象组成可表函子（即，筛）	Ξ 由余子对象组成可表函子的（例 3.18）
内部“parameter”	Ω → Ω：幂等半格同态（Lawvere-Tierney 拓扑）	Ξ → Ω：半格同态态射（主定理 4.1）

FIGURE 1. 与嵌入的内部参数化相似

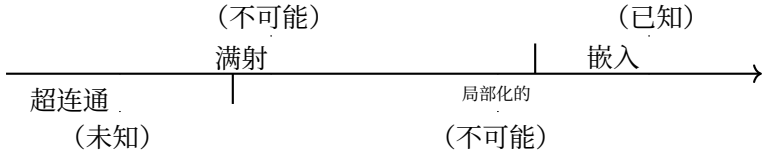


FIGURE 2. 分解系统与内部参数化

为各种范畴论的发展留下了空间。我们将在本引言末尾再次提及这一点。

我们将理论与子拓扑斯的情形并行发展。在此过程中，我们有时会发现预料之中的相似性与对偶性，有时则会发现意料之外的相似性与对偶性。我们在图1中列出了这些类比。

首先，一个启发性的类比是，子拓扑斯和超连通商都是分解系统中“较小”的部分（见图2）。对于任意格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$，从 $\mathcal{E}$ 出发的满几何态射数量未必较少。然而，子拓扑斯的数量（即嵌入到 $\mathcal{E}$ 中的几何嵌入）总是较少，这归功于内部参数化。这就是我们所说的“较小”部分。同样，超连通商是超连通-局部化分解中“较小”的部分。对于任意格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$，到 $\mathcal{E}$ 的局部化几何态射数量未必较少。然而，超连通商的数量（即从 $\mathcal{E}$ 出发的超连通几何态射）总是较少（紧接着便是 Rosenthal 的结果 [Ros82]）。从这个角度来看，考虑超连通商的内部参数化是相当自然的。上述讨论表明，对局部化几何态射或满几何态射而言，内部参数化（如 Lawvere 在引文中所说，它意味着这些态射数量较少）是不可能的。因此，缺失的部分就是超连通商的情形（见图2）！

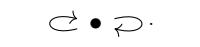
其次，对于这两种参数化，其内部对应都是内部半格同态。回想一下，Lawvere-Tierney 拓扑是子对象分类器 Ω 上的幂等内部半格同态。子拓扑斯的内部参数化指出，这些幂等内部半格同态与子拓扑斯一一对应。我们的理论采用了类似的方法。首先，我们定义一个称为局部状态分类器的内部半格 Ξ。然后，我们在超连通商与从局部状态分类器到子对象分类器的内部半格同态 $\Xi \to \Omega$ 之间建立自然双射。

最后，一个出人意料的类比是：局部状态分类器与子对象分类器——分别是每种内部参数化中的中心半格——在预层拓扑斯中互为对偶！回想一下，预层拓扑斯的子对象分类器是由可表预层的所有子对象（即筛）组成的预层。相比之下，预层拓扑斯的局部状态分类器是由可表预层的所有余子对象组成的预层（例 3.18）。

最后，我们在结束本引言时，再次强调局部状态分类器的意义。本文首先要强调的是它在理论上的必要性。如上所述，局部状态分类器在我们的理论中发挥着核心作用，正如子拓扑斯中的子对象分类器一样。

尽管局部状态分类器在理论上十分重要，其定义（定义 3.3）却出人意料地简单：它是所有单态射的余极限！乍看之下，这个定义或许显得奇怪。在第 3 节中，我们将尽可能直观地解释研究超连通商如何引出这一简单定义，并讨论其存在性和性质。

局部状态分类器通常由一个熟悉的概念给出。例如，有向图拓扑斯的局部状态分类器是一个有 2 条边的花束



群作用托扑斯 $\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器是 G 的所有子群 $\mathbf{Sub}_{\mathbf{Group}}(G)$ 构成的集合，并配备共轭作用（例 3.7）。拓扑空间上的层拓扑斯的局部状态分类器是终对象层（例 3.8）。关于这些及其他例子，请参见第 3.3 小节。这些现象使我们能够将超连通商的分类与现有数学概念联系起来（见第 5 节）。

概述。第 2 节简要回顾超连通几何态射的概念，并阐明本文中使用的一些术语。第 3 节介绍局部状态分类器的若干主题。首先，我们循序渐进地引入并定义局部状态分类器。随后，给出若干例子，并具体构造格罗滕迪克拓扑斯的局部状态分类器。最后，证明笛卡尔闭范畴的局部状态分类器具有内部半格结构。第 4 节证明主定理，第 5 节列出主定理的例子和推论。第 6 节总结本文的工作，并列举一些可能的未来研究方向。

在附录 A 中，我们列出论文中所使用的关于内半格及其滤子的定义和事实。在附录 B 中，我们给出一个范畴具有局部状态分类器的充分条件；对于我们的主定理而言，该条件在逻辑上并非必要。

2. Terminology and preliminaries

2.1. 超连通几何态射。本小节简要回顾超连通几何态射的定义及其一些性质。

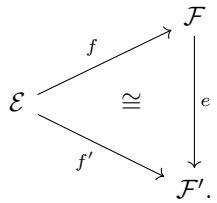
有关下列定义及其等价性，请参阅 [Joh02a，命题 A4.6.6]。

定义 2.1（超连通几何态射）。从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的超连通几何态射是满足以下等价条件的几何态射 $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 。

(1) f^* 是全且忠实的，且其本质像对$\mathcal{F}$中的子对象封闭。(2) f^* 是全且忠实的，且其本质像对$\mathcal{F}$中的商封闭。(3) $f^* \dashv f_*$ 的单位和余单位都是单态。(4) f_* 保留子对象分类器 Ω。

拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的超连通商是从 $\mathcal{E}$出发的超连通几何态射。此处我们更倾向于使用超连通“商”而非超连通几何态射这一术语，以强调其作为商拓扑斯的这一方面，这与 Lawvere 开问题 [Law16]的含义一致。

严格来说，我们提到超连通商时，主要指的是按照标准识别所得到的等价类。这与子拓扑斯和 Lawvere-Tierney 拓扑之间著名的对应定理情形相同。标准识别可以用几种方式来描述。一种是 2-范畴的方式。当存在等价 $e\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$，使得以下图表在自然同构意义下交换时，我们就将两个超连通几何态射 $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 和 $f'\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}'$ 视为相同



另一种是更基础的视角，即考察超连通几何态射的逆像函子。按照标准识别，当且仅当两个逆像函子的本质像相同时，我们才将这两个超连通几何态射视为相同。

下面给出几个超连通几何态射的例子。

例 2.2（在对象上满且双射的函子）。如果小范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是满的且在对象上为双射，那么它所诱导的几何态射 $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ 是超连通的。详情请见 [Joh02a, Example A4.6.9]。

例 2.3（拓扑幺半群作用托扑斯）。设 (M, τ) 是一个拓扑幺半群， M 是其底层离散幺半群。那么，连续作用的拓扑斯 $\mathrm{Cont}(M, \tau)$ 是预层拓扑斯 $\mathrm{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ 的一个超连通商。Morgan Rogers 在 [Rog21a][Rog21b] 中深入研究了拓扑幺半群作用托扑斯的性质，包括这一超连通商。

当 M 是一个群时，Cont(M, τ) 是一个拓扑群作用托扑斯， [MM12, III.9. 和 VII.3.] 对此作了解释，并在 [Joh02a, A4.6]中有所提及。

例 2.4（相对二值性）。超连通几何态射是一种“相对二值性”。换言之，来自格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的唯一几何态射 $!: \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$ 是超连通的，当且仅当 $\mathcal{E}$是二值拓扑斯。这由定义 2.1 中的条件 4 得出。例如，来自预层拓扑斯的唯一几何态射 $!: \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Set}$ 是超连通的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是强连通的；也就是说，对于任意一对有序对象 $(a, b) \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})^2$, ，都至少存在一个态射 $a \to b$ 属于 $\mathcal{C}$。详情参见[Joh02a, 例 A4.6.9]。

顺便一提，连通几何态射出现在 Lawvere 最初的问题 [Law16], 中，并给出了一个密切相关的例子。格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$ 是连通拓扑斯，当且仅当唯一的几何态射 $!: \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$ 是连通几何态射。准确表述见 [Joh14, 习题 4.8.] ； 几何直觉见 [Joh02b, 引理 C1.5.7.]。

例 2.5（局部化拓扑斯）。另一类拓扑斯——局部化拓扑斯，也可以用超连通商来刻画。Grothendieck 拓扑斯 $\mathcal{E}$ 是局部化的，当且仅当 $\mathcal{E}$ 它本身是其唯一的超连通商。其后接着超连通-局部化分解 [Joh81][Joh02a, A4.6]。局部化 Grothendieck 拓扑斯是我们定理中一个理论上重要的例子。参见第 5.3 小节。

例 2.6（原子商与良基部分）。原子商（即连通原子几何态射）是超连通商的例子[Joh02b, 引理 C3.5.4.]。

在 [Fre80, 第 8], 节中，Grothendieck 拓扑斯的原子商被称为指数簇。最小的指数簇称为良基部分，在集合论相关研究中尤为重要。

近来，人们从另一个角度研究原子商，即局部化的各向同性群[Hen18]。

3. Local state classifier

本节旨在阐释若干有关范畴的局部状态分类器 Ξ 的主题，它在本文中起着核心作用。

在前两个小节中，我们将循序介绍局部状态分类器的概念。在第 3.1 小节中，我们考察超连通商的一个性质，并说明这一性质如何引导我们给出局部状态分类器的定义。在第 3.2 小节中，我们给出局部状态分类器的形式化定义及非正式解释。

在接下来的两个小节中，我们将举例说明这一概念。第 3.3 节旨在列举局部状态分类器的示例，并帮助读者熟悉这些示例。在第 3.4 小节中，我们将具体构造任意格罗滕迪克拓扑斯的局部状态分类器。这不仅是一个示例，也是一个理论步骤，旨在确保所有格罗滕迪克拓扑斯都适用于我们的主定理（定理 4.1）。

在最后一个小节 3.5 中，我们证明了笛卡尔闭范畴（例如拓扑斯）的局部状态分类器具有内部半格结构。正如我们在引言（第 1 节）中所解释的，我们对超连通商的内部参数化利用了这一内部半格结构。

3.1. 必要性与必然性。本文的全部内容，包括局部状态分类器的定义和主定理的证明，都是由一个简单的想法引出的：“超连通商由局部状态决定。”为了阐明这一想法的含义，我们将其表述为一个引理并给出证明，尽管从逻辑上说，证明主定理并不需要它。设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，$\mathcal{Q}$ 是它的超连通商。仅在本小节中，如果典范态射

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \to X$$

是满态射。因此，以下结论成立。（注意，我们可以将超连通商视为拓扑斯的一个充实满子范畴。）

引理 3.1（超连通商由局部状态确定。）如果对象 X 被 $\{U_\lambda \rightarrowtail X\}_{\lambda\in\Lambda}$ 覆盖，那么 X 属于 $\mathcal{Q}$ 当且仅当所有 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 都属于 $\mathcal{Q}$。

证明。由以下事实即可立即得出：将超连通商 $\mathcal{Q}$ 视为 $\mathcal{E}$ 的一个充实满子范畴时，它对 $\mathcal{E}$ 中的子商和余积封闭。□

从这个意义上说，对象 X 是否属于 $\mathcal{Q}$，可以在局部确定。尽管这里“局部”一词在数学上的确切含义并不清楚，但这一观察使我们想到，可以将超连通商 $\mathcal{Q}$ 描述为属于 $\mathcal{Q}$ 的所有“局部状态”的集合。例如，如果能够定义所有局部状态组成的集合，就可以说，所有超连通商都是由其中“良好”的子集构造而成的。Rosenthal 商系统 [Ros82] 可以视为这一想法的一种（外部）实现。

然而，我们所关注的不仅是对超连通商的描述，更是对它们的内部参数化。本文不定义所有局部状态的集合并考察其一个良好的子集，而是在所考虑的拓扑斯 Ξ 中定义一个特殊对象 $\mathcal{E}$，它可被视为所有局部状态的一个汇集，并考察它的一个良好子对象。该对象 Ξ 是本节的主要内容，即一个局部状态分类器，并在全文中发挥核心作用。（稍后，这个“良好子对象”将被证明是它的内部滤子。）

3.2. 定义与直观。在第 3.1 小节中，需要一个实现“所有局部状态的一个汇集”这一口号的对象 Ξ。但我们如何定义这样的对象呢？为回答这个看似过于抽象的问题，我们首先将思考范围从拓扑斯扩展到一般范畴，并以初等术语考察“局部”的含义（至少在此语境中）的一种单群表述。

在解释我们表述的非正式思想之前，我们先定义范畴的局部确定余锥。令 $\mathcal{C}_{\mathrm{mono}}$ 表示范畴 $\mathcal{C}$的子范畴，它包含 $\mathcal{C}$的所有单态射以及相同的对象。

定义 3.2（局部确定余锥）。设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。$\mathcal{C}$ 的局部确定余锥是包含函子 $\mathcal{C}_{\mathrm{mono}} \to \mathcal{C}$ 下的一个余锥，并将其视为一个可能很大的图表。

这个定义需要进一步解释，因为有些读者可能很少考虑如此庞大的余锥图表。范畴的局部确定余锥

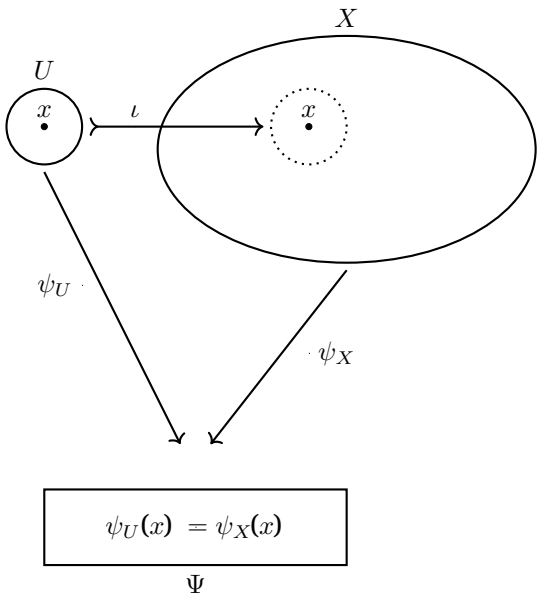
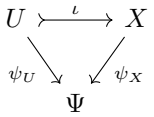


FIGURE 3. 局部决定余锥

$\mathcal{C}$ 是一个对象 Ψ，配备了一个态射族 $\{\psi_X\colon\ X \to \Psi\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathcal{C})}$，其定义在 $\mathcal{C}$ 的所有对象上，并且对于任意单态射 $\iota\colon\ U \rightarrowtail X$，有如下图表



交换。通俗地说，这种交换性断言态射 ψ_X 的值是局部决定的，正如其名称所示。我们借助元素这一比喻（通过考虑广义元素，这一比喻确实有意义）以及图3来解释其含义。取一个元素 $x \in X$，并尝试计算 $\psi_X(x)$。如果我们取一个足够小但包含 x 的子对象 U，那么交换性意味着 $\psi_X(x)$ 等于 $\psi_U(x)$。换句话说，在局部决定余锥中，值 $\psi_X(x)$ 可以在 x 的任意小邻域中计算。这就是“局部决定”这一术语背后的直觉。因此，在我们的语境中，含义模糊的“局部”一词基本上意味着“在任意子对象中”。

最后，局部状态分类器 Ξ 定义为泛局部决定余锥，即图表 $\mathcal{C}_{\mathrm{mono}} \to \mathcal{C}$的余极限。

定义 3.3（局部状态分类器）。范畴 $\mathcal{C}$ 的局部状态分类器 Ξ 是包含函子 $\mathcal{C}_{\mathrm{mono}} \to \mathcal{C}$ 的余极限（若其存在）。与之关联的余锥称为 $\{\xi_X\colon\ X \to \Xi\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathcal{C})}$。

例 3.4（玩具例子：集合）。为了确认读者对定义的形式化理解，下一节之前先给出一个基本例子：集合范畴 Set。

由于 $\mathsf{Set}_{\mathrm{mono}}$ 是集合与单射范畴 $\mathsf{Set}_{\mathrm{inj}}$，我们将包含函子 $\mathsf{Set}_{\mathrm{inj}} \to \mathsf{Set}$ 的余锥和余极限作如下理解。对于任意集合 L 和选定的元素 $l \in L$，函数族

$$\{\psi_X \colon X \to L\}_{X\colon \mathrm{set}},$$

其中每个函数 ψ_X 都将 X 的每个元素映射到 l，从而构成一个局部确定余锥。此外，集合范畴 Set 的每个局部确定余锥都具有这种形式。（对于给定的局部确定余锥 $\{\psi_X\}$，可以通过定义 $l \in L$ 为 $l = \psi_{\{*\}}(*)$ 来证明这一事实。）因此，集合范畴的局部状态分类器由终端余锥给出。

$$\{!\colon X \to \{*\}\}_{X\colon \mathrm{set}}.$$

正如我们在上述定义中写道“如果存在”，局部状态分类器可能不存在。虽然我们会在后文讨论这一点，但这里先简要说明一下。

注 3.5（局部状态分类器的存在性）。由于局部状态分类器被定义为一个可能是大图表的图表的余极限，因此即使对于余完备范畴，局部状态分类器也可能不存在。然而，对于格罗滕迪克拓扑斯，我们将在第 3.4 小节通过具体构造证明它的存在性。更一般的存在性定理见附录 B。关于不存在局部状态分类器的初等拓扑斯，参见例 3.12。

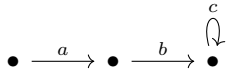
根据定义，所有局部决定余锥都唯一地经由局部状态分类器 Ξ 分解。就此而言，Ξ 和余锥 ξ_X 的一个分量：$X \to \Xi$ 理应分别是所有局部状态的集合，以及一个根据局部状态对“元素”进行分类的态射，正如我们所期望的那样。在下一节中，我们将通过几个例子检验这一预期是否成立。

3.3 示例。在上一小节中，我们根据对“局部”在本文语境中含义的直觉，定义了一个局部状态分类器。本小节将给出几个局部状态分类器的例子，以确认它们确实符合我们的直觉。严格的计算和证明留待第 3.4 小节讨论；这里我们着重介绍它们的构造和非正式描述。

例 3.6（有向图）。第一个例子来自图论。令 $\mathsf{DirGraph}$ 表示所有有向图构成的范畴，换言之，即平行态射范畴的预层拓扑斯

$$\mathrm{Par}\colon \qquad V \;\rightleftarrows\; E.$$

该范畴 $\mathsf{DirGraph} \simeq \mathsf{Set}^{\mathrm{Par}^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器是什么？首先，我们先非正式地考虑顶点的局部状态，尽管它并没有数学上的定义。回想一下，局部状态的非正式概念是指在任何子对象中都不会改变的数据。例如，在我们的语境中，顶点的入度和出度不能作为局部状态，因为当我们在子对象中考察它们时，它们会发生变化。事实上，顶点唯一的局部状态就是“是一个顶点”，因为对于有向图中的每个顶点，该顶点 $\bullet$ 本身就是一个子对象。我们无法在局部区分两个顶点。另一方面，边的情况则有所不同。例如，考虑下面的有向图。



下面这三个子对象分别是包含 a、b、c 的最小子对象。

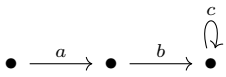


由这一观察可知，我们或许会认为，边有两种可能的局部状态：[是环] 和 [不是环]。

后来发现，通过例 3.18 计算得到的局部状态分类器 Ξ符合这一非正式观察。局部状态分类器 Ξ 有一个顶点（例如，[是一个顶点]）和两条边： [是环], [、], 不是环，如下图所示。



对于每个 $X \in \mathsf{ob}(\mathbf{DirGraph})$，态射 $\xi_X\colon X \to \Xi$ 都将其顶点映射到 Ξ 的唯一顶点，并根据 e 是否为环，将其边 e 映射到 [是环] 或 [不是环] 。例如，下图中的边 a、b 被映射到 [不是环], , 而 c 被映射到 [是环]。



局部状态分类器 Ξ 确实对局部状态进行分类!

例 3.7（群作用）。第二个例子来自群论。考虑一个定义在群 G 上的预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$，也就是右 G-集合的范畴。右 G-集合中元素的局部状态是什么？为了探讨这个问题，取一个右G-集合 X 及其元素 $x \in X$。有人可能会认为， x 的局部状态的恰当概念是 x 的轨道 Gx ，因为该轨道是包含 x的 X的最小子对象。这个想法是正确的，但我们可以用稳定子子群 $\mathsf{Stab}_G(x)$ 更简单地描述它。（考察轨道是考察稳定子子群的反向视角，因为轨道 Gx 与稳定子子群 $\mathsf{Stab}_G(x)$ 的右陪集构成的右 G-集合同构

$$Gx \cong \mathrm{Stab}_G(x)\backslash G$$

作为右 G-集合。）$\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器是集合 $\Xi = \mathsf{Sub}_{\mathrm{Group}}(G)$，由 G 的所有子群构成，并配备右共轭作用

$$H * g \coloneqq g^{-1}Hg.$$

对于每个右 G-集合 X，态射 $\xi_X\colon X \to \Xi$ 将元素 $x \in X$ 映射到其稳定子群

$$\xi_X(x) = \mathrm{Stab}_G(x).$$

例 3.8（拓扑空间上的层）。第三个例子是拓扑空间上的层范畴。拓扑空间 X 上的层托普斯 $\mathbf{Sh}(X)$ 的局部状态分类器，在直观上易于理解，同时也具有理论上的启发性。

回想一下，$\mathbf{Sh}(X)$ 等价于 X 上 étale 束的范畴，也就是说，等价于到 X 的局部（！）同胚。对于 étale 束 $p\colon Y \to X$ 中的任意一点 $y \in Y$，只要邻域足够小， y 的邻域就与底层点 $p(y) \in X$ 的邻域同胚。因此，点 $y \in Y$ 似乎不可能有任何局部状态，除非是它所在的位置，也就是底层点 $p(y) \in X$。

正如这一观察所表明的，由例 3.19 计算得到的 Sh(X) 的局部状态分类器就是 X 本身。换言之，它是终 étale 束 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$。这个例子包含一些玩具例子。首先，函数拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\to}$ 的局部状态分类器是终对象；该拓扑斯等价于 Sierpi´nski 空间上的层托普斯。其次，三色集合的拓扑斯 $\mathbf{Set}/\{R,G,B\}$ 的局部状态分类器是终对象 $\{R,G,B\}$；这个拓扑斯只是 Set 的一个切片范畴，或者是离散拓扑空间 $\{R,G,B\}$ 上的层托普斯。不出所料，三色集合的“局部状态”就是颜色。

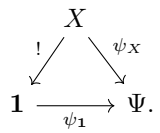
随后，我们将此例推广到任意局部化 Grothendieck 拓扑斯。在例 3.19 中，我们证明了这样一个推广结论：局部化 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器是终对象。此外，在第 5.3 小节中，我们作为主定理的一个推论，证明了 Grothendieck 拓扑斯是局部化的，当且仅当其局部状态分类器是终对象。

例 3.9（与终对象的关系）。与前一个例子相关，我们列举几个局部状态分类器为终对象的范畴。在详细讨论之前，请注意，局部状态分类器的定义类似于终对象的刻画；终对象是恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ [的余极限，见 Rie17，引理 3.7。1]。如果一个范畴 $\mathcal{C}$ 具有终对象 $\mathbf{1}$，那么$\mathcal{C}$ 就具有一个平凡的局部确定余锥 $\{!\colon X \to \mathbf{1}\}$。自然会产生这样的问题：这个平凡余锥是否给出了一个局部状态分类器。

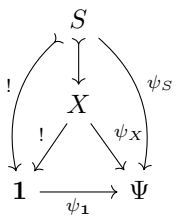
对于以下范畴，局部状态分类器是一个终对象。

- Set，集合范畴（例 3.4）
- FinSet，有限集合范畴
- Poset，偏序集范畴
- Top，拓扑空间范畴
- Manifold，流形范畴
- Sh(X)，拓扑空间 X 上的层范畴（例 3.8）
- $\mathbf{Top}/X$，拓扑空间 X 上的丛范畴

这些例子可直接由如下普遍事实得出：如果一个范畴是笛卡尔范畴，且有一个由子终对象组成的生成集，那么它的局部状态分类器就是一个终对象。事实上，任意局部确定余锥 $\{\psi_X\colon X \to \Psi\}$都可唯一地分解为经由 $\{!\colon X \to \mathbf{1}\}$ 的形式：



这是因为对于任意次终对象 S 和态射 $S \rightarrowtail X$，



上述图表的外层三角形是交换的。关于这一事实与局部化拓扑斯之间的关系，请参见例 3.19 和第 5.3 小节。

例 3.10（带基点集合）。一些并非拓扑斯的范畴也具有非平凡（即非终端）的局部状态分类器。一个玩具例子是带基点集合范畴 $\mathbf{Set}_*$。对象是带有基点的集合，而它们之间的态射是将基点映射到基点的函数。该范畴 $\mathbf{Set}_*$ 的局部状态分类器 Ξ 是集合

$$\{[\text{not being a basepoint}], [\text{being a basepoint}]\}$$

以 [为基点]。对于每个带基点集合 $(X,\ x_0)$，态射 $\xi_{(X,x_0)}\colon\ (X,\ x_0)\ \to \Xi$ 将基点 x_0 发送到 [作为基点]，并将其他元素发送到[不作为基点]。

虽然我们将在第 3.4 小节中看到，每个格罗滕迪克拓扑斯都有一个局部状态分类器，但初等拓扑斯可能有也可能没有局部状态分类器。我们分别给出一个例子。

例 3.11（组合物种）。我们从范畴组合学中给出一个初等拓扑斯的局部状态分类器的精彩例子。在 [Joy81, 1.2. Cat´égorie des esp`èces], 中，物种范畴被定义为函子范畴 $\mathbf{FinSet}^{\mathbf{FinSet}_0}$，其中 $\mathbf{FinSet}_0$ 表示由有限集及其双射构成的群胚。该范畴是一个初等拓扑斯，因为它等价于有限群作用拓扑斯的积范畴

$$\mathbf{FinSet}^{\mathbf{FinSet}_0} \simeq \prod_{n=0}^{\infty} \mathbf{FinSet}^{\mathfrak{S}_n},$$

以及初等拓扑斯的积范畴也是一个初等拓扑斯 [MM12，V. 练习 8]。

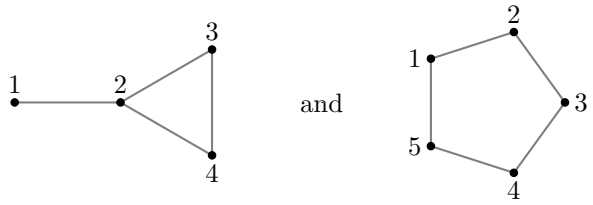
物种范畴的局部状态分类器是一个函子（或一个物种）$\Xi\colon\ \mathbf{FinSet}_0 \to \mathbf{FinSet}$，它将一个有限集合 A 映射到置换群上所有子群的集合 A

$$\Xi(A) = \mathrm{Sub}_{\mathbf{Group}}(\mathrm{Aut}_{\mathbf{Set}}(A)).$$

双射 $\sigma\colon\ A \to B$ 对元素 $S \in \Xi(B)$ 的作用由左共轭作用 $S \mapsto \sigma S \sigma^{-1}$ 给出。对于一个物种 $M\colon\ \mathbf{FinSet}_0 \to \mathbf{FinSet}$，余锥 $(\xi_M)_A\colon\ M(A) \to \Xi(A)$ 的一个分量将元素 $s \in M(A)$（称为M-结构 s 在 A 上）映射到其对称群

$$(\xi_M)_A(s) = \{\sigma\colon A \to A\colon \text{ bijection} \mid \sigma s = s\},$$

其中 σs 表示 σ 对 s 的作用。例如，考虑无向图的一个物种 $G\colon\ \mathbf{FinSet}_0 \to \mathbf{FinSet}$，它将一个有限集合 A 映射到所有底层集合为 A 的无向图的集合。那么，以下图



分别由 ξ_G 映射到它们的自同构群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbf{Aut}_{\mathbf{Set}}(\{1,2,3,4\})$ 和 $D_5 \subset \mathbf{Aut}_{\mathbf{Set}}(\{1,2,3,4,5\})$。从这个意义上说，$\Xi$ 的局部状态分类器

物种范畴就是“对称性物种”，根据凯莱定理，它由所有有限群构成！

例 3.12（没有局部状态分类器的初等拓扑斯）。存在一个没有局部状态分类器的初等拓扑斯。设 G 是一个拥有无限多个有限指数子群的群，例如 $\mathbb{Z}$，并令 $\mathbf{FinSet}^{G^{\mathrm{op}}}$ 为有限右 G-集合所成的拓扑斯。那么 $\mathbf{FinSet}^{G^{\mathrm{op}}}$ 没有局部状态分类器。（将这个反例与例 3.7 对照）

3.4. 格罗滕迪克拓扑斯的局部状态分类器。本节将具体构造格罗滕迪克拓扑斯的局部状态分类器。回想一下，尽管格罗滕迪克拓扑斯是余完备的，但即便证明它的存在也并非易事。

我们利用包含函子与层化函子之间的伴随

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J) \underset{\mathbf{a}}{\hookleftarrow} \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}},$$

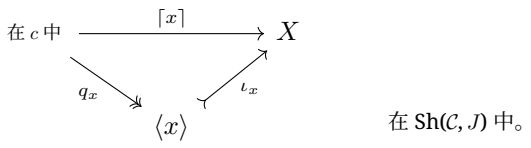
来构造格罗滕迪克拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 的局部状态分类器。本节中，为避免混淆我们所考虑的是层拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 中的图表，还是预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 中的图表，我们会明确标注当时所考虑的拓扑斯。尤其是在处理满态射时，应更加谨慎，因为层拓扑斯中的满态射未必是预层拓扑斯中的满态射。

由于格罗滕迪克拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 是预层拓扑斯 集合$^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 的反射性全子范畴，因此一旦我们得到以下大图表的余极限 Ξ_0

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)_{\mathrm{mono}} \rightarrowtail \mathrm{Sh}(\mathcal{C},J) \hookrightarrow \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}},$$

只需对其作层化，我们便可得到所考虑的格罗滕迪克拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 的局部状态分类器。构造反射子范畴中的余极限，请参见 [Rie17，命题 4.5.15。]

为了明确描述 Ξ_0，我们首先对层的“局部状态”作一个基本观察。设 X 是小站点 $(\mathcal{C},J)$ 上的一个 J-层。对于 $c \in \mathcal{C}$ 的每个元素 $x \in Xc$，都有唯一的映射 $\lceil x \rceil\colon \mathbf{ay}(c) \to X$，根据层的米田引理 [MM12, III.6.(17)]，它对应于 $x \in Xc$。在本节中，我们将此态射称为 $\lceil x \rceil$，并分别用 q_x、ι_x 表示它在 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 中的满单分解的满态射部分和单态射部分。

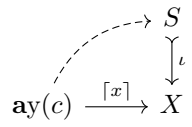


在 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 中。

我们之所以关注态射 $\lceil x \rceil$ 及其分解 $\iota_x \circ q_x$，是因为 $\iota_x\colon \langle x \rangle \rightarrowtail X$ 给出了包含 x 的最小子-J-层。

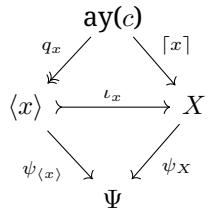
引理 3.13。（包含选定元素的最小子层）对于一个小站点（$\mathcal{C}$，J）、一个 J-层 X 和一个元素 $x \in Xc$，子对象 $\iota_x\colon \langle x \rangle \rightarrowtail X$ 是包含 x 的 X 的最小子-J-层。

证明。子-J-层 $\iota\colon\ S \rightarrowtail X$ 包含 $x \in X$，当且仅当态射$\lceil x \rceil\colon \mathbf{ay}(c) \to X$ 沿着 $\iota\colon S \rightarrowtail X$ 提升。



由这一事实和像的泛性质可立即推出该引理。□

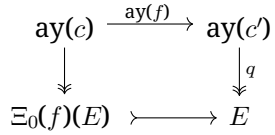
回顾第 3.2 小节中，在格罗滕迪克拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的背景下给出的局部确定余锥的说明。对于任意局部确定余锥$\{\psi_X\colon\ X \to \Psi\}$，我们可以通过追踪图表轻易证明 $\psi_X(x)$ 等于 $\psi_{\langle x\rangle}(x)$



换言之，局部确定余锥仅由可表函子 $q_x\colon \mathbf{ay}(c) \twoheadrightarrow \langle x\rangle$ 的层化之余子对象上的值决定。

这些观察促使我们定义局部状态分类器的一个近似 Ξ_0：对于每个对象 $c \in \mathcal{C}$，收集 $\mathbf{ay}(c)$ 的所有余子对象。尽管余子对象是从 $\mathbf{ay}(c)$ 出发的满态射的一个等价类，但为行文方便，我们将 $\mathbf{ay}(c) \twoheadrightarrow E$ 所属的余子对象（一个等价类）直接记作 E。

定义 3.14（预层 Ξ_0）。对于小站点 $(\mathcal{C}, J)$，我们如下定义其上的预层 Ξ_0：对于每个对象 $c \in \mathcal{C}$，将集合 $\Xi_0(c)$ 定义为 $\mathbf{ay}(c)$ 的所有余子对象构成的集合。对于 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $f\colon c \to c'$，我们定义函数$\Xi_0(f)\colon \Xi_0(c') \to \Xi_0(c)$，该函数将 $\Xi_0(c')$ 的一个元素 $q\colon \mathbf{ay}(c') \twoheadrightarrow E$ 映射为 $q \circ \mathbf{ay}(f)$ 在 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 中的满单分解的满态射部分



由于 $\mathbf{ay}(c)$ 的余子对象数量很少，它在 $\mathcal{C}$ 上定义了一个预层。根据满单分解的唯一性，很容易验证 $\Xi_0\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 的函子性。

要说明 Ξ_0 是该图表的余极限

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)_{\mathrm{mono}} \rightarrowtail \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}},$$

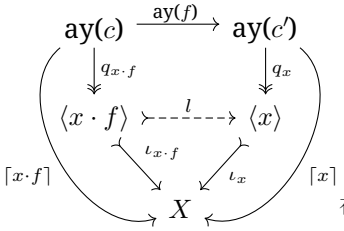
我们定义余锥 $\{\mathbf{orb}_X$ 的一个分量$\colon\ X \to \Xi_0\}_{X \in \mathrm{ob}(\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J))}$（符号 $\mathbf{orb}$ 并不重要，只是取自“orbit”的前几个字母，其灵感来自群作用托扑斯的情形。）我们使用上文提到的$\lceil x \rceil$的满单分解：$\mathbf{ay}(c) \to X$。

定义 3.15（态射 orb_X）。对于一个 J-层 X，我们如下定义态射 $\mathsf{orb}_X\colon\ X \to \Xi_0$：对于 $x \in \Xi_0(c)$，$(\mathsf{orb}_X)_c(x)$ 是余子对象 $q_x\colon\ \mathsf{ay}(c) \twoheadrightarrow \langle x\rangle$。

现在我们应当检查上文定义的 orb_X 是否是预层的一个态射，即对于任意 $f\colon c \to c'$ 属于 $\mathcal{C}$，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} Xc & \xleftarrow{Xf} & Xc' \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{orb}_X)_c} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{orb}_X)_{c'}} \\ \Xi_0 c & \xleftarrow{\Xi_0 f} & \Xi_0 c' \end{array} \qquad (\text{in Set}).$$

对于每个 $x \in Xc'$，以下交换图验证了这一点



在 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 中，

其中 $x \cdot f$ 表示 $(X(f))(x)$。虚线单态射 $l\colon \langle x \cdot f\rangle \rightarrowtail \langle x\rangle$ 的存在性由像 $\iota_{x\cdot f}\colon \langle x \cdot f\rangle \rightarrowtail X$ 的泛性质推出，或者等价地，由引理 3.13 推出。

经过上述所有准备，我们现在可以陈述本小节的中心引理。

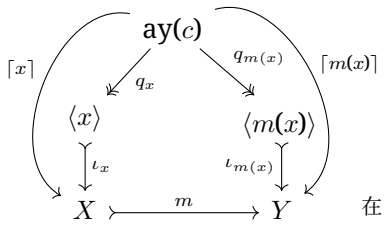
引理 3.16（ Ξ_0 的泛性质）。对于小站点 $(\mathcal{C}, J)$，态射族 $\{\mathsf{orb}_X\colon\ X \to \Xi_0\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J))}$ 是下列大图表的余极限余锥：

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)_{mono} \longrightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \longhookrightarrow \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}.$$

证明。在证明泛性质之前，我们应先证明态射族 $\{\mathsf{orb}_X\colon\ X \to \Xi_0\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J))}$ 是一个余锥，换言之，下列图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Y \\ & {\scriptstyle \mathrm{orb}_X} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{orb}_Y} & \\ & \Xi_0 & \end{array} \qquad \text{in } \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}},$$

对每个单态射 $m\colon\ X \to Y$ in $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, J)$，交换。对于 $c \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ 和 $x \in Xc$，由满单分解的唯一性以及下面的交换图可得等式 $(\mathsf{orb}_X)_c(x) = (\mathsf{orb}_Y)_c(m(x))$



在 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 中。

接下来证明此余锥 $\{\mathbf{orb}_X\colon\ X \to \Xi_0\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J))}$ 的泛性质。任取一个余锥 $\{\psi_X\colon X \to \Psi\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J))}$。（与局部决定余锥不同，$\Psi$ 不一定是 J-层，而只是 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 的一个对象。）我们证明存在一个从 Ξ_0 到 Ψ 的余锥映射，并且该映射唯一。

首先，我们证明余锥映射 $\Xi_0 \to \Psi$ 的唯一性。设 $l\colon\ \Xi_0 \to \Psi$ 是一个余锥映射。对于任意元素 $q\colon \mathbf{a}\mathrm{y}(c) \twoheadrightarrow E$ of $\Xi_0 c$，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{y}(c) & \xrightarrow{\eta_{\mathrm{y}(c)}} & \mathbf{a}\mathrm{y}(c) & \xrightarrow{q} & E & \xrightarrow{\mathbf{orb}_X} & \Xi_0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ & & & & & \searrow_{\psi_E} & \Psi \end{array} \qquad \text{在集合}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\text{中},$$

因为 E 是一个 J-层。（正如我们之前提到的，$\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 中的满态射 q 不一定是预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 中的满态射。）这里，$\eta_{\mathrm{y}(c)}\colon \mathbf{y}(c) \to \mathbf{a}\mathbf{y}(c)$ 表示层化伴随的单位。根据 $\mathbf{orb}_X$ 的定义，对应的米田元素对于上半部分

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{y}(c) & \xrightarrow{\eta_{\mathrm{y}(c)}} & \mathbf{a}\mathrm{y}(c) & \xrightarrow{q} & E & \xrightarrow{\mathbf{orb}_X} & \Xi_0 \end{array} \qquad \text{in } \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$$

是 $q\colon\ \mathbf{a}\mathbf{y}(c) \twoheadrightarrow E$，它是 $\Xi_0 c$ 的一个元素。因此，$l(E) \in \Psi c$ 必定是下半部分对应的米田元素：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{y}(c) & \xrightarrow{\eta_{\mathrm{y}(c)}} & \mathbf{a}\mathrm{y}(c) & \xrightarrow{q} & E & & \\ & & & & & \searrow_{\psi_E} & \Psi \end{array} \qquad \text{在 } \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\text{. 中}$$

由此，余锥映射 $l\colon\ \Xi_0 \to \Psi$ 的唯一性得证。

接下来，我们证明余锥映射的存在性。正如唯一性的证明所提示的，我们将 $l_c\colon\ \Xi_0 c \to \Psi c$ 定义为一个函数，它把 $q\colon\ \mathbf{a}\mathbf{y}(c) \twoheadrightarrow E$ 映射到相应的元素

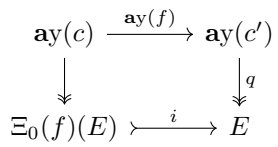
$$\mathrm{y}(c) \xrightarrow{\eta_{\mathrm{y}(c)}} \mathbf{a}\mathrm{y}(c) \xrightarrow{q} E \xrightarrow{\psi_E} \Psi \qquad \text{in } \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}},$$

根据米田引理。还有两件事需要证明。一是 l 是预层 $\Xi_0 \to \Psi$ 的态射。另一是 l 是余锥的态射。

我们证明 l 是预层 $\Xi_0 \to \Psi$ 的态射。对于任意态射 $f\colon\ c \to c'$，我们需要证明下图的交换性

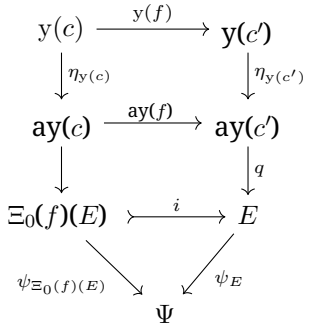
$$\begin{array}{ccc} \Xi_0 c & \xleftarrow{\Xi_0 f} & \Xi_0 c' \\ \downarrow{\scriptstyle l_c} & & \downarrow{\scriptstyle l_{c'}} \\ \Psi c & \xleftarrow{\Psi f} & \Psi c' \end{array} \qquad (\text{in Set}).$$

取 $\Xi_0 c'$ 中任意元素 $q\colon \mathbf{a}\mathrm{y}(c') \twoheadrightarrow E$。根据预层 Ξ_0 的定义，我们得到下图



在 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 中。

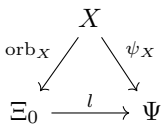
由于 i 是 J-层之间的单态射（且单位自然变换是自然的），下图交换



在集合$^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$中

根据米田引理的对应关系，我们得到所需的等式。

最后，我们证明 l 是一个余锥映射。对于任意 J-层 X，我们证明以下对象的交换性：

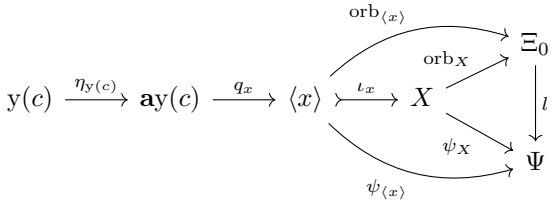


$\text{in } \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}.$

任取一个元素 $x \in Xc$。对于$x \in Xc$，相应的态射$\mathsf{y}(c) \to X$ 是以下三个态射的复合

$$\mathrm{y}(c) \xrightarrow{\eta_{\mathrm{y}(c)}} \mathbf{a}\mathrm{y}(c) \xrightarrow{q_x} \langle x \rangle \xrightarrow{\iota_x} X \qquad \text{in } \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}.$$

以下图表中的所有路径



在 $\mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 中

从 $\mathsf{y}(c)$ 到 Ψ 定义了相同的态射，因为 ι_x 是J-层之间的单态射。这里也用到了 l 的定义。再次由米田引理，我们有 $l_c((\mathrm{orb}_X)_c(x)) = (\psi_X)_c(x)$。因此证明完成。□

如本节开头所述，现在我们通过层化得到格罗滕迪克拓扑斯 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的局部状态分类器。

命题 3.17（格罗滕迪克拓扑斯的局部状态分类器）。 Ξ_0 的层化 $\mathbf{a}\Xi_0$ 是格罗滕迪克拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的局部状态分类器。余极限余锥的每个分量定义如下：

$$X \xrightarrow{\mathrm{orb}_X} \Xi_0 \xrightarrow{\eta_{\Xi_0}} \mathbf{a}\Xi_0.$$

证明。接下来立即就是反射子范畴中余极限的一般构造。参见 [Rie17，命题 4.5.15。]。□

我们以提及几类特殊的格罗滕迪克拓扑斯作为本小节的结尾，对于这些拓扑斯，这一一般构造的形式更为简单。

例 3.18（预层拓扑斯的局部状态分类器）。特别值得一提的是预层拓扑斯的局部状态分类器。这不仅是因为层化函子 $\mathbf{a}$ 变得平凡，构造也因此更简单，还因为我们可以观察到它与子对象分类器的构造有着惊人的相似之处！

对于预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$， Ξc 是可表预层 $\mathbf{y}(c)$ 的所有余子对象的集合。这类似于子对象分类器 Ω 的构造，因为 Ωc 是可表预层 $\mathbf{y}(c)$ 的所有子对象的集合。

正如我们在引言（第 1 节）中提到的，我们对内部参数化的模型情形是子拓扑斯，它利用了子对象分类器 Ω。每个内部参数化中 Ω 和 Ξ 所扮演的角色在理论上存在相似之处，这并不令人意外。然而，在构造层面竟然存在如此出人意料的相似性，确实令人瞩目。

请注意，第 3.3 小节中的两个局部状态分类器例子，即例 3.6 和例 3.7，都是以这种方式构造的。（请注意，例 3.11 中的局部状态分类器本质上也是以相同的方式构造的。）

例 3.19（局部化 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器）。现在我们可以证明，局部化 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器是终对象。（关于更强命题“Grothendieck 拓扑斯是局部化的，当且仅当其局部状态分类器是终对象”的一个更简单的证明，请参见第 5.3 小节。）

对于局部化 Grothendieck 拓扑斯 $\mathcal{E}$，我们可以取一个小站点 (P, J)，其中 P 是偏序集，且 $\mathcal{E} \simeq \mathbf{Sh}(P, J)$ （[MM12，IX.5. 定理 1 (ii)]）。由于对于 $p \in P$，$\mathbf{a}\mathbf{y}(p)$ 是一个次终对象，因此 $\Xi_0 p$ 是单元素集，即预层 Ξ_0 是一个终对象。由于层化函子 $\mathbf{a}$ 是左正合的，我们得出局部状态分类器 $\mathbf{a}\Xi_0$ 是终对象。

备注 3.20（层化函子未必保持局部状态分类器）。在构造 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器时，我们多次使用了层化。我们可能希望层化函子能够保持局部状态分类器，并且 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器可以简单地通过对预层拓扑斯的局部状态分类器进行层化得到，但这种构造行不通。层化函子未必保持局部状态分类器，尽管它保持任意余极限和单态射。

例如，考虑函子 $\lceil E \rceil \colon \mathbf{1} \to \mathbf{Par}$，它从终对象范畴 $\mathbf{1}$ 到平行态射范畴 $\mathbf{Par}$（见例 3.6），将 $\mathbf{1}$ 的唯一对象映射到 E。由于该函子是全忠实的，其对应的几何态射

$$\mathrm{Set} \cong \mathrm{Set}^{\mathbf{1}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Set}^{\mathbf{Par}^{\mathrm{op}}} \cong \mathrm{DirGraph},$$

是一个几何嵌入（见 [MM12，第 VII.4.] 节）。其对应的层化函子 a: DirGraph $\to$ Set 只是函子 $\lceil E \rceil$ 的一个前复合，并将有向图 X 映射到 X 的所有边构成的集合。由于有向图范畴的局部状态分类器 Ξ 有两条边（见例 3.6），而集合范畴的局部状态分类器是一个单元素集合（见例 3.4），层化函子 a 不保留局部状态分类器。

3.5. 内部半格结构。本小节中，我们将说明，笛卡尔闭范畴的局部状态分类器具有自然的内部半格结构。本小节中所用到的内部半格相关定义、术语和事实均在附录 A 中说明。

对于预层拓扑斯，半格结构显而易见。回顾一下，预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器 Ξ 由可表预层的所有余子对象构成（见例 3.18）。与预层拓扑斯的子对象分类器 Ω 在 Ωc 上的序结构类似，对每个 $c \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，$\Xi c$ 上的典范序结构由余子对象之间的通常序给出（详情见例 3.23）。每个 Ξc 上的这些半格结构在 Ξ 上给出一个内部半格结构。我们将这一半格结构推广到笛卡尔闭范畴的局部状态分类器。

但我们为什么要考虑内部半格结构？从不同角度来看，有几种可能的答案。一种答案是，这是实现内部参数化在技术上所必需的。由于超连通商在若干运算下封闭（见定义 2.1），其内部参数化必须以某种方式反映这些运算。在内部参数化中，局部状态分类器的内部半格结构对应于有限积（见引理 4.5）。回想一下，局部状态分类器的定义仅受取子对象这一运算启发（并隐含地受到余积的启发），因此必须在其上考虑一种额外结构（此处为半格结构），以刻画超连通商这一概念。

另一个答案是，我们的模型案例——子拓扑的内部参数化——同样利用了子对象分类器上的内部半格结构。有人可能会认为，子对象分类器 Ω 上通常的代数结构不只是半格结构，而是 Heyting代数结构。这种看法没错，但在考虑 Lawvere-Tierney 拓扑时，用到的只有半格结构。事实上，Lawvere-Tierney 拓扑是子对象分类器上的幂等内部半格同态，而不一定是 Heyting代数同态。因此，从仿照模型案例的角度来看，考虑半格结构是很自然的。

首先，我们将 Ξ^n 视为一个余极限，以便定义交 $\wedge\colon\ \Xi^2 \to \Xi$ 和 Top $\top\colon\ \Xi^0 \to \Xi$。

引理 3.21（Ξ^n的泛性质）。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有局部状态分类器 $\{\xi_X\colon\ X \to \Xi\}$的笛卡尔闭范畴。对于任意非负整数 $n \geq 0$,

$$\{\xi_{X_1} \times \cdots \times \xi_{X_n} : X_1 \times \cdots \times X_n \to \Xi^n\}$$

定义该函子的余极限余锥

$$\mathcal{C}_{mono}{}^n \rightarrowtail \mathcal{C}^n \xrightarrow{\prod_{k=1}^n} \mathcal{C}.$$

证明。由于 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔闭的，对于任意对象 $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，函子

$$X \times - \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

是一个左伴随函子。因此， $X \times -$ 保留所有余极限（不一定是小余极限）。

根据对 n 的归纳，我们有

$$\begin{aligned}
\Xi^{n+1} &\cong \Xi^n \times \Xi \\
&\cong (\operatorname*{colim}_{\mathcal{C}^n_{\mathrm{mono}}} X_1 \times \cdots \times X_n) \times \Xi \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}^n_{\mathrm{mono}}} (X_1 \times \cdots \times X_n \times \Xi) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}^n_{\mathrm{mono}}} (X_1 \times \cdots \times X_n \times \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}_{\mathrm{mono}}} X) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}^n_{\mathrm{mono}}} (\operatorname*{colim}_{\mathcal{C}_{\mathrm{mono}}} X_1 \times \cdots \times X_n \times X) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}^{n+1}_{\mathrm{mono}}} (X_1 \times \cdots \times X_n \times X).
\end{aligned}$$

（基础情形 $n = 0$ 是一个平凡情形。）很容易验证，相应的余极限余锥为

$$\{\xi_{X_1} \times \cdots \times \xi_{X_n} \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \Xi^n\}.$$

□

利用这个泛性质，我们可以定义典范交映射

$$\wedge_n \colon \Xi^n \to \Xi$$

为从余极限余锥到

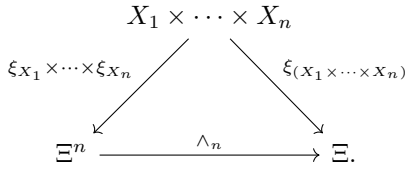
$$\{\xi_{X_1} \times \cdots \times \xi_{X_n} \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \Xi^n\}$$

余锥的典范余锥映射

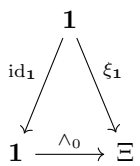
$$\{\xi_{(X_1 \times \cdots \times X_n)} \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \Xi\}.$$

容易验证，后者实际上是一个余锥，因为 $\{\xi_X\}$ 是局部确定的，而且单态射的乘积是单态射。

换言之，对于任意对象的 n 元组 $(X_1, \ldots, X_n)$， $\wedge_n$ 是使下图交换的唯一映射



特别地， $\wedge_0$ 是使



交换的，即 $\xi_{\mathbf{1}}$。

如下所示，在证明上述运算在 Ξ 上赋予一个内部半格结构时，半格的每条公理都来自一个与笛卡尔结构相关的相应自然变换，具体如下：

$$\begin{gathered}
\top \wedge x = x \leftrightsquigarrow \lambda_X \colon \mathbf{1} \times X \cong X \\
x \wedge \top = x \leftrightsquigarrow \rho_X \colon X \times \mathbf{1} \cong X \\
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \leftrightsquigarrow \alpha_{X,Y,Z} \colon X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z \\
x \wedge y = y \wedge x \leftrightsquigarrow \gamma_{X,Y} \colon X \times Y \cong Y \times X \\
x = x \wedge x \leftrightsquigarrow \Delta_X \colon X \rightarrowtail X \times X.
\end{gathered}$$

从理论上说，上述所有自然变换都是单态，这一点十分重要。

命题 3.22（ Ξ的半格结构）。设 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔闭范畴，具有局部状态分类器 $\{\xi_X \colon X \to \Xi\}$。那么，配备顶映射的局部状态分类器 Ξ

$$\top \coloneqq \wedge_0 \colon \mathbf{1} \to \Xi$$

以及交映射

$$\wedge \coloneqq \wedge_2 \colon \Xi \times \Xi \to \Xi$$

是一个内部半格。

证明。我们证明，上述定义的三元组（Ξ， $\top$， $\wedge$）满足定义 A.1 中内部半格的四条公理。

首先，我们证明第一条公理 $\top \wedge x = x$，它断言

$$\begin{array}{ccccccc}
\Xi & \xrightarrow{\lambda_\Xi} & \mathbf{1} \times \Xi & \xrightarrow{\top \times \mathrm{id}_\Xi} & \Xi \times \Xi & \xrightarrow{\wedge} & \Xi \\
& \searrow & & & & \nearrow & \\
& & & \mathrm{id}_\Xi & & &
\end{array}$$

交换，其中 λ_A 表示典范自然同构 $\lambda_A \colon \mathbf{1} \times A \to A$。只需证明，对于任意 $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，$\xi_X$的前复合

$$\begin{array}{ccccccc}
X & & & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_X} & & & & & & \\
\Xi & \xrightarrow{\lambda_\Xi} & \mathbf{1} \times \Xi & \xrightarrow{\top \times \mathrm{id}_\Xi} & \Xi \times \Xi & \xrightarrow{\wedge} & \Xi \\
& \searrow & & & & \nearrow & \\
& & & \mathrm{id}_\Xi & & &
\end{array}$$

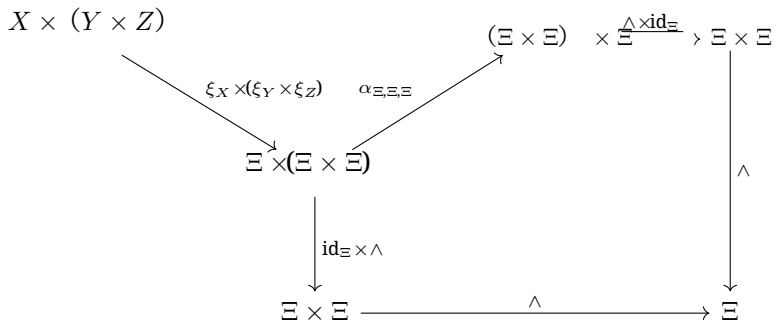
定义了从 X 到 Ξ的同一个态射，因为 $\{\xi_X \colon X \to \Xi\}$ 是一个余极限余锥。所需的交换性可由下一个图表推出：

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\lambda_X} & \mathbf{1} \times X & & \xrightarrow{\xi_1 \times X} & & \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_1 \times \xi_X} & \searrow^{\xi_1 \times \xi_X} & & & \\
\Xi & \xrightarrow{\lambda_\Xi} & \mathbf{1} \times \Xi & \xrightarrow{\top \times \mathrm{id}_\Xi} & \Xi \times \Xi & \xrightarrow{\wedge} & \Xi. \\
& \searrow & & & & \nearrow & \\
& & & \mathrm{id}_\Xi & & &
\end{array}$$

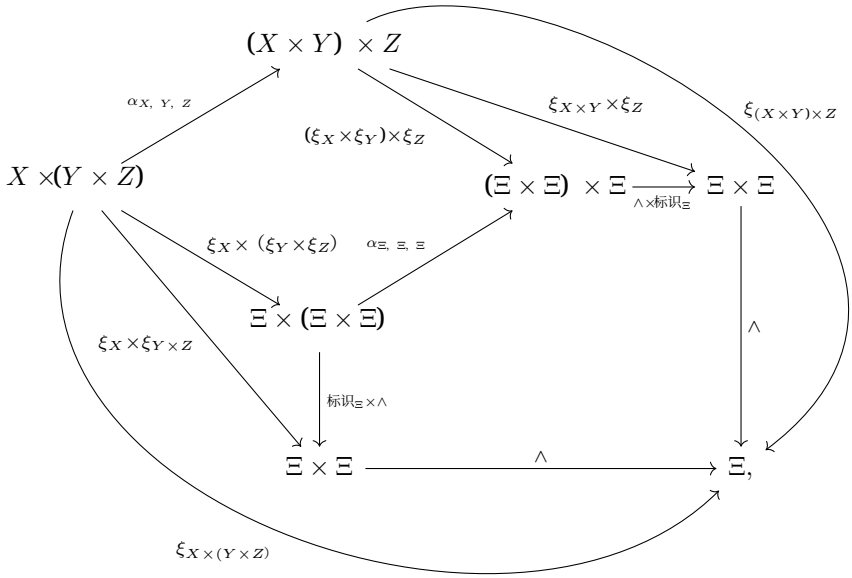
事实上，左方交换方块、中间三角形和右侧三角形分别由于 λ 的自然性、等式 $\top = \wedge_0 = \xi_{\mathbf{1}}$ 和 $\wedge = \wedge_2$ 的定义而交换；外侧弯曲梯形也由于 λ_X 而交换。

是单态，且 ξ 是局部决定的。第一条公理中的另一个等式 $x \wedge \top = x$ 的证明类似，只需使用典范自然同构 $\rho_A\colon \mathbf{1} \times A \to A$ 代替 λ。

其次，我们证明第二条公理（$x \wedge y$）$\wedge z = x \wedge$（$y \wedge z$）。根据引理 3.21，运用类似的论证，只需证明从 $X \times (Y \times Z)$ 到 Ξ in 的两个可能的复合态射

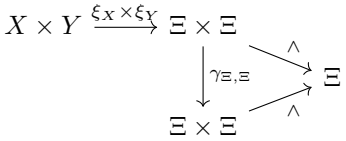


重合，其中 $\alpha_{A,B,C}\colon A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ 表示典范同构。由下图

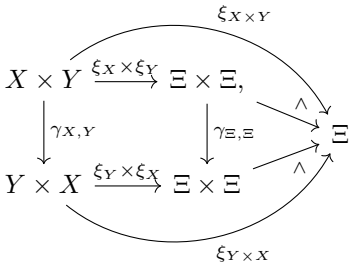


第二条公理得证，这是因为 $\alpha_{X\text{的自然性}Y、Z、\wedge\text{的定义}}$，以及 ξ 是局部决定的且 α 是单态这一事实。

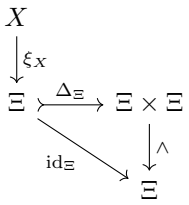
为证明第三公理 $x \wedge y = y \wedge x$，只需证明



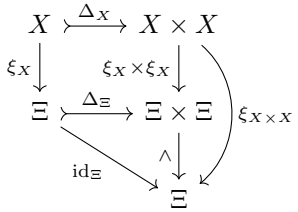
定义了同一个态射，其中 $\gamma_{A,\ B}\colon A \times B \cong B \times A$ 表示由 $\mathcal{C}$ 的笛卡尔对称幺半结构给出的典范同构（即 $\gamma_{A,\ B} = \langle \mathrm{pr}_2 \cdot \mathrm{pr}_1 \rangle$）。检验下图的交换性



利用 $\wedge$ 的定义以及 γ 是单态这一事实，第三公理得证。对于最后一条公理 $x = x \wedge x$，只需证明



对每个 $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 都交换，其中 $\Delta_A\colon A \rightarrowtail A \times A$ 表示对角映射。类似地，下图的交换性

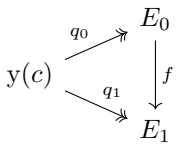


以及 Δ_X 是单态这一事实，蕴含第四公理。现在我们完成了证明。□

正如我们在本小节开头所承诺的，我们来考察预层拓扑斯的局部状态分类器上的半格结构。

例 3.23（预层拓扑斯）。预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器 Ξ 已在例 3.18 中作了明确描述。根据该描述，对于 $c \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，$\Xi c$ 是可表预层 $\mathrm{y}(c)$ 的所有余子对象的集合。该集合带有由余子对象之间的态射给出的自然偏序结构。更

确切地说，对于给定的两个余子对象 $q_i\colon \mathrm{y}(c) \twoheadrightarrow E_i$ 对于 $i = 0,\ 1$，当且仅当存在态射 $f\colon\ E_0 \to E_1$ 使得不等式$E_0 \leq E_1$ 成立时，



可交换。

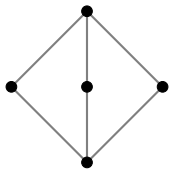
这个偏序集 Ξc 具有所有有限交，因此是一个半格。事实上，余子对象 q_i 的交：$\mathrm{y}(c) \twoheadrightarrow E_i$ 对于 $i = 1, \ldots n$，由以下对象的满单分解的满射部分给出：

$$\langle q_1, \ldots, q_n \rangle\colon \mathrm{y}(c) \to E_1 \times \cdots \times E_n.$$

通过直接计算，很容易验证，这个半格结构定义了 Ξ 上的内部半格结构，并且与命题 3.22 中给出的结构一致。

注 3.24（局部状态分类器未必是 Heyting代数）。与子对象分类器的类比，可能会让人以为 Ξ 具有内部 Heyting代数结构，而上述内部半格结构是该结构的限制。但事实并非如此。

例如，对于某个群 G，群作用拓扑斯 $\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 就是一个反例。在例 3.7 中，我们已经看到，$\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器由 G的所有子群组成。作为例 3.23 的一个特例，其典范的内部半格结构与由子群通常的包含关系给出的结构一致。$\mathbf{Sub}^{\mathrm{Group}}(G)$的半格结构未必能够扩展为 Heyting代数结构。例如，$\mathbf{Sub}^{\mathrm{Group}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 具有如下哈斯图：



而它不是 Heyting代数，因为它不是分配的。

4. Internal parameterization of hyperconnected quotients

本节旨在证明以下主定理：超连通商的内部参数化。（内部滤子的定义和性质见附录 A。）

定理 4.1（主定理）。设 $\mathcal{E}$ 是一个具有局部状态分类器 $\{\xi_X\colon\ X \to \Xi\}_{X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$ 的拓扑斯（例如，任意一个格罗滕迪克拓扑斯）。那么，以下三个概念一一对应。

(1) $\mathcal{E}$ 的超连通商(2) Ξ 的内部滤子(3) $\Xi \to$ Ω 的内部半格同态

从与子拓扑斯情形类比的角度来看，(1) 与 (3) 之间的对应至关重要：在子拓扑斯的情形中，(1) 是一个子拓扑斯，(3) 是一个 Lawvere-Tierney 拓扑。若要声称这是超连通商的内部参数化，那么 (1) 与 (3) 之间的对应就足够了。那么，为什么还要明确写出 (2) 内部滤子呢？原因之一是，内部滤子正是第 3.1 小节末尾所说的“良好子对象”。另一个原因是，在某些具体例子中，内部滤子更容易处理（见第 5 节）。

我们的证明分为两个步骤，即第 4.1 小节和第 4.2 小节。最终，我们希望证明 (3) 内部半格同态 $\Xi \to \Omega$ 与 (1) 超连通商相对应。（ (2) 内部滤子与 (3) 内部同态之间的对应可由一个一般事实——命题 A.8——立即得出。）然而，在证明这一点之前，作为第一步，我们先在第 4.1 小节证明态射 $\Xi \to \Omega$（不一定保持半格结构）与我们称为“相干族”的对象之间存在更广泛的对应。我们的主定理由将这一更广泛的对应加以限制而得出。换言之，第一步是构造这一对应，第二步则是利用 Ξ and Ω 的内部半格结构对其加以限制。

4.1. 更广泛的对应。在本小节中，我们构造更广泛的对应，为主定理做准备。为严谨地陈述这一对应，我们引入一个术语：相干子对象族。

定义 4.2（相干族）。对于拓扑斯 $\mathcal{E}$，若为 $\mathcal{E}$ 中所有对象各指定一个子对象族，

$$\{m_X : S_X \rightarrowtail X\}_{X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$$

则称该族是相干的；若对任意单态射 $l\colon X \to Y \in \mathcal{E}$，$S_X$ 都是沿 l 对 S_Y 的拉回，

$$\begin{array}{ccc} S_X & \overset{\exists}{\dashrightarrow} & S_Y \\ \downarrow{\scriptstyle m_X} & & \downarrow{\scriptstyle m_Y} \\ X & \xrightarrow{\ l\ } & Y. \end{array}$$

在陈述并证明更广泛的对应之前，我们先说明，相干族的概念推广了超连通商。

引理 4.3（超连通商定义相干族）。设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，$\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是一个超连通几何态射。令 G 表示相应的左正合余单子，$\epsilon\colon G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 表示其余单位。

那么，$\{\epsilon_X\colon GX \to X\}_{X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$ 是一个相干子对象族。此外，可以从其诱导的相干族 $\{\epsilon_X\colon GX \to X\}$ 中恢复该超连通商（作为一个充实满子范畴）：收集所有满足 ϵ_X 同构的对象即可。

证明。首先，根据定义 2.1，$\{\epsilon_X\colon GX \to X\}$ 是一族单态射，也就是说，是一族子对象。我们证明，对于任意单态射 $\iota\colon X \rightarrowtail Y$，

$$\begin{array}{ccc} GX & \xrightarrow{G\iota} & GY \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X & \xrightarrow{\ \iota\ } & Y \end{array}$$

是一个拉回图。令

$$\begin{array}{ccc} P & \rightarrowtail & GY \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X & \xrightarrow{\iota} & Y \end{array}$$

是一个拉回图。因此，由拉回的泛性质 P，$GX \leq P$ 在 X 的子对象偏序集中成立。反向不等式 $P \leq GX$ 则由余单位 ϵ_X 的泛性质推出，因为 P 是 GY 的子对象，而且超连通几何态射的逆像函子的本质像对子对象封闭（参见定义 2.1）。

后一陈述适用于一般的余反射子范畴，并不限于超连通商。□

根据上述引理，我们现在可以看出，以下对应是主定理的一个更广义版本。

命题 4.4（更广泛的对应）。设 $\mathcal{E}$ 是一个带有局部状态分类器 $\{\xi_X\colon X \to \Xi\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$的拓扑斯。那么以下三个概念一一对应。

(1) 相干子对象族 (2) Ξ的子对象
(3) 态射 Ξ →Ω

证明。由子对象分类器 Ω 的泛性质，2 与 3 之间的对应显而易见。对于给定的子对象族 $\{m_X\colon S_X \rightarrowtail X\}$，它是相干的，当且仅当对应的特征态射 $\{\chi_{S_X}\colon X \to \Omega\}$是局部决定的。于是，1 与 3 之间的对应得以验证。□

4.2. 主定理。本节中，我们先准备两个引理，再证明主定理（定理 4.1）。

第一个引理指出，态射 $f\colon \Xi \to \Omega$ 是内部半格同态，当且仅当对应的相干子对象族与有限积相容。

引理 4.5. 设 $\mathcal{E}$ 是一个带有局部状态分类器 $\{\xi_X\colon X \to \Xi\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$ 的拓扑斯，且 $\{m_X\colon S_X \rightarrowtail X\}$ 是一个相干子对象族。则对于命题 4.4 给出的相应态射 $f\colon \Xi \to \Omega$,

(1) f 保持 $\top$ 当且仅当 $m_{\mathbf{1}}\colon S_{\mathbf{1}} \rightarrowtail X$ 是同构。(2) f 保持 $\wedge$ 当且仅当对于任意 X, $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})$, $m_{X\times Y}\colon S_{X\times Y} \rightarrowtail X \times Y$ 与 $m_X \times m_Y\colon S_X \times S_Y \rightarrowtail X \times Y$ 作为 $X \times Y$ 的子对象相等。

证明. (1) f 保持 $\top$ 意味着下图交换。

$$\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle \xi_{\mathbf{1}}} \nearrow & \Xi \\ \mathbf{1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & {\scriptstyle \mathrm{true}} \searrow & \Omega \end{array}$$

取上述两个态射 $\mathbf{1} \to \Omega$ 的相应子对象，即可证明引理的前半部分。

(2) f 保留 $\wedge$ 意味着

$$\begin{array}{ccc} \Xi \times \Xi & \xrightarrow{\wedge} & \Xi \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

可交换。根据引理 3.21，这等价于以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & & \\ {\scriptstyle \xi_X\times\xi_Y}\downarrow & & \\ \Xi \times \Xi & \xrightarrow{\wedge} & \Xi \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

对于所有 $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})$。根据 $\wedge$ 的定义，这等价于以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \overset{\xi_{X\times Y}}{\searrow} & \\ {\scriptstyle \xi_X\times\xi_Y}\downarrow & & \\ \Xi \times \Xi & & \Xi \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega. \end{array}$$

通过取相应的子对象并运用拉回的基本运算，可以验证这等价于

$$S_X \times S_Y = S_{X\times Y}$$

作为 $X \times Y$ 的子对象。引理的后一部分也得证。

□

注 4.6。引理 4.5 中的条件 (1) 和 (2) 严格强于对有限积封闭。更确切地说，尽管该引理蕴含：若 $f\colon \Xi \to \Omega$ 是内部半格同态，则由 $\{S_X \mid X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})\}$ 构成的全子范畴对有限积封闭，但反过来并不成立。

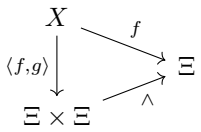
例如，令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathbb{Z}$-作用集合$^{\mathbb{Z}^{\mathrm{op}}}$ 的拓扑斯，$S_X \rightarrowtail X$ 为由 X 中基数为 1 或无限的轨道组成的子对象。于是，$\{S_X \rightarrowtail X\}$是相干的，并且 $\{S_X \mid X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})\}$ 在有限积下封闭，但相应的态射 $\Xi \to \Omega$ 不是内部半格同态。事实上，令 $X = \mathbb{Z}$ 和 $Y = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 带有通常的 $\mathbb{Z}$作用，则 $S_{X\times Y}$就是 $X \times Y$本身，但 $S_X \times S_Y = \mathbb{Z} \times \emptyset = \emptyset$。

现在我们转向第二个引理。回顾一下，

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{\quad\xi_X\quad} & & \Xi \\ & {\scriptstyle f}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle \xi_Y} & \\ & & Y & & \end{array}$$

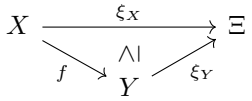
根据 Ξ 的定义，对于任意单态射 $f\colon X \rightarrowtail Y$，它都是交换的。第二个引理可以看作每个态射 $f\colon X \to Y$ 都具有的一种类似性质，而该态射不一定是单态。为了严谨地表述这个引理，请注意，对于任意

对象 $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})$，只要 $\mathcal{E}$ 具有局部状态分类器 Ξ，同态集 $\mathcal{E}(X,\Xi)$ 就具有由 Ξ 的半格结构诱导的半格结构。特别地，我们在 $\mathcal{E}(X,\Xi)$ 上有一个序结构。具体而言，对于一对平行态射 $f,g\colon X\to\Xi$，不等式 $f\le g$ 定义为 $f=f\wedge g$。换言之，不等式 $f\le g$ 意味着以下图表

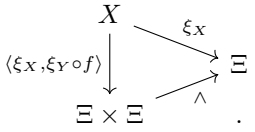


交换。

引理 4.7。设 $\mathcal{E}$ 是一个具有局部状态分类器 $\{\xi_X\colon X\to\Xi\}_{X\in\mathrm{ob}(\mathcal{E})}$ 的拓扑斯。则对于 $\mathcal{E}$ 中的任意态射 $f\colon X\to Y$，不等式 $\xi_X\le\xi_Y\circ f$ 成立。

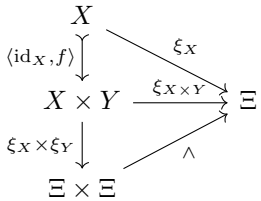


证明。根据定义，$\xi_X\le\xi_Y\circ f$ 等价于下式的交换性：



.

于是，只需证明下面两个三角形交换即可。



上方的三角形是交换的，因为 $\langle \mathrm{id}_X, f\rangle$ 是单态，且余锥 $\{\xi_X\colon X\to\Xi\}_{X\in\mathrm{ob}(\mathcal{E})}$ 是局部决定的。下方的三角形根据 $\wedge$ 的定义交换。□

（同样的证明适用于笛卡尔闭范畴 $\mathcal{E}$，并不限于拓扑斯，不过这里不需要如此一般的结果。）

有了这两个引理，我们接下来证明主定理。

定理 4.1 的证明。我们将命题 4.4 给出的对应限制到所需的对应。(2) 内部滤子与 (3) 内部半格同态之间的对应只是命题 A.8 的一个特例。因此，只需证明：相干子对象族给出一个超连通商（由引理 4.3），当且仅当相应的态射 $f\colon\Xi\to\Omega$ 是内部半格同态（或者等价地，相应的 Ξ 子对象是内部滤子）。

首先，我们证明，对于任意超连通商 Q of $\mathcal{E}$，相应的态射 $f\colon\Xi\to\Omega$ 是一个内部半格同态。令 $G\colon\mathcal{E}\to\mathcal{E}$表示由超连通商 Q 诱导的左正合余单子，并令 $\epsilon\colon G\to$

$\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 表示其余单位。根据第一个引理（引理 4.5），只需证明 $\epsilon_{\mathbf{1}}\colon G\mathbf{1} \rightarrowtail \mathbf{1}$ 是同构，并且对于任意对象 $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})$，两个子对象$\epsilon_{X\times Y}\colon G(X\times Y) \rightarrowtail X\times Y$和 $\epsilon_X \times \epsilon_Y\colon GX \times GY \rightarrowtail X \times Y$在 $X\times Y$中定义相同的子对象。这两个条件都可由 G 保持有限积这一事实推出。

其次，我们证明，对于每个内部滤子 $k\colon F \rightarrowtail \Xi$，相应的相干子对象族 $\{m_X\colon S_X \rightarrowtail X\}$ 定义了 $\mathcal{E}$ 的一个超连通商。具体而言，我们证明以下两点。

- 由满足以下条件的对象 X 张成的全子范畴 Q：其 $\xi_X\colon X \to \Xi$ 沿 $k\colon F \rightarrowtail \Xi$ 提升

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \overset{\xi_X}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle k} \\ X & \xrightarrow{\quad} & \Xi \end{array}$$

  定义了 $\mathcal{E}$ 的一个超连通商。
- 此外，相应的相干族 $\{m_X\colon S_X \rightarrowtail X\}$ 给出了该超连通几何态射的余单位。

由于 $m_X\colon S_X \rightarrowtail X$ 是 k 沿 ξ_X 的拉回

$$\begin{array}{ccc} S_X & \longrightarrow & F \\ \downarrow{\scriptstyle m_X} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle k} \\ X & \xrightarrow{\xi_X} & \Xi, \end{array}$$

对象 X 属于 $\mathcal{E}$ $\mathcal{Q}$ 当且仅当 m_X 同构。因此，由第一个引理（引理 4.5）可知， $\mathcal{Q}$ 在有限积下封闭。

$\mathcal{Q}$ 在取子对象下也封闭，因为如果 Y 是 $\mathcal{Q}$ 和s中的一个对象，且 $X \rightarrowtail Y$是一个子对象，那么 ξ_X 沿着 k 提升，如下图表所示

$$\begin{array}{ccccc} & & & & F \\ & & & \overset{\xi_Y}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle k} \\ X & \overset{s}{\rightarrowtail} & Y & \xrightarrow{\quad} & \Xi. \\ & \underset{\xi_X}{\searrow} & & & \end{array}$$

由于等化子是一种特殊的子对象，我们现在已经证明 $\mathcal{Q}$ 在有限极限和子对象下封闭。

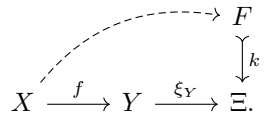
接下来，我们证明嵌入函子 $\mathcal{Q} \to \mathcal{E}$ 有一个右伴随，并且$\{m_X\colon S_X \rightarrowtail X\}_{X\in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$ 给出其余单位。这等价于说，对于 $\mathcal{Q}$中的任意对象X、 $\mathcal{E}$中的任意 Y，以及一个态射 $f\colon X \to Y$， f 都存在沿着m_Y的（必然唯一的）提升

$$\begin{array}{ccc} & & S_Y \\ & \overset{f}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle m_Y} \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y, \end{array}$$

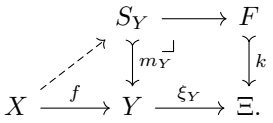
因为很容易验证 S_Y 属于 $\mathcal{Q}$。

由于对象 X 属于 $\mathcal{Q}$，态射 ξ_X 沿着 k提升：$F \rightarrowtail \Xi$。内部滤子 F 向上封闭（见定义

A.2) 和第二个引理（引理 4.7）意味着复合态射 $\xi_Y \circ f$沿着 k提升



然后，根据 S_X 作为拉回的泛性质， f 沿着 m_Y提升



因此， f 沿着 m_Y提升，而 m_Y 定义了余单位的分量。

到目前为止，我们已经证明， $\mathcal{Q}$ 是一个在取有限极限和子对象下封闭的全子范畴，并且嵌入函子 $\mathcal{Q} \to \mathcal{E}$ 是左正合左伴随函子。由于 $\mathcal{Q}$ 通过一个左正合余单子在 $\mathcal{E}$ 之上是余单子的， $\mathcal{Q}$ 是一个拓扑斯（[参见 MM12，第 V.8.]页）。因此， $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{E}$的一个超连通商，因为它在取子对象下封闭。主定理的证明就此完成。□

5. Examples and Applications

在本小节中，我们列举一些例子和应用。

5.1. 超连通商的数量。首先，我们证明以下关于超连通商数量的直接推论。尽管格罗滕迪克拓扑斯的情形可以由 [Ros82], 推出，但我们的推论适用于更广泛的一类拓扑斯，并且可直接由内部参数化推出，正如子拓扑斯的情形一样。

推论 5.1（超连通商数量的可数性）。对于具有局部状态分类器 $\mathcal{E}$ 的局部小拓扑斯（例如，任意格罗滕迪克拓扑斯）， $\mathcal{E}$ 的超连通商数量是小的。

证明。由于超连通商与从局部状态分类器 Ξ 到子对象分类器 Ω 的内部半格同态一一对应（根据我们的主定理，即定理 4.1），其数量不大于同态集 $\mathcal{E}(\Xi,\Omega)$ 的基数，而该基数是小的。□

5.2. 玩具例子：有向图拓扑斯。作为一个玩具例子，我们使用主定理对有向图拓扑斯 DirGraph =集合$^{\mathrm{Par}^{\mathrm{op}}}$的所有超连通商进行分类。在考察其局部状态分类器之前，不难找到两个由满且对象双射函子诱导的超连通商（见例 2.2）。从平行态射范畴 Par 出发有两个满且对象双射函子。显然的一个是 $\mathrm{id}_{\mathrm{Par}}$，另一个是 Par $\to \mathbf{2}$，其中 2 表示二元全序集。它们所对应的超连通商分别是 DirGraph 本身和集合$\mathbf{2}^{\mathrm{op}}$。

现在，我们转而考察一个局部状态分类器。正如例 3.6 中所观察到的，局部状态分类器 Ξ 是如下有向图：

$$[\text{being a loop}] \circlearrowright \bullet \circlearrowright [\text{not being a loop}].$$

由于内部半格结构由以下给出

$$[\text{being a loop}] \geq [\text{not being a loop}],$$

恰有两个内部滤子，分别是最大滤子 $\mathrm{id}_\Xi\colon \Xi \to \Xi$本身和最小滤子 $\top\colon \mathbf{1} \to \Xi$，如下图所示

$$[\text{being a loop}] \circlearrowright \bullet \circlearrowleft [\text{not being a loop}]$$

环 [ ] ↻ •. 是一个

它们对应的超连通商就是上文段落中提到的两个。根据主定理，可以得出结论：不存在其他超连通商。

5.3. 局部化 Grothendieck 拓扑斯的局部状态分类器。设 $\mathcal{E}$ 是一个具有局部状态分类器 Ξ的拓扑斯。则，恒等映射 $\mathrm{id}_\Xi\colon \Xi \to \Xi$ 给出最大的内部滤子，而顶全局截面 $\top\colon \mathbf{1} \to \Xi$ 给出最小的内部滤子。对应的超连通商分别是最大的超连通商，即 $\mathcal{E}$ 本身，以及最小超连通商。

根据主定理和例 2.5，我们得到了以下推论，它是例 3.19 的逆命题。

推论 5.2. 对于一个 Grothendieck 拓扑斯 $\mathcal{E}$，$\mathcal{E}$ 是局部化的，当且仅当其局部状态分类器是终对象。

另请参见例 3.9，其中讨论了局部状态分类器为终对象的范畴。

5.4. 布尔拓扑斯的商。如我们在引言（第 1 节）中所述，Lawvere 在 [Law16] 中最初提出的问题，是要对所有商（而非超连通商）进行内部参数化。

对于某些拓扑斯而言，这两类商之间的差异会消失，其中包括所有布尔拓扑斯。

命题 5.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个布尔拓扑斯。$\mathcal{E}$ 的每个商都是超连通的。

证明。设 $\mathcal{Q}$ 是它的商，并将其视为 $\mathcal{E}$ 的一个全子范畴。布尔拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的子对象分类器是两个终对象的余积$1 \coprod 1$（参见 [MM12，第 VI.1.] 页）。由于 $\mathcal{Q}$ 对 $\mathcal{E}$ 中的有限极限和有限余极限封闭，$\mathcal{E}$ 的子对象分类器属于 $1 \coprod 1$。根据子对象分类器的泛性质（在 $\mathcal{E}$ 中），并利用 $\mathcal{Q}$ 对拉回封闭这一事实，$\mathcal{Q}$ 对取子对象封闭，即为超连通的。□

于是，只需去掉形容词“超连通”，我们便得到了带有局部状态分类器的布尔拓扑斯所有商的内部参数化。

推论 5.4（布尔拓扑斯之商的内部参数化）。设$\mathcal{E}$ 是带有局部状态分类器 $\{\xi_X$ 的布尔拓扑斯：$X \to \Xi\}_{X \in \mathrm{ob}(\mathcal{E})}$（例如，任意布尔格罗滕迪克拓扑斯）。那么，以下三个概念一一对应。

(1) $\mathcal{E}$ 的商；(2) Ξ 的内部滤子；(3) 内部半格
同态 $\Xi \to \Omega$

值得强调的是，它为 Lawvere 开问题[Law16]提供了一个部分解答：

推论 5.5（布尔拓扑斯的 Lawvere 开问题）。对于具有局部状态分类器的局部小布尔拓扑斯（例如，任意布尔格罗滕迪克拓扑斯），存在商的内部参数化。特别是，商的数量是小的。

证明。由上述论证和推论 5.1 可得。 □

作为布尔拓扑斯所有商分类的一个玩具例子，我们使用推论5.4 对物种拓扑斯的所有商进行分类。

例 5.6（物种拓扑斯的商）。在例 3.11 中，我们看到，物种拓扑斯 $\mathbf{FinSet}^{\mathrm{FinSet}_0}$ 的局部状态分类器由 $\Xi = \mathbf{Sub}^{\mathrm{Group}}(\mathbf{Aut}_{\mathrm{Set}}(-))$ 给出，我们称之为“对称性物种”。

Ξ 的一个内部滤子由一族滤子给出

$$\{F_A \subset \mathrm{Sub}_{\mathrm{Group}}(\mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(A))\}_{A\in \mathrm{ob}(\mathrm{FinSet}_0)}$$

该滤子族在双射作用下封闭。等价地说，滤子族

$$\{F_n \subset \mathrm{Sub}_{\mathrm{Group}}(\mathfrak{S}_n)\}_{n=0}^{\infty}$$

对每个 $0 \leq n < \infty$，该滤子族在共轭作用下封闭。此外，由于有限半格上的滤子是主滤子，它对应于一族正规子群

$$\{N_n \subset \mathfrak{S}_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

因此，物种拓扑斯的商与所有对称群的正规子群族 $\{N_n \subset \mathfrak{S}_n\}_{n=0}^{\infty}$ 之间存在自然双射。

对称群的正规子群分类众所周知。当 $n \geq 5$ 时，对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的交错群 A_n 是单群，因此，对于 $\mathfrak{S}_n$（$n \geq 5$），恰有 3 个不同的正规子群，即两个平凡子群和交错群。对于 $n = 0$ 的情形，1、2、3、4，通过具体计算，我们可以分别证明存在 1、1、2、3、4 个子群。（ $\mathfrak{S}_4$ 存在一个不同于 A_4的非平凡正规子群，即克莱因四元群。）特别地，物种拓扑斯的商的数量为连续统势。

关于通过推论 5.4 对布尔拓扑斯的所有商进行分类的另一个例子，请参见下一小节。

5.5.（拓扑）群作用的拓扑斯。正如例 2.3 中所提到的，对于一个拓扑群 (G,τ)，连续作用托扑斯 $\mathbf{Cont}(G,\tau)$ 给出了 $\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 的一个（超连通）商。在本小节中，我们将证明其逆命题（推论 5.12），作为主定理的一个推论，尽管针对这个特定例子，基本相同的论证早已见于 [Rog21a, 第 5.3 节。1],

为避免论证变得冗长，我们引入两个术语。

定义 5.7（共轭闭滤子）。子群（半）格 $\mathbf{Sub}^{\mathrm{Group}}(G)$ 的滤子 F 称为共轭闭的，如果它在共轭作用下封闭。

定义 5.8（单拓扑群）。群 G 上的拓扑群结构称为单的，如果所有开子群的集合构成单位元的邻域基。

例 5.9（单拓扑群与非单拓扑群）。 p-进数 $\mathbb{Z}_p$ 构成的拓扑群，配备通常的 p-进拓扑，是单的。与之相反，实数 $\mathbb{R}$ 构成的拓扑群，配备通常的欧几里得拓扑，则不是单的。

在例 3.7 中，我们看到，群作用拓扑斯 $\mathsf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 的局部状态分类器由 G 的所有子群构成，并配备态射 ξ_X，将元素映射到其稳定子群。它的内部滤子是 $\mathsf{Sub}_{\mathrm{Group}}(G)$ 上的共轭闭滤子 $\mathcal{F}_{\subset}$。作为主定理的推论，我们得到：

推论 5.10. 对于群 G，群作用拓扑斯 $\mathsf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 的商与 $\mathsf{Sub}_{\mathrm{Group}}(G)$ 上的共轭闭滤子一一对应。

证明. 这直接由主定理和命题 5.3 得出。 □

为了将这一推论与拓扑群的概念联系起来，我们证明以下引理。

引理 5.11. 对于拓扑群 (G,τ)，所有开子群构成 $\mathsf{Sub}_{\mathrm{Group}}(G)$ 上的一个共轭闭滤子。此外，对于群 G，这一构造给出了 G 上的简单拓扑群结构与 $\mathsf{Sub}_{\mathrm{Group}}(G)$ 上的共轭闭滤子之间的双射对应。

证明。对于拓扑群 (G,τ)，令 $F_{G,\tau}$ 表示 (G,τ) 的所有开子群组成的集合。

首先，我们证明前一个陈述。取任意拓扑群 (G,τ)。由于有限个开子群的交（包括空交 G）仍是开子群，集合 $F_{G,\tau}$ 对有限交封闭。若开子群 $H \in F_{G,\tau}$ 是另一个子群 $H' \in \mathsf{Sub}_{\mathrm{Group}}(G)$ 的子集，则 H' 是 H 的若干陪集的并，因此是开集。于是，滤子 $F_{G,\tau}$ 向上封闭。由于开子群的共轭子群也开，集合 $F_{G,\tau}$ 是共轭闭滤子。前一个陈述至此得证。

其次，我们证明后一个陈述。若群 G 上的两个拓扑群结构 (G,τ) 和 (G,τ') 都是单群且 $F_{G,\tau} = F_{G,\tau'}$，则两个拓扑相同 $\tau = \tau'$。因此，只需针对任意给定的共轭闭滤子 F，构造一个简单拓扑群结构 (G,τ)，使得 $F_{G,\tau} = F$。任取一个共轭闭滤子 F。我们如下定义 G 的子集所构成的集合 B：

$$B = \{gHg' \mid g, g' \in G,\ H \in F\}.$$

那么集合 B 有一个稍微简单一些的描述：

$$B = \{gH \mid g \in G,\ H \in F\} = \{Hg \mid g \in G,\ H \in F\},$$

因为 F 对共轭封闭，且我们有等式 $gHg' = gg'(g'^{-1}Hg') = (gHg^{-1})gg'$。此外，如果 $gH \in B$ 包含 $x \in G$，我们可以证明 $gH = xH$，那么 $\{S \in B \mid x \in S\} = \{xH \mid H \in F\}$。

我们将 τ 定义为 G 上由开基 B 生成的拓扑。换句话说，τ 的一个开集是 F 中某些元素的并。不过，这一构造还需要验证。首先，由于 $G \in F$，F 覆盖了整个 G。其次，取 $x \in G$ 和 gH、$g'H' \in B$，使得 $x \in gH$ 和 $x \in g'H'$。由于

$$x \in gH \cap g'H' = xH \cap xH' = x(H \cap H') \in B$$

并且 $x(H \cap H') \subset gH$、$g'H'$，验证即告完成。令 τ 表示我们刚刚验证的拓扑。注意，$\{xH \mid H \in F\}$ 是 $x \in G$ 的邻域基。

我们证明，(G,τ) 是一个拓扑群，是单群，并且 $F_{G,\tau} = F$。

由于 $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$，取逆元函数 $(-)^{-1}\colon G \to G$ 是连续的。为证明乘法映射 $*\colon G \times G \to G$ 连续，取 $x, y \in G$ 和 $xyH \in B$。$x(yHy^{-1})$ 和 yH 是 x, y 的开邻域，而 $x(yHy^{-1}) \times yH \subset G \times G$ 经 $*$ 映射到 $xyH \subset G$。因此，$*$ 连续，且 (G,τ) 是一个拓扑群。

现在，只需证明等式 $F_{G,\tau} = F$，因为拓扑群 (G,τ) 是单群这一点可由该等式立即推出。由于 F 的每个元素都是 (G,τ) 的开子群（即 $F_{G,\tau} \supset F$），我们证明反向包含关系 $F_{G,\tau} \subset F$。任取一个开子群 $U \in F_{G,\tau}$。由于 U 是开集，且 F 是单位元的邻域基，存在 $H \in F$ 使得 $H \subset U$。因为 F 向上封闭，开子群 U 也属于 F，从而完成证明。□

根据上述论证，我们得到下面的推论。

推论 5.12（群作用拓扑斯的商）。对于群 G，以下三个概念之间存在双射对应：

（1）群作用集合 $\mathbf{Set}^{G^{\mathrm{op}}}$ 所对应拓扑斯的（超）连通商；（2）$\mathbf{Sub}_{\mathbf{Group}}(G)$ 的共轭闭滤子（定义 5.7）；（3）G 上的简单拓扑群结构（定义 5.8）。

特别地，群作用拓扑斯的每个商都是由 G 上的某个（简单）拓扑群结构诱导的。

证明。前一个陈述由上述论证推出。后一个陈述则通过具体检验这一对应关系得到验证。□

我们以提及从群推广到拓扑群以及幺半群的两种可能性来结束本小节。

注 5.13（拓扑群作用托扑斯的商）。那么，拓扑群作用托扑斯的商呢？这同样是布尔格罗滕迪克托扑斯的一个典型例子。实际上，我们已经基本完成了对拓扑群作用托扑斯的所有商的分类。这是因为，拓扑群作用托扑斯是一个（离散）群作用托扑斯的商，而商的商本身仍然是商。

具体而言，考虑连续作用的托扑斯 $\mathbf{Cont}(G,\tau)$，其中拓扑群为 (G,τ)。由于这个托扑斯也是一个布尔格罗滕迪克托扑斯，我们可以应用命题 5.3。然后，根据引理 5.11，我们可以假设它是单群的。于是可以得出，$\mathbf{Cont}(G,\tau)$ 的一个商与一个等于或弱于 τ 的简单拓扑群结构之间存在双射对应。从这一更一般的观点来看，我们可以将推论 5.12 视为 τ 是离散拓扑这一特殊情形。

注记 5.14（幺半群作用托扑斯的超连通商）。在本注记中，我们简要说明本小节的讨论在多大程度上可以从群推广到幺半群。

至少有两点不同。首先，幺半群作用托扑斯不一定是布尔的，因此我们无法应用命题 5.3。换言之，有些商可能不是超连通的。另一点不同是，局部状态分类器 Ξ 并非由所有子代数（在此情形下即子幺半群）组成，这与群的情形不同。根据例 3.18 计算得到的局部状态分类器，是所有定义在 M 上的、与 M 对 M 自身的右作用相容的等价关系的集合。换言之，它是 M的所有右同余构成的集合。

在 [Rog21a, 第 5.3 节1], 中，超连通商的分类是用右同余给出的，其方式与我们的主定理针对这一特例所提供的方式基本相同。此外，同一篇论文还利用自然数的加法幺半群（$\mathbb{N}, +, 0$），给出了一个并非由拓扑幺半群结构诱导的幺半群作用拓扑斯的超连通商。

6. Conclusions and future works

本文定义了局部状态分类器这一概念（定义 3.3）。借助这一概念，我们得到了超连通商的内部参数化（定理 4.1）。通过计算一个对象——局部状态分类器——即可对所有超连通商进行分类。证明主定理后，我们展示了若干熟悉拓扑斯的分类。作为主定理的推论，我们针对 Lawvere 开问题 [Law16] 给出了一个部分解答。这是解决该开放问题迈出的新一步，尤其是从内部参数化的角度来看。

然而，仍有许多工作有待完成。我们将其中一些列为未来的研究方向，包括一些尚不明确的方向。

首先，探寻将我们的内部参数化推广到所有商（而不限于超连通商）的可能性，以解决 Lawvere 的第一个开放问题 [Law16]。然而，似乎不可能仅通过操作局部状态分类器来实现这种推广。这是因为局部状态分类器似乎太小，无法为所有商提供参数化。例如，在 DirGraph 的情形中，其局部状态分类器和子对象分类器都是有限图。然而，$\mathbf{DirGraph} \simeq \mathbf{Set}^{\mathrm{Par}^{\mathrm{op}}}$ 的商的数量至少为连续统势。（这个下界来自这样一个事实：集合 $\mathbb{Z}^{\mathrm{op}}$ 是 DirGraph 的一个商。这是因为在范畴的 2-范畴 Cat 中，存在一个从平行态射范畴 Par（例 3.6）到群 $\mathbb{Z}$ 的松弛满态射 $\mathrm{Par} \to \mathbb{Z}$。关于松弛满态射，参见 [Ada+01] 或 [EV02]。）因此，如果要寻求对所有商进行类似的内部参数化，可能需要做出根本性的修改。

其次，探索局部状态分类器在拓扑斯之外、其他范畴中的其他应用。虽然局部状态分类器的定义在其他范畴中也有意义，但我们尚不了解局部状态分类器的其他应用。一个障碍是，在一些常见范畴中，局部状态分类器往往就是终对象（或退化对象），如例 3.9 和例 B.4 所示。为避免这个问题，局部状态分类器的某些变体或许会有用。定义局部状态分类器的变体有很多选择。例如，我们可以定义所有正则单态射或分裂单态射的余极限，而不是所有单态射的余极限；也可以在一个对象上定义代数结构，或者

通过幺半结构，而不只是像小节 3.5 中那样通过笛卡尔结构，来定义局部状态分类器（的变体）Ξ。

第三，找出一类能够保留局部状态分类器的函子。研究范畴结构的一种基本方法，是考察函子对该结构的保留情况。然而，我们尚未找到一类合适的函子，能够保留局部状态分类器。虽然我们将局部状态分类器定义为一个余极限，但余连续函子也未必能保留它，因为图表 $\mathcal{C}_{\mathrm{mono}}$ 的指标范畴可能很大，并且取决于所考虑的范畴 $\mathcal{C}$。如备注 3.20 所示，即使是层化函子（它是本质满、左正合的左伴随函子），也未必能保留它。

第四，阐明与较小商类的分类之间的关系。某些较小商类的分类已为人所知，包括例 2.6 中提到的原子商分类。我们希望阐明如何用局部状态分类器来描述受限类的超连通商。

最后，研究它与其他内部结构的相互作用。本文的一个关键目标是找出与外部结构——超连通商——相对应的内部结构。成功将其内部化之后，自然就会考虑它与其他内部结构之间的关系。例如，由于 Lawvere-Tierney 拓扑是子对象分类器 Ω 上的幂等内部半格同态，因此从一个内部半格同态 $\Xi \to \Omega$ 出发，只需通过复合就能得到一个新的同态 $\Xi \to \Omega$。就相应的外部结构而言，如果我们有一个给定拓扑斯（带有局部状态分类器）的子拓扑斯和一个超连通商，就可以得到一个新的超连通商。若没有我们的内部参数化，这一事实并不显而易见。更一般地，所有内部半格自同态 $\Omega \to \Omega$ 构成的 Monoid（在 [KM21] 中称为生产性弱 Lawvere-Tierney 拓扑）自然作用于所有超连通商组成的集合上。

Acknowledgements

作者谨向 Ryu Hasegawa 和 Hisashi Aratake 致谢，感谢他们提出建议并给予支持；也感谢 Yuta Yamamoto 和 Haruya Minoura 进行了有益的讨论。本研究得到推动变革的前沿物理与数学项目（FoPM）——世界领先创新研究生教育项目（WINGS）——东京大学的资助。

Appendix A. Internal semilattices and the universal filter

本附录简要回顾内部半格（定义 A.1）及其滤子（定义 A.2）的概念，并证明拓扑斯的子对象分类器在所有内部滤子中具有普遍性（命题 A.8）。

首先，我们定义（有界交）半格的等式理论，而非通常的（集合 Set 中的）半格，因为我们要在其他笛卡尔范畴（例如拓扑斯）中解释它。关于等式理论的内部解释，参见 [MM12，第 IV.8 节。]。

定义 A.1（半格的等式理论）。半格的等式理论由两个运算 $\top$、$\wedge$ 组成，其元数分别为 0 和 2，并满足四条公理

- $x \wedge \top = \top \wedge x = x$

- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- $x \wedge y = y \wedge x$
- $x \wedge x = x$。

半格理论与幂等交换 Monoid 理论是同一回事。不过，在本文中，我们更倾向于称其为半格，以强调其序结构。

内部半格的内部滤子可以定义为一个“向上封闭”的子代数。

定义 A.2（内部滤子）。设 $\mathcal{C}$ 是一个有限完备范畴，且 $(X, \top, \wedge)$ 是一个内部半格。$(X, \top, \wedge)$ 的内部滤子是满足以下三个条件的子对象 $m\colon\ F \rightarrowtail X$

（1）（在 $\top$ 下封闭）存在一个（必然唯一的）态射 $\top_F\colon\ \mathbf{1} \to F$，使得

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\top_F} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbf{1}}} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & X \end{array}$$

可交换。

(2)（在 $\wedge$ 下封闭）存在一个（必然唯一的）态射 $\wedge_F\colon\ F \times F \to F$，使得

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \xrightarrow{\wedge_F} & F \\ \downarrow{\scriptstyle m \times m} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ X \times X & \xrightarrow{\wedge} & X \end{array}$$

可交换。

(3)（向上封闭）对于以下对象的等化子 $k\colon \mathrm{Eq} \rightarrowtail X$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & X \times X & & \\ & & & \overset{m \times \mathrm{id}_X}{\nearrow} & & \overset{\wedge}{\searrow} & \\ \mathrm{Eq} & \xrightarrow{k} & F \times X & & & & X \\ & & & \underset{\mathrm{pr}_1}{\searrow} & & \underset{m}{\nearrow} & \\ & & & & F & & \end{array},$$

存在一个（必然唯一的）态射 $l\colon \mathrm{Eq} \to F \times F$，使得

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Eq} & \xrightarrow{k} & F \times X \\ \downarrow{\scriptstyle l} & \nearrow{\scriptstyle \mathrm{id}_F \times m} & \\ F \times F & & \end{array}$$

交换。

上述第三个条件只是以下内容的图表化表述

$$\forall (u, x) \in F \times X, (u \wedge x = u \implies (u, x) \in F \times F),$$

这意味着 F 是向上封闭的。

示例 A.3（Set）。在集合范畴 Set 中，内部半格就是通常意义下的半格。它等同于带有限交的偏序集，并包含最大元（= 零元交）。内部滤子是通常意义下的滤子，即一个向上封闭且对有限交封闭的子集。注意，零元交的存在确保了滤子非空。

例 A.4（预层拓扑斯）。在小范畴$\mathcal{C}$上的预层拓扑斯 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 中，预层 $P\colon\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ Set上的内部半格结构，是对每个 $c \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$都赋予 Pc上的一个半格结构，并且对每个f，$Pf\colon\ Pc' \to Pc$都是半格同态。P 的内部滤子是一个子预层$F \rightarrowtail P$，使得对于每个 $c \in \mathrm{ob}(C)$，Fc都是 Pc的通常意义下的滤子。

与预层拓扑斯的情形类似，如果 $\mathcal{C}$ 是局部小的，那么借助米田引理，可以从外部描述内部半格和内部滤子，并将其归结为通常半格和滤子的理论。

例 A.5（子对象分类器 Ω）。回忆一下，在初等拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中，子对象分类器 Ω具有典范的内部Heyting代数结构（[参见 MM12，IV.8. 定理 1]）。将该结构加以限制后，Ω具有典范的内部半格结构。在 Lawvere-Tierney 拓扑的语境中，将 Ω 视为内部半格而非内部Heyting代数是广为人知的。事实上，Lawvere-Tierney 拓扑是 Ω 的幂等内部半格自同态，而不是内部Heyting代数自同态。（普遍）子对象

$$\mathrm{true}\colon \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$$

是 Ω 的一个内部滤子。

下面我们证明，对于任意初等拓扑斯 $\mathcal{E}$，子对象分类器 $\mathrm{true}\colon\ \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$ 是泛内部滤子。为证明这一点，我们先准备以下两个引理。

引理 A.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限完备范畴，X 是一个内部半格，且 $m\colon\ F \rightarrowtail X$ 是其内部滤子。那么，以下两个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\top_F} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbf{1}}} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & X \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \xrightarrow{\wedge_F} & F \\ \downarrow{\scriptstyle m\times m} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ X \times X & \xrightarrow{\wedge} & X, \end{array}$$

它们在定义 A.2 中，都是拉回图。

证明。第一个图表可以分解为两个基本拉回图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\top_F} & F & \xrightarrow{\mathrm{id}_F} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbf{1}}} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_F} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\top_F} & F & \xrightarrow{m} & X. \end{array}$$

第二个图表是拉回图这一陈述，是公式的图表化表达

$$\forall (x, x') \in X \times X,\ x \wedge x' \in F \implies (x \in F \text{ and } x' \in F).$$

如果 $\mathcal{C}$ 是局部小的，根据米田引理，只需在 Set 中证明这一点。在 Set 中，所要证明的陈述可由内部滤子的第三个条件“向上封闭”轻易验证。即使 $\mathcal{C}$ 不是局部小的，也可以通过直接的图表追逐或广义元素的论证来证明这一点。□

引理 A.7（滤子的拉回稳定性）。设 $\mathcal{C}$ 为有限完备范畴，X、Y为 $\mathcal{C}$中的内部半格，$f\colon X \to Y$为一个内部半格同态，且 $m\colon F \rightarrowtail Y$为 Y的一个内部滤子。那么 m沿 f的拉回 $f^*m\colon f^*F \rightarrowtail X$

$$\begin{array}{ccc} f^*F & \longrightarrow & F \\ {\scriptstyle f^*m}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle m} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

是 X的一个内部滤子。

证明。如果 $\mathcal{C}$ 是局部小的，利用米田引理，只需对 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 证明此引理。在 Set 中，滤子经半格同态的逆像仍然是滤子。对于 $\mathcal{C}$ 不是局部小的情形，也可以通过直接的图表追逐轻易证明此引理。□

下面继续证明子对象分类器作为内部滤子的泛性质。

命题 A.8（子对象分类器是泛内部滤子）。设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，$\mathsf{true}\colon \mathbf{1} \to \Omega$ 是其子对象分类器，X 是一个内部半格，且 $m\colon F \rightarrowtail X$是 X的一个子对象。那么，$m\colon F \rightarrowtail X$是一个内部滤子，当且仅当特征映射 $\chi_F\colon X \to \Omega$ 是一个内部半格同态。

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ {\scriptstyle m}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{true}} \\ X & \xrightarrow{\chi_F} & \Omega \end{array}$$

因此，内部半格同态 $X \to \Omega$ 与 X的内部滤子之间存在双射对应。

证明。根据引理 A.7，只需证明对于任意内部滤子 $m\colon F \rightarrowtail X$，$\chi_F$ 是一个内部半格同态。

首先，我们证明 χ_F 保留 $\top$，即

$$\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle \top}\nearrow & X \\ \mathbf{1} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_F} \\ & {\scriptstyle \mathrm{true}}\searrow & \Omega \end{array}$$

交换。要证明这一点，只需注意到 $\chi_F \circ \top$ 的相应子对象等于 $\mathsf{id}_{\mathbf{1}}\colon \mathbf{1} \rightarrowtail \mathbf{1}$。由于 $m\colon F \rightarrowtail X$ 是一个内部滤子，根据引理

A.6 以及 χ_F 的定义，我们得到以下拉回图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{\top_F} & F & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_\mathbf{1}} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle m} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{true}} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow[\top]{} & X & \xrightarrow{\chi_F} & \Omega. \end{array}$$

复合拉回图表正是我们所需要的。

其次，我们证明 χ_F 保持 $\wedge$，即

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\wedge} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_F \times \chi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_F} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

可交换。再次根据引理 A.6，我们得到以下两个拉回图表：

$$\begin{array}{ccccc} F \times F & \xrightarrow{!\times!} & \mathbf{1} \times \mathbf{1} & \xrightarrow{\wedge_\mathbf{1}(=!)} & \mathbf{1} \\ \downarrow{\scriptstyle m\times m} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{true}\times\mathrm{true}} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{true}} \\ X \times X & \xrightarrow{\chi_F \times \chi_F} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccc} F \times F & \xrightarrow{\wedge_F} & F & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\ \downarrow{\scriptstyle m\times m} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle m} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{true}} \\ X \times X & \xrightarrow{\wedge} & X & \xrightarrow{\chi_F} & \Omega. \end{array}$$

这表明 $\wedge \circ (\chi_F \times \chi_F)$ 和 $\chi_F \circ \wedge$ 是同一子对象 $m \times m\colon F \times F \rightarrowtail X \times X$ 的特征映射。□

最后，我们通过函子的可表示性来重新表述命题 A.8。对于局部小拓扑斯 $\mathcal{E}$，存在一个从 $\mathcal{E}$ 中的内部半格范畴到集合范畴 Set 的反变函子，它将内部半格 X 映射到 X 的所有内部滤子的集合。子对象分类器 Ω 表示这个函子，其泛元为

$$\mathrm{true}\colon \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega.$$

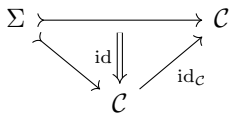
Appendix 附录 B. Existence theorem for a local state classifier

在本附录中，我们证明局部状态分类器的存在性定理。该定理足以证明局部状态分类器不仅存在于格罗滕迪克拓扑斯中（其具体构造见第 3.4 小节），也存在于等式理论的模型范畴中（例 B.4）。

我们的方法与一般伴随函子定理的证明类似。在假设存在一个以某种意义“生成”该范畴的对象集的前提下，我们将局部状态分类器归约为一个小图的余极限。为使其精确化，我们首先定义“单态稠密性”的概念。

首先，回顾稠密全子范畴的概念。设 $\Sigma \subset \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的对象集。为方便起见，也用 Σ 表示由 $\mathcal{C}$ 中的对象构成的全子范畴

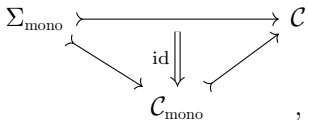
。那么，如果以下图表成立，全子范畴 Σ 就称为稠密的



是一个逐点左 Kan 延拓。

我们对存在性定理所作的假设“单态稠密性”，是关于单态射的稠密性的一种变体。在下述定义中， Σ_{mono} 表示由 Σ中的对象所张成的 $\mathcal{C}_{\mathrm{mono}}$ 的全子范畴。

定义 B.1。（单态稠密性）对于范畴 $\mathcal{C}$ 和对象集 $\Sigma \subset$ ，若 ob($\mathcal{C}$) 满足以下图表



，

（其中上述所有函子都是典范包含）是一个逐点左 Kan 延拓。

换言之，对于任意对象 $X \in$，若 ob($\mathcal{C}$) 中的 Σ 满足以下条件，则 X 是下列函子的余极限

$$\Sigma_{\mathrm{mono}}\downarrow X \longrightarrow \Sigma_{\mathrm{mono}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

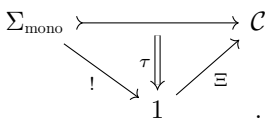
带有典范余锥，其中域 $\Sigma_{\mathrm{mono}}\downarrow X$ 表示.....的逗号范畴

$$\Sigma_{\mathrm{mono}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{mono}} \xleftarrow{X} 1.$$

由于 $\Sigma_{\mathrm{mono}} \downarrow X$ 等价于属于 Σ的 X 的子对象偏序集， Σ 的单态稠密性意味着，$\mathcal{C}$ 中的每个对象都是Σ中所有子对象的余极限，以一种典范的方式。

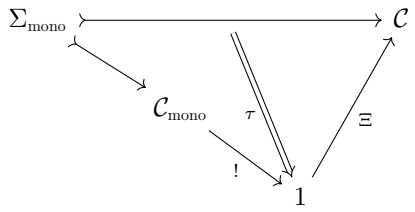
命题 B.2（存在性定理）。如果局部小且余完备范畴$\mathcal{C}$ 具有一个由对象 $\Sigma \subset$ ob($\mathcal{C}$)组成的单态稠密（小）集合，那么 $\mathcal{C}$ 具有一个局部状态分类器。

证明。由于$\mathcal{C}$是局部小的，且Σ是一个（小）集合， $\mathcal{C}$的余完备性意味着存在如下左 Kan 延拓（= 是 $\Sigma_{\mathrm{mono}} \rightarrowtail \mathcal{C}$的余极限），

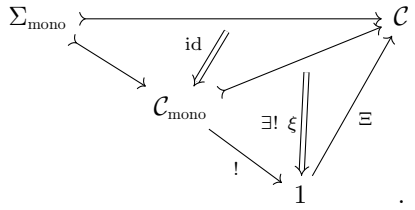


.

根据 Σ 的单态稠密性和左 Kan 延拓的泛性质，上述图表等于

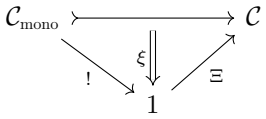


唯一分解为



.

那么，



如上所定义，是一个左 Kan 延拓，并给出了 $\mathcal{C}$ 的局部状态分类器。□

例 B.3.（格罗滕迪克拓扑斯）现在，我们为格罗滕迪克拓扑斯存在局部状态分类器给出另一种证明；该结论已在第 3.4 小节中证明。对于小站点 $(\mathcal{C}, J)$，若一个 J-层 P 由单个元素生成，即存在对象 $c \in \mathrm{ob}(C)$ 和满态射 $\mathrm{ay}(c) \twoheadrightarrow P$ in $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$，则称之为由单个元素生成。我们将所有由单个元素生成的 J-层组成的（本质上小的）集合定义为 Σ 。

根据引理 3.13，集合 Σ 是单态稠密的。（为验证这一点，可以利用如下事实：包含函子 $\mathrm{Sh}(C, J) \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$（它是全忠实的）反映所有余极限。）因此，我们可以对 $\mathrm{Sh}(C, J)$ 应用命题 B.2，从而得到一个局部状态分类器。

例 B.4（等式理论的模型范畴）。对于任意等式理论 T，T-代数的范畴 T-Alg 都有一个局部状态分类器。这是因为 T-Alg 是局部小且余完备的（例如，参见 [Rie17，推论 5.6.14。] 或 [Bor94，第 3 节。4]），所有有限生成 T-代数组成的集合 Σ 本质上是小的，并且每个 T-代数都以典范方式成为其有限生成子代数的余极限。此例包括例 3.7 和例 3.10。

然而，熟悉代数范畴的局部状态分类器往往是终对象。例如，群范畴 Group、环范畴 Ring、交换环范畴 CRing、幺半群范畴 Monoid、阿贝尔群范畴 Ab、格范畴 Lattice 和向量空间范畴 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ 的局部状态分类器都是终对象。

References

[Ada+01] Jiri Adamek、Robert El Bashir、Manuela Sobral 和 Jiri Velebil。《关于作为松弛满态射的函子》。Theory and Applications of Categories 8 (2001)，第 509–521 页。[Bor94] Francis Borceux。《范畴代数手册：第 2 卷，范畴与结构》。剑桥大学出版社，1994。[EV02] Robert El Bashir 和 Jiri Velebil。《预层的同时反射与余反射子范畴》。Theory and Applications of Categories 10.16 (2002)，第 410–423 页。[Fre80] Peter Freyd。《选择公理》。Journal of Pure and Applied Algebra 19 (1980)，第 103–125 页。[Hen18] Simon Henry。《拓扑斯的局部化同位群》。Theory and Applications of Categories 33.41 (2018)，第 1318–1345 页。[Joh81] Peter T. Johnstone。《几何态射的分解定理 I》。Cahiers de topologie et g ´eom ´etrie diff ´erentielle cat ´egoriques 22.1 (1981)，第 3–17 页。[Joh02a] Peter T. Johnstone。《大象速写：托扑斯理论纲要》第 1 卷。牛津大学出版社，2002。[Joh02b] Peter T. Johnstone。《大象速写：托扑斯理论纲要》第 2 卷。牛津大学出版社，2002。[Joh14] Peter T. Johnstone。《托扑斯理论》。Courier Corporation，2014。[Joy81] André Joyal。《形式级数的组合理论》。数学进展 42.1 (1981)，第 1–82 页。[KM21] Zeinab Khanjanzadeh 和 Ali Madanshekaf。《拓扑斯上的弱拓扑》。伊朗数学会通报 47.2 (2021)，第 461–486 页。[Law16] F. William Lawvere。《托扑斯理论中的开放问题》。2016 年 7 月。URL：https://www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/Openproblemstopos.htm。[MM12] Saunders MacLane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：托扑斯理论初探》。施普林格科学与商业媒体，2012。[Rie17] Emily Riehl。《语境中的范畴论》。Courier Dover Publications，2017。[Rog21a] Morgan Rogers。《幺半群作用的拓扑斯》。arXiv 预印本 arXiv:2112.10198 (2021)。[Rog21b] Morgan Rogers。《拓扑幺半群作用的拓扑斯》。arXiv 预印本 arXiv:2105.00772 (2021)。[Ros82] Kimmo I. Rosenthal。《格罗滕迪克拓扑斯中的商系统》。Cahiers de topologie et g ´eom ´etrie diff ´erentielle cat ´egoriques 23.4 (1982)，第 425–438 页。