arXiv:2302.07018v1 [math.CA] 14 Feb 2023

广义赫尔曼–比勒定理

ROSTYSLAV KOZHAN 和 MIKHAIL TYAGLOV

Abstract. 经典 Hermite–Biehler定理描述了两个零点严格交错的实多项式的复线性组合可能具有的零点集。我们完整刻画了交错关系恰好在一个位置被破坏时的零点集。

利用这一结果，我们解决了有限维厄米矩阵秩一乘性扰动的正谱问题和逆谱问题。我们还讨论了有限维雅可比矩阵的某些秩二加性扰动。

1. Introduction

考虑一个复线性组合

$$\alpha p(z) + \beta q(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{1.1}$$

两个实多项式 p和 q的零点。如果两个多项式的所有零点都是实数且为单零点，并且一个多项式的任意两个相邻零点之间恰有另一个多项式的一个零点，则称这两个多项式的零点严格交错。经典的 Hermite–Biehler定理可追溯至 1879 [5, 10]，该定理指出， p 和 q 的零点严格交错，当且仅当（1.1）的所有零点同时属于上或下复半平面。这一结果在纯数学和应用数学中都有诸多应用，尤其是在控制理论中。

我们希望对（1.1）在 p 和 q的零点“几乎”交错时可能出现的零点配置进行分类，也就是说，如果在 q 的零点集中添加一个点，那么它将与 p的零点集交错。精确表述见定理 3.1 和 4.1。

研究动机来自秩一 乘法型非厄米扰动下厄米矩阵和/或雅可比矩阵的谱问题（见第 5.2 节）。此类扰动最近也在随机矩阵理论 [15, 2]中得到研究。某些秩二加法型非厄米扰动也会导出这类多项式，见第 5.3 节。

2. Hermite-Bieheler theorem

Let

$$h(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \tag{2.1}$$

是一个首一复多项式。在复平面 $\mathbb{C}$ 中，考虑曲线 $\Gamma_h \equiv \{\, h(t) : \ t \in \mathbb{R} \,\}$，并指定曲线上的方向，该方向对应于参数 t 的递增。这个有向曲线称为多项式 h 的（米哈伊洛夫–奈奎斯特）导迹，例如参见 [4, 16]。假设多项式 h 在实轴上没有根。在这种情况下， Γ_h 不会经过原点，并且函数

$$\varphi_h(t) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}(t - z_j), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

Date: 2023年2月15日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 26C10、47A55、47B36；次要分类号 26C05、15B05。*Key words and phrases.*赫米特-比勒定理、雅可比矩阵、根的位置、秩一扰动、谱。

其中，Arg $z \in [-\pi, \pi)$ 是 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的辐角主值，在实轴的每一点处都连续 。显然， $\varphi_h(t)$ 是 $\arg h(t)$ 的一个分支， $t \in \mathbb{R}$。引入增量

$$\Delta_h := \varphi_h\big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{2.3}$$

下文将证明这些极限存在。

以下定理通常归功于 C. Hermite。令 $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}$ 表示开上半平面：$\operatorname{Im} z > 0\}$，令 $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C}$ 表示开下半平面：$\operatorname{Im} z < 0\}$。

定理 2.1 (Hermite)。 若多项式 h 在 $\mathbb{C}_+$中有 n_+ 个根，在 $\mathbb{C}_-$中有 n_- 个根，且在实轴上没有根，则

$$\Delta_h = \pi(n_+ - n_-).$$

证明。 令 $h_j(z) := z - z_j$。 则 $\varphi_{h_j}(t) =$ 辐角$(t - z_j)$。容易看出， h_j 的导迹 Γ_{h_j}是一条从左向右经过的水平直线，它与虚轴交于点 $-i \operatorname{Im} z_j$。 因此，当 $-\infty$ 从 ∞变到 t 时，导迹上一点的径向矢量会逆时针转动 π，若 $\operatorname{Im} z_j > 0$（若 $\operatorname{Im} z_j < 0$则顺时针），也就是说，$\Delta_{h_j} = \pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z_j$。 现在由 (2.2)–(2.3) 得到

$$\Delta_h = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{h_j} = \pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_j = \pi(n_+ - n_-).$$

□

由定理的证明可知，数 Δ_h 定义良好，并且

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_h(t) = -\Delta_h = \pi(n_- - n_+), \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi_h(t) = 0. \tag{2.4}$$

考虑极端情形：多项式 h 的所有根都位于 $\mathbb{C}_+$ 中。在这种情况下，多项式 h 具有显著的性质。特别地，由定理 2.1 可立即得到以下推论。

推论 2.2. 设 h 如 (2.1) 所示，且对所有 j，都有 $z_j \notin \mathbb{R}$ 。那么， h 的所有根都位于 $\mathbb{C}_+$ 中，当且仅当 $\Delta_h = \pi n$。

引理 2.3 (Hermite)**.** 若 h 的所有零点都位于 $\mathbb{C}_+$ 中，则 $\varphi_h(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调（严格）递增函数。

证明. 事实上，对于 $h_j(z) = z - z_j$ 且 $\operatorname{Im} z_j > 0$，有

$$\frac{d\varphi_{h_j}(t)}{dt} = \frac{\operatorname{Im} z_j}{(t - \operatorname{Re} z_j)^2 + (\operatorname{Im} z_j)^2} > 0.$$

因此，$\varphi_{h_j}(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格递增函数。于是函数 $\varphi_h = \sum \varphi_{h_j}$ 也如此，见 (2.2)。 □

正如 C. Hermite [10] 和 M. Biehler [5] 于 1879 年分别独立证明的，多项式 h 的这类性质可以用其实部和虚部的根的位置来表述。具体而言，经过归一化后，我们可以将多项式 h (2.1) 表示为

$$h(z) = p(z) - ilq(z), \tag{2.5}$$

其中， p和 q是首一实多项式，且 $\deg p = n$、$\deg q \leqslant n - 1$和 $l \in \mathbb{R}$。

于是有以下定理，为求完整起见，我们简要给出其证明。

定理 2.4 (Hermite–Biehler定理 [10, 5])。 设多项式 h 由(2.5) 给出，其中 p 和q为首一实多项式，$\deg p = n$, $\deg q \leqslant n - 1$， $l \in \mathbb{R}$。那么， h 的所有零点都属于 $\mathbb{C}_+$， 当且仅当$l > 0$ ，且 p 和 q 的零点严格交错。

证明。 设 h 的所有零点都位于 $\mathbb{C}_+$中。由 (2.4) 和引理 2.3， $\varphi_h(t)$是严格单调递增函数，且 $\lim_{t\to-\infty}\varphi_h(t) = -\pi n$， $\lim_{t\to+\infty}\varphi_h(t) = 0$。因此，恰有 n个实数值 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 满足 $\varphi_h(\lambda_j) = \frac{\pi}{2} + k\pi$，以及 $n-1$ 个实数值 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 满足 $\varphi_h(\mu_j) = k\pi$，这两组数严格交错。由 (2.5) 可知，对每个 j， $p(\lambda_j) = 0$ 且 $q(\mu_j) = 0$ 。n最后，由于$l = \sum_{j=1} \operatorname{Im} z_j$ ，可得 $l > 0$。

反过来，设 $p(\lambda_j) = 0$ 且 $q(\mu_j) = 0$，其中 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 和 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 严格交错，因此 $\lambda_j < \mu_j < \lambda_{j+1}$。注意，对任意 j，都有 $z_j \notin \mathbb{R}$；否则， $p(z_j) = q(z_j) = 0$ ，这与严格交错矛盾，因此对所有 $t \in \mathbb{R}$， $\varphi_h(t)$都有定义。不难看出， $p'(t)q(t) - p(t)q'(t) > 0$（例如参见 [12, 定理 3.4]）。由于 $\varphi_h(t)$ 是 $h(t)$ 的辐角的分支，我们得到

$$\varphi_h'(t) = \frac{d}{dt}\left(\arctan\frac{-lq(t)}{p(t)}\right) = l\frac{p'(t)q(t) - p(t)q'(t)}{|h(t)|^2} > 0$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。因此， $\varphi_h(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增，并且恰好在点 $\lambda_j, j = 1, \ldots\ldots, n$ 处与虚轴相交 n 次，在点 $\mu_j, j = 1, \ldots\ldots, n-1$ 处与实轴相交 $n-1$ 次。这意味着 $\Delta_h = \pi n$，因此根据推论 2.2， $h(z)$ 的所有零点都位于 $\mathbb{C}_+$ 。□

注 2.5。 定理 2.4 距离完整分类雅可比矩阵（或任何具有循环向量的厄米矩阵）的秩一非厄米扰动的复谱，仅一步之遥。我们将在下文第 5.1 节详细讨论。

注 2.6。 同样的证明表明，若将 (2.5) 替换为 $h(z) = p(z) + \beta q(z)$，则定理 2.4 仍然成立，其中 β with $\operatorname{Im}\beta < 0$ 固定。对于 $\deg q = n$ 的情形，也可以证明定理 2.4 的一个类似结论。我们把这留作读者的练习。

若假设 p 有 s 个负零点和 $n-s$ 个非负零点，那么我们便能进一步描述 h 在 (2.5) 中零点所有可能的位置。 [14, 第 3] 节曾讨论过这一点，但此处我们给出一个更一般的陈述和更直观的证明。此结果还与交错中断情形下所涉及的条件有关，见下文的 (3.3) 和注3.2。

命题 2.7。 设定义于 (2.5) 中的多项式 h 的所有零点 $\{z_j\}_{j=1}^n$ 均在 $\mathbb{C}_+$中 .

(i) p 具有 s 个负零点和 $n-s$ 个正零点，当且仅当 h 的零点满足不等式

$$\frac{\pi}{2} + \pi(s-1) < \sum_{j=1}^n \operatorname{Arg} z_j < \frac{\pi}{2} + \pi s. \tag{2.6}$$

(ii) p 具有 s 个负零点、 $n-s-1$ 个正零点，并且在 $t=0$ 处有一个零点，当且仅当 h 的零点满足恒等式

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Arg} z_j = \frac{\pi}{2} + \pi s. \tag{2.7}$$

证明。 若 $\operatorname{Im} z_j > 0, j = 1, \ldots, n$，则根据引理 2.3和定理 2.4， p的零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$均为实且为单根，并且在 (2.2) 中定义的函数 $\varphi_h(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增，且 $\lim_{t\to-\infty}\varphi_h(t) = -\pi n$ 以及 $\lim_{t\to+\infty}\varphi_h(t) = 0$。因此，我们有 $\varphi_h(\lambda_j) = -\frac{\pi}{2} - (n-j)\pi$。现在显然有

$$-\tfrac{\pi}{2} - (n-s)\pi < \varphi_h(0) < -\tfrac{\pi}{2} - (n-s-1)\pi$$

当且仅当 p 有 s 个负零点和 $n-s$ 个正零点。另一方面，

$$\varphi_h(0) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Arg}(-z_j) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Arg} z_j - \pi n. \tag{2.8}$$

(i) 中的结论由结合这两个陈述即可得出。

对于 (ii)，注意到 $\lambda_{s+1} = 0$，这当且仅当 $\varphi_h(0) = -\frac{\pi}{2} - (n-s-1)\pi$ 时成立。然后我们使用 (2.8) 得到 (2.7)。□

3. Generalized Hermite–Biehler theorem: broken interlacing at $t = 0$

如前所述（详情见第 5.1 节），Hermite–Biehler定理自然地应用于 Jacobi 矩阵和厄米矩阵的非厄米秩一加性扰动的逆谱问题。然而，高秩扰动需要 Hermite–Biehler定理的推广形式，此时给定多项式的实部和虚部的零点不再交错。

特别是，乘法秩一扰动和加性秩二扰动（见第 5.2 节和第 5.3 节）会导致零点交错恰好在一个位置被打破的情形。因此，我们需要考虑这类多项式的复线性组合，并研究其可能的零点配置。

数量 自然会出现的量是零点的复辐角模 π。令
我们引[illegible]号

$$\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z := \begin{cases} \operatorname{Arg} z & \text{if} \quad z \in \mathbb{C}_+, \\ 0 & \text{if} \quad z \in \mathbb{R}, \\ \pi + \operatorname{Arg} z & \text{if} \quad z \in \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

从几何上看，$\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z \in [0,\pi)$ 表示 z 的径向矢量与正半轴 $\mathbb{R}_+$ 之间的夹角（若 $z \in \mathbb{C}_+$），以及与负半轴 $\mathbb{R}_-$ 之间的夹角（若 $z \in \mathbb{C}_-$）。从代数上可以看出

$$\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z = \operatorname{arccot} \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \in (0,\pi) \tag{3.1}$$

当 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 时。

以下定理是本文的主要结果。它刻画了两个首一实多项式的线性组合可能具有的零点配置：这两个多项式的正零点和负零点彼此交错，但在原点处交错中断。

定理 3.1. 设 p 和 q 是首一实多项式，次数 $p = n$，次数 $q = n-1$，$p(0) \neq 0$，且 $\alpha \in \mathbb{C}_+$。定义首一多项式

$$h(z) = \alpha p(z) + (1-\alpha) z q(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j). \tag{3.2}$$

如果 p 和 q 严格交错，那么 h 的所有零点 $\{z_j\}_{j=1}^n$ 都在

$$\left\{ \{z_j\}_{j=1}^n \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n : \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j = \operatorname{Arg} \alpha \right\}. \tag{3.3}$$

反之，如果 $\alpha \in \mathbb{C}_+$ 和首一复多项式 $h(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ 的所有零点都满足 (3.3)，那么存在唯一一对零点严格交错的首一实多项式 p 和 q，使得 $h(z) = \alpha p(z) + (1-\alpha) z q(z)$。

$\mathbb{C}_+$ 中 z_j 的个数（分别地，$\mathbb{C}_-$ 中的个数）与 p 的正零点（分别地，负零点）个数一致。

注记 3.2。如果 p 的所有零点都为正，或都为负，那么 $p(z)$ 与 $zq(z)$ 的零点实际上严格交错。除以 α 后，我们便回到注记 2.6 的情形。对可能的零点配置施加额外限制 (3.3)，是因为 $zq(z)$ 在原点处为零，参见命题 2.7(ii)，$s = 0$。

证明。 [⇒] 假设 $p(\lambda_j) = 0$ 且 $q(\mu_j) = 0$，其中 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 与 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 严格交错，因此 $\lambda_j < \mu_j < \lambda_{j+1}$。设 s 为 p 的负零点个数，即 $\lambda_s < 0$ 且 $\lambda_{s+1} > 0$。令 h 如 (3.2) 所示，z_j 是其零点。按 (2.2) 定义相应的函数 φ_h。由于 $p(0) \neq 0$、$\operatorname{Im}\alpha \neq 0$，且 p 与 q 的零点没有重合，因此多项式 h 没有实零点，$z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，所以对所有 $t \in \mathbb{R}$，$\varphi_h(t)$ 都有定义。

根据假设，回忆 $\operatorname{Im}\alpha > 0$。引入以下数

$$A_1 := \operatorname{Arg}_{[0,\pi)}(1-\alpha) \in (0,\pi) \qquad \text{and} \qquad A_2 := \operatorname{Arg}_{[0,\pi)}\alpha = \operatorname{Arg}\alpha \in (0,\pi). \tag{3.4}$$

根据 (3.1)，A_1 =反余切函数 $\frac{\operatorname{Re}\alpha - 1}{\operatorname{Im}\alpha}$，且 A_2 =反余切函数 $\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Im}\alpha}$。由于 $\operatorname{Im}\alpha > 0$ 且反余切函数单调递减，我们得到 $\pi > A_1 > A_2 > 0$。

现在将 (3.2) 中的 $t \in \mathbb{R}$ 改写为

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} h(t) \\ \operatorname{Im} h(t) \end{pmatrix} = p(t) \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\alpha \\ \operatorname{Im}\alpha \end{pmatrix} - tq(t) \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\alpha - 1 \\ \operatorname{Im}\alpha \end{pmatrix}.$$

由于 $p(t)$ 和 $tq(t)$ 不会同时为零，因此这是两个向量的非平凡线性组合：$\mathbf{v} := (\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Im}\alpha)$ 和 $\mathbf{u} := (\operatorname{Re}\alpha - 1, \operatorname{Im}\alpha)$。它与 $\mathbf{v}$ 平行，当且仅当 $tq(t) = 0$；它与 $\mathbf{u}$ 平行，当且仅当 $p(t) = 0$。这意味着，$\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} h(t) = A_1$ 当且仅当 $p(t) = 0$，且 $\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} h(t) = A_2$ 当且仅当 $tq(t) = 0$。

Since 辐角$_{[0,\pi)} h(t) = \varphi_h(t) \bmod \pi$，我们最终得出核心结论：对于 $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_h(t) = A_1 + \pi m \text{ for some } m \in \mathbb{Z} \iff p(t) = 0, \tag{3.5}$$

$$\varphi_h(t) = A_2 + \pi r \text{ for some } r \in \mathbb{Z} \iff tq(t) = 0. \tag{3.6}$$

我们还想了解这些点处 φ_h 的导数符号。直接计算可得

$$\varphi_h'(t) = \frac{d}{dt}\left(\arctan\frac{\operatorname{Im} h(t)}{\operatorname{Re} h(t)}\right) = \operatorname{Im}\alpha\, \frac{t\,[p'(t)q(t) - p(t)q'(t)] - p(t)q(t)}{|h(t)|^2}.$$

由于在 p 和 q 的任意零点处，$\operatorname{Im}\alpha > 0$, $p(t)q(t) = 0$，且对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$p'(t)q(t) - p(t)q'(t) > 0$（例如，参见定理 3.4], [12, ），因此我们得到

$$\operatorname{sgn}\varphi_h'(\lambda_j) = \operatorname{sgn}\lambda_j, \qquad \text{and} \qquad \operatorname{sgn}\varphi_h'(\mu_k) = \operatorname{sgn}\mu_k, \tag{3.7}$$

对于 $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n-1$。另请注意，

$$\operatorname{sgn}\varphi_h(0) = -\operatorname{sgn} p(0)q(0). \tag{3.8}$$

由 (2.4) 可得 $\lim_{t\to-\infty} \varphi_h(t) = -\pi(n_+ - n_-)$，其中 n_+ 和 n_- 分别是 h 在 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$ 中的零点数。

首先假设 $0 < s < n$，也就是说，$\lambda_1 < 0$ 和 $\lambda_n > 0$。那么根据 (3.7)，$\varphi_h'(\lambda_1) < 0$，因此由 (3.5) 可得 $\varphi_h(\lambda_1) = A_1 - \pi(n_+ - n_- + 1)$。根据 (3.7)，$\varphi_h$ 在各点 $\lambda_j, j = 1, \dots, s$ 以及 μ_k, $k = 1, \dots, s-1$处递减。利用 (3.5) 和 (3.6)，并通过归纳法，我们得出

$$\varphi_h(\lambda_j) = A_1 - \pi(n_+ - n_- + j), \quad \varphi_h(\mu_k) = A_2 - \pi(n_+ - n_- + k), \tag{3.9}$$

对于 $j = 1, \dots, s$，以及 $k = 1, \dots, s-1$。

在区间 $(\lambda_s, \lambda_{s+1})$ 上，多项式 $zq(z)$ 有两个零点，分别为 μ_s 和 0。如果 $\mu_s < 0$，那么 $\varphi_h'(\mu_s) < 0$，且 $\varphi_h'(0) > 0$，见 (3.7) 和 (3.8)。类似地，如果 $\mu_s > 0$，那么 $\varphi_h'(0) < 0$，且 $\varphi_h'(\mu_s) > 0$。如果 $\mu_s = 0$，那么 $\varphi_h'(0) = 0$。无论哪种情况，由 (3.6) 可得

$$\varphi_h(\mu_s) = \varphi_h(0) = A_2 - \pi(n_+ - n_- + s). \tag{3.10}$$

由 (3.7) 可知，在点 λ_j, $j = s+1, \dots, n$ 以及 μ_k, $k = s+1, \dots, n-1$ 处，函数 φ_h 递增，因此

$$\varphi_h(\lambda_j) = A_1 - \pi(n_+ - n_- + 2s + 1 - j), \quad \varphi_h(\mu_k) = A_2 - \pi(n_+ - n_- + 2s + 1 - k), \tag{3.11}$$

对于 $j = s+1, \dots, n$ 和 $k = s+1, \dots, n-1$。特别地，我们有

$$\varphi_h(\lambda_n) = A_1 - \pi(n_+ - n_- + 2s + 1 - n)$$

以及 $\varphi_h'(\lambda_n) > 0$。由 (3.5)–(3.6)，我们可以得出，对于 $t > \lambda_n$，

$$A_1 - \pi(n_+ - n_- + 2s + 1 - n) < \varphi_h(t) < \pi + A_2 - \pi(n_+ - n_- + 2s + 1 - n).$$

但是，由 (2.4) 可知 $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$，因此

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \pi - \pi(n_+ - n_- + 2s + 1 - n) = \pi(n - 2s - n_+ + n_-) = 0.$$

这意味着 $n_+ = n - s$ 和 $n_- = s$，因为 $n = n_+ + n_-$。

现在由 (2.2) 可得

$$\varphi_h(0) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}(-z_j) = \sum_{z_j\in\mathbb{C}_+} \big[(\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j) - \pi\big] + \sum_{z_j\in\mathbb{C}_-} \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j) - \pi n_+. \quad (3.12)$$

由 (3.10)，$\varphi_h(0) = A_2 - \pi n_+$，这证明零点确实属于 (3.3)。

若 $s = n$ 则同样的辐角可对所有 j 和 k给出 (3.9)。由 (3.8) 可得 $\varphi_h'(0) < 0$，且$\varphi_h(0) = A_2 - \pi(n_+ - n_- + n)$。利用 (3.5)–(3.6)，我们进而得到 $A_2 - \pi(n_+ - n_- + n) > \varphi_h(t) > A_1 - \pi - \pi(n_+ - n_- + n)$，其中 $t > 0$。于是有 $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = -\pi(n_+ - n_- + n) = 0$。这就产生了$n_+ = 0$、$n_- = n$，随后 (3.12) 像之前一样导出 (3.3)。

最后，若 $s = 0$ 则由 (3.5)–(3.6) 可得 $\varphi_h'(0) > 0$ 以及 $\varphi_h(0) = A_2 - \pi(n_+ - n_-)$。于是$\varphi_h'(\lambda_j) > 0$，$\varphi_h'(\mu_k) > 0$，并且对于所有 j，k，有 $\varphi_h(\lambda_j) = A_1 - \pi(n_+ - n_- + 1 - j)$、$\varphi_h(\mu_k) = A_2 - \pi(n_+ - n_- - k)$。这意味着 $\varphi_h(\lambda_n) = A_1 - \pi(n_+ - n_- + 1 - n)$，并且

$$A_1 - \pi(n_+ - n_- + 1 - n) < \varphi_h(t) < A_2 - \pi(n_+ - n_- - n)$$

对于 $t > \lambda_n$。于是我们得到 $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = -\pi(n_+ - n_- - n) = 0$。由此得到 $n_+ = n$、$n_- = 0$，进而如前所述，由 (3.12) 推出 (3.3)。

[⇐] 反过来，设多项式 h 的零点属于 (3.3)，其中给定复数 α 满足 $\operatorname{Im}\alpha > 0$。由 (3.3) 可得

$$\operatorname{Arg}\alpha = \operatorname{Arg}_{[0,\pi)}\alpha = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j = \operatorname{Arg}_{[0,\pi)}\Big(\prod_{j=1}^{n} z_j\Big),$$

因此由 (3.1) 得

$$\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Im}\alpha} = \frac{\operatorname{Re}\prod_{j=1}^{n} z_j}{\operatorname{Im}\prod_{j=1}^{n} z_j}. \quad (3.13)$$

令 $h(z) = \sum_{j=0}^{n} h_j z^j$，$p(z) = \sum_{j=0}^{n} p_j z^j$，$r(z) = \sum_{j=0}^{n} r_j z^j$，其中 p_j 和 r_j 待定，由以下条件确定

$$h(z) = \alpha p(z) + (1-\alpha) r(z).$$

根据等式取 z^j 系数后，我们得到 $h_j = \alpha p_j + (1-\alpha) r_j$，从而得到线性方程组

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\alpha & 1 - \operatorname{Re}\alpha \\ \operatorname{Im}\alpha & -\operatorname{Im}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ r_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h_j \\ \operatorname{Im} h_j \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

系数矩阵的行列式等于 $-\mathrm{Im}\ \alpha \neq 0$，因此 p_j 和 r_j 都唯一地确定。由于 $h_n = 1$，我们有 $p_n = r_n = 1$，因此 p 和 r 是次数为 n 的首一多项式。由 (3.13)$_n$ 以及事实 $h_0 = (-1)^n \prod z_j$，系统 (3.14) 对于 $j = 0$ 的解具有如下形式$_{j=1}$

$$p_0 = (-1)^n \frac{\mathrm{Im} \prod_{j=1}^{n} z_j}{\mathrm{Im}\, \alpha} \qquad \text{and} \qquad r_0 = r(0) = 0.$$

因此，对于次数为 $n-1$ 的多项式 q，有 $r(z) = zq(z)$，所以公式 (3.2) 成立，其中多项式 p 和 q 由多项式 h 和数 α 唯一确定。

我们来证明 p 的零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ 和 q 的零点 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 都是实数、单零点且严格交错。为此，定义 A_1 和 A_2，其中 $\pi > A_1 > A_2 > 0$ 如 (3.4) 中所示，并注意到由完全相同的论证，(3.5)–(3.6) 仍然成立（注意，对于 $t \in \mathbb{R}$，$p(t)$ 和 $tq(t)$ 不可能同时为零，因为 h 没有实根）。

注意，当 n_+ 表示 h 在 $\mathbb{C}_+$ 中的零点数时，(3.12) 成立。结合 (3.3) 和 (3.4)，可得 $\varphi_h(0) = A_2 - \pi n_+$。此外，根据 (2.4)，$\lim_{t\to-\infty} \varphi_h(t) = \pi(n_- - n_+)$ 且 $\lim_{t\to+\infty} \varphi_h(t) = 0$。现在，连续函数的介值定理意味着，$\varphi_h$ 必须在 $t < 0$ 上至少一次取得范围 $\varphi_h(0) < y < \varphi_h(-\infty)$ 中形如 $A_1 + \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$ 的每个值。这样的值共有 n_- 个：$A_1 - (n_+ - j)\pi$，其中 $0 \le j \le n_- - 1$（这包括 $n_- = 0$ 的情形；该情形较为特殊，因为此时 $\varphi_h(0) > \varphi_h(-\infty)$）。由 (3.5) 可知，$p$ 至少有 n_- 个不同的负零点。类似地，范围$\varphi_h(0) < y < \varphi_h(+\infty)$ 中形如 $A_1 + k\pi$ 的值共有 n_+ 个：它们是 $A_1 - (n_+ - j)\pi$，其中 $0 \le j \le n_+ - 1$。由介值定理和 (3.5)，可知 p 至少有 n_+ 个不同的正零点。由于 $n_- + n_+ = n$，且 $\deg p = n$，这意味着 p 只有实的单零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$。

同样，参见 (3.6)，$zq(z)$ 的零点可通过检查 φ_h 取值为 $A_2 + \pi r$ $(r \in \mathbb{Z})$ 的位置来确定。对于每个 $j \neq n_-$，在每个区间 $(\lambda_j,\ \lambda_{j+1})$ 上，至少存在一个这样的值。

若 $n_- > 0$，则我们需要考察区间 $(\lambda_{n_-},\ \lambda_{n_-+1})$，在该区间内有 $\varphi_h(0) = A_2 - \pi n_+$且 $\varphi_h(\lambda_{n_-}) = \varphi_h(\lambda_{n_-+1}) > \varphi_h(0)$。这意味着，除 $t = 0$ 外，$tq(t)$ 至少还有一个零点（也可能在 $t = 0$ 处，这种情况是允许的）。因此，我们确定了 $tq(t)$ 的所有 n 个零点，并证明 q 的零点与 p 的零点严格交错。

若 $n_- = 0$，则我们已经在每个区间 $(\lambda_j,\ \lambda_{j+1}) \subset \mathbb{R}_+$ 上找到了 $tq(t)$ 的 $n-1$ 个正零点。因此，这些是 q 的 $n-1$ 个零点，它们全都是实数、单零点，并且与 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ 严格交错。□

4. Generalized Hermite–Biehler theorem: broken interlacing around $t = 0$

下一个定理是定理 3.1 的一个类比，适用于两个多项式的交错仍在原点附近的一个位置处中断、但我们不再假设 $t = 0$ 是其中一个零点的情形，见 (4.2)。另一种表述方式是，$zp(z)$ 的零点与 $q(z)$ 的零点严格交错（警告：(4.1) 中没有 $zp(z)$！）。这种交错中断自然出现在对奇异雅可比矩阵的乘性扰动中，见下文第 5.2 节。

相关地，我们注意到，如果处于定理 3.1 的情形，但 $p(0) = 0$，那么 $p(z) = z\widehat{p}(z)$，因此 $h(z) = z\big[\alpha\widehat{p}(z) + (1-\alpha)q(z)\big]$，除以 z 后，我们便处于定理 4.1 的情形。

定理 4.1。设 p 和 r 为首一实多项式，次数 $p =$ 次数 $r = n$，且 $\alpha \in \mathbb{C}_+$。定义首一多项式

$$h(z) = \alpha p(z) + (1-\alpha) r(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j). \tag{4.1}$$

若 p 的零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ 和 r 的零点 $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ 满足不等式

$$\lambda_1 < \mu_1 < \dots \lambda_s < \mu_s < 0 < \mu_{s+1} < \lambda_{s+1} < \dots < \mu_n < \lambda_n \tag{4.2}$$

（对于某个 $0 \le s \le n-1$），那么 $h(z)$ 的零点属于

$$\left\{ \{z_j\}_{j=1}^n \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n : \sum_{j=1}^n \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j < \operatorname{Arg} \alpha \right\}. \tag{4.3}$$

反之，若 $\alpha \in \mathbb{C}_+$，且首一复多项式 $h(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$的零点满足条件 (4.3)，则存在唯一一对零点严格交错的首一实多项式 p 和 r，使得 $h(z) = \alpha p(z) + (1-\alpha) r(z)$。

$\mathbb{C}_+$ 中 z_j 的个数（$\mathbb{C}_-$中相应的个数）与 p 的正零点个数（负零点个数）相同。

注 4.2. 与定理 3.1 对比：若 $\mu_s \to 0$ 或 $\mu_{s+1} \to 0$，则零点 $\{z_j\}_{j=1}^n$ 趋近于 (3.3)。

注记 4.3。在 (4.2) 中，$s = 0$ 表示

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \dots < \mu_n < \lambda_n. \tag{4.4}$$

与带有 $s = 0$ 的命题 2.7(i) 比较。

证明。 [⇒]给定 $\alpha \in \mathbb{C}_+$，假设多项式 p 和 r 的零点满足不等式 (4.2)，并考虑在 (4.1) 中定义的多项式 h。在定理 3.1 的 [⇒] 证明中，用 $r(t)$ 代替 $tq(t)$，并用 $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ 代替 $\{0\} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$，重复其中的论证，可得在 (2.2) 中定义的函数 φ_h 在 $\mathbb{R}$ 上定义良好（因为 p 和 r 不会同时在 $\mathbb{R}$ 上为零），且满足恒等式 (3.7)、(3.9) 和 (3.11)。(3.10) 的对应式为$\varphi_h(\mu_s) = \varphi_h(\mu_{s+1}) = A_2 - \pi(n_+ - n_- + s)$。由于 $\varphi_h'(\mu_s) < 0$ 且 $\varphi_h'(\mu_{s+1}) > 0$，于是得到$\varphi_h(0) < A_2 - (n_+ - n_- + s)\pi$。然后利用 $s = n_-$、$n - s = n_+$（与定理 3.1 的n证明中相同的论证）和 (3.12)，可得 $\sum_{j=1}$辐角$_{[0,\pi)} z_j <$辐角 α。

[⇐] 反过来，对于给定的复数$\alpha \in \mathbb{C}_+$，设多项式 h 的零点属于 (4.3)。那么由 (3.12) 和 (4.3) 可得

$$\varphi_h(0) < A_2 - \pi n_+ < A_1 - \pi n_+, \tag{4.5}$$

其中，A_1 和 A_2 在 (3.4) 中定义，而 n_+ 是 h 在 $\mathbb{C}_+$中的零点数。按照定理 3.1 的证明，同样可以证明存在唯一一对实首一多项式 p 和 r，其次数为 n，使得 (4.1) 成立。按照定理 3.1 的证明并利用 (4.5)，可以证明多项式 p 有实且为单根的零点 λ_j's，满足

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_{n_-} < 0 < \lambda_{n_-+1} < \dots < \lambda_n,$$

其中，n_-是 h在 $\mathbb{C}_-$中的零点数，$n_- + n_+ = n$；而多项式 $r(z) = \prod_{j=1}^n (z - \mu_j)$在每个区间 $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$，$j \ne n_-$ 上都有奇数个零点，按重数计数；并且由于 $\varphi_h(\lambda_{n_-}) = \varphi_h(\lambda_{n_-+1}) > \varphi_h(0)$，在 $(\lambda_{n_-}, \lambda_{n_-+1})$ 上有偶数个零点（至少两个），按重数计数。此外，由于 $\varphi_h(0) < A_2 - \pi n_+$，$\mu_j$'中必有两个不等于 0。这就证明了 (4.2)。□

注记 4.4。我们可以将定理 3.1 改述为：把 $t = 0$ 替换为任意选定的 $t = \xi \in \mathbb{R}$。于是，(3.2) 中的 h 应替换为 $h(z) = \alpha p(z) + (1-\alpha)(z-\xi) q(z)$，而 (3.3) 应替换为

$$\left\{ \{z_j\}_{j=1}^n \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^n : \sum_{j=1}^n \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} (z_j - \xi) = \operatorname{Arg} \alpha \right\}.$$

类似地，在定理 4.1 中，可以用 $\mu_s < \xi < \mu_{s+1}$ 替换 (4.2) 中的 $\mu_s < 0 < \mu_{s+1}$.

由 (3.12) 可知

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg} z_j = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg}(-z_j) + \pi(n_+ - n_-) = A_2 - \pi n_-$$

该公式以及定理 3.1 和 4.1 给出了命题 2.7 的以下类似结论。

命题 4.5。 在定理 *3.1* 的情形下， p 有 s 个负零点和 $n-s$ 个正零点，当且仅当 n多项式 $h(z) = \prod_{j=1}(z - z_j)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 中有 s 个零点，在 $\mathbb{C}_+$ 中有 $n-s$ 个零点，并且

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg} z_j = \operatorname{Arg}\alpha - \pi s.$$

命题 4.6。 在定理 *4.1* 的情形下， p 有 s 个负零点和 $n-s$ 个正零点，当且仅当 n多项式 $h(z) = \prod_{j=1}(z - z_j)$ 在 $\mathbb{C}_-$ 中有 s 个零点，在 $\mathbb{C}_+$ 中有 $n-s$ 个零点，并且

$$-\pi s < \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Arg} z_j < \operatorname{Arg}\alpha - \pi s.$$

5. Applications

本节将说明，如何应用赫米特-比勒定理及其在前几节中的扩展，求解厄米矩阵的加性和乘性秩一（以及某些秩二）扰动的正谱问题和逆谱问题。

Let

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad a_j > 0, \quad b_k \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

对于每个这样的 $\mathcal{J}$，我们还定义 $\mathcal{J}^{(j)}$ 为通过从 (5.1) 中删去前 j 行和前 j 列得到的 $(n-j)\times(n-j)$ 雅可比矩阵。令 p_j、 $j = 1$，……， $n-1$ 分别为 $\mathcal{J}^{(j)}$ 的特征多项式， p_0 为 $\mathcal{J}$ 的特征多项式。容易验证

$$p_{j-1}(z) = (z - b_j)p_j(z) - a_j^2 p_{j+1}(z), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5.2}$$

其中 $p_n(z) \equiv 1$ 且 $p_{n+1}(z) \equiv 1$。众所周知， $p_0(z)$ 和 $p_1(z)$ 的零点均为实数、单零点，且严格交错 [8]。正如 Gray 和 Wilson [7] 所证明的，以及 Hald [9] 独立证明的（另见 Hochstadt [11]），给定两组交错的实数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ 和 $\{\mu_k\}_{k=1}^{n-1}$，存在一唯一的矩阵 $\mathcal{J}$，其定义见 (5.1)，使得这两组数分别是 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}^{(1)}$ 的特征值。

5.1. 加性非厄米秩一扰动。令 e_1 为首个分量为 1、其余分量均为 0 的 $n\times 1$ 向量。考虑以下非厄米（加性）扰动

$$\mathcal{J}_{l,+} = \mathcal{J} + ile_1 e_1^* \tag{5.3}$$

$\mathcal{J}$。换言之，$\mathcal{J}_{l,+}$ 是式（5.1），但将（1，1）项替换为 $b_1 + il$。关于此类扰动的深入研究，参见 [3]；关于稳定多项式理论中的相关主题，参见 [18] 和 [19, 第 X 章]。

设 $h(z)$ 为 $\mathcal{J}_{l,+}$ 的特征多项式 $h(z)$。利用行列式的拉普拉斯展开，可得到 $h(z)$ 的如下表示

$$h(z) = (z - b_1 - il)p_1(z) - a_1^2 p_2(z) = p_0(z) - ilp_1(z).$$

如上所述， p_0 和 p_1 的零点均为实数、单零点，并且严格交错。因此，根据 Hermite–Biehler 定理（定理 2.4），$\mathcal{J}_{l,+}$ 的特征值在 $l > 0$ ($l < 0$) 时位于开上半平面（下半平面）内。

矩阵 $\mathcal{J}_{l,+}$ 的逆问题要求根据其谱求出该矩阵。具体而言，n设数 $\{z_j\}_{j=1}^n$ 属于 $\mathbb{C}_+$。那么，多项式 $h(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ 可唯一地表示为 $h = p - ilq$，其中 $l \in \mathbb{R}$ 为某个首一实多项式，p 和 q 为首一实多项式，且 $\deg p = n$、$\deg q = n - 1$。由定理 2.4 可知， $l > 0$，并且 p 和 q 的零点均为实数、单零点，并且严格交错。这些 p 和 q 使得能够唯一恢复 $\mathcal{J}$，而数 l 决定扰动幅度，见（5.3）。因此，$\mathcal{J}_{l,+}$ （5.3）可由其谱重构，逆问题的解是唯一的。

这也使我们能够研究一般厄米矩阵的秩一扰动的谱：回想一下，任何带有循环向量 $\boldsymbol{v}$ 的 $H = H^*$ 厄米矩阵 $n \times n$ 都可以通过某个满足 $S\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1$ 的酉矩阵 S，借助 $H = S^*\mathcal{J}S$ 化为雅可比形式 $\mathcal{J}$ (5.1)（Lanczos算法 [13]）。利用这一点，我们可以将任意

$$H + i\Gamma \tag{5.4}$$

带有 $H = H^*$、 $\Gamma = \Gamma^*$ 且秩为 $\operatorname{rank}\Gamma = 1$ 的矩阵化为 (5.3)。事实上，秩为 $\Gamma = 1$ 的 $\Gamma = \Gamma^*$ 意味着 $\Gamma = l\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ 对某个 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{0}$、 $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 成立。若 $\boldsymbol{v}$ 是 H 的循环向量，则

$$S(H + i\Gamma)S^* = \mathcal{J} + ilS\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*S^* = \mathcal{J}_{l,+} \tag{5.5}$$

于是我们便回到了上述情形。

此外，假设 H 的惯性指标已知，我们便处于命题 2.7 的情形，从而知道 p 的正零点/负零点个数。特别地，若 $\boldsymbol{v}$ 是循环的且 $l > 0$，那么 (5.4) 的特征值属于 (2.7) 或 (2.6)，分别取决于 $\lambda = 0$ 是否为 H 的特征值。

若 $\boldsymbol{v}$ 不是循环的，即 $\dim \operatorname{span}\{H^j\boldsymbol{v} : j \geq 0\} = k < n$，那么 Lanczos算法中的 Gram–Schmidt 正交化过程会提前终止。我们仍可得到 (5.5)，但此时 (5.1) 中为 $a_k = 0$，因此在 $\mathbb{C}_+$ 中得到 k 个特征值，以及 $n - k$ 个实特征值。

关于这一结果在随机矩阵加性扰动中的应用，参见 [1, 14] 。

5.2. **乘法型非厄米秩一扰动**。现在我们来考虑乘法型秩一扰动

$$\mathcal{J}_{k,\times} = \mathcal{J}(I_n + ikI_{1\times 1}) \tag{5.6}$$

其中 $k > 0$。这里 I_n是 $n \times n$单位矩阵。换言之，$\mathcal{J}_{k,\times}$是 (5.1)，但其 (1，1) 项被替换为 $b_1(1 + ik)$，而 (2，1) 项被替换为 $a_1(1 + ik)$。

我们来确定 $\mathcal{J}_{k,\times}$的谱的位置。为此，我们求其特征多项式 h:

$$h(z) = \det(z - \mathcal{J}_{k,\times}) = [z - (1 + ik)b_1]p_1(z) - a_1^2(1 + ik)p_2(z).$$

现在，由于根据 (5.2)， $a_1^2 p_2(z) = (z - b_1)p_1(z) - p_0(z)$，可得

$$h(z) = (1 + ik)p_0(z) - ikzp_1(z). \tag{5.7}$$

在接下来的两个命题中，我们将求解 $\mathcal{J}_{k,\times}$的正谱问题和逆谱问题。$\det\mathcal{J} \neq 0$ 和 $\det\mathcal{J} = 0$ 的情形将分别处理。

推论 理 5.1. 设 $\det \mathcal{J} \neq 0$。则 $\mathcal{J}_{k,\times}$（(5.6) 其中 $k>0$）的谱属于

$$\left\{ \{z_j\}_{j=1}^n \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^n : \sum_{j=1}^n \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j < \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{5.8}$$

反过来，*(5.8)* 中的每种点构型都可作为某个唯一的 $\mathcal{J}_{k,\times}$ 的谱，其中具有某个 $k>0$。

$\mathcal{J}$ 的正特征值和负特征值的数量分别与$\mathcal{J}_{k,\times}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$中的特征值数量相同。

证明。$\mathcal{J}_k$的特征多项式 $h_{,\times}$为 (5.7)，即取 $\alpha = 1+ik$ 时有 (3.2)。显然，当 k在 $(0,\infty)$ 中变化时，辐角 Arg $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 也随之变化，且辐角 Argα的每个值恰好取得一次。结论由定理 3.1 得出。

反过来，给定 (5.8) 中的点构型 $\{z_j\}_{j=1}^n$，先令 $\alpha = 1+ik$，其中 k =tan $\left(\sum$辐角$_{[0,\pi)} z_j\right) > 0$，使得 $\alpha \in \mathbb{C}_+$且辐角$\alpha = \sum$辐角$_{[0,\pi)} z_j$。由定理 3.1，集合$\{z_j\}_{j=1}^n$ 是唯一多项式 h 的零点集，该多项式具有形式 (5.7)，其中两个多项式 p_0 和p_1 的次数分别为 n和 $n-1$，且零点严格交错。如上所述， p_0和p_1 唯一确定 $\mathcal{J}$，使得 p_0 和 p_1 分别是 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}^{(1)}$的特征多项式。$\mathcal{J}$和 $k>0$ 的唯一性与存在性蕴含了$\mathcal{J}_{k,\times}$ 的唯一性与存在性，其谱为 $\{z_j\}_{j=1^\circ}^n$ □

对于满足 $\det\mathcal{J}=0$ 的雅可比矩阵，我们得到以下结果。

推论 5.2. 设 $\det \mathcal{J} = 0$。那么 $\mathcal{J}_{k,\times}$（(5.6) 且 $k>0$）的谱包含一个单特征值 0，其余特征值属于

$$\left\{ \{z_j\}_{j=1}^{n-1} \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^{n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Arg}_{[0,\pi)} z_j < \arctan k \right\}. \tag{5.9}$$

反过来，对于任意 $k>0$，每一种这样的点的构型都是某个唯一的 $\mathcal{J}_{k,\times}$（满足 $\det\mathcal{J}=0$）的谱。

$\mathcal{J}$ 的正特征值和负特征值的数目，分别等于 $\mathcal{J}_{k,\times}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$ 中的特征值数目。

注 5.3. 与推论 5.1 中的情形不同，若 $k>0$ 任意，则关于 $\mathcal{J}_{k,\times}$ 的逆谱问题不具有唯一性。事实上，给定一组非实数 $\{z_j\}_{j=1}^{n-1}$，有无穷多个数 $k>0$ 满足 (5.9)，因此有无穷多个矩阵 $\mathcal{J}_{k,\times}$ 具有相同的谱（它们都满足 $\det\mathcal{J}=0$，且 $k>0$ 各不相同）。

证明。由于 $\det\mathcal{J}=0$，我们有 $p_0(z) = z\widehat{p}_0(z)$，因此 $\mathcal{J}_{k,\times}$的特征多项式（见 (5.7)）变为

$$h(z) = z[(1+ik)\widehat{p}_0(z) - ikp_1(z)].$$

因此，
如果

$$\widehat{p}_0(z) = \prod_{j=1}^{n-1}(z-\lambda_j) \qquad \text{and} \qquad p_1(z) = \prod_{j=1}^{n-1}(z-\mu_j),$$

那么 $\widehat{p}_0$ 的零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-1}$ 和 p_1 的零点 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 满足不等式

$$\lambda_1 < \mu_1 < \ldots \lambda_s < \mu_s < 0 < \mu_{s+1} < \lambda_{s+1} < \ldots < \mu_{n-1} < \lambda_{n-1} \tag{5.10}$$

对于某个整数 s，$0 \leqslant s \leqslant n-1$。由于 Arg$(1+ik)$ = 反正切k，根据定理 4.1 可得，$\mathcal{J}_{k,\times}$ 的非零特征值属于 (5.9)。

反之，给定 $k>0$ 以及由（5.9）得到的点的构型 $\{z_j\}_{j=1}^{n-1}$，应用定理 4.1（其中 $\alpha := 1+ik$），可得到两个次数为 $n-1$ 的多项式 p和 r，其零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-1}$和 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$

满足（5.10）。于是， $zp(z)$ 和 $r(z)$ 具有严格交错的零点。这唯一确定了 $\mathcal{J}$，使得 $zp(z)$ 和 $r(z)$ 分别是 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}^{(1)}$的特征多项式。□

可以用此方法研究一般厄米矩阵的乘法秩一扰动的特征值：

$$H(I+i\Gamma) \tag{5.11}$$

其中 $H=H^*$、 $\Gamma=\Gamma^*$，秩为 $\Gamma=1$：假设 $\operatorname{Ran}\Gamma$ 中的一个非零向量是 H 的循环向量，则矩阵 (5.11) 可通过酉共轭化简为 (5.6)。

关于将此结果应用于随机矩阵的乘性扰动，参见 [2] 。

5.3. **加法非厄米秩二扰动**。现在考虑 $\mathcal{J}$ 的一种如下形式的加法扰动

$$\mathcal{J}_{l,m}:=\begin{pmatrix} b_1+il & a_1 & 0 & & \\ a_1+im & b_2 & a_2 & \ddots & \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

其中 $m>0$ 和 $l\in\mathbb{R}$。与上一节类似的计算表明，$\mathcal{J}_{l,\ m}$ 的特征多项式为

$$h(z)=\left(1+\frac{im}{a_1}\right)p(z)-\frac{im}{a_1}\left(z-\frac{mb_1-la_1}{m}\right)q(z). \tag{5.13}$$

因此，它可以表示为

$$\alpha p(z)+(1-\alpha)(z-\xi)q(z)$$

其中 $\alpha=1+\frac{im}{a_1}$ 和 $\xi=b_1-\frac{la_1}{m}$。

因此，与上文一样，我们可以求解$\mathcal{J}_{l,\ m}$的正谱问题和逆谱问题。$\det(\mathcal{J}-\xi I)\neq 0$ 和 $\det(\mathcal{J}-\xi I)=0$ 的情形必须分别处理。

定理 5.4。给定数 $m>0$ 和 $l\in\mathbb{R}$，在(5.12)中定义的矩阵 $\mathcal{J}_{l,\ m}$ 的谱属于

$$\left\{\{z_j\}_{j=1}^n\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^n:\sum_{j=1}^n \operatorname{Arg}_{[0,\pi)}(z_j-\xi)<\frac{\pi}{2}\right\} \tag{5.14}$$

其中 $\xi=b_1-\frac{la_1}{m}$，条件是$\det(\mathcal{J}-\xi I)\neq 0$，且 $\mathcal{J}=\mathcal{J}_{0,\ 0}$。

反过来，给定一个数 $\xi\in\mathbb{R}$，来自(5.14) 的每个点的构型都作为某个唯一矩阵 $\mathcal{J}_{l,\ m}$ 的谱出现，其中 $m>0$ 和 $l\in\mathbb{R}$。

大于 ξ 且小于 ξ 的 $\mathcal{J}$ 特征值个数，分别与 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$中$\mathcal{J}_{l,m}$ 的特征值个数相同。

注 5.5。请注意，如果不固定 ξ，那么显然从参数计数的角度来看，唯一性无从谈起。

证明。特征多项式 h属于 $\mathcal{J}_{l,\ m}$，其形式为 (5.13)，其中包含严格交错多项式 p 和q；也就是说，我们处于注 4.4 中 $\alpha=1+\frac{im}{a_1}$ 的情形。显然，对于固定的ξ，当 m 在 $(0,\ \infty)$ 中变化时，我们得到辐角 $\alpha=$反正切 $\frac{m}{a_1}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且辐角 α 的每个这样的值恰好取得一次。由定理 3.1 和注 4.4 即得结论（注意，根据我们的假设， $p(z)$ 与 $(z-\xi)q(z)$ 没有公共零点）。

反过来，给定 $\xi \in \mathbb{R}$ 以及 (5.14) 中的点的构型 $\{z_j\}_{j=1}^n$，令 $\alpha = 1 + i\tan A$，其中 $A = \sum_{j=1}^{n} \text{辐角}_{[0,\pi)}(z_j - \xi) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，于是 $\alpha \in \mathbb{C}_+$ 的辐角为 $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \text{辐角}_{[0,\pi)}(z_j - \xi)$。由定理 3.1 和注 4.4，集合 $\{z_j\}_{j=1}^n$ 是唯一一个形式为 (5.13) 的多项式 h 的零点集，其中两个多项式 p 和 q 的次数分别为 n 和 $n-1$，且它们的零点严格交错。如上所述，p 和 q 唯一确定 $\mathcal{J}$，使得 p 和 p 分别是 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}^{(1)}$ 的特征多项式。特别地，它们唯一确定数值 $a_1 > 0$ 和 $b_1 \in \mathbb{R}$，因此我们定义

$$m := a_1 \cdot \tan A \qquad \text{and} \qquad l := \frac{m}{a_1}(b_1 - \xi). \tag{5.15}$$

$\mathcal{J}$、$m > 0$ 和 $l \in \mathbb{R}$ 的唯一性与存在性蕴含了 $\mathcal{J}_l$ 的唯一性与存在性，m 其谱为 $\{z_j\}_{j=1}^n$。□

对于满足 $\det(\mathcal{J} - \xi I) = 0$ 的雅可比矩阵（其中 $\xi = b_1 - \frac{la_1}{m}$ 给定的 $m > 0$ 和 $l \in \mathbb{R}$），我们得到以下结果。

定理 5.6。给定数 $m > 0$ 和 $l \in \mathbb{R}$，设 $\det(\mathcal{J} - \xi) = 0$，其中 $\xi = b_1 - \frac{la_1}{m}$。那么，在 (5.12) 中定义的 $\mathcal{J}_{l,\ m}$ 的谱包含一个单实数特征值 ξ，而其余特征值属于

$$\left\{ \{z_j\}_{j=1}^{n-1} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^{n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} \text{Arg}_{[0,\pi)}(z_j - \xi) < \arctan A \right\} \tag{5.16}$$

其中 $A = \frac{m}{a_1} > 0$。

收敛 因此，给定 $\xi \in \mathbb{R}$，对于任意 $A > 0$，每一种这样的点的构型都会作为谱出现 m *of* 一个 q 唯一的 $\mathcal{J}_{l,\ m}$ 满足 $\det(\mathcal{J} - \xi) = 0$，且 $m > 0$、$l \in \mathbb{R}$。

$\mathcal{J}$ 中大于 ξ 且小于 ξ 的特征值个数，分别与 $\mathcal{J}_{l,\ m}$ 在 $\mathbb{C}_+$ 和 $\mathbb{C}_-$ 中的特征值个数相同。

证明。由于 $\det(\mathcal{J} - \xi) = 0$，我们有 $p(z) = (z - \xi)\widehat{p}(z)$，因此 $\mathcal{J}_{k,\ \times}$ 的特征多项式（见 (5.7)）变为

$$h(z) = (z - \xi)\left[\left(1 + i\frac{m}{a_1}\right)\widehat{p}(z) - i\frac{m}{a_1}q(z)\right].$$

p 和 q 的零点严格交错。因此，如果

$$\widehat{p}(z) = \prod_{j=1}^{n-1}(z - \lambda_j) \qquad \text{and} \qquad q(z) = \prod_{j=1}^{n-1}(z - \mu_j),$$

那么，$\widehat{p}$ 的零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-1}$ 和 q 的零点 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 满足以下不等式

$$\lambda_1 < \mu_1 < \ldots \lambda_s < \mu_s < \xi < \mu_{s+1} < \lambda_{s+1} < \ldots < \mu_{n-1} < \lambda_{n-1} \tag{5.17}$$

对于某个整数 s，$0 \leqslant s \leqslant n-1$。由于辐角 $A = 1 + i\frac{m}{a_1} = \text{反正切}\ \frac{m}{a_1}$，由定理 4.1 和注 4.4 可得，$\mathcal{J}_{l,m}$ 的 $n-1$ 非零特征值属于 (5.16)，其中 $A = \frac{m}{a_1}$。

反过来，给定 $\xi \in \mathbb{R}$、$A > 0$，以及 (5.16) 中的点的构型 $\{z_j\}_{j=1}^{n-1}$，应用定理 4.1 和注 4.4（取 $\alpha := 1 + iA$），即可得到两个次数为 $n-1$ 的多项式 $\widehat{p}$ 和 q，其零点 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-1}$ 和 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ 满足 (5.17)。

于是，$(z - \xi)\widehat{p}(z)$ 和 $q(z)$ 的零点严格交错。这唯一确定了 $\mathcal{J}$，使得 $(z - \xi)\widehat{p}(z)$ 和 $q(z)$ 分别是 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}^{(1)}$ 的特征多项式。现在，已知矩阵 $\mathcal{J}$ 后，可以通过公式 (5.15) 唯一确定数值 $m > 0$ 和 $l \in \mathbb{R}$。□

注5.7。类似地，也可以求解秩二加性扰动的谱问题，其中 (5.12) 的 (2，1) 项和 (1，2) 项均等于 $a_1 + im$。事实上，利用酉共轭，可以将此类矩阵化为 (5.12) 的形式。细节留作读者练习。

6. Acknowledgements

M. Tyaglov 的工作部分得到中国国家自然科学基金委员会项目（编号 11871336）的资助。

References

[1] G. Alpan and R. Kozhan β *J. Math.*，手 *Phys.* **63** 043505 2022
征高斯系综的厄米与非厄米扰动，，（）。[2] G. Alpan and R. Kozhan，经典 β系综的乘性扰动，准备中。
[3] Y. Arlinskiĭ and E. Tsekanovskiĭ *J. Funct.*，具 *Anal.* **241** 383 438
有秩一虚部的非自伴雅可比矩阵，，，第 2 期，2006 年，第 – 页。[4] Yu. S. Barkovsky，劳斯–赫尔维茨问题讲义，*arXiv.org: math/0802.1805*，2008 年。
[5] M. Biehler ´ ´ ´ *J. Reine Angew.*，关 *Math.* **87** 1879 350 352
于一类所有根均为实数的代数方程，，，，第 – 页。[6] C. de Boor Gray and G.H. Golub，从谱数据数值稳定地重构雅可比矩阵，*Linear Algebra Appl.*，第 21 卷，1978 年，第 245–260 页。[7] L.J. Gray and D.G. Wilson，根据谱数据构造雅可比矩阵，*Linear Algebra Appl.*，第 14 卷，1976 年，第 131–134 页。[8] F. Gantmacher，M. Krein，*Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*，AMS Chelsea 出版社，罗德岛州普罗维登斯，修订版，2002 年。译自 1941 年俄文原版。Alex Eremenko 编，并撰写序言。[9] O. Hald，雅可比矩阵的逆特征值问题，*Linear Algebra Appl.*，第 14 卷，1976 年，第 63–85 页。[10] C. Hermite，关于有理连分数的指标，*Bull. Soc. Math. France*，第 7 卷，1879 年，第 128–131 页。[11] H. Hochstadt，根据谱数据构造雅可比矩阵，*Linear Algebra Appl.*，第 8 卷，1974 年，第 435–446 页。[12] O. Holtz and M. Tyaglov，结构化矩阵、连分数与多项式的根定位，*SIAM Rev.*，第 54 卷，第 3 期，2012 年，第 421–509 页。[13] C. Lanczos，求解线性微分算子与积分算子特征值问题的迭代方法，*Journal of Research of the National Bureau of Standards*，第 45 卷（第 4 期），1950 年，第 255–282 页。
[14] R. Kozhan β *J. Stat.*，厄 *Phys.* **168** 1, 2017, 92 108
米随机矩阵系综的秩一非厄米扰动，，，第 期，第 – 页。
[15] S. O'Rourke and P.M. Wood *Ann. Inst. H. Poincaré Probab.*，近 *Statist.* **53** 1241 1279
厄米随机矩阵的谱，，，第 3 期，第 – 页。[16] M. M. Postnikov，*Stable polynomials*（俄文），第 2 版，莫斯科，2004 年。[17] Q.I. Rahman and G. Schmeisser，*Analytic theory of polynomials*，伦敦数学学会专著（新系列）第 26 卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2002 年。[18] H.S. Wall，所有零点均具有负实部的多项式，*Amer. Math. Mothly*，第 52 卷，第 6 期，1945 年，第 308–322 页。[19] H.S. Wall，*Analytic Theory of Continued Fractions*，切尔西，纽约布朗克斯，1973 年。

Department of Mathematics, Uppsala University, Uppsala, Sweden
Email address: rostyslav.kozhan@math.uu.se

School of Mathematical Sciences and MOE-LSC, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, P.R.Chin A
Email address: tyaglov@sjtu.edu.cn