arXiv:2302.07053v2 [math.DG] 9 Jul 2024

关于具有多个端的三维流形上的无穷远处狄利克雷问题

JEAN C. CORTISSOZ 和 RAM ´ON URQUIJO

Abstract. 本文证明，对于具有有限多个膨胀端的三维流形，若每个端都存在一个邻域，使得该邻域内的曲率有一个负常数作为上界，则无穷远处狄利克雷问题可解。因此，这类流形存在大量有界的非恒定调和函数（故李维尔定理不成立）。对于具有无限多个膨胀端的情形，我们证明，若每个端都存在一个邻域，使得该邻域内的曲率有一个负常数作为上界，则对于无穷远处一致有界的连续边界数据，无穷远处狄利克雷问题可解。我们的方法基于一个不需要明确曲率假设的结果，因此也可应用于其他情形：我们给出一个端上的度量例子，其曲率符号不定（无论沿该端延伸多远），但相对于该端，无穷远处狄利克雷问题仍可解。我们还给出一个关于带极点的曲面的相关结果，它推广了 Milnor 的一个著名判据。

Key words: 无穷远处狄利克雷问题，有界调和函数，多个端。

AMS 2010 *Mathematics subject classification:* 主要分类号 31C05，53C21

Contents

1. 引言 2 1.1. 三维情形 2 1.2. 二维情形 4 1.3. 5 2. 预备知识 6 2.1. 佩龙方法 7 3. 三维流形中的狄利克雷问题 7 3.1. 端的邻域上的狄利克雷问题 7 3.2. 具有多个端的三维流形：定理1和定理2的证明 11 3.3. 二维情形 12 参考文献 12

1. Introduction

1.1. 三维情形。具有柱状端的 n维开流形是一个 n流形 M，其中包含一个相对紧的开子流形 $U \subset M$，满足 $\partial\overline{U} = E$，其中 $M \setminus U = E \times [0, \infty)$，并且

$$E = \bigsqcup_j E_j,$$

其中每个 E_j 都是 M 的光滑闭（$n-1$）子流形。每个 E_j 都称为一个端的邻域（此处 $\bigsqcup$ 表示不交并）。

M 的一个膨胀端，是指具有一个与 $N \times [0, \infty)$ 微分同胚的邻域的端，并且该邻域中的度量可以写成

$$g = dr^2 + \phi(\omega, r)^2 g_N,$$

ϕ 是一个光滑函数，并且存在一个 $R > 0$，使得若 $r \geq R$，则 $\phi_r > 0$，且当 $r \to \infty$ 时，$\phi \to \infty$。

细心的读者乍看之下可能会觉得，我们要求端的邻域中的度量具有这种写法，似乎有些限制性。然而，要更好地理解其意义，还应注意到，要能够在端的邻域上将度量 g 写成上述形式，所需要的仅仅是：该端可以由从 $N \times \{0\}$ 出发的距离函数的等值面构成叶状结构，并且叶状结构的每个叶片都是与 N 微分同胚的光滑子流形（事实上，若从 $N \times \{0\}$ 出发的距离函数是光滑的，这一点便随之成立）；于是，根据一致化定理，在固定度量 N 下，这些等值面上的度量都可以写成 $\phi(\omega, r)^2 g_N$，因此，端的邻域上的度量 g 便具有上述形式。

要紧化一个端的邻域，只需在无穷远处添加一个 N 的副本；也就是说，我们先将 $[0, \infty)$ 紧化，得到 $[0, \infty]$，然后通过取以下内容，得到该端邻域的紧化

$$\overline{\text{Neighborhood of end}} = N \times [0, \infty].$$

现在一切就绪，可以说明我们所说的关于某个端的无穷远处狄利克雷问题可解是什么意思。若某个端的邻域同胚于 $N \times [0, \infty)$，且边界数据为 $f\colon N \longrightarrow \mathbb{R}$，并且存在调和函数 $u\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$，使其限制在该端的邻域上时，能够连续延拓到该邻域的紧化（也就是说，当 $r \to \infty$ 在紧化的拓扑中趋近时，$u(\omega, r)$ 逐点趋于 $\to f(\omega, r)$）。回顾一下，函数 $u\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ 是调和的，是指它属于 $C^2(M)$ 且满足 $\Delta_g u = 0$，其中 Δ_g 是相对于度量 g 定义的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。

另一方面，如果给定带端流形的各个端 $\{\varepsilon_j\}_{j=1,\ 2,\ 3.....}$，且每个端 ε_j

都有一个与 $N_j \times [0,\infty)$ 同胚的邻域，并且具有 $f_j \in C(N_j)$，那么存在一个调和函数 u，定义在 M 中，使得 u 对每个端都满足狄利克雷问题。

正如标题所暗示的那样，本文旨在研究具有膨胀端的开三维流形上的无穷远处狄利克雷问题。事实上，我们证明如下结果。

定理 1. 设 $\left(M^3, g\right)$ 为一个具有有限多个柱状端的黎曼流形，且所有端均为膨胀端。假设每个端都有一个邻域，使得存在常数 $a \neq 0$，令该端的给定邻域内的曲率满足 $K \leq -a^2$。那么，无穷远处的狄利克雷问题可解。

在继续之前，我们先简要说明一下前述定理的假设条件。对于一个膨胀端 $N \times [0,\infty)$ 的邻域，其度量如上所述，曲率界仅需针对包含法向方向和端 N 切向方向的平面的截面曲率（正如下文将证明的，这些曲率可计算为 $-\phi_{rr}/\phi$）。

我们还给出了流形具有无限多个扩张端时一个结果的证明，但在陈述该结果之前，我们需要给出另一个定义。如果存在一个 $m \in \mathbb{R}$，使得边界数据 $f_j : N_j \longrightarrow \mathbb{R}$ 一致有下界，则称其一致有下界。

$$f_j \geq m \quad \text{holds} \quad \text{for all} \quad j.$$

类似地，我们定义边界数据一致有上界的情形，并称边界数据一致有界，如果它既一致有上界，又一致有下界。

现在，我们可以陈述关于具有无限多个扩张端的三维流形的定理了。

定理 2. 设 $\left(M^3, g\right)$ 是一个具有无限多个圆柱端的黎曼流形，且所有这些端都是膨胀端。假设每个端都存在一个邻域，使得存在常数 $a \neq 0$，从而该端给定邻域内的曲率满足 $K \leq -a^2$。那么，如果边界数据一致有界，无穷远处的狄利克雷问题有解。

定理1和定理2与 [4], 中的命题 3.9密切相关，该命题部分指出，在一个具有极点的三维流形上，度量可以写成

$$g = dr^2 + \phi(\omega, r)^2 \, g_{\mathbb{S}^2}, \quad \omega \in \mathbb{S}^2, \tag{1}$$

其中 $g_{\mathbb{S}^2}$ 是单位球面上的标准度量，并且在某个紧集之外，曲率满足：对于 $A > 1$，其上界为 $-A/r^2 \log r$，关于极点的狄利克雷问题在无穷远处可解

。还要注意，由于一致化定理，（1）是在 $\mathbb{R}^3$上表示度量的一种非常一般的形式。

我们对定理1和定理2的证明基于定理4，而定理4不使用任何曲率假设。事实上，为了有效运用定理4，需要利用曲率假设来获得 ϕ上的所需性质，从而使上述定理得以应用，因此我们的主要结果可以推广到其他情形。例如，如果在每个膨胀端的邻域内，曲率满足 $-A/r^2 \log r$，$A > 1$，则定理1和定理2仍然成立。此外，在第3节末尾，我们给出了一个端的邻域上的度量例子：其曲率无论沿端延伸多远都不具有确定符号，但相对于该端的无穷远处狄利克雷问题仍然可解（第 3.1.1 节）。

负曲率流形上的无穷远处狄利克雷问题有着悠久的历史，始于 Choi 的开创性工作 [4]。在与该问题相关的最重要结果中，有 Anderson [2]和 Sullivan [14], 关于存在性的结果：他们证明，如果 M 是一个曲率上下界分别由两个负常数给出的 Cartan-Hadamard流形，那么对于任意连续边界数据，无穷远处狄利克雷问题均可解。此后，研究重点之一便是理解下界对狄利克雷问题解的存在性所起的作用（ [3,9]）；正如 Ancona [1] 所证明的那样，一般而言，如果曲率没有下界，则存在截面曲率上界为 -1 的三维流形，使得无穷远处狄利克雷问题无解。

1.2. 二维情形。对于重要情形——Cartan-Hadamard曲面（因而只有一个端）上的无穷远处狄利克雷问题，其可解性已有充分研究，这在一定程度上归功于 R. Neel 的工作。他运用概率方法，给出了函数ϕ 在（1）中满足的一个精确条件，从而确保无穷远处狄利克雷问题（ [11,12]）可解。我们的结果（主要是定理4）通过更偏解析的方法证明，是他这项工作的自然延伸，推广到了下一个较低维数和更复杂的拓扑结构。然而，在二维中，三维情形所采用的思路也相当适用，因此，关于二维情形，我们将证明以下结论。

定理3。设 $\left(M^2, g\right)$ 为带极点曲面。那么，度量 g可写为

$$g = dr^2 + \phi\left(\theta, r\right)^2 d\theta^2.$$

如果存在一个正的 $\overline{\phi}(r)$，使得对于所有足够大的 $r > 0$ 以及所有满足条件的 θ

$$0 \leq \frac{\overline{\phi}_r\left(r\right)}{\overline{\phi}\left(r\right)} \leq \frac{\phi_r\left(\theta, r\right)}{\phi\left(\theta, r\right)},$$

并且满足

$$\int^{\infty} \frac{1}{\overline{\phi}(s)}\, ds < \infty,$$

那么，对于任意连续边界数据，无穷远处狄利克雷问题都有解。

如果 $\mathbb{R}^2$ 中的度量是旋转对称的，那么 $\overline{\phi}$ 可以直接取为其本身，因此前述定理推广了 [10] 中的 Milnor 结果（至少可以判定曲面是否为双曲型），也推广了 [6] 中的主要结果在二维情形下的结论。注意，定理3并不要求曲面是 Cartan-Hadamard 流形。利用 [10], 中的 Milnor 的论证可以证明，若曲面是 Cartan-Hadamard 流形，且曲面的截面曲率小于 $-A/r^2 \log r$（当 $A > 1$时），则无穷远处狄利克雷问题有解。结合这一观察与 [5] 第 3.1 节中给出的论证，可以为带极点的曲面上的 Milnor 判据提供一种新的替代证明。前述定理还可以推广到具有多个端的曲面；在三维情形下也有类似的结论，不过我们将把这项工作留给感兴趣的读者。

1.3. 如前文所述，关于无穷远处狄利克雷问题的大多数结果都针对单连通流形，作者所知的唯一例外是 Choi [4] 关于具有有限多个端的曲面的结果。因此，本文的结果推动了我们对具有多个端的流形上的狄利克雷问题的理解。此外，尽管他们的论述并未直接得出这一结论，但读者在证明本文结果的过程中会注意到：只要三维流形有一个膨胀端，且该端的某个邻域内的曲率有一个负常数上界，它就有大量有界非常值调和函数（因此刘维尔定理不成立）。众所周知，这会对流形上的布朗运动行为产生影响 [8]。

撰写本文的想法源自 Neel 教授的一封信。他认为， [6] 中提出的思路可用于研究具有多个端的流形上的无穷远处狄利克雷问题；作者感谢他分享这一见解。不过，在 [6], 的情形中，采用的是一种更直接的傅里叶展开方法；而本文中，直接运用 [6] 的方法未能奏效，因此我们不得不将其与佩龙方法结合，以证明主要结果。这种方法的主要难点在于，如何在无穷远处各点构造适当的屏障函数。我们还必须指出，尽管佩龙方法以其简洁性尤为出色， [6] 中提出的方法却允许采用更一般的边界数据，因为我们证明了边界数据属于 L^2时问题仍可解。

本文的结构安排如下。第2节中，我们给出并证明一些预备引理。第3节中，我们证明相对于某个端的狄利克雷

无穷远处问题的可解性，然后应用这一结果，在3.2节和3.3节证明我们的主要结果。

2. Preliminaries

本节汇集了一些结果，它们将在定理 1 和定理 2 的证明中用到。

引理 1. 假设 (N, g_N) 是局部共形平坦的。考虑度量

$$g = dr^2 + \phi^2(\omega, r)\, g_N,$$

在 $N \times [0, \infty$ 上）。那么，对于与 N 相切的任意方向 e_σ，截面曲率满足

$$R_{r\sigma\sigma r} = -\frac{\phi_{rr}}{\phi}.$$

证明。由于 g_N 是局部共形平坦的，它在局部可写为 $g_N = \psi(\omega)^2 \delta_{\alpha\beta}$。在下面的计算中，我们使用局部坐标下曲率张量的表达式。

$$R_{r\alpha\alpha}{}^{r} = -\partial_\alpha \Gamma^r_{\alpha r} + \partial_r \Gamma^r_{\alpha\alpha} - \Gamma^r_{\alpha j}\Gamma^j_{r\alpha} + \Gamma^r_{rj}\Gamma^j_{\alpha\alpha}.$$

不难计算得出

$$\Gamma^r_{rj} = 0, \quad \text{for all} \quad j, \quad \Gamma^r_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\Gamma^r_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\alpha, r} = -\phi\phi_r\psi^2$$

and

$$\Gamma^\alpha_{r\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha, r} = \frac{\phi_r}{\phi},$$

因此,

$$R_{r\alpha\alpha}{}^{r} = -\phi\phi_{rr}\psi^2 - \phi_r^2\psi^2 + \phi_r^2\psi^2 = -\phi\phi_{rr}\psi^2,$$

由此可得所声称的截面曲率公式。

□

下面介绍一个基本工具：Sturm 提出的经典比较结果。

引理 2（比较引理）。设 u 和 v 是 $[a, \infty)$ 上正的严格递增函数。

- (a) 若 $u(a) < v(a)$, $u'(a) < v'(a)$, 且 $u''/u \le v''/v$ 在 $[a, \infty)$ 上成立, 则 $u \le v$ 在 $[a, \infty)$ 上成立。
- (b) 若 $u'(a)/u(a) < v'(a)/v(a)$ 且 $u''/u \le v''/v$ 于 $[a, \infty)$, 则 $u'/u \le v'/v$ 于 $[a, \infty)$。

2.1. 佩龙方法。若函数 s: $M \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为次调和函数：对于任意有界开集 $\Omega \subset M$，若对于任意 h 连续调和函数都满足 $h = s$ 于 $\partial\Omega$，则 $h \geq s$。若相反的不等式成立，则称函数 v 为超调和函数。注意，当 s 是 C^2 （分别地，　v 是C^2）时，它满足 $\Delta s \geq 0$ （分别地，　$\Delta v \leq 0$）；反之亦然：若一个 C^2 满足 $\Delta s \geq 0$ （分别地，　$\Delta v \leq 0$），则它是次调和的（分别地，超调和的）。

给定一组边界数据，考虑连续次调和函数的集合 $s: M \longrightarrow \mathbb{R}$，它们满足 s 可连续延拓到每个端的邻域的紧化上，并且对于紧化 $N \times [0,\infty]$，我们有 $s|_{N_j\times\{\infty\}} \leq f_j$。于是，狄利克雷问题的佩龙解由下式给出

$$u = \sup_{s\in\mathcal{S}} s.$$

接下来我们回顾屏障的概念。点 (p,∞) 处某个端的邻域$Z = N \times [0,\infty)$上的屏障 b 是一个非负超调和函数 b: $\overline{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$，满足 $b(p,\infty) = 0$，并且在 $\overline{Z}\setminus\{(p,\infty)\}$ 上满足 $b > 0$（此处 $\overline{Z} = N\times[0,\infty]$）。能够构造屏障的点 (p,∞) 称为正则边界点。

屏障这一概念或许显得过于严格，不便于使用或构造。不过，我们还有局部屏障这一概念，而我们实际上将构造这些局部屏障来证明主要结果。局部屏障是定义在 $U \subset \overline{N}$of (p,∞) 的某个邻域上的超调和函数，并且在 U 上满足上述定义（参见 [7] 第 25 页）。众所周知，可以按照 [7] 中所述的方法，由局部屏障构造出屏障函数。

屏障函数之所以有用，是因为如果能在每个边界点构造屏障函数，那么狄利克雷问题的佩龙解就会满足边界条件。这个事实的证明见 [7] 中的引理 2.13。

3. The Dirichlet problem in three-dimensional manifolds

3.1. 端的邻域上的狄利克雷问题。本节首先研究 g 上的度量，其中 N 是一个闭曲面，且该度量具有如下形式

$$g = dr^2 + \phi(\omega, r)^2 g_N.$$

为此，我们首先计算该度量的拉普拉斯算子。下面给出一个引理。

引理 3. 假设 dim $(N) = n-1$, $n \geq 3$，则

$$\Delta_g = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\frac{\phi_r}{\phi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\phi^2}\Delta_N - (n-3)\frac{1}{\phi^3}\nabla_N\phi\cdot\nabla_N,$$

其中，下标 N 表示算子是相对于度量 g_N 定义的。

证明。度量 g 可写成如下矩阵形式

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi^2 g_N \end{pmatrix}$$

因此

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi^2} g_N^{-1} \end{pmatrix}.$$

这给出了度量行列式的如下恒等式:

$$|g| = \phi^{2(n-1)} |g_N|.$$

因此,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\phi^{(n-1)}\sqrt{|g_N|}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega^i} \left(\sqrt{|g|} \frac{1}{\phi^2} g_N^{ij} \frac{\partial}{\partial \omega^j} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1) \frac{\phi_r}{\phi} \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{\phi^{(n-1)}\sqrt{|g_N|}} \frac{\partial}{\partial \omega^i} \left(\phi^{n-3} \sqrt{|g_N|} g_N^{ij} \frac{\partial}{\partial \omega^j} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1) \frac{\phi_r}{\phi} \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{\phi^2} \Delta_N + (n-3) \frac{1}{\phi^3} \frac{\partial \phi}{\partial \omega^i} g_N^{ij} \frac{\partial}{\partial \omega^j}, \end{aligned}$$

由此得证。 □

因此，当 $n = 3$ 时，我们有以下拉普拉斯算子的表达式，供下文使用:

$$\Delta_g = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\phi_r}{\phi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\phi^2} \Delta_N. \tag{2}$$

我们将首先证明，在满足一些技术性假设的情况下，可以在一个端上构造局部障碍函数。

定理4. 设 $Z = N \times [0, \infty)$， N 为一紧黎曼曲面，其度量具有如下形式

$$g = dr^2 + \phi(\omega, r)^2 g_N.$$

假设存在一个仅依赖于 r 的函数 $\overline{\phi} > 0$，并且存在 $r_0 > 0$，使得 $\overline{\phi}(r) \leq \phi(\omega, r)$（对所有 $\omega \in N$），并且

$$0 < \frac{\overline{\phi}_r}{\overline{\phi}}(r) \leq \frac{\phi_r}{\phi}(\omega, r),$$

对所有 $r \geq r_0$ （以及所有 $\omega \in N$），并且还假设

$$\int_0^\infty \frac{1}{\underline{\phi}}\, dr < \infty.$$

那么，每个点 $(z, \infty) \in N \times \{\infty\}$ 都是正则边界点。

证明。我们来构造任意给定点 (p, ∞)，$p \in N$处的局部屏障，位于Z上。令 U 为 p 在 N中的一个小开邻域。我们可以假设 $U \times [0, \infty)$上的度量可写为

$$dr^2 + \mu(\omega, r)^2 g_E,$$

其中 g_E 是 U上的任意平坦度量，因为曲面上的每个度量都是局部共形平坦的。事实上，假设 ϕ 满足定理的假设；我们将验证可以构造 $\overline{\mu}$，使得 μ 在 $U \times [r_0, \infty)$中满足与 ϕ 相同的假设，也就是说，我们同样有

$$\overline{\mu}(r) \leq \mu(\omega, r),$$

$$0 < \frac{\overline{\mu}_r}{\overline{\mu}}(r) \leq \frac{\mu_r}{\mu}(\omega, r),$$

and

$$\int_0^\infty \frac{1}{\overline{\mu}}\, dr < \infty,$$

在 $U \times [r_0, \infty)$上。事实上，注意到对于适当的光滑函数 ψ，在 U上必有 $\mu(\omega, r) = \psi(\omega)\, \phi(\omega, r)$。如有必要，缩小 U 后，我们可以假设 $\inf_{\omega \in U} \psi(\omega) = \eta > 0$。因此，

$$\overline{\phi}(r) \leq \frac{\psi(\omega)}{\psi(\omega)} \phi(\omega, r) \leq \frac{1}{\eta} \mu(\omega, r).$$

因此，取 $\overline{\mu} = \eta \overline{\phi}$。不难验证，采用这一选择后，定理的假设由 μ 满足，正如所声称的那样。由于可以由函数 ϕ 构造出这样的 μ，在下文中我们将假设 $\mu = \phi$。

为继续构造局部屏障，不失一般性，我们假设 U 是相对于度量 g_E 以 p 为中心的一个球。现在，令 ϑ 为 U 上狄利克雷问题的第一特征函数，即

$$\Delta \vartheta = -\lambda_1^2 \vartheta \quad \text{in} \quad U, \quad \vartheta = 0 \quad \text{on} \quad \partial U,$$

其中 $\lambda_1 > 0$。不失一般性，我们可以假设 $\vartheta < 0$ 在 U 中。众所周知，ϑ 在 p 处取得绝对最小值。现在我们定义

$$\sigma(r) = e^{-\int_r^\infty \frac{\lambda_1}{\underline{\phi}(s)}\, ds}, \quad r \geq r_0,$$

其中 $\overline{\phi}$ 如定理陈述中的假设条件所述，并考虑函数 $\Theta = \sigma(r)\, \vartheta(\omega)$。我们首先证明 Θ 在

$U \times [r_0, \infty)$ 上是超调和的。事实上，我们先按如下方式估计

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma}{dr^2} + 2\frac{\phi_r}{\phi}\frac{d\sigma}{dr} - \frac{\lambda_1^2}{\phi^2}\sigma &= \left(\frac{\lambda_1^2}{\overline{\phi}^2} - \frac{\lambda_1\overline{\phi}_r}{\overline{\phi}^2}\right)\sigma + 2\lambda_1\frac{\phi_r}{\phi}\frac{1}{\overline{\phi}}\sigma - \frac{\lambda_1^2}{\phi^2}\sigma \\ &\geq \frac{\lambda_1^2}{\overline{\phi}^2}\sigma + \lambda_1\frac{\phi_r}{\phi}\frac{1}{\overline{\phi}}\sigma - \frac{\lambda_1^2}{\phi^2}\sigma \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\overline{\phi} \leq \phi$ ，并且 $0 < \overline{\phi}_r/\overline{\phi} \leq \phi_r/\phi$ 对于 $r \geq r_0$ 成立。因此，

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} + 2\frac{\phi_r}{\phi}\frac{d\sigma}{dr} \geq \frac{\lambda_1^2}{\phi^2}\sigma = -\frac{1}{\phi^2}\frac{\sigma\Delta_N\vartheta}{\vartheta},$$

又由于 $\vartheta < 0$，我们得到

$$\vartheta\frac{d^2\sigma}{dr^2} + 2\frac{\phi_r}{\phi}\vartheta\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{\phi^2}\sigma\Delta_N\vartheta \leq 0.$$

现在，利用 (2) 得到

$$\Delta\Theta = \vartheta\frac{d^2\sigma}{dr^2} + 2\frac{\phi_r}{\phi}\vartheta\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{\phi^2}\sigma\Delta_N\vartheta,$$

因此我们得到

$$\Delta\Theta \leq 0.$$

到目前为止，我们得到的是： Θ 在 (p, ∞) 处几乎是一个局部屏障，但我们仍需稍作修改（除了是超调和的之外，局部屏障还必须是非负的，并且在 (p, ∞) 处的值为 0）。为此，令 $A = \vartheta(p)$（请回忆，除了严格为负之外，它还是一个绝对最小值），并定义

$$\Theta_A = \Theta - A.$$

显然， Θ_A 是非负的，并且在 $\overline{U} \times [r_0, \infty]$ 上实际上是正的，除了在 (p, ∞) 处其值为 0。因此， Θ_A 是 (p, ∞) 处的局部屏障。□

由前一个定理，我们可以推得膨胀端邻域上的任意点 (p, ∞) 的正则性，其中邻域的截面曲率满足截面曲率为 $K_Z \leq -a^2 < 0$。事实上，在这种情况下，由引理 1 可知

$$\frac{\phi_{rr}}{\phi} \geq a^2.$$

因此，令 $\overline{\phi} = \alpha\sinh\,[ar + 1]$。选取 $\alpha > 0$ 使得

$$\alpha\sinh 1 < \min_{\omega}\phi\left(\omega, 0\right),$$

$$a\alpha < \min_{\omega\in N}\frac{\phi_r\left(\omega, 0\right)}{\phi\left(\omega, 0\right)},$$

and

$$\alpha a\cosh 1 < \min_{\omega}\phi_r\left(\omega, 0\right).$$

由于 $\overline{\phi}_{rr}/\overline{\phi} = a^2$，根据比较引理，定理4的假设条件成立，因此我们得到：

定理5. 设 $Z = N \times [0, \infty)$，N 是一个紧黎曼曲面，其度量具有如下形式

$$g = dr^2 + \phi(\omega, r)^2 g_N.$$

假设 Z 的截面曲率满足 $K_Z \leq -a^2$, $a > 0$，且该端是扩张的。那么，$N \times \{\infty\}$ 上的任意点都是正则边界点。

3.1.1. 一个例子。假设在一个端的邻域上，对于足够大的 $r > 0$，度量形式如下

$$dr^2 + \phi(r)^2 g_N,$$

with

$$\phi(r) = \sin r + r \log^2 r.$$

那么，在这种情况下，计算沿 r方向的曲率很简单：

$$-\frac{\phi''}{\phi} = -\frac{-\sin r + \frac{2\log r}{r} + \frac{2}{r}}{\sin r + r\log^2 r},$$

当 r较大时，它可以为正或负。注意，当 r较大时，$\phi' \geq 0$，因此该端是扩张的。在这种情况下，我们可以取 ϕ，使其与 $\overline{\phi}$一样大，并且很容易证明

$$\int^{\infty} \frac{1}{\phi(s)}\, ds < \infty,$$

因此，相对于该端，无穷远处狄利克雷问题是可解的。

3.2. 具有多个端的三维流形：定理1和定理2的证明。定理5立即推出定理1和定理2。事实上，存在边界值小于所给定边界值的次调和函数所构成的非空集合。对于具有无限多个端的情形，我们需要边界数据有下界正是在这里。此外，由于这些次调和函数都被边界数据的一个上界所限制（根据极大值原理），它们的上确界确实存在。由于我们假设这些膨胀端的邻域具有被某个负常数从上界定的截面曲率，因此每个端的所有边界点都是正则的，所以狄利克雷问题可解（佩龙方法）。

最后，我们证明，只要一个具有柱状端的流形拥有一个膨胀端，且该端存在一个邻域，其曲率有一个负常数上界，那么这个流形就有许多有界调和函数。为此，设 $Z = N \times [0, \infty)$ 为该膨胀端的一个邻域，并假设 $K_Z \leq -a^2 < 0$：取一个 $f \in C$（N）连续且非常值的函数，并令 $\mathcal{S}$ 为定义在 $Z = N \times [0, \infty$ 上的连续次调和

函数的集合，这些函数可以连续延拓到各端邻域的紧化上，并且在每个端的邻域边界上（ Z 除外），其值都小于或等于 $\min_{p\in N} f$（p），且在 $N\times\{\infty\}$ 处逐点小于或等于 f。那么 $\mathcal{S}$ 非空；令 $u=\sup_{s\in\mathcal{S}} s$ 为该问题的佩龙解。显然， u 是有界调和函数；又由于 Z 是扩张的，因此 $N\times\{\infty\}$ 上的每一点都是正则点，从而 u 满足 $N\times\{\infty\}$ 处的边界条件，因此 u 非常值，正如所要证明的。

3.3. 二维情形。沿用三维情形中的论证，我们只需在无穷远圆上的任意一点（θ_0,∞）处构造一个局部屏障。利用此处拉普拉斯算子可写为

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\phi_r}{\phi}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\phi^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

利用定理3的假设，我们可以明确地证明，对任意 $a>0$，函数

$$u=-\left[\exp\left(-\int_r^\infty\frac{1}{\overline{\phi}(s)}\right)ds\right]\cos(\theta-\theta_0)$$

当 $R>0$ 足够大时，在（θ,r）$\in$ $\left(\theta_0-\frac{\pi}{2},\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\times$（$R,\infty$）中是超调和的。事实上，

$$\Delta u=\frac{1}{\overline{\phi}}\left(\frac{\phi_r}{\phi}-\frac{\overline{\phi}_r}{\overline{\phi}}\right)u+\left(\frac{1}{\overline{\phi}^2}-\frac{1}{\phi^2}\right)u\le 0,$$

当 cos（$\theta-\theta_0$）$'\ge 0$ 时。

现在，令 $A=1$（$=\lim_{r\to\infty} u$（r,θ_0）），并定义

$$v=u-A.$$

在区域 $\left(-\frac{\pi}{2}\right.$ 中， $\left.\frac{\pi}{2}\right)\times(R,\infty)$ 是点 (θ_0,∞) 处的局部屏障。

请注意，定理3允许 $\mathbb{R}^2$ 上的度量不是 Cartan-Hadamard 度量。例如，若在某个紧集之外有 $g=dr^2+\phi(r)^2\,d\theta^2$,$\phi(r)=\sin r+r\log^2 r$，那么狄利克雷问题在无穷远处可解。

最后，正如引言中所说，定理3、定理3以及 [5] 第3节中提出的论证（其中给出了 Hadamard三圆定理的一个版本），为 Milnor 关于带极点曲面的抛物性判据提供了一种新的证明。

References

[1] A. Ancona,*negative curvature* *Convexity at infinity and Brownian motion on manifolds with unbounded* 10 1994 1, 189 220 ,《Rev. Mat. Iberoamericana》（），第 – 期。[2] M. Anderson, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, 《J. Differential Geom.》18，第4期，701–721页（1983）。

[3] A. Borb ´ *A note on the Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative cur-* ely, , *vature* 114 1992 3, 865 872 《美国数学会会刊》( ) 第 期。[4] H. Choi, *In Asymptotic Dirichlet problems for harmonic functions on Riemannian manifolds* **281**, 2, 691 716 1984 , 《美国数学会汇刊》第 – 期（ ）。[5] J. C. Cortissoz, *A note on harmonic functions on surfaces*, 《美国数学月刊》123（9），884–893页（2016）。[6] J. C. Cortissoz, *An Observation on the Dirichlet problem at infinity in Riemannian cones* 250 2023 352 364 , 《名古屋数学杂志》( )，–。[7] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order* 224 ，第二版。《数学科学基础丛书》，。施普林格出版社，柏林，1983年，xiii+513页。[8] A. Grigor'yan, *Analytic and Geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* **36** , 《美国数学会通报》第2期，135–249 1999– ( )。[9] R. Ji, *The asymptotic Dirichlet problems on manifolds with unbounded negative curvature* **167**, 1, 133 157 2019 , 《剑桥哲学学会数学会刊》第 – 期（ ）。[10] J. Milnor，“论如何判定曲面是抛物型还是双曲型”，《美国数学月刊》84，43–46页（1977）。[11] R. Neel, *Brownian motion and the Dirichlet problem at infinity on two-dimensional Cartan-Hadamard manifolds* 41 2014 2, 443 462 , 《势分析》( )，第 — 期。[12] R. Neel, *Geometric and Martin boundaries of a Cartan-Hadamard surface* , 《ALEA: 拉丁美洲概率与数理统计杂志》18第2期（2021），1669–1687页。[13] J. Peetre, *Absolute convergence of eigenfunction expansions*, 《数学年刊》169（1967），307–314页。[14] D. Sullivan, *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold*, 《J. Differential Geom.》18，第4期，723–732页（1983）。

Email address: jcortiss@uniandes.edu.co, ra.urquijo66@uniandes.edu.co

Department of Mathematics, Universidad de los Andes, Bogotá DC, Colom-bia