arXiv:2302.06977v1 [math.RT] 14 Feb 2023

N-重拼接与拟戈伦斯坦代数

DAWEI SHEN 和 HAO SU*

Abstract. 本文研究 Gorenstein 投射模的稳定范畴的 n-余拼接与代数的虚Gorenstein性之间的关系。设 A、B 和 C 为有限维代数。我们证明，若 Gorenstein 投射 A-模的稳定范畴相对于 B 和 C 的稳定范畴存在一个 n-重拼接，且满足 $n \geq 2$，则 A是虚 Gorenstein 当且仅当 B 和 C 也是如此。

1. Introduction

三角范畴的余 recollement 由 Beilinson、Bernstein 和 Deligne 引入[BGS88] ，用于研究 pervers 层，如今在代数几何和表示论中发挥着重要作用。粗略地说，余 recollement 使我们能够将一个三角范畴分解为两个相对较小的范畴。这一技术在导出范畴研究中非常有用，尤其有助于化简同调猜想和计算同调不变量。

Gorenstein投射模的概念可追溯至 Auslander 和 Bridger 的工作 [AB69]。此后，它们一直是相对同调代数的核心。文献[Bel05] 中引入的虚拟 Gorenstein 代数是 Gorenstein 代数的自然推广，并且与真正的 Gorenstein 代数共享许多性质。虚Gorenstein性为研究戈伦斯坦对称性猜想提供了有用工具。

在 [QH16], 中，秦和韩引入了三角范畴的 n-余 recollement 概念，并阐明了代数的导出范畴的 n-余 recollement 与代数的 Gorenstein 性之间的关系。受他们工作的启发，我们研究 Gorenstein 投射模的稳定范畴的 n-余 recollement 与代数的虚Gorenstein性之间的关系。设 $\mathcal{A}$ 为一个具有足够投射对象的阿贝尔范畴。我们用 GP($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 的一个满子范畴，它由所有 Gorenstein投射对象构成；并用 $\underline{\text{GP}}(\mathcal{A})$ 表示 GP($\mathcal{A}$) 的稳定范畴。

我们的主要结果如下。

定理（I）. 设 A、B 和 C 为有限维代数，且 $\underline{\text{GP}}(A)$ 相对于 $\underline{\text{GP}}(B)$ 和 $\underline{\text{GP}}(C)$ 具有一个 n-余 recollement, ~~并~~且该结构~~限制~~在有限维模上。则

(1) $n = 1$: 如果 A 是虚 Gorenstein，那么 B 和 C也都是；

Date：2023年2月15日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 18 E30，16E10。*Key words and phrases.* 余 recollement，虚拟 Gorenstein 代数。*通讯作者。

(2) $n \geq 2$: A 是虚 Gorenstein，当且仅当 B 和 C也都是。

我们还研究了代数的导出范畴的 n-余 recollement 与代数的虚 Gorenstein性之间的关系。我们得到如下结果。

定理（II）。设 A、B 和 C 为有限维代数，且 $\mathcal{D}$(Mod$A$) 相对于 $\mathcal{D}$(Mod$B$) 和 $\mathcal{D}$(Mod$C$) 存在一个 n-余 recollement。那么

（1） $n = 5$: 如果 A 是虚 Gorenstein，那么 B 和 C 也如此；

（2） $n \geq 6$: A 是虚 Gorenstein，当且仅当 B 和 C 也如此。

作为定理（II）的一个应用，我们重新证明虚 Gorenstein 性在导出等价下保持不变。

本文组织如下。第 2 节回顾 n-余 recollement 的一些基本事实。第 3 节研究 Gorenstein 投射模的稳定范畴的 n-余 recollement 与代数的虚 Gorenstein性之间的关系，并证明定理（I）。第 4 节研究代数的导出范畴的 n-余 recollement 与代数的虚Gorenstein性之间的关系，并证明定理（II）。

2. n-RECOLLEMENTS OF TRIANGULATED CATEGORIES

本节回顾三角范畴的 n-余 recollement 的一些标准事实。

定义 2.1 ([BGS88])。设 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 是三角范畴。一个余 recollement 的 $\mathcal{D}$ 相对于 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 是如下图表

$$\mathcal{D}' \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{i_*=i_!}}}} \mathcal{D} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{j^!=j^*}}}} \mathcal{D}''$$

由三角范畴和三角函子构成，并满足

(1) (i^*, i_*)、$(i_!, i^!)$、$(j_!, j^!)$ 和 (j^*, j_*) 是伴随对；(2) i_*、$j_!$ 和 j_* 是全嵌入；(3) $j^!i_* = 0$ （因此 $i^!j_* = 0$ 和 $i^*j_! = 0$ 也如此）；(4) 对每个 $X \in D$，存在三角

$$i_!i^!(X) \to X \to j_*j^*(X) \to i_!i^!(X)[1]$$

$$j_!j^!(X) \to X \to i_*i^*(X) \to j_!j^!(X)[1]$$

其中箭头由伴随给出。

设三角范畴 $\mathcal{T}$具有小余积，若对象 $X \in \mathcal{T}$使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}$(X –) 保持小余积，则称其为紧致对象。我们用 $\mathcal{T}^c$ 表示由 $\mathcal{T}$中所有紧对象构成的满子范畴。在余 recollement 中，第一行的函子保持紧对象。对于 $\mathcal{T}$中的对象集合 $\mathcal{S}$，我们用 Loc$\mathcal{S}$ 表示包含$\mathcal{S}$ 且对取余积封闭的 $\mathcal{T}$的最小三角子范畴。若三角范畴 $\mathcal{T}$具有小余积，且存在由紧致对象组成的集合 $\mathcal{S}$，使得 $\mathcal{T} =$ Loc$\mathcal{S}$，则称其为紧生成。

引理 2.2 ([Nee92，定理 2。1])。设 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 均为紧生成且

$$\mathcal{D}' \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{-i_*=i_!\rightarrow}}}} \mathcal{D} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{-j^!=j^*\rightarrow}}}} \mathcal{D}''$$

是相对于 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 $\mathcal{D}$ 余 recollement。此时，第一行限制到紧对象，而 i^* 的限制在直和项意义下是稠密的。

引理 2.3 ([LL15，命题 2.5])。设

$$\mathcal{D}' \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{-i_*=i_!\rightarrow}}}} \mathcal{D} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{-j^!=j^*\rightarrow}}}} \mathcal{D}''$$

是相对于 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 $\mathcal{D}$ 余 recollement。设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{T}' = i^*\mathcal{T}$ 的厚子范畴，并且 $\mathcal{T}'' = j^*\mathcal{T}$。若 $i_*i^*\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$ 且 $j_*j^*\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$，则存在一个三角商范畴的余 recollement

$$\mathcal{D}'/\mathcal{T}' \underset{\tilde{i}^!}{\overset{\tilde{i}^*}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{-\tilde{i}_*=\tilde{i}_!\rightarrow}}}} \mathcal{D}/\mathcal{T} \underset{\tilde{j}_*}{\overset{\tilde{j}_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{-\tilde{j}^!=\tilde{j}^*\rightarrow}}}} \mathcal{D}''/\mathcal{T}''$$

定义 2.4 ([QH16，定义 2])。设 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 是三角范畴，并且 n 是一个正整数。相对于 n-余 recollement 的 $\mathcal{D}$ 相对于 $\mathcal{D}'$ 和$\mathcal{D}''$ 是一个包含 $n+2$ 行

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \mathcal{D} & \mathcal{D}'' \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

三角范畴及三角函子，使得每连续三行构成一个余 recollement。

显然，1-再拼接就是一个余 recollement。此外，如果 $\mathcal{D}$相对于 D' 和 D'' admits an n-recollement R，那么 m中的任意连续 R 行构成一个 $(m-2)$-recollement，$3 \leq m \leq n$。N-recollement 在其他一些文献中也称为高度为 n 的阶梯（参见 [HKLY17，第 3]节）。

我们关注代数导出范畴的 n-余 recollement。为方便起见，固定一个域 k。设 A 是一个有限维 k-代数。我们考虑左 A-模的范畴 Mod$A$，以及它的满子范畴 mod$A$、Proj$A$ 和 proj$A$，它们分别由有限生成模、投射模和有限生成投射模组成。设 $\mathcal{A}$ 是 Mod$A$ 的上述任意一个子范畴，对于 $* \in \{\emptyset, b\}$，我们用 $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$（分别用 $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$）表示满足相应有界性条件的 $\mathcal{A}$ 中对象的上链复形的导出范畴（分别为同伦范畴）。

下面的引理将在定理 4.5 的证明中使用。

引理 2.5 ([HKLY17，引理 2.7],[Cum23，引理 2.14])。设 A 和 B是两个有限维代数，且 $F: \mathcal{D}(\mathrm{Mod}A) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}B)$是一个具有右伴随 G的三角函子。考虑以下条件

(1) F 保持 $\mathcal{K}^b$(proj);

(2) G 有一个右伴随；(3) G保持 $\mathcal{D}^b$(mod)；(4) G保持 $\mathcal{D}^b$(Mod)；(5) F 保持 $\mathcal{K}^b$(Proj)。那么我们有 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$(4) $\Leftrightarrow$(5)。

3. n-RECOLLEMENTS OF STABLE CATEGORIES

本节将回顾虚拟 Gorenstein 代数的定义，并证明定理（I）。

设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。我们用 P($\mathcal{A}$) 表示由所有投射对象构成的 $\mathcal{A}$ 的满子范畴。

定义 3.1 ([阿贝尔范畴69]). 设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。若对象 $M \in \mathcal{A}$ 称为 $Gorenstein\ projective$ ，则存在一个复形 $P^\bullet$

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

由 P($\mathcal{A}$) 中的对象组成，使得

(1) $P^\bullet$ 是无挠的；(2) 对所有 $Q \in$ P($\mathcal{A}$)，复形 $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}^\bullet(P^\bullet, Q)$ 是无挠的；(3) $M \simeq \mathrm{Im}d^0$。

我们用 GP($\mathcal{A}$) 表示由所有 Gorenstein投射对象构成的 $\mathcal{A}$ 满子范畴。GP($\mathcal{A}$) 是一个 Frobenius范畴，其投射对象恰好是 $\mathcal{A}$中的投射-内射对象。稳定范畴 GP($\mathcal{A}$) 是一个三角范畴。存在一个三角嵌入 GP($\mathcal{A}$) $\hookrightarrow \mathcal{D}^b_{sg}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{K}^b(\mathrm{P}(\mathcal{A}))$ ([Buc21],[Hap91])。

拟戈伦斯坦代数由 [Bel05]引入。它们与真正的 Gorenstein 代数有许多共同性质。这类代数具有丰富的同调结构，并且在导出等价和 Morita型稳定等价等各种运算下封闭。

定义 3.2 ([Bel05])。 设 A 是一个有限维代数。那么，当且仅当对于所有 A, $virtually\ Gorenstein$ 对任意 $X \in \mathrm{Mod}A$，函子 $\mathrm{Ext}^i_A(X, -)$ 在所有 Gorenstein内射模上均为零，当且仅当 $\mathrm{Ext}^i_A(-, X)$ 对所有 $i > 0$ 在所有 Gorenstein 投射模上均为零时，

不仅戈伦斯坦代数，根平方为零代数和有限表示型代数也都是虚拟 Gorenstein 代数。我们通过 n-余 recollement 研究代数的虚Gorenstein性。

设 A 是一个有限维代数，我们分别将 GP(Mod$A$) 和 GP(Mod$A$) 简写为 GP(A) 和 GP(A)。根据 [Bel05], ，三角范畴 GP(A) 是紧生成的。

令 Gp(A) $=$GP(A)$\cap$mod$A$和 Gp(A) 为 Gp(A) 的稳定范畴。存在一个满三角嵌入 Gp(A) $\hookrightarrow$(GP(A))^c。

下面的引理给出了虚拟 Gorenstein 代数的一个等价刻画。

引理 3.3 ([Bel05，定理 8。2])。 设 A 是一个有限维代数，A 当且仅当 $virtually\ Gorenstein$ 是 $(\mathrm{GP}(A))^c = \mathrm{Gp}(A)$。

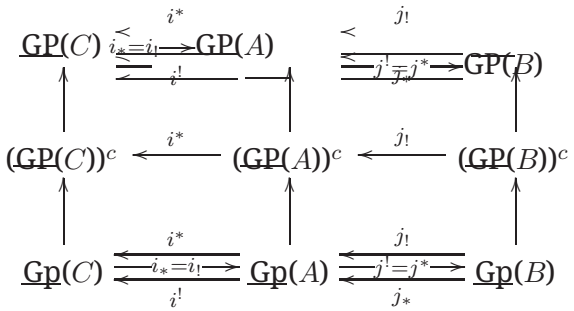
定理 3.4. 设 A、B 和 C 是有限维代数，且 GP(A) 相对于 GP(C) 和 GP(B) 存在一个 n-余 recollement，并且该结构限制到 Gp。

(1) $n = 1$: 若 A 是虚拟 Gorenstein 代数，则 B 和 C 也是；(2) $n \geq 2$: A 是虚拟 Gorenstein 代数，当且仅当 B 和 C 也是。

证明。(1) 给定一个余 recollement

$$\mathrm{GP}(C) \rightleftarrows \mathrm{GP}(A) \rightleftarrows \mathrm{GP}(B)$$

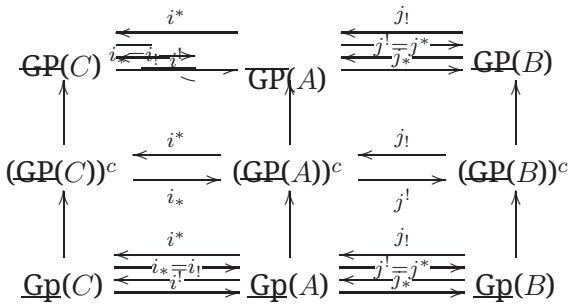
在定理的条件下，我们有如下图示。



假设 A 是虚 Gorenstein 的。那么 (GP(A))^c = Gp(A)。对于任意对象$Z \in$ (GP(B))^c, 我们有 and $Z \cong j^!j_!Z$ 属于 GP(B)。由于 $j_!Z \in$ (GP(A))^c =Gp(A)，我们有 $j^!j_!Z \in$ Gp(B)。于是 (GP(B))^c =Gp(B)。根据引理 3.3, B 是一个虚拟 Gorenstein 代数。

对于任意对象 $Y \in (\mathrm{GP}(C))^c$，由于 GP(Mod) 是紧生成的，根据引理 2.2 存在 $X \in (\mathrm{GP}(A))^c = \mathrm{Gp}(A)$，使得 Y 同构于 i^*X的一个直和项。由于 i^* 限制到 Gp 上，因此 $Y \in \mathrm{Gp}(C)$。根据引理3.3, C 是一个虚拟 Gorenstein 代数。

（2）类似地，我们有如下图表。



设 B 和 C 是虚拟 Gorenstein 代数。对于任意对象 $X \in$(GP(A))^c，我们在 GP(A) 中有如下三角。

$$j_!j^!X \to X \to i_*i^*X \to (j_!j^!X)[1]$$

由于 $j^!X \in$ (GP(B))^c = Gp(B)且 $i^*X \in$ (GP(C))^c =Gp(C), $j_!j^!X$ 和i_*i^*X 都属于 Gp(A)。因此, X 属于 Gp(A)。于是 A 是一个虚拟 Gorenstein 代数。□

例 3.5. 设 A 是一个有限维代数。取一个 $M \in \mathrm{mod}A$，使得 $\mathrm{pd}_A M < \infty$。我们考虑三角矩阵代数 $T =$

$\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$。根据 [Zha13]， M 与之相容。令 I 为从 Mod$A$ 到 Mod$T$的函子，它将 $X \in \mathrm{Mod}A$ 映到$\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mod}T$。由 [Zha13，定理 3.3], 可知， I 诱导出从 GP(A) 到 GP(T) 的三角等价，并且其限制为 Gp。于是由~~于定~~理 ~~3.4~~， A 是几乎 Gorenstein~~-~~的，当且仅当 T也是如此。

4. n-RECOLLEMENTS OF DERIVED CATEGORIES

本节考察导出范畴的 n-余 recollement 与虚 Gorenstein 代数之间的关系。本节中有一种特定类型的导出范畴之间的三角函子，称为非负函子，发挥着关键作用。

定义 4.1 ([HP17，定义 4.1])。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。若三角函子 $F: \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$满足以下条件，则称其为非负函子： F

(1) 对所有 $X \in \mathcal{A}$， $F(X)$ 同构于一个在所有负次数上同调均为零的复形；(2) 对所有 $P \in \mathrm{P}(\mathcal{A})$， $F(P)$ 同构于 $\mathcal{K}^b(\mathrm{P}(\mathcal{B}))$ 中一个所有负次数项均为零的复形。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴。若存在一个整数 n ，使得$F \circ [n]$ 为非负函子，则称三角函子 $F: \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ 是非负的（差至 $shifts$ ）。

引理 4.2 ([CHQW20，引理 3.4])。 设

$$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}B) \underset{G}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathcal{D}(\mathrm{Mod}A)$$

是一个伴随对，其中 F 和 G 保 $\mathcal{K}^b$（$proj$）。那么，经过平移后， G 限制为一个从 $\mathcal{D}^b$(Mod$B$) 到 $\mathcal{D}^b$(Mod$A$) 的非负函子。

注 4.3. 类似地，经过平移后，函子 G也限制为一个从 $\mathcal{D}^b$(mod$B$) 到 $\mathcal{D}^b$(mod$A$) 的非负函子。

下面的引理是连接导出范畴函子与稳定范畴函子的关键。

引理 4.4 ([HP17，定理 5.3])。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个具有足够多投射对象的阿贝尔范畴，并设 $F: \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ 是一个非负三角函子，它有一个右伴随 G 满足 $G(Q) \in \mathcal{K}^b(\mathrm{P}(\mathcal{A}))$ 对所有 $Q \in \mathrm{P}(\mathcal{B})$成立。那么，存在一个三角函子间的交换图（在自然同构意义下）。

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{GP}}\mathcal{A} & \hookrightarrow & \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{K}^b(\mathrm{P}(\mathcal{A})) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{F}} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \underline{\mathrm{GP}}\mathcal{B} & \hookrightarrow & \mathcal{D}^b(\mathcal{B})/\mathcal{K}^b(\mathrm{P}(\mathcal{A})) \end{array}$$

显然，如果 $F: \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ 在移位意义下为非负，则该引理仍然成立。

我们开始证明定理（II）。

定理 4.5. 设 A、B 和 C 为有限维代数，且 $\mathcal{D}$(Mod$A$) 相对于 $\mathcal{D}$(Mod$B$) 和 $\mathcal{D}$(Mod$C$) 存在一个 n-余 recollement。

(1) $n=5$: 如果 A 是虚 Gorenstein 代数，那么 B 和 C也如此；

(2) $n\geq 6$: A 是虚 Gorenstein 代数，当且仅当 B 和 C也如此。

证明。(1) 令

$$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}B) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathrm{Mod}A) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathrm{Mod}C) \tag{4.1}$$

是一个 5-重拼接。由引理 2.5，图 4.1 中间五行的函子 $\mathcal{D}^b$(Mod)，因此我们得到如下 3-重拼接。

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}C) \rightleftarrows \mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}A) \rightleftarrows \mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}B) \tag{4.2}$$

同样由引理 2.5，图 4.1 上部五行的函子$\mathcal{K}^b$(proj)，于是我们得到如下 3-重拼接。

$$\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}B) \rightleftarrows \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}A) \rightleftarrows \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}C) \tag{4.3}$$

由引理 4.2，图 4.2 上部四行的函子是非负的，允许平移。

由引理 2.5，图 4.2 上方五行中的函子$\mathcal{K}^b$(Proj) 限制，因此我们得到如下 2-重拼接。

$$\mathcal{K}^b(\mathrm{Proj}C) \rightleftarrows \mathcal{K}^b(\mathrm{Proj}A) \rightleftarrows \mathcal{K}^b(\mathrm{Proj}B) \tag{4.4}$$

由图 4.2、4.4 和引理 2.3，我们得到如下 2-重拼接

$$\mathcal{D}^b_{sg}(\mathrm{Mod}C) \rightleftarrows \mathcal{D}^b_{sg}(\mathrm{Mod}A) \rightleftarrows \mathcal{D}^b_{sg}(\mathrm{Mod}C) \tag{4.5}$$

由引理 4.4，我们得到如下余 recollement，其中所有函子都是图 4.5上方三行中函子的限制。

$$\underline{\mathrm{GP}}(C) \rightleftarrows \underline{\mathrm{GP}}(A) \rightleftarrows \underline{\mathrm{GP}}(B) \tag{4.6}$$

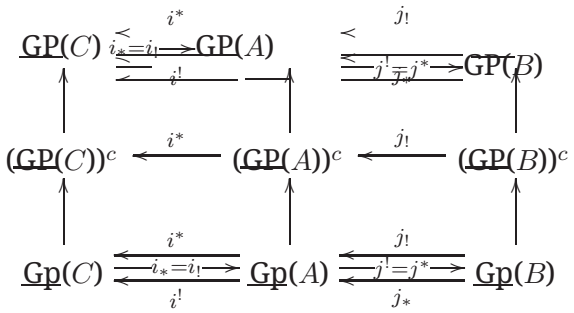
图 4.6 上方两行中的函子保留紧对象，因此我们得到如下图表。

$$(\underline{\mathrm{GP}}(C))^c \longleftarrow (\underline{\mathrm{GP}}(A))^c \longleftarrow (\underline{\mathrm{GP}}(B))^c \tag{4.7}$$

类似地，图 4.1 中间五行的函子限制到$\mathcal{D}^b$(mod)，而图 4.1 上方五行的函子限制到$\mathcal{K}^b$(proj)。由注 4.3，图 4.1 第二至第四行中函子在 $\mathcal{D}^b$(mod) 上的限制在移位意义下非负。再次由引理4.4，我们得到如下余 recollement。

$$\underline{\mathrm{Gp}}(C) \rightleftarrows \underline{\mathrm{Gp}}(A) \rightleftarrows \underline{\mathrm{Gp}}(B) \tag{4.8}$$

首先，我们有如下交换图，其中所有垂直箭头均为嵌入，所有水平箭头均由图4.1从上至下第二行到第四行中的函子诱导。

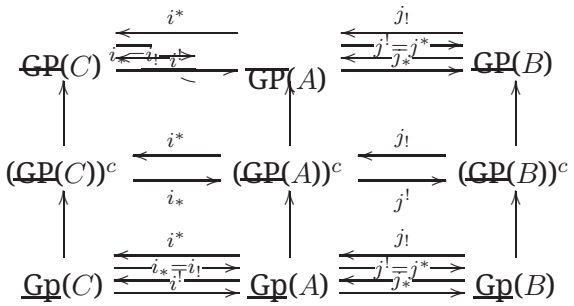


根据定理 3.4，该断言得证。

(2) 给定一个 6-重余穿

$$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}B) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathrm{Mod}A) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathrm{Mod}C) \tag{4.9}$$

包含八行。通过与（1）中类似的论证，我们得到如下交换图，其中所有垂直箭头都是嵌入，所有水平箭头均由该图自上而下第二至第五行中的函子诱导4.9。



根据定理3.4，该结论得证。 □

作为定理 4.5的一个应用，我们重新证明了虚 Gorenstein 性在导出等价下保持不变。

推论 4.6 ([Bel05，定理 8。11])。 设 A 和 B 是两个有限维代数，且 F : $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}A) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}B)$ 是一个三角函子。若 F是一个等价，则 A 是虚 Gorenstein 的，当且仅当 B 是虚 Gorenstein 的。

证明。 由于 F 是一个等价，因此存在一个 n-余 recollement，使 $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}B)$ 相对于 $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}A)$ 和 0（对于 $n > 0$）。于是根据定理 4.5， B 是虚 Gorenstein 的，当且仅当 A 是虚 Gorenstein 的。 □

Acknowledgements

作者感谢胡伟教授提供重要参考文献，并感谢秦永云给予的有益讨论。本研究得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11901428 和 11801141）。

References

[AB69] M. Auslander 和 M. Bridger。《稳定模理论》*Memoirs of the American Mathematical Society* 0 94 0 0, 1969 ，( ): – 。[Bel05] A. Beligiannis。《Cohen–Macaulay 模、（余）挠对与虚拟 Gorenstein 代数》*Journal of Algebra*，288(1):137–211，2005。[BGS88] A. A. Beilinson、V. A. Ginsburg 和 V. V. Schechtman。《Koszul 对偶》*Journal of Geometry and Physics*，5(3):317–350，1988。[Buc21] R. O. Buchweitz。《极大 Cohen–Macaulay 模与 Tate 上同调》*Mathematical Surveys and Monographs*，第262卷，美国数学会，2021。[CHQW20] Y. P. Chen、W. Hu、Y.Y. Qin 和 R. Wang。《奇异等价与 Auslander–Reiten 猜想》*https://doi.org/10.48550/arxiv.2011.02729*，2020年11月。[Cum23] C. Cummings。《环构造与无界导出模范畴的生成》*Algebras and Representation Theory*，26(1):281–315，2023。[Hap91] D. Happel。《关于戈伦斯坦代数》*Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras* 389 404, 1991 ，第 – 页。[HKLY17] L. Angeleri H¨ugel、S. Koenig、Q. Liu 和 D. Yang。《阶梯与导出模范畴的简洁性》*Journal of Algebra*，472:15–66，2017。[HP17] W. Hu 和 S. Y. Pan。《导出等价的稳定函子与 Gorenstein 投射模》*Mathematische Nachrichten*，290(10):1512–1530，2017。[LL15] P. Liu 和 M. Lu。《奇点范畴的拼接与单态范畴》*Communications in Algebra*，43(6):2443–2456，2015年6月。[Nee92] A. Neeman。《Thomason、Trobaugh 和 Yao 的 k-理论局部化定理与 Bousfield 和 Ravenel 的 smashing 子范畴之间的联系》*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*，Ser. 4，25 5 547 566，1992 ( ): – 。[QH16] Y. Y. Qin 和 Y. Han。《利用 n-余 recollement 化简同调猜想》*Algebras and Representation Theory*，19(2):377–395，2016。[Zha13] P. Zhang。《Gorenstein-投射模与对称拼接》*Journal of Algebra* 388 65 80, 2013 ，: – 8月。

Dawei Shen, School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng,Henan 475004, China*Email address*: sdw12345@mail.ustc.edu.cn

Hao Su, School of Science, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384,China*Email address*: suhaomt@tcu.edu.cn