arXiv:2302.07058v1 [math.OA] 14 Feb 2023

隐藏过程与隐马尔可夫过程：经典与量子

Luigi AccardiCentro Vito Volterra，罗马第二大学，罗马 I-00133，意大利，accardi@volterra.uniroma2.it**Soueidy ElGheteb**数学与信息学系，科学与技术学院，努瓦克肖特阿斯里亚大学，努瓦克肖特，毛里塔尼亚，elkotobmedsalem@gmail.com**YunGang Lu**数学系，巴里大学“阿尔多·莫罗”，Via E. Orabona 4，70125，巴里，意大利，电子邮箱：yungang.lu@uniba.it**Abdessattar Souissi**[1] 会计系，卡西姆大学工商管理学院，阿尔拉斯，沙特阿拉伯，a.souaissi@qu.edu.sa[2] 科学与技术研究预备学院，拉马萨，迦太基大学，突尼斯，abdessattar.souissi@ipest.rnu.tn

摘要

本文分为三部分。第一部分仅讨论经典过程，并介绍隐马尔可夫过程概念的两种不同扩展。第二部分介绍量子隐过程的概念。第三部分证明，将各种类型的量子马尔可夫链限制到适当的交换子代数（对角子代数）上，可以得到所有经典隐过程；此外，还能得到一些过程族，它们并非通常的隐马尔可夫过程，但属于上述对这些过程的扩展。本文仅讨论状态空间至多可数的过程。

目录

1 引言 **3**

2 经典随机过程的代数表述 **5**2.1 代数经典随机过程.7 2.2 代数经典马尔可夫链.8

3 经典隐过程 9

3.1 经典隐马尔可夫过程.14 3.2 作为经典马尔可夫过程限制的经典隐马尔可夫过程.15 3.3 经典反向隐马尔可夫过程 . . . . . 21 3.3.1 时间连续隐过程 25 3.4 经典广义隐过程.26

4 代数（经典或量子）随机过程 28

4.1 量子马尔可夫链（齐次、逆向）. . . . . 31 4.1.1 条件密度振幅与算子值等距映射.33 4.2 e–**可对角化** 量子马尔可夫链.36 4.3 代数（经典或量子）隐过程 37

5 量子隐马尔可夫过程 39

5.1 可对角化马尔可夫链及相关经典隐过程.41 5.1.1 可对角化条件密度振幅与隐马尔可夫过程 46 5.1.2 与可对角化量子马尔可夫链相关的经典隐马尔可夫过程：极大可观测量.47 5.2 量子隐马尔可夫过程的对角限制 . . 49 5.2.1 一族隐但非隐马尔可夫的经典过程.54 5.3 D_e–**保持的** 量子马尔可夫链及相关经典隐过程.56 5.4 $M_d(\mathbb{C})$ 上满足 $\mathcal{E}(D_e \otimes D_e) \subseteq D_e$ 的转移期望的刻画.57 5.5 D_e–保持的量子马尔可夫链的对角限制 64 5.6 由 D_e–保持的量子马尔可夫链的对角限制定义的隐过程.66

1 引言

经典隐马尔可夫过程（HMP）由 Baum 和 Petrie 于 1966年 提出 [BaumPetr66] ，旨在将针对独立抽样或马尔可夫链的标准统计估计理论（尤其是最大似然估计以及关于功效、估计和检验的（χ^2）理论）推广到更大一类马尔可夫过程的函数；这类过程如今称为隐马尔可夫过程。他们通过考虑两个相关过程来定义这类更广泛的马尔可夫过程函数：一个可观测过程和一个马尔可夫过程（如今称为隐（或底层）过程）。他们的想法是通过对可观测过程进行测量来获取有关隐过程的信息。

在最初的构造中，这类新过程与通常的马尔可夫过程的区别在于引入了所谓的发射算子。发射算子是一种马尔可夫算子，用于描述给定底层过程时可观测过程的条件概率；底层过程则由其自身的马尔可夫算子描述。这两个马尔可夫算子与初始分布一起，通过条件独立性假设唯一确定该过程的联合概率（见下文定义 4）。

与通常的马尔可夫链相比，这类过程包含更多参数，因此自然适合用于建模复杂系统。事实上，过去几年里，这类过程已在多个领域得到应用，包括语音识别 [JelBahMer75], [RabLeSo83],[Rab89], [HuaYasMerv90], 云安全与信用卡安全 [RabJua86],[Algh2016], 计算分子生物学 [FelsChur92], [JasKell12], 模式分类与识别 [SatGuru93], 机器学习 [GhahrJord97],计算机视觉 [GhahrJord97], [RosPent98], 人类互动模型[RosPent98], [YamOhyIsh92], 生物信息学 [Eddy98], 《遗传学》 [LiSte03],音乐表演 [PardBirm05], 经济学与金融学 [HasNat05], [Nguyet18],[RebSa17]。关于经典隐马尔可夫模型应用的精彩综述见 [MGK2021]。讨论所有具体模型背后的通用概率结构时，我们将使用“隐马尔可夫过程”一词；提及具体模型时，则使用“隐马尔可夫模型”（HMM）一词。

近年来，已有数篇文章致力于尝试将隐马尔可夫过程定义的各个方面扩展到量子情形。在[WiesnCrutc08] 中，系统的演化由对量子态施加量子操作来支配。发射符号的序列

定义了施加于隐量子马尔可夫模型初始态上的量子操作序列。Monras 等人 [MonrWiesn11] 提出用一组与发射符号相关联的量子操作来描述一类量子隐马尔可夫模型（HQMM），这类模型与多体系统中的问题有关。在 [SatGuru93] 中，研究者在量子信息框架下提出了一种适用于 HQMM 的基于最大似然的无监督学习算法。然而，这些都只是部分扩展，因为它们只涉及隐马尔可夫过程的某些方面，例如动力学或不同种类的统计算法，但**迄今尚未构造出满足以下性质的一类量子过程**：(i) 将其限制在过程代数的某个阿贝尔子代数上，可得到经典隐马尔可夫过程；(ii) 改变量子过程和阿贝尔子代数，**便可以恢复所有经典隐马尔可夫过程**。

本文旨在阐述这一问题的一种解决方案：（i）它不仅**包含所有经典隐马尔可夫过程**（通过限制到阿贝尔子代数），（ii）还**提出了经典隐马尔可夫过程的若干自然扩展**，也就是说，我们构造了**易于构造的**新型经典过程，**这些过程未见于现有经典隐马尔可夫过程文献**。许多这类新型过程都可以通过对量子马尔可夫链和量子隐马尔可夫过程施加对角限制而得到。

在第 2 节中，我们回顾经典随机过程代数表述的一些基本思想。第 3 节介绍经典隐过程，并说明它们包含经典隐马尔可夫过程。在本文的第二部分，即第 4 节中，我们回顾代数随机过程的概念，包括经典情形和量子情形，并介绍量子隐过程的概念。在第三部分（第 5.1 节）中，我们证明，将各种类型的量子马尔可夫链限制到适当的交换子代数（对角子代数）上，可以得到所有经典隐过程；此外，还可以得到一些过程族，它们并非通常的隐马尔可夫过程，但包含在前几节介绍的这些过程的扩展之中。

2 经典随机过程的代数表述

经典随机过程的代数表述有两个优点：（1）它能更清晰地揭示各种过程的结构；（2）它大大简化了从经典过程到量子过程的过渡。

在下文中，若不会引起混淆，我们将可测空间 $(S, \mathcal{B})$ 简记为符号 S，**并省略** σ–代数。

定义 1 设 T 为一个集合，$(S_n)_{n\in T}$ 为一族可测空间。具有**状态空间** S_n 和**指标集** T 的**经典随机过程** 由概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及一族**可测函数**$X \equiv (X_n)_{n\in T}$给出

$$X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to S_n$$

将 $\mathcal{F}_{fin}(T)$ 记为 T 的有限子集族（若 $F \in \mathcal{F}_{fin}(T)$，我们通常简记为 $F \subset_{fin} T$）。过程 X 的**有限维联合期望**（在物理学中也称为**关联核** 或**关联函数**）为以下期望值

$$P_F\left((f_n)_{n\in F}\right) := P_X\left(\prod_{n\in F} f_n(X_n)\right) := \int_\Omega \prod_{n\in F} f_n(X_n(\omega)) P_X(d\omega) \qquad (2.1)$$

对任意 $F \in \mathcal{F}_{fin}(T)$ 和 $f_n \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$，以及每个 $n \in F$，
具有状态空间 S_n 和指标集 T 的两个经典随机过程，若其有限维联合期望相同，则称为**随机等价** 。过程 X 的随机等价类中的任一元素，都称为 X的**实现** 。

备注。在（2.1）中，令每个 f_n 都是某个可测子集 $I_n \subseteq S_n$ 的示性函数 χ_{I_n}，便可得到**有限维联合概率** ，它们同样刻画过程 X 的随机等价类。

有限维联合期望（2.1）是态，即正的、归一化的线性泛函，

$$P_F \colon \mathcal{A}_F := \bigotimes_{n\in F} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n) \to \mathbb{C} \quad , \quad F \in \mathcal{F}_{fin}(T) \qquad (2.2)$$

具有以下性质:
1) 若 $F \subset G \subset_{fin} T$，则存在一个自然的嵌入

$$j_{F,G}\colon f_F \in \mathcal{A}_F \to j_{F,G}(f_F) \in \mathcal{A}_G$$

其中按定义

$$j_{F,G}(f_F)(\{x_n\}_{n\in G}) := f_F(\{x_n\}_{n\in F})$$

我们将此嵌入视为一种等同: 将关于变量 $\{x_n\}_{n\in F}$ 的函数视为关于变量 $\{x_n\}_{n\in G}$ 的函数，并且该函数与变量 $\{x_n\}_{n\in G\setminus F}$ 无关。因此，我们只写作 $\mathcal{A}_F \subseteq \mathcal{A}_G$。

2) 对于任意 $F \subset_{fin} T$， P_F 是 $\mathcal{A}_F = \prod_{n\in F} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$ 上的一个态。

3) 若 $F \subset G \subset_{fin} T$,

$$P_G\big|_{\mathcal{A}_F} = P_F \tag{2.3}$$

定义 2 由形式为 (2.3) 的函数组成的族 $(P_F)^{F\subset_{fin}T}$，若满足上述条件 2) 和 3)，则称为一个以状态空间 S_n 和指标集 $\mathcal{F}_{fin}(T)$ 为基础的**分布函数射影族**。

概率论中的一个基本结果如下。

定理 1 （柯尔莫哥洛夫一致性定理）若 $S_n = S = \mathbb{R}^d$，对于某个$d \in \mathbb{N}$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，给定任意由分布函数 $(P_F)^{F\subset_{fin}T}$构成、状态空间为 S 的射影族，则在空间 $\Omega := \prod_{n\in T} S \equiv \mathcal{F}(T;\, S)$ 上存在唯一的概率测度 P，其 σ–代数 $\mathcal{F}$由投影函数生成

$$\pi_n : \omega := (s_n)_{n\in T} \in \Omega \to \pi_n(\omega) := s_n \in S \quad , \quad n \in T$$

使得随机过程π_n: $(\Omega\ \mathcal{F}) \to S$的有限维联合期望与 $(P_F)^{F\subset_{fin}T}$一致。

备注。柯尔莫哥洛夫一致性（或相容性）定理适用于比 $S = \mathbb{R}^d$ 一般得多的空间。从柱测度过渡到测度时，微妙之处在于证明可列可加性。据我们所知，这方面最有力的结果是 [RaoSaz93-proj] ，其中还包含完整的参考文献。

柯尔莫哥洛夫一致性定理的一个推论是，任何状态空间为 $S = \mathbb{R}^d$ 的经典随机过程，都可以在定理 1 所定义的概率空间上得到一个 **柯尔莫哥洛夫实现**。

2.1 经典代数随机过程

任何指标集为 T、状态空间为 $n \in T$ 的经典随机过程 $(X_n)_{n\in T}\, S_n$，都唯一确定：– $*$–同态

$$j_n \colon f \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n) \to j_n(f) := f(X_n) \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad , \quad n \in T \tag{2.4}$$

– 由下式给出的 P_X 在 $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上的态

$$P_X(F) := \int_\Omega F(\omega) P(d\omega) \quad , \quad F \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

定义 3 四元组

$$(L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}), P_X, (L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n))_{n\in T}, (j_n)_{n\in T}) \tag{2.5}$$

称为**指标集为** T，**样本代数为** $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 且**状态代数为** $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$的经典代数随机过程。

备注。经典代数随机过程的最一般概念，可通过在定义 3 中将 $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 和 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$ 替换为任意交换 $*$–代数而得到。

利用 $*$–同态 (2.4) 对每个 $F \subset_{fin} T$ 进行识别，
$*$–代数 $\prod_{n\in F} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$ 与由 $\{j_n(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n))\colon\ n \in F\}$ 生成的 $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 的 $*$–子–代数相结合时，有限维联合期望的代数表达式变为

$$P_F\left(\prod_{n\in F} f_n\right) := P_X\left(\prod_{n\in F} j_n(f_n)\right) \quad , \quad f_n \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)\ ,\ n \in F \tag{2.6}$$

随机等价关系可由有限维联合期望 (2.6) 相等来表示。

将 $*$–代数 $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega\ \mathcal{F}, P)\ P_X)$ 替换为一个代数表述，从而得到代数经典随机过程 (2.5) 的柯尔莫哥洛夫实现

由稠密子代数 $\bigotimes_T L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$ 替代，该子代数由 $|T|$ 个 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)$ 的代数张量积组成。这导出了随机等价的代数经典过程

$$\left(\bigotimes_{n\in T} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n), P_X\right), L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n), (j_n)_{n\in T}\Big) \tag{2.7}$$

其中嵌入由下式给出

$$j_n \colon f_n \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n) \to f_n \otimes 1_{T\setminus\{n\}}$$

其中 $1_{T\setminus\{n\}}$ 是 $\bigotimes_{k\in T\setminus\{n\}} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_k)$ 的单位元。

2.2 代数经典马尔可夫链

采用第 2.1 节的记号，**但指标集为** $T := \mathbb{N}$，代数经典随机过程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为**反向马尔可夫链**，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $g_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_m)$、$m \in \{1,\dots,n\}$，有

$$E_{X_0,\dots,X_n}\left(g_{n+1}(X_{n+1})\right) = E_{X_n}\left(g_{n+1}(X_{n+1})\right) \in j_n\left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_n)\right) =: \mathcal{A}_{X_n} \tag{2.8}$$

其中 $E_{X_0,\ \dots,\ X_n}$（分别为 E_{X_n}）是到该代数上的 P_X–条件期望

$$\mathcal{A}_{X;[0,n]} := \text{ algebraic span of } \{\mathcal{A}_{X_0},\dots,\mathcal{A}_{X_n}\} \text{ (resp. } \mathcal{A}_{X_n})$$

已知条件 (2.8) 等价于**条件独立性恒等式**

$$E_{X_n}\left(a_{n)}a_{(n}\right) = E_{X_n}\left(a_{n)}\right) E_{X_n}\left(a_{(n}\right) \tag{2.9}$$

对于任意

$$\begin{cases} a_{n)} \in \mathcal{A}_{X;n)} := \text{ algebraic span of } \{\mathcal{A}_{X_k} \colon k < n\} \\ a_{(n} \in \mathcal{A}_{X;(n} := \text{ algebraic span of } \{\mathcal{A}_{X_k} \colon k > n\} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

如果满足两个等价条件 (2.8) 或 (2.9) 中的任意一个，则称 P_X 为马尔可夫态。经典马尔可夫过程结构定理是定理 7 的一个推论，如下述已知结果所示。

定理 2 设 (X_n) 是一个反向马尔可夫链，并定义

$$\mathcal{A}_{X;[0,n]} := \text{ algebraic span of } \{\mathcal{A}_{X_k} : k \in [0,n]\}$$

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{X;[0,n]}$$

那么，(X_n)唯一确定一对 $(P_0, (P_n)_{n\in\mathbb{N}})$，满足：
– P_0 是 $\mathcal{A}_{X_0}$上的一个态。
– 对每个 $n \geq 1$, P_n: $\mathcal{A}_{X_n} \to \mathcal{A}_{X_{n-1}}$ 是一个马尔可夫算子（完全正且保单位）。

– 由下式定义的态族

$$P_{[0,n]}(a_0 \cdot a_1 \cdots a_n) := P_0\left(a_0 P_1(a_1 \cdots P_{n-1}(a_{n-1}P_n(a_n)))\right) \tag{2.10}$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$和 $a_m \in \mathcal{A}_{X_m}$, $m \in \{1,\ldots,n\}$，都是射影的。特别是，极限

$$\lim_{N\to\infty} P_{[0,N]}(a) =: P(a) \tag{2.11}$$

对强有限意义下的任意 $a \in \mathcal{A}$ 都存在。
反过来，任意一对 $(P_0,(P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 如上所述，都通过 (2.10) 唯一确定一个经典马尔可夫链的有限维联合期望。

备注：下文中，我们称由推论（2.11）定义在 ($\mathcal{A}_X$ 上的态 P_X，是由这一对 (P_0, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$) 定义的。
P_X 由其联合期望 (2.10) 唯一确定（相差随机等价）；而联合期望具有 (2.11) 形式的态称为**反向马尔可夫态**。

3 经典隐藏过程

请注意，在本文中，**只讨论** $T = \mathbb{N}$ 。以下定义将隐马尔可夫过程的概念扩展到**隐藏过程任意**的情形。

定义 4 给定两个可测空间序列 $(S_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}$ $(S_{O_n})_{n\in\mathbb{N}}$，记为

$$\mathcal{B}_{H_n} := L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \quad ; \quad \mathcal{B}_{O_n} := L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \tag{3.1}$$

相应的状态代数，并定义：
– H–样本代数

$$\mathcal{A}_H := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{H_n}$$

– O–样本代数

$$\mathcal{A}_O := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{O_n}$$

– 对应的张量嵌入（$n \in \mathbb{N}$）

$$j_{H_n}(g_n) \equiv g(H_n) := g_n \otimes 1_{\bigotimes_{m\in\{n\}^c} \mathcal{B}_{H_m}} \quad , \quad \forall g_n \in \mathcal{B}_{H_n} \tag{3.2}$$

$$j_{O_n}(f) \equiv f(O_n) := f_n \otimes 1_{\bigotimes_{m\in\{n\}^c} \mathcal{B}_{O_m}} \quad , \quad \forall f_n \in \mathcal{B}_{O_n} \tag{3.3}$$

其中，对于集合 $I \subseteq T$， I^c 表示其补集；
– (H,O)–样本代数

$$\mathcal{A}_{H,O} := \mathcal{A}_H \otimes \mathcal{A}_O \equiv \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{B}_{H_n} \otimes \mathcal{B}_{O_n}) \tag{3.4}$$

– 对应的张量嵌入（$n \in \mathbb{N}$）

$$j_{H_n} \otimes j_{O_n} := \mathcal{B}_{H_n} \otimes \mathcal{B}_{O_n} \to \mathcal{A}_{H,O} \tag{3.5}$$

令 $P_{H,\ O}$ 为 $\mathcal{A}_{H,\ O}$上的一个态。经典随机过程（(H,O)–过程）

$$(\mathcal{A}_{H,O}, P_{H,O}, (\mathcal{B}_{H_n} \otimes \mathcal{B}_{O_n})_{n\in\mathbb{N}}, (j_{H_n} \otimes j_{O_n})_{n\in\mathbb{N}}) \tag{3.6}$$

若引入称为**隐过程或底层过程**的 H–子过程，则该过程称为**隐过程**

$$\Big(\mathcal{A}_H \equiv \mathcal{A}_H \otimes 1_{\mathcal{A}_O}, P_H \equiv P_{H,O}\big|_{\mathcal{A}_H\otimes 1_{\mathcal{A}_O}}, (j_{H_n}), (\mathcal{B}_{H_n})\Big) \tag{3.7}$$

($j_{H_n} \equiv j_{H_n} \otimes 1_{\mathcal{A}_O}$, $\mathcal{B}_{H_n} \equiv \mathcal{B}_{H_n} \otimes 1_{\mathcal{A}_O}$) 和 O–子过程，也称为**可观测过程**

$$\Big(\mathcal{A}_O \equiv 1_{\mathcal{A}_H} \otimes \mathcal{A}_O, P_O \equiv P_{H,O}\big|_{1_{\mathcal{A}_H}\otimes\mathcal{A}_O}, (j_{O_n}), (L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})\Big) \tag{3.8}$$

($j_{O_n} \equiv 1_{\mathcal{A}_H} \otimes j_{O_n}$, $\mathcal{B}_{O_n} \equiv 1_{\mathcal{A}_H} \otimes \mathcal{B}_{O_n}$)，$O$–过程在以下意义上与 H–过程**条件独立**。
对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$P_{H,\ O}$–条件期望 $E_{H_0,\ldots,H_n}$ 到代数上

$$\mathcal{A}_{H_0,\ldots,H_n} := \bigvee_{m\in\{0,1,\ldots,n\}} j_{H_m}\left(\mathcal{B}_{H_m}\right) =: \bigvee_{m\in\{0,1,\ldots,n\}} \mathcal{A}_{H_m}$$

满足

$$E_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)\right) = \prod_{m=0}^{n} E_{H_m}\left(j_{O_m}(f_m)\right) \tag{3.9}$$

对于所有 $f_m \in \mathcal{B}_{O_m} (m \in \{0,\ldots,n\})$，其中 E_{H_m} 表示到 $\mathcal{A}_{H_m}$上的 $P_{H,\ O}$–条件期望。

备注。注意，将指标集 $\mathbb{N}$ 解释为时间，在 (3.9) 中，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，可观测过程 O_m 是以隐藏过程H_m **在同一时刻**为条件的。这些过程不同于**反向隐马尔可夫过程**（见定义 6），在后者中，可观测过程 O_m 是以隐藏过程 H_{m-1} **在前一时刻**为条件的。

定义 5 两个经典隐过程称为**随机等价**，如果**相关可观测过程的联合期望相同**。

注意，这种等价关系专用于隐过程：对于通常的随机过程，随机等价定义为**所有**联合期望均相同。

备注。 E_{H_m} 到该代数的限制

$$\mathcal{A}_{O_m} := j_{O_m}(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m})) := \{j_m(f_m) \colon f_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m})\} \subseteq \mathcal{A}_O$$

是一个**马尔可夫算子** $E_{H_m} \colon \mathcal{A}_{O_m} \to \mathcal{A}_{H_m} := j_{O_m}(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m}))$。由于 j_{H_m}有一个左逆，线性算子

$$B_{O_m,H_m} = j^{-1}_{H_m} \circ E_{H_m} \circ j_{O_m} \colon \mathcal{B}_{O_m} = L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m}) \to \mathcal{B}_{H_m} = L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_m}) \tag{3.10}$$

这是良定义的，因为 E_{H_m} 的值域包含在$j^{-1}_{H_m}$ 的定义域内。根据构造，$B_{O_m,\ H_m}$满足

$$j_{H_m}(B_{O_m,H_m} f_m) = E_{H_m}(j_{O_m}(f_m)) \ ,\ \forall f_m \in \mathcal{B}_{O_m} \tag{3.11}$$

(3.10)表明$B_{O_m,\ H_m}$ 是一个马尔可夫算子，因为它是完全正保单位映射的复合。

马尔可夫算子$B_{O,\ H,\ n}$ 称为第 n **个发射算子**。**全局发射算子**是马尔可夫算子

$$B_{O,H} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} B_{O,H,n} : \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \to \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \tag{3.12}$$

备注。请注意，在定义 4 中，隐过程 $H \equiv \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$**是任意的**。例如，可以令 $H \equiv \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列独立同分布的**高斯**随机变量。在这种情况下，我们得到一个**隐高斯过程**。或者，可以选择 $H \equiv \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个逆向 d 阶马尔可夫过程（即记忆长度为 d 的有限记忆过程）。在这种情况下，我们得到一个**隐逆向 d阶马尔可夫过程**。一般而言，还有无穷多种其他可能的选择

定理 3 给定一个符合定义 4 的隐过程，(H, O) 过程的概率分布 $P_{H,\ O}$ 由 H 过程的概率分布 P_H 、发射概率算子 $(B_{O,\ H,\ n})_{n\in\mathbb{N}}$ 以及条件独立性 这一性质通过以下单位元唯一确定：

$$P_{H,O} = P_H \circ B_{O,H} \tag{3.13}$$

或者，更明确地说：

$$\begin{aligned} P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) &= P_H\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)j_{H_m}(g_m)\right) \\ =: P_{H_0,\ldots,H_n}&\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}((B_{O_m,H_m}f_m)\cdot g_m)\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$、 $m \in \{0,\ldots,n\}$、 $f_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m})$ 和 $g_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_m})$。C

逆 l性 给定：

(1) 一个经典随机过程 $H \equiv \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，其状态空间为 S_{H_n} ，概率分布为 P_H ；(2) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，一个可测空间 S_{O_n} ；(3) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，一个马尔可夫算子

$$B_{O,H,n} \colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \tag{3.15}$$

(3.13) 右侧定义了一个唯一的态 $P_{H,\ O}$，定义在 $*$–代数上

$$\mathcal{A}_{H,O} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (L^{\infty}_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^{\infty}_{\mathbb{C}}(S_{O_n})) \tag{3.16}$$

以及一个唯一的经典过程 (O_n)，使得：
(i) 过程 (H_n) 和 (O_n) 满足定义 4 的条件；(ii) (H, O)–过程的联合期望由 (3.13) 给出。特别地，$P_{H,\ O}$ 在 $*$–子代数上的限制

$$\mathcal{A}_H \equiv \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \left(L^{\infty}_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes 1_{L^{\infty}_{\mathbb{C}}(S_{O_n})}\right) \tag{3.17}$$

与 P_H 一致。

证明。若满足定义 4 的条件，则有：

$$P\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P\left(E_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)\right)\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)\right)$$
$$\overset{(3.9),(3.14)}{=} P_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} E_{H_m}\left(f_m(O_m)\right) g_m(H_m)\right) \tag{3.18}$$

并且 both$P_{H_0,\ldots,H_n}$ 和 E_{H_m} 均已给定。因此，由于 $E_{H_m}(f_m(O_m)) \overset{(3.11)}{=} j_{H_m}(B_{O_m,\ H_m} f_m)$，(3.13) 可由 (3.18) 得出。
反过来，假设条件 (1)、(2)、(3) 均成立，并利用 (3.13) 的右端定义左端的联合期望。由于每个 $B_{O,H,n}$ 都是马尔可夫算子，因此可以验证这些期望满足有限维联合期望的柯尔莫哥洛夫相容条件。由此，它们定义了一个唯一的态 $P_{H,O}$ 于$\mathcal{A}_{H,O}$ 上，其在 $*$–子代数 (3.17) 上的限制与 P_H 一致。剩下需要验证条件独立性。这可由下式推出

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)\right)$$
$$\overset{(3.14)}{=} P_{H_0,\ldots,H_n}\left(E_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)\right)\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)\right)$$

另一方面，$P_{H,O}$ 的定义意味着

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)g_m(H_m)\right)$$

$$= P_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)\right)$$

因此

$$P_{H_0,\ldots,H_n}\left(E_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)\right)\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)\right)$$

$$= P_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)\right)$$

由于 $\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,\ H_m}f_m)$ 属于代数 $\mathcal{A}_{H_0,\ \ldots H_n}$，且乘积 $\prod_{m=0}^{n} g_m(H_m)$ 在该代数中是完备的，因此

$$E_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)\right) = \prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m) \tag{3.19}$$

这就证明了 (3.9)。接下来要证明，对于每个 $m \in \{1,\ldots,n\}$

$$E_{H_m}(f_m(O_m)) = j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)$$

这可通过在 (3.19) 中取所有满足 $k \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{m\}$ 的 $f_k(O_k) = 1$ 得出。
□

3.1 经典隐马尔可夫过程

下面的推论表明，当隐过程是（逆向）马尔可夫过程时，定理 3 所定义的态族与文献中通常定义的经典隐马尔可夫过程族相同（例如，参见 [RabJua86], [Rab89], [SatGuru93]）。

推论 1 在定理 3 的假设和记号下，如果 H–过程是反向马尔可夫过程，其初始态为 p_{H_0}（态位于

$L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0})$），转移算子为 P_{H_n}： $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n+1}}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})$、 $n \in \mathbb{N}$，则

$$\begin{aligned} &P_{H_0}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) \\ =&p_{H_0}\left(B_{O,H,0}(f_0)g_0 P_{H_0}\left(B_{O,H,1}(f_1)g_1\right)\left(\cdots P_{H_{n-1}}\left(B_{O,H,n}(f_n)g_n\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

证明。利用 H–过程的马尔可夫性质，(3.13) 变为

$$\begin{aligned} &P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P_H\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)g_m(H_m)\right) \\ =&P_H\left(j_{H_0}(B_{O,H,0}f_0)g_0(H_0)\prod_{m=1}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}f_m)g_m(H_m)\right) \end{aligned}$$

再将 (2.10) 应用于马尔可夫过程 $\{p_{H_0}, P_{H_n}\}$，可知上述表达式等于 (3.20) 右端。□

例。假设所有可观测（分别为隐含）随机变量的状态空间都等于同一个空间 S_O （分别为 S_H），并且 S_H 和 S_O 的基数至多可数。那么，恒等式 (3.20) 表明，(H, O)–过程的联合概率为

$$\begin{aligned} &P_{H,O}\left(H_0 = j_0, O_0 = k_0; H_1 = j_1, O_1 = k_1; \ldots; H_n = j_n, O_n = k_n\right) \\ &= p^{(0)}_{H;j_0} p_{H;j_0 j_1} \cdots p_{H;j_{n-1}j_n} \cdot p(O_0 = k_0 | H_0 = j_0) \cdots p(O_n = k_n | H_n = j_n) \end{aligned} \tag{3.21}$$

对于任意选取的 j_0、j_1、……、$j_n \in S_H$ 以及 k_0；k_1、……、$k_n \in S_O$，均成立。

正如本节开头所述，恒等式 (3.21) 的右端是隐马尔可夫过程联合概率的通常表达式，可在关于这些过程的文献中找到。

3.2 经典马尔可夫过程的限制形式：经典隐马尔可夫过程

本节中，我们假设：
1) 推论 1 的假设均已验证。2) 对所有 $n \in \mathbb{N}$,
两个马尔可夫算子

$$P_{H_n}\colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n+1}}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \quad ; \quad B_{O,H,n}\colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \tag{3.22}$$

分别由正则马尔可夫核 $P_{H_n}(h_n, dh_{n+1})$ 和$P_{O_n}(h_n, do_n)$ $(h_n \in S_{H_m})$ 给出，即对所有 $g_n \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})$ 和 $f_n \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})$，它们具有如下形式

$$(P_{H_n} f_n)(H_n) = \int_{S_{H_{n+1}}} f_n(h_{n+1}) P_{H_n}(H_n, dh_{n+1}) \tag{3.23}$$

$$(B_{O_m,H_m} f)(H_m) = \int_{S_{O;m}} f_m(o_m) B_{O_m}(H_m, do_m) \tag{3.24}$$

在下文中，我们经常使用以下简化记号:

$$B_{O,H,n} \equiv B_{O_n}\,, \quad 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})} \equiv 1_{O_n} \;\text{ and }\; 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})} \equiv 1_{H_n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.25}$$

对每个 $n \geq 1$，定义马尔可夫算子

$$P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}} \colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-1}}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n-1}}) \tag{3.26}$$

by

$$\begin{aligned} &P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}(g_n \otimes f_{n-1})(h_{n-1}) \\ &:= \left(P_{H_{n-1}} \circ B_{O_{n-1}}\right)(g_n \otimes f_{n-1})(h_{n-1}) = (P_{H_n} g_n \cdot B_{O_{n-1}} f_{n-1})(h_{n-1}) \\ &= \int_{S_{H_n} \times S_{O;n-1}} (P_{H_{n-1}}(h_{n-1}, dh_n) B_{O_{n-1}}(h_{n-1}, do_{n-1})) g_n(h_n) f_{n-1}(o_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

作如下对应

$$L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \equiv L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-1}})}\quad, \forall n \geq 1 \tag{3.28}$$

对于 $n \geq 2$，可以将 $P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};\ H_{n-1}}$ 视为一个算子

$$P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}} \colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-1}}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n-1}}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-2}}) \tag{3.29}$$

其值域满足

$$P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}} \left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-1}})\right) \subseteq L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n-1}}) \otimes 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-2}})} \tag{3.30}$$

同样

$$P_{H_0\otimes O_0;H_0} \left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H;1}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})\right) \subseteq L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0}) \otimes 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})} \tag{3.31}$$

进一步定义代数

$$\mathcal{A}_{H\otimes O} := (L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})) \otimes \bigotimes_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-1}})\right) \quad (3.32)$$

（注意，右侧的 (3.32) 中 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})$ 出现了**两次**）以及这些嵌入

$$j_{H\otimes O;0}\colon F_0 \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0}) \to F_0 \otimes 1_{\{0\}^c} \in \mathcal{A}_{H\otimes O} \quad (3.33)$$

并且，对于 $n \geq 1$,

$$j_{H\otimes O;n} := j_{H_n} \otimes j_{O_{n-1}}\colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n-1}}) \to \mathcal{A}_{H\otimes O} \quad (3.34)$$

其中 j_{H_n}（分别地，$j_{O_{n-1}}$）是将 $L^\infty_{\mathbb{C}}$（分别地，S_{H_n}）自然嵌入到 $\mathcal{A}_{H\otimes O}$ 中的映射。现在，对每个 $n \in \mathbb{N}$，记

$$\hat{\mathcal{A}}_{H\otimes O;[0,n]} := \left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0}) \otimes 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})}\right) \otimes \bigotimes_{k=1}^{n} \left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_k}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{k-1}})\right) \otimes (1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n+1}})} \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})) \quad (3.35)$$

显然

$$\hat{\mathcal{A}}_{H\otimes O;[0,n]} \subset \mathcal{A}_{H\otimes O;[0,n]} := j_{H\otimes O;0}\left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})\right) \vee \bigvee_{k\in[1,n]} j_{H\otimes O;n}\left(L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_k}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{k-1}})\right)$$

且 $(\mathcal{A}_{H\otimes O;[0,n]})_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{A}_{H\otimes O;[0,n]}$ 的递增子代数序列。记

$$\hat{\mathcal{A}}_{H\otimes O} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{A}}_{H\otimes O;[0,n]} \subset \mathcal{A}_{H\otimes O} \quad (3.36)$$

并且，对每个 $n \in \mathbb{N}$，记

$$\hat{P}_{H\otimes O;[0,n]} := P_{H\otimes O}\Big|_{\hat{\mathcal{A}}_{H\otimes O;[0,n]}} \quad ; \quad \hat{P}_{H\otimes O} := P_{H\otimes O}\Big|_{\hat{\mathcal{A}}_{H\otimes O}} \quad (3.37)$$

以下定理表明，任何隐经典马尔可夫过程都是通常意义下的经典马尔可夫过程在适当子代数上的限制。

定理 4 在本节开头的假设 1) 和 2) 下，对于 p_{O_0} 在**上的任意概率测度** S_{O_0}，令 $P_{H\otimes O}$ 为由对 $(p_{H_0}\otimes p_{O_0}, (P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};\ H_{n-1}})_{n\geq 1})$ 刻画的 $\mathcal{A}_{H\otimes O}$ 上的马尔可夫过程的态（参见推论 2）。则

$$P_{H,O} \equiv \hat{P}_{H\otimes O} \tag{3.38}$$

其中

- $P_{H,\ O}$ 在推论 1 中定义，而 $P_{H\otimes O}$ 由（3.37）定义；
- $\equiv$ 表示随机等价（见定义 1）。

换言之，采用记号（3.5）和（3.3），对所有 $n\in\mathbb{N}$、$m\in\{0,\dots,n\}$、$f_m\in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m})$ 和 $g_m\in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_m})$：

$$\begin{aligned} &P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) \\ &= (p_{H_0}\otimes p_{O_0})\ \ ((g_0\otimes 1_{O_0})\ P_{H_0\otimes O_0;\ H_0}\ \ ((g_1\otimes f_0)\ \cdots \\ &\quad \cdots\big((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left((g_n\otimes f_{n-1})P_{H_n\otimes O_n;H_n}(1_{H_{n+1}}\otimes f_n)\right)\big)\big)\big) \end{aligned} \tag{3.39}$$

反过来，给定两个马尔可夫算子序列（P_{H_n}）和（B_{O_n}）（不一定由正则马尔可夫核给出），以及两个任意的态 p_{H_0} on$L^\infty_{\mathbb{C}}$（S_{H_0}）和 p_{O_0} on $L^\infty_{\mathbb{C}}$（$S_{O;0}$），定义 $P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};\ H_{n-1}} := P_{H_{n-1}}\otimes B_{O_{n-1}}$（$n\geq 1$），则（3.39）右侧**不依赖于** p_{O_0}，并定义了一个唯一的态 $P_{H\otimes O}$ on $\mathcal{A}_{H\otimes O}$，其在 $\hat{}$ $\mathcal{A}_{H\otimes O}$ 上的限制与$P_{H,\ O}$一致。

证明。根据 (3.29) 以及推论 2 后的备注，数对 $(p_{H_0}\otimes p_{O_0}, (P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};\ H_{n-1}})_{n\geq 1})$ 在 $\mathcal{A}_{H\otimes O}$ 上定义了唯一的马尔可夫态。给定隐马尔可夫过程，利用 P_{H_n} 的正则马尔可夫核，联合期望 (3.20) 可写为

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} &= p_{H_0}\left(E_{H_0}\left(B_{O,H,0}(f_0)g_0\right)P_{H_0}\left(B_{O,H,1}(f_1)g_1\right)\left(\cdots P_{H_{n-1}}\left(B_{O,H,n}(f_n)g_n\right)\right)\right) \\ &= \int_{\prod_{m=0}^{n} S_{H_m}} p_{H_0}(dh_0)P_{H_0}(h_0,dh_1)\cdots P_{H_{n-2}}(h_{n-2},dh_{n-1})P_{H_{n-1}}(h_{n-1},dh_n) \end{aligned}$$

$$\prod_{m=0}^{n} B_{O_m,H_m}(f_m)(h_m) \prod_{m=0}^{n} g_m(h_m)$$

$$= \int_{\prod_{m=0}^{n} S_{H_m}} p_{H_0}(dh_0) P_{H_0}(h_0, dh_1) P_{H_{n-2}}(h_{n-2}, dh_{n-1}) \cdots P_{H_{n-1}}(h_{n-1}, dh_n)$$

$$\prod_{m=0}^{n} \int_{S_{O;m}} f_m(o_m) B_{O_m}(h_m, do_m) \prod_{m=0}^{n} g_m(h_m)$$

$$= \int_{\prod_{m=0}^{n} S_{H_m}} p_{H_0}(dh_0) P_{H_0}(h_0, dh_1) \cdots P_{H_{n-2}}(h_{n-2}, dh_{n-1}) P_{H_{n-1}}(h_{n-1}, dh_n)$$

$$\int_{\prod_{m=0}^{n} S_{O;m}} B_{O_0}(h_0, do_0) \cdots B_{O_n}(h_n, do_n) \prod_{m=0}^{n} f_m(o_m) \prod_{m=0}^{n} g_m(h_m)$$

$$= \int_{\prod_{m=0}^{n} S_{H_m} \times S_{O;m}} g_0(h_0) \prod_{m=1}^{n-1} g_m(h_m) f_{m-1}(o_{m-1}) f_n(o_n)$$

$$p_{H_0}(dh_0)(P_{H_0}(h_0, dh_1) B_{O_0}(h_0, do_0))(P_{H_0}(h_1, dh_2) B_{O_1}(h_1, do_1)) \cdots$$

$$\cdots (P_{H_{n-2}}(h_{n-2}, dh_{n-1}) B_{O_{n-2}}(h_{n-2}, do_{n-2}))(P_{H_{n-1}}(h_{n-1}, dh_n) B_{O_{n-1}}(h_{n-1}, do_{n-1}))$$

$$B_{O_n}(h_n, do_n)$$

$$= \int_{\prod_{m=0}^{n} S_{H_m} \times S_{O;m}} p_{H_0}(dh_0) g_0(h_0)(P_{H_0}(h_0, dh_1) B_{O_0}(h_0, do_0)) g_1(h_1) f_0(o_0)$$

$$(P_{H_0}(h_1, dh_2) B_{O_1}(h_1, do_1)) g_2(h_2) f_1(o_1) \cdots$$

$$\cdots (P_{H_{n-2}}(h_{n-2}, dh_{n-1}) B_{O_{n-2}}(h_{n-2}, do_{n-2})) g_{n-1}(h_{n-1}) f_{n-2}(o_{n-2})$$

$$(P_{H_{n-1}}(h_{n-1}, dh_n) B_{O_{n-1}}(h_{n-1}, do_{n-1})) g_n(h_n) f_{n-1}(o_{n-1})$$

$$B_{O_n}(h_n, do_n) f_n(o_n)$$

此外，与 (3.26) 一致,

$$\int_{S_{O;m-1}} B_{O_n}(h_n, do_n) f_n(o_n) = (B_{O_n} f_n)(o_n)$$

$$= (P_{H_n} \otimes B_{O_n})(1_{H_{n+1}} \otimes f_n)(h_n) = P_{H_n \otimes O_n; H_n}(1_{H_{n+1}} \otimes f_n)(h_n)$$

根据假设，p_{O_0} 是S_{O_0}上的概率测度，因此对任意$G_0 \in L^{\infty}_{\mathbb{C}}(S_{H_0})$，

$$\int_{S_{H_0}} p_{H_0}(dh_0) G_0(h_0) = p_{H_0}(G_0) = (p_{H_0} \otimes p_{O_0})(G_0 \otimes 1_{O_0})$$

因此，用式（3.27）的记号表示，式（3.40）变为

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) \tag{3.41}$$

$$= (p_{H_0}\otimes p_{O_0})\left((g_0\otimes 1_{O_0})P_{H_0\otimes O_0;H_0}\left((g_1\otimes f_0)\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\left((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left((g_n\otimes f_{n-1})P_{H_n\otimes O_n;H_n}(1_{H_{n+1}}\otimes f_n)\right)\right)\right)\right)$$

这就证明了 (3.39)。反过来，给定两个马尔可夫算子序列 (P_{H_n}) 和 (B_{O_n})（它们不一定由正则马尔可夫核给出），以及两个任意的态 p_{H_0} on $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_0})$ 和 p_{O_0} on $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_0})$，右端的联合期望是射影的，因为令 $g_n = 1_{H_n}$ and$f_n = 1_{O_n}$ 后，(3.39) 变为

$$\begin{aligned}
&(p_{H_0}\otimes p_{O_0})\left((g_0\otimes 1_{O_0})P_{H_0\otimes O_0;H_0}\left((g_1\otimes f_0)\cdots\right.\right. \qquad (3.42)\\
&\left.\left.\cdots\left((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left(1_{O_n}\otimes f_{n-1})P_{H_n\otimes O_n;H_n}(1_{H_{n+1}}\otimes 1_{O_n})\right)\right)\right)\right)\\
=&(p_{H_0}\otimes p_{O_0})\left((g_0\otimes 1_{O_0})P_{H_0\otimes O_0;H_0}\left((g_1\otimes f_0)\cdots\right.\right.\\
&\left.\left.\cdots\left((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left((1_{O_n}\otimes f_{n-1})\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

因为 $P_{H_{n+1}\otimes O_n;H_n}$ 是一个马尔可夫算子。由于 (3.42) 是将 n 替换为 $n-1$ 后的 (3.39)，所以射影性成立。因此，(3.42) 定义了 $\mathcal{A}_{H\otimes O}$ 上唯一的马尔可夫态 P。我们用归纳法证明这些期望不依赖于 p_{O_0}。当 $n=0$ 时，该命题成立，因为

$$(p_{H_0}\otimes p_{O_0})(g_0\otimes 1_{O_0}) = p_{H_0}(g_0)p_{O_0})(1_{O_0}) = p_{H_0}(g_0)$$

假设该命题对 $n-1$ 成立，则有

$$\begin{aligned}
&(p_{H_0}\otimes p_{O_0})\left((g_0\otimes 1_{O_0})P_{H_0\otimes O_0;H_0}\left((g_1\otimes f_0)\cdots\right.\right.\\
&\left.\left.\cdots\left((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left((g_n\otimes f_{n-1})P_{H_n\otimes O_n;H_n}(1_{H_{n+1}}\otimes f_n)\right)\right)\right)\right)\\
&= (p_{H_0}\otimes p_{O_0})\left((g_0\otimes 1_{O_0})P_{H_0\otimes O_0;H_0}\left((g_1\otimes f_0)\cdots\right.\right.\\
&\left.\left.\cdots\left((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left((g_n\otimes f_{n-1})(P_{H_n}\otimes B_{O_n})(1_{H_{n+1}}\otimes f_n)\right)\right)\right)\right)\\
&= (p_{H_0}\otimes p_{O_0})\left((g_0\otimes 1_{O_0})P_{H_0\otimes O_0;H_0}\left((g_1\otimes f_0)\cdots\right.\right.\\
&\left.\left.\cdots\left((g_{n-1}\otimes f_{n-2})P_{H_{n-1}\otimes O_{n-1};H_{n-1}}\left((g_n\otimes B_{O_n}(f_n)f_{n-1})\right)\right)\right)\right) \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

并且根据归纳假设，(3.43) 右侧与 p_{O_0} 无关。因此，由归纳法可知，(3.39) 右侧

与 p_{O_0} 无关。最后，如果算子 P_{H_n} 和 B_{O_n} 由正则马尔可夫核给出，如 (3.23) 和 (3.24) 所示，那么用于证明恒等式 (3.39) 的相同论证表明，联合期望

$$(p_{H_0} \otimes p_{O_0}) \left((g_0 \otimes 1_{O_0}) P_{H_0 \otimes O_0; H_0} \left((g_1 \otimes f_0) \cdots \right.\right. \tag{3.44}$$

$$\left.\left. \cdots \left((g_{n-1} \otimes f_{n-2}) P_{H_{n-1} \otimes O_{n-1}; H_{n-1}} \left((g_n \otimes f_{n-1}) P_{H_n \otimes O_n; H_n} (1_{H_{n+1}} \otimes f_n)\right)\right)\right)\right)$$

与由 $(p_{H_0}, (P_{H_n}))$ 定义的马尔可夫链和发射算子序列 (B_{O_n}) 所确定的唯一隐马尔可夫过程相同。□

3.3 经典反向隐马尔可夫过程

定义 6 沿用定义 4 中的记号，若将条件独立假设 (3.9) 替换为以下条件：

$$\begin{aligned} &E_{H_0, O_0, \ldots, H_n, O_n} \left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1}) j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right) \\ &= E_{H_n} \left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1})\right) E_{H_n} \left(j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

该 $(H,\ O)$过程称为**反向隐马尔可夫过程**

备注。为了更好地理解条件 (3.45) 的含义，将其拆分为两个条件会比较方便：其中一个是关于 HO 过程的通常马尔可夫条件，即：

$$\begin{aligned} &E_{H_0, O_0, \ldots, H_n, O_n} \left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1}) j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right) \\ &= E_{H_n, O_n} \left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1}) j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

另一个是关于 HO 过程的附加条件独立假设，即：

$$\begin{aligned} &E_{H_n, O_n} \left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1}) j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right) \\ &= E_{H_n} \left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1})\right) E_{H_n} \left(j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

请注意，就 (3.46) 而言，条件 (3.47)**打破了** H–过程与 O–过程之间的对称性。此外，采用记号 (3.5)、(3.3)，这提示我们引入马尔可夫算子

$$P_{O_{n+1}, H_n} := j_{H_n}^{-1} \circ E_{H_n} \circ j_{O_{n+1}} \colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_{n+1}}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \tag{3.48}$$

$$P_{H_{n+1},H_n} := j_{H_n}^{-1} \circ E_{H_n} \circ j_{H_{n+1}} : L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_{n+1}}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \tag{3.49}$$

此外，在条件 (3.9) 中，可观测过程**同时**以底层过程为条件；而在条件 (3.47) 中，可观测过程**以前一时刻**的底层过程为条件。

在以下定理的陈述中，为预先说明其与量子扩展之间的联系，我们采用如下记号:

$$\mathcal{B}_{H_n} := L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \quad ; \quad \mathcal{B}_{O_n} := L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \tag{3.50}$$

定理 5 给定定义 6 意义下的一个反向隐马尔可夫过程，其对应的 H–过程是一个马尔可夫过程。
分别由 (3.48) 和 (3.49) 定义马尔可夫算子序列 $(P_{O_{n+1},H_n})_{n\geq 0}$ 和 $(P_{H_{n+1},H_n})_{n\geq 0}$。记对于 $n \geq 1$, $f_n \in \mathcal{B}(O_n)$ 和 $g_n \in \mathcal{B}(H_n)$，转移期望为 $\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}$: $\mathcal{B}(O_n) \otimes \mathcal{B}(H_n) \to \mathcal{B}(H_{n-1})$（完全正保单位映射）:

$$\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}(f_n \otimes g_n) := P_{O_n,H_{n-1}}(f_n) P_{H_n,H_{n-1}}(g_n) \tag{3.51}$$

H–过程的初始分布

$$P^{(0)}_{H_0} := P_{H,O}\big|_{\mathcal{A}_{H_0}} \tag{3.52}$$

(H, O)–过程的概率分布 $P_{H,O}$ 由三元组 $(P^{(0)}_{H_0}, P_{O_0,H_0}, (\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}})_{n\geq 1})$ 通过恒等式唯一确定

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m)\right) \tag{3.53}$$

$$= P_{H_0}\left(P_{O_0,H_0}(f_0) g_0 \mathcal{E}_{O_1,H_1;H_0}(f_1 \otimes \left(g_1 \mathcal{E}_{O_2,H_2;H_1}(f_2 \otimes g_2) \cdots \left(\mathcal{E}_{O_{n-2},H_{n-2};H_{n-3}}(\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.(f_{n-2} \otimes \left(g_{n-2} \mathcal{E}_{O_{n-1},H_{n-1};H_{n-2}}\left(f_{n-1} \otimes \left(g_{n-1} \mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}(f_n \otimes g_n)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

对于 $n \geq 1$, $m \in \{0, \ldots, n\}$, $f_m \in \mathcal{B}(O_m)$ 和 $g_m \in \mathcal{B}(H_m)$。
反之，给定一个三元组 $(P_{H_0}, P_{O_0,\ H_0}, (\mathcal{E}_{O_n,\ H_n;\ H_{n-1}})_{n\geq 1})$，其中 P_{H_0} 是 $\mathcal{B}_{H_0}$ 上的一个（任意）态，

$$P_{O_0,H_0} : : \mathcal{B}(O_0) \to \mathcal{B}(H_0) \tag{3.54}$$

是一个（任意）马尔可夫算子，且每个

$$\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}\colon \mathcal{B}(O_n)\otimes\mathcal{B}(H_n)\to\mathcal{B}(H_{n-1})$$

是由（任意）马尔可夫算子序列唯一确定的转移期望

$$P_{O_{n+1},H_n}\colon \mathcal{B}(O_{n+1})\to\mathcal{B}(H_n) \tag{3.55}$$

$$P_{H_{n+1},H_n}\colon \mathcal{B}(H_{n+1})\to\mathcal{B}(H_n) \tag{3.56}$$

通过恒等式（3.51）。于是，（3.53）右端定义了一个唯一的态$P_{H,\,O}$ 在 $\mathcal{A}_{H,\,O}$ 上，使得四元组（3.6）是一个逆向隐马尔可夫过程。

证明。

$$P\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)\right)=P_{H_0,O_0,\ldots,H_n,O_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)\right) \tag{3.57}$$

$$=P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-1},O_{n-1}}\left(\prod_{m=0}^{n-1} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)E_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-1},O_{n-1}}\left(j_{O_n}(f_n)j_{H_n}(g_n)\right)\right)$$

$$\overset{(3.46)}{=}P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-1},O_{n-1}}\left(\prod_{m=0}^{n-1} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)E_{H_{n-1},O_{n-1}}\left(j_{O_n}(f_n)j_{H_n}(g_n)\right)\right)$$

$$\overset{(3.47)}{=}P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-1},O_{n-1}}\left(\prod_{m=0}^{n-2} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)\right.$$

$$\left.f_m(O_{n-1})\left(g_m(H_{n-1})E_{H_{n-1}}\left(j_{O_n}(f_n)\right)E_{H_{n-1}}\left(j_{H_n}(g_n)\right)\right)\right)$$

$$=P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-1},O_{n-1}}\left(\prod_{m=0}^{n-2} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)\right.$$

$$\left.j_{O_{n-1}}(f_{n-1})j_{H_{n-1}}\left(g_{n-1}P_{O_n,H_{n-1}}(f_n)P_{H_n,H_{n-1}}(g_n)\right)\right)$$

因此，采用记号（3.51），对于 $n=1$ 可得

$$P\left(j_{O_0}(f_0)j_{H_0}(g_0)j_{O_1}(f_1)j_{H_1}(g_1)\right)=P_{H_0,O_0}\left(j_{O_0}(f_0)j_{H_0}(g_0\mathcal{E}_{O_1,H_1;H_0}(f_1\otimes g_1))\right)$$

$$=P\left(j_{H_0}(P_{O_0,H_0}(f_0)g_0\mathcal{E}_{O_1,H_1;H_0}(f_1\otimes g_1))\right)$$

$$=P_{H_0}\left(P_{O_0,H_0}(f_0)g_0\mathcal{E}_{O_1,H_1;H_0}(f_1\otimes g_1)\right) \tag{3.58}$$

并且，对于任意的 n,

$$P\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m)\right) = P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-1},O_{n-1}}\Big(\tag{3.59}$$

$$\prod_{m=0}^{n-2} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m) j_{O_{n-1}}(f_{n-1}) j_{H_{n-1}}\left(g_{n-1}\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}(f_n \otimes g_n)\right)\Bigg)$$

$$= P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-2},O_{n-2}}\left(\prod_{m=0}^{n-3} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m)\right.$$

$$\left. j_{O_{n-2}}(f_{n-2}) j_{H_{n-2}}\left(g_{n-2}\mathcal{E}_{O_{n-1},H_{n-1};H_{n-2}}\left(f_{n-1} \otimes \left(g_{n-1}\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}(f_n \otimes g_n)\right)\right)\right)\right)$$

$$= P_{H_0,O_0,\ldots,H_{n-3},O_{n-3}}\left(\prod_{m=0}^{n-3} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m) j_{H_{n-3}}\left(\mathcal{E}_{O_{n-2},H_{n-2};H_{n-3}}\Big(\right.\right.$$

$$j_{H_{n-3}}\left(\mathcal{E}_{O_{n-2},H_{n-2};H_{n-3}}\left((f_{n-2} \otimes \left(g_{n-2}\mathcal{E}_{O_{n-1},H_{n-1};H_{n-2}}\Big(\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. f_{n-1} \otimes \left(g_{n-1}\mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}(f_n \otimes g_n)\right)\right)\right)\right)\right)$$

假设根据归纳法，(3.53) 对 $n \in \mathbb{N}$ 成立。那么

$$P\left(\prod_{m=0}^{n+1} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m)\right) \tag{3.60}$$

$$= P\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m) j_{O_{n+1}}(f_{n+1}) j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right)$$

$$= P\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m) E_{H_0,O_0,\ldots,H_n,O_n}\left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1}) j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right)\right)$$

$$= P\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m) E_{O_{n+1},H_n}\left(j_{O_{n+1}}(f_{n+1})\right) E_{H_{n+1},H_n}\left(j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right)\right)$$

$$= P\left(\prod_{m=0}^{n-1} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m)\right.$$

$$\left. j_{O_n}(f_n) j_{H_n}\left(g_n P_{H_{n+1},O_{n+1};H_n}(f_{n+1}) P_{H_{n+1},H_n}\left(j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right)\right)\right)$$

$$= P\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(\widehat{f}_m) j_{H_m}(\widehat{g}_m)\right)$$

其中

$$\widehat{f}_m := f_m \quad ; \quad \widehat{g}_m := \begin{cases} g_m, & \text{if } 0 \le m \le n-1 \\ g_n P_{H_{n+1},O_{n+1};H_n}(f_{n+1}) P_{H_{n+1},H_n}\left(j_{H_{n+1}}(g_{n+1})\right), & \text{if } m = n \end{cases}$$

因此，根据归纳法，式 (3.53) 成立。 □

3.3.1 时间连续隐藏过程

定理 6 条件 (3.45) 等价于以下事实：
(i) 过程 (H_n) 是马尔可夫过程；(ii) 满足以下条件独立条件：

$$E_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)\right) = \prod_{m=0}^{n} E_{H_{m-1}}\left(j_{O_m}(f_m)\right) \tag{3.61}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f_m \in \mathcal{B}(O_m)$ $(m \in \{0,\ldots,n\})$，并约定

$$E_{H_{-1}}(j_{O_0}(f_0)) := E_{H_0}(j_{O_0}(f_0)) \tag{3.62}$$

证明。根据定理 5，我们知道，条件 (3.45) 等价于 (H,O)–过程的联合分布由 (3.53) 给出，也就是说，对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $g_m \in \mathcal{B}(H_m)$ 和 $f_m \in \mathcal{B}(O_m)$ $(m \in \{0,\ldots,n\})$，都有

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m) j_{H_m}(g_m)\right) \tag{3.63}$$

$$\overset{(3.53)}{=} P_{H_0}\left(P_{O_0,H_0}(f_0) g_0 \mathcal{E}_{O_1,H_1;H_0}(f_1 \otimes \left(g_1 \mathcal{E}_{O_2,H_2;H_1}(f_2 \otimes g_2) \cdots \left(\mathcal{E}_{O_{n-2},H_{n-2};H_{n-3}}(\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.(f_{n-2} \otimes \left(g_{n-2} \mathcal{E}_{O_{n-1},H_{n-1};H_{n-2}}\left(f_{n-1} \otimes \left(g_{n-1} \mathcal{E}_{O_n,H_n;H_{n-1}}(f_n \otimes g_n)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\overset{(3.51)}{=} P_{H_0}\left(P_{O_0,H_0}(f_0) g_0 (P_{O_1,H_0}(f_1)\left(g_1 P_{O_2,H_1}(f_2) P_{H_2,H_1}(g_2) \cdots \left(P_{H_{n-2};H_{n-3}}(\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.(P_{O_{n-2},H_{n-3}}(f_{n-2})\left(g_{n-2} P_{H_{n-1};H_{n-2}}\left(P_{O_{n-1},H_{n-2}}(f_{n-1})\left(g_{n-1} P_{O_n,H_{n-1}}(f_n) P_{H_n,H_{n-1}}(g_n)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

由于我们知道 (H_n) 是一个马尔可夫过程，因此这等于

$$P_{H_0,\ldots,H_n}\left(j_{H_0}(g_0)j_{H_1}(g_1)\cdots j_{H_n}(g_n)j_{H_0}(P_{O_0,H_0}(f_0))j_{H_0}(P_{O_1,H_0}(f_1))\cdots j_{H_{n-1}}(P_{O_n,H_{n-1}}(f_n))\right)$$

$$= P_{H_0,\ldots,H_n}\left(j_{H_0}(g_0)j_{H_1}(g_1)\cdots j_{H_n}(g_n)j_{H_0}(P_{O_0,H_0}(f_0))\prod_{m=1}^{n} j_{H_{m-1}}(P_{O_m,H_{m-1}}(f_m))\right)$$

$$= P_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(g_m)\prod_{m=0}^{n} E_{H_{m-1}}(j_{O_m}(f_m))\right) \tag{3.64}$$

采用约定 (3.62)。另一方面

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)j_{H_m}(g_m)\right) = P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(g_m)\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)\right)$$

$$= P_{H_0,\ldots,H_n}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(g_m)E_{H_0,\ldots,H_n}(\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m))\right) \tag{3.65}$$

并且，由于 $g_m (m \in \{0,1,\ldots,n\})$ 是任意的，恒等式 (3.64) 和 (3.65) 等价于 (3.61)。这表明，在假设过程 (H_n) 是马尔可夫过程的条件下，条件 (3.45) 等价于 (3.61)。□

备注。与条件 (3.45) 所发生的情况相反，条件 (3.61) 并不意味着过程 (H_n) 是马尔可夫过程，这一事实促使我们给出如下定义。

定义 7 在定义 4 的记号下，经典随机 (H,O)–过程

$$(\mathcal{A}_{H,O}, P_{H,O}, (j_{H_n}\otimes j_{O_n}), (\mathcal{B}_{H_n}\otimes\mathcal{B}_{O_n})) \tag{3.66}$$

若满足条件 (3.61)，则称为**时间连续隐过程** 。如果隐过程 (H_n) 是马尔可夫过程，则称其为**时间连续隐马尔可夫过程** （不同于由条件 (3.9) 定义的同一时刻 HMP）。

3.4 经典广义隐藏过程

本节将介绍对上一节所讨论的经典隐过程的一种自然扩展，而经典隐过程又是对隐

马尔可夫过程的推广。这种扩展有助于更好地理解第 4.3 节中介绍的隐马尔可夫过程的量子扩展。

定理 3 表明，经典隐过程的特征是其联合概率具有式 (3.14) 右端所给出的形式。现在注意，利用 j_{H_m} 的同态性质，式 (3.14) 可以写成如下形式

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P_H\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(B_{O_m,H_m}(f_m)g_m)\right) \tag{3.67}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$、$m \in \{0,\ldots,n\}$、$f_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_m})$ 和 $g_m \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_m})$。

因此，引入算子

$$\widehat{B}_{O,H,n}(f_n \otimes g_n) := B_{O_{O,H,n}}(f_n)g_n \tag{3.68}$$

它是一个马尔可夫算子（转移期望，见定义 13）

$$\widehat{B}_{O,H,n}\colon L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \to L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \equiv 1_{L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})} \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})$$

式 (3.67) 变为

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P_H\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(\widehat{B}_{O,H,m}(f_m \otimes g_m))\right) \tag{3.69}$$

我们将在第 4.3 节看到，隐马尔可夫过程的量子扩展只需将代数 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})$ 和 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})$ 替换为任意的非交换 $\prec$ $*$–代数，并允许算子 $B_{O、H、n}$ 成为任意的马尔可夫算子。在下面的定义中，我们进一步推广 HMP；乍看之下，这种推广似乎有些人为，但要纳入由量子马尔可夫链的对角限制产生的新类隐（马尔可夫）过程（见下文第 5.6节），这是必要的。

定义8 一个**经典广义隐过程**由同一概率空间上的一对随机过程（O, H） $\equiv$ （O_n, H_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 定义，其特征由联合期望给出：

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m)g_m(H_m)\right) = P_H\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_{h_{n;m}}}(\widehat{B}_{O,H,m}(f_m \otimes g_m))\right) \quad (3.70)$$

其中，算子$\widehat{B}_{O,H,m}$ 是一般的马尔可夫算子，即不一定具有形式 (3.68)，且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$h_{n;.} : m \in \{0, 1, \ldots, n\} \to h_{n;m} \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

是一个映射（不一定是一一映射）。

备注。当每个 $h_{n;.}$ 都是**恒等函数** ($h_{n;m} = m$, $\forall m$)，并且$\widehat{B}_{O,H,m}$ 具有特殊形式 (3.68) 时，联合期望 (3.70) 具有形式 (3.67)，这定义了隐藏过程（参见定义 4）。

如果 $k_{n;m} := m - 1$ 对于 $m \geq 1$ 成立，且 $B_{O,H,m}$ 具有特殊形式 (3.68)，那么联合期望 (3.70) 具有形式 (3.53)，这定义了后向隐过程（参见定义 6）。

当 $h_{n;.}$ 是**常函数** $h_{n;m} = n - 1$, $\forall m$，并且 $B_{O,H,m}$ 由 (3.68) 给出时，联合期望 (3.70) 扩展了将一个 e–对角量子马尔可夫链限制到 e–对角子代数时得到的联合期望（更多详情见第 5.1.2、5.2 和 5.6 节）。

4 代数随机过程（经典或量子）

从经典随机过程到代数随机过程（包括经典和量子）的过渡，是通过在 (2.5) 中将 $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 和 $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(S_n)$ 替换为任意的、未必是交换的 $*$–代数来实现的。

定义 9 一个**由集合** T 作为指标的代数随机过程是一个四元组

$$(\mathcal{A}, \varphi, (\mathcal{B}_n)_{n\in T}, (j_n)_{n\in T})$$

其中:
– $\mathcal{A}$, 称为该过程的**样本代数**，是一个 $*$–代数。– 每个 $\mathcal{B}_n$，称为 $n \in T$处的**状态代数**，是一个 $*$–代数。– 对于每个 $n \in T$,

$$j_n : b_n \in \mathcal{B}_n \to j_n(b_n) \in \mathcal{A} \tag{4.1}$$

是一个 $*$–同态。数对 $(\mathcal{A}, \varphi)$ 称为一个**代数概率空间**（当 $\mathcal{A}$ 是交换的时为经典的，非交换时为量子的）。

备注。每个 $*$–代数 $\mathcal{B}_n$ 都有一组（可能是无限多个）代数独立的厄米生成元

$$B_n := \{b_{n;1}, b_{n;2}, \ldots, b_{n;d_n}\} \quad , \quad n \in T \ , \ d_n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

因此，指定一族 $*$–同态 $(j_n)_{n\in T}$，等价于给出集合

$$\{X_{n;h} := j_n(b_{n;h}) \colon h \in \{1, \ldots, d_n\} \ , \ n \in T\} \subseteq \mathcal{A} \tag{4.2}$$

厄米算子（它们在代数上生成 $j_n(B_n)$）。众所周知，若 $(\mathcal{A}, \varphi)$ 是一个代数概率空间，那么 $\mathcal{A}$ 中的任意厄米元素都可以在矩等价意义下对应于一个经典实值随机变量。族 (4.2) 称为**算子随机过程**。在量子概率中，许多情况下会研究算子随机过程。然而，算子随机过程**仅包含所有阶矩均有限的过程**，而定义 9 包含所有随机过程。最后需要注意的是，在量子概率中，人们常使用不仅包含厄米元素的生成元集合（不过总是可以回到厄米情形）。

定义 10 张量柯尔莫哥洛夫表示中的代数随机过程由如下形式的四元组给出

$$\left(\mathcal{A} := \bigotimes_T \mathcal{B}_n, \varphi, (\mathcal{B}_n)_{n\in T}, (j_n)_{n\in T} \right) \tag{4.3}$$

其嵌入为

$$j_n \colon b_n \in \mathcal{B}_n \to b_n \otimes 1_{T\setminus\{n\}} \in j_n(\mathcal{B}_n) := \mathcal{A}_n \tag{4.4}$$

其中 $1_{T\setminus\{n\}}$是 $\bigotimes_{m\in T\setminus\{n\}} \mathcal{B}_m$的单位元。

下文假设 T 是一个**至多可数集**，并且只考虑**张量 Kolmogorov 表示**中的代数随机过程（除非需要特别说明，以下简称**代数随机过程**）。对于这些过程，我们定义与之相关的局部代数。

定义 11 对于任何形如 (4.3) 的代数随机过程，以及任意 $F \subset_{fin} T$，定义 F 上的**局部代数**如下

$$\mathcal{A}_F := \bigvee_{n\in F} j_n(\mathcal{B}_n)\,(\ *\text{–algebra generated by } \{j_n(\mathcal{B}_n)\colon n \in F\}) \subseteq \mathcal{A} \tag{4.5}$$

备注。与经典情形不同，并非每个量子随机过程都具有张量柯尔莫哥洛夫表示（在量子物理学中，这类过程有许多实例），但下面的许多概念可以扩展到整个量子随机过程类。

族 $\{\mathcal{A}_F\colon\ F \in \mathcal{F}_{fin}(T)\}$ 将称为**局部代数**族。φ 在 $\mathcal{A}_F$ 上的限制记为 φ_F。

$$\mathcal{A}_F := \bigvee_{n\in F} j_n(\mathcal{B}_n) \equiv \bigotimes_{n\in F} \mathcal{B}_n \tag{4.6}$$

其中 $\equiv$ 表示这两种记号可以不加区别地使用。

态族 $\{\varphi_F\colon\ F \in \mathcal{F}_{fin}(T)\}$ 满足 Kolmogorov 兼容条件的类比形式，即：

1）每个 φ_F 都是 $\mathcal{A}_F$上的一个态。
2）对于任意 $F \subset G \in \mathcal{F}_{fin}(T)$,

$$\varphi_G\big|_{\mathcal{A}_F} = \varphi_F \tag{4.7}$$

定义 12 对于每个 $F \in \mathcal{F}_{fin}(T)$，给定一个作用于 $\mathcal{A}_F$ 上的态 φ_F。若族 $(\varphi_F)_{F\in\mathcal{F}_{fin}(T)}$ 满足上述条件 1) 和 2)，则称其为**射影的**。若对于每个 $a \in \mathcal{A}$，都存在 $F_0(a)$，使得对于所有 $F \supset F_0(a)$，$\varphi_F(a) = \varphi_{F_0}(a)$，则称极限 $\lim_{F\uparrow T} \varphi_F$存在于 $\mathcal{A}$**上的强有限意义**。$\mathcal{F}_{fin}(T)$ 是一个关于由包含关系所诱导的偏序的递增网，而 $F \uparrow T$ 则是在此偏序的意义下理解的。

以下是柯尔莫哥洛夫相容性定理的一种弱代数表述。

定理 7 设局部代数 $\mathcal{A}_F$ 由 (4.5) 给出，并且对每个$F \subset_{fin} T$给定一个态 φ_F，其定义在 $\mathcal{A}_F$上，使得 $(\varphi_F)_{F\in\mathcal{F}_{fin}(T)}$ 构成一个态的投射族。则极限

$$\lim_{F\uparrow T} \varphi_F =: \varphi \tag{4.8}$$

在 $\mathcal{A}$上以强有限意义存在。

证明。由于 (4.3) 中的张量积是代数张量积， $\mathcal{A}$中的每个元素都属于某个 $\mathcal{A}_F$。因此，根据投射性，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，存在$F_0(a)$，使得对于所有 $F \supset F_0(a)$，$\varphi_F(a) = \varphi_{F_0}(a)$。这意味着极限 (4.8) 在 $\mathcal{A}$上以强有限意义存在。□

4.1 量子马尔可夫链（齐次、逆向）

本节简要回顾量子马尔可夫链 [Ac74d-Camerino], [Ac74-FAA]的构造，主要是为了统一记号。为简便起见，我们将讨论限定在逆向齐次情形：其中包含所有主要思想，一旦理解了这一情形，其他许多可能的变体也不会带来困难。

设 H 为一个可分希尔伯特空间， $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ 为 H上的有界线性算子代数。记

$$\mathcal{A} := \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}$$

其中， $\bigotimes$ 表示**代数张量积**（本文不讨论拓扑方面的问题）。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，定义自然嵌入（$*$–同态），称为**第 个张量嵌入**，如下所示：

$$j_n : b \in \mathcal{B} \hookrightarrow j_n(b) := \left(\bigotimes_{\{n\}^c} 1_{\mathcal{B}} \right) \otimes b \qquad , \qquad \forall b \in \mathcal{B} \tag{4.9}$$

定义 13 从 $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}$ 的线性映射 $\mathcal{E}$ 称为**转移期望**，若它是完全正且保单位的（即马尔可夫算子）。

我们将研究如下形式的转移期望 $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(x)=\overline{\mathrm{Tr}}_2\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}K_r^*\ x\ K_r\right)\quad,\quad x\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\tag{4.10}$$

其中

- 关于第二个因子的偏迹 Tr_2 是算子值权重，按照 Haagerup 的定义，定义为

$$\overline{\mathrm{Tr}}_2(a\otimes b):=a\mathrm{Tr}(b)\quad,\quad a,b\in\mathcal{B}\tag{4.11}$$

- $D_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个子集（若 H 有限维，则为有限集），且对于 $j\in D_{\mathcal{E}}$，$K_j\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$。

备注。(4.10) 中的每个 K_r 都可以写成两种形式

$$K_r=\sum_{i,j\in D}e_{ij}\otimes\ K_{r;ij}=\sum_{i,j\in D}K'_{r;ij}\otimes\ e_{ij}\quad,\quad r\in D_{\mathcal{E}}\tag{4.12}$$

其中 $K_{r;ij},\ K'_{r;ij}\in\mathcal{B}$。因此，对于 $a,\ b\in\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(a\otimes b)&=\overline{\mathrm{Tr}}_2\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\left(\sum_{i,j\in D}(e_{ij}\otimes\ K_{r;ij})^*\ (a\otimes b)\sum_{i',j'\in D}e_{i'j'}\otimes\ K_{r;i'j'}\right)\right)\\&=\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{i,j,i',j'\in D}\overline{\mathrm{Tr}}_2\left(e_{ji}ae_{i'j'}\otimes\ (K_{r;ij}^*\ b\ K_{r;i'j'})\right))\\&=\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{i,j,i',j'\in D}e_{ji}ae_{i'j'}\ \mathrm{Tr}\left(K_{r;ij}^*\ b\ K_{r;i'j'}\right)\end{aligned}\tag{4.13}$$

（4.12）中算子 $K_{r;ij}$ 的结构由以下引理给出，该引理还提供了一条构造条件密度振幅的简单规则。

引理 1 对于某个标准正交基 $e\ \equiv(e_j)_{j\in D}$，由 (4.12) 形式的算子族满足以下条件：由 (4.10) 定义的算子 $\mathcal{E}$ 是一个转移期望，当且仅当

$$\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{i\in D}\overline{\mathrm{Tr}}(K_{r;ij}^*K_{r;ij'})=\delta_{j,j'}\quad,\quad\forall j,j'\in D\tag{4.14}$$

证明。通过检查 (4.10) 右侧可知， $\mathcal{E}$ 的完全正性显然成立。条件 $\mathcal{E}(1\otimes 1)$ $=1$ 等价于

$$\begin{aligned}1_{\mathcal{B}} =&\mathcal{E}(1_{\mathcal{B}}\otimes 1_{\mathcal{B}})=\overline{\mathrm{Tr}}_2(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}K_r^*K_r)\\ =&\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\overline{\mathrm{Tr}}_2((\sum_{i,j\in D}e_{ji}\otimes\ K_{r;ij}^*)(\sum_{i',j'\in D}e_{i'j'}\otimes\ K_{r;i'j'}))\\ =&\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{i,j,j'\in D}\overline{\mathrm{Tr}}_2(e_{jj'}\otimes\ K_{r;ij}^*K_{r;ij'})=\sum_{j,j'\in D}e_{jj'}\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{i\in D}\overline{\mathrm{Tr}}(K_{r;ij}^*K_{r;ij'})\end{aligned}$$

显然，这等价于

$$\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{i\in D}\overline{\mathrm{Tr}}(K_{r;ij}^*K_{r;ij'})=\delta_{j,j'}\,,\quad \forall j,j'\in D$$

即式（4.14）。 □

4.1.1 条件密度振幅与算子值同构

在许多应用中都很重要的一类特殊转移期望，其形式如式（4.10）所示，在以下情形下得到:

$$|D_{\mathcal{E}}|=1$$

在这种情况下，令

$$K=\sum_{i,j\in D}e_{ij}\otimes\ K_{ij}\ ;\quad \overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*K):=1_{\mathcal{B}} \tag{4.15}$$

式（4.10）中不再出现指标 r ，于是变为

$$\mathcal{E}(x)=\overline{\mathrm{Tr}}_2\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}K_r^*\ x\ K_r\right)\quad ,\quad x\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{B} \tag{4.16}$$

于是（4.14）变为

$$\sum_{i\in D}\overline{\mathrm{Tr}}(K_{ij}^*K_{ij'})=\delta_{j,j'}\,,\quad \forall j,j'\in D \tag{4.17}$$

在这种情况下，（4.13）变为

$$\mathcal{E}(a\otimes b)=\sum_{i,j,i',j'\in D} e_{ij}ae_{i'j'}\ \mathrm{Tr}\left(K_{ij}^{*}\ b\ K_{i'j'}\right) \tag{4.18}$$

定义 14 满足 (4.15) 的算子 $K\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 称为关于迹的**条件密度振幅**（CDA）。（由于本文只考虑此类 CDA，我们便简称其为 CDA。）元素属于 $\mathcal{B}$ 且满足 (4.17) 的矩阵 $K\equiv(K_{jk})$ 称为**跃迁振幅矩阵**

备注。定义 14 反映了量子力学中的标准用法：将矩阵 $K=(K_{ij})$ 的元素称为振幅，使得这些数

$$p_{ij}=|K_{ij}|^2 \tag{4.19}$$

是一个随机矩阵 ($p_{i,\ j}\geq 0,\forall i,j\in D$, $\sum_{j\in D}p_{i,\ j}=1$) 的元素

回顾一下，矩阵 $V\equiv(V_{ij})_{i,\ j\in D}$ 是等距算子，当且仅当

$$(V^{*}V)_{j'j}=\sum_{i\in D}\overline{V}_{ij}V_{ij'}=\delta_{j'j} \tag{4.20}$$

并将 (4.20) 与 (4.17) 对比可知，$\mathcal{B}$ 值矩阵 (K_{ij}) 可视为一种算子值等距算子。记

$$p_{hk}:=|V_{kh}|^2\in\mathbb{R}_{+} \tag{4.21}$$

可以将 V_{kh} 视为 p_{hk} 的平方根 $\sqrt{p_{hk}}$，而 (4.20) 意味着

$$\sum_{k\in D}p_{hk}=\sum_{k\in D}\overline{V}_{kh}V_{kh}=1$$

即 $P\equiv(p_{hk})_{h,k\in D}$ 是一个随机矩阵。同样，定义

$$p_{hk}=\mathrm{Tr}(|K_{kh}|^2)\in\mathbb{R}_{+} \tag{4.22}$$

并将 $j=j'$ 代入 (4.17)，可得

$$\sum_{i\in D}\overline{\mathrm{Tr}}(K_{ij}^{*}K_{ij})=\sum_{i\in D}\overline{\mathrm{Tr}}(|K_{ij}|^2)=\sum_{i\in D}p_{ji}=1\ ,\quad\forall j\in D \tag{4.23}$$

再次， $P \equiv (p_{hk})_{h,\ k\in D}$ 是一个随机矩阵。

定义在 $\mathcal{A} := \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}$ 上的（齐次、逆向）量子马尔可夫链（或量子马尔可夫态）由一对 $(\varphi_0, \mathcal{E})$ 唯一确定，其中 φ_0 是 $\mathcal{B}$ 上的一个态（初始态），而 $\mathcal{E}\colon\ \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 是一个转移期望，其联合期望由下式给出

$$\begin{aligned}&\varphi\big(j_0(a_0)j_1(a_1)\cdots j_n(a_n)\big)\\ &= \varphi_0(\mathcal{E}(a_0\otimes\mathcal{E}(a_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(a_{n-1}\otimes\mathcal{E}(a_n\otimes 1))\cdots)) \qquad (4.24)\end{aligned}$$

当 $\dim(H) = d < \infty$ 时，我们将使用以下记号

$$D := \{1, \ldots, d\}$$

对于 H 的每个标准正交基（o.n.b.） $e \equiv (e_h)_{h\in D}$ ，都可以关联一个矩阵单位系 $(e_{h,k})$，其中，对于所有 $h, k \in D$,

$$e_{h,k}(\xi) := e_k e_h^*(\xi) := \langle e_h, \xi\rangle e_k \quad , \quad \forall \xi \in H \qquad (4.25)$$

其在 e 基下的矩阵除第 (h, k) 个元素为 1 外，所有元素均为零。在这种情况下，定义 10 中的四元组 (4.3) 简化为

$$\left(\mathcal{A} := \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}, \varphi, \mathcal{B}_n, (j_n)_{n\in T}\right) \qquad (4.26)$$

对于每个 $j \in D_{\mathcal{E}}$, $K_j \in M_d(\mathbb{C}) \otimes M_d(\mathbb{C})$，都可以写成以下形式

$$K = \sum_{h,h'\in D} e_{h,h'} \otimes\ K_{h,h'} = \sum_{h,h'\in D} e_h e_{h'}^* \otimes\ K_{h,h'} \qquad (4.27)$$

下文中，我们将由下式定义的 $\mathcal{D}_e$ e–对角子代数 $M_d(\mathbb{C})$ 记作

$$\mathcal{D}_e := \{\sum_{h=1}^{d} x_h e_{hh} \colon x_h \in \mathbb{C}, h \in D\} \equiv \ell^\infty_{\mathbb{C}}(D) \qquad (4.28)$$

其中， $L^\infty_{\mathbb{C}}(D)$ 表示所有函数 $f\colon\ D\to\mathbb{C}$ 构成的空间。
e– $\mathcal{A}$ 的对角子代数定义为

$$\mathcal{D}_e := \bigotimes_{\mathbb{N}} D_e \equiv \bigotimes_{\mathbb{N}} L^\infty_{\mathbb{C}}(D) \qquad (4.29)$$

因此，若 $\varphi\equiv(\varphi_0,\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{A}$ 上的任意量子马尔可夫态，则对于任意对角代数 $\mathcal{D}_e$，φ 在 $\mathcal{D}_e$ 上的限制定义了一个唯一的经典过程 $X\equiv(X_n)$，其状态空间为 D，由以下联合概率刻画

$$\mathrm{Prob}\Big(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\Big)=\varphi\big(e_{i_0,i_0}\otimes e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n,i_n}\big)=$$

$$=\varphi_0\left(\mathcal{E}(e_{i_0,i_0}\otimes\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}}e_{i_{n-1}}^*\otimes\mathcal{E}(e_{i_n,i_n}\otimes 1))\cdots))\right)\quad(4.30)$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$、$\{i_h\}_{h=0}^n\subset\{1,\cdots,d\}$。根据标识 (4.28)、(4.29)，由 (4.9) 定义的嵌入 j_n 在 D_e 上的限制可识别为

$$j_n(f):=f(X_n),\quad\forall\ f\in\mathcal{D}\qquad(4.31)$$

4.2 e–可对角化量子马尔可夫链

回顾一下，任意经典马尔可夫链 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其状态空间为 $D=\{1,\cdots,d\}$，均由一对 $(p^{(0)},P\equiv(p_{i,\ j}))$ 确定，其中 $p^{(0)}$ 是 D 上的概率测度（初始分布），而 $P\equiv(p_{i,\ j})$ 是随机矩阵，并且可以嵌入量子马尔可夫链 [Ac74d-Camerino], [Ac74-FAA] 中。事实上，对逐项平方根 $\sqrt{P}:=(\sqrt{p_{k,\ h}})$ 的任意选择，其中 P 定义为

$$K:=\sum_{h\in D}\sqrt{p_{k,h}}e_{k,k}\otimes e_{h,h}\qquad(4.32)$$

$$\mathcal{E}(x):=\overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*\ x\ K)\,,\quad x\in M_d(\mathbb{C})\otimes M_d(\mathbb{C})\qquad(4.33)$$

对任意 $x\otimes y:=\sum_{m,\ n\in D}x_my_ne_{m,\ m}\otimes e_{n,\ n}\in D_e\otimes D_e$，有：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x)=&\overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*\ x\ K)\\&=\sum_{m,n,h,h',k,k'\in D}x_my_n\overline{\sqrt{p_{k,h}}}\sqrt{p_{k',h'}}\,\overline{\mathrm{Tr}}_2((e_{k,k}\otimes e_{h,h})(e_{m,m}\otimes e_{n,n})(e_{k',k'}\otimes e_{h',h'}))\\&=\sum_{h,k\in D}x_k\overline{y_h}\,\overline{\sqrt{p_{k,h}}}\sqrt{p_{k,h}}\,\overline{\mathrm{Tr}}_2((e_{k,k}\otimes e_{h,h}))=\sum_{k\in D}x_k\left(\sum_{h\in D}p_{k,h}\overline{y_h}\right)e_{k,k}\\&=xP(\overline{y})\end{aligned}$$

(4.33) 表明，$\mathcal{E}$ 是 $M_d(\mathbb{C})$ 上的转移期望，可以写成形式 (4.10)，其中 $|D_{\mathcal{E}}|=1$，且满足：

$$\mathcal{E}(D_e\otimes D_e)\subseteq D_e\qquad(4.34)$$

因此，对于 $M_d(\mathbb{C})$ 上的任意初始态

$$\varphi_0(\cdot) := \mathrm{Tr}\big(W_0 \cdot\ \big)\ ; \quad W_0 := \sum_{j\in D} p_j e_{j,j} \tag{4.35}$$

数对 $(\varphi_0, \mathcal{E})$ 定义了一个唯一的量子马尔可夫链，其在 e–对角子代数 $\mathcal{D}_e$ 上的限制是上文$_{n\in\mathbb{N}}$ 所述的经典马尔可夫链 (X_n)。

总之：任何经典马尔可夫链都可以作为某个量子马尔可夫链的限制得到（通常有多种方式）。

定义 15 转移期望由 (4.32)、(4.33) 刻画的量子马尔可夫链称为 e–**可对角化的**。

4.3 代数（经典或量子）隐过程

经典隐马尔可夫链的联合期望具有 (3.39) 的形式，其结构为

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} f_m(O_m) g_m(H_m)\right) \tag{4.36}$$

$$= p_{H_0}\left(E_{H_0}\left(B_{O_0}(f_0)g_0\right) P_{H_0}\left(B_{O_1}(f_1)g_1\right)(\cdots\right.$$
$$\left. P_{H_{n-1}}(B_{O_{n-1}}(f_n)g_{n-1}) P_{H_{n-1}}(B_{O_n}(f_n)g_n)\right)\big)$$

这自然地启示了将这一概念推广到量子情形的一种方法。
事实上，在代数$L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})$ 和 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})$ 分别被非交换代数 $\mathcal{B}_{H_n}$ 和$\mathcal{B}_{O_n}$ 取代的情况下，难以解释 (4.36) 的原因在于，形如 (3.68) 的映射，即

$$f_n \otimes g_n \mapsto B_{O_n}(f_n) g_n$$

一般而言，它们并非正。这一问题是经典马尔可夫链量子扩展中遇到的问题的特例，因此可以采用 [Ac74d-Camerino], [Ac74-FAA], 提出的同一思路来解决，即：用一个转移期望替换映射 (3.68),

$$\mathcal{E}_{O,H;n} \colon \mathcal{B}_{O_n} \otimes \mathcal{B}_{H_n} \to \mathcal{B}_{H_n}\ , \quad n \in \mathbb{N}$$

在通常的马尔可夫性中，所有代数都是交换的，人们只考虑由一列马尔可夫算子唯一确定的转移期望

$$B_{O_n} : \mathcal{B}_{O_n} \to \mathcal{B}_{H_n}$$

通过单位元

$$\mathcal{E}_{O,H;n}(f_n \otimes g_n) := B_{O_n}(f_n)g_n \; ; \quad f_n \in \mathcal{B}_{O_n} \; , \; g_n \in \mathcal{B}_{H_n} \tag{4.37}$$

因此，从经典隐过程到量子隐过程的经验规则如下：

（i）分别将 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n})$ 和 $L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n})$ 替换为任意 $*$–代数 $\mathcal{B}_{H_n}$和 $\mathcal{B}_{O_n}$。

（ii）将算子 $g_n \otimes f_n \in L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}) \mapsto B_{O_n}(f_n)g_n$ 替换为转移期望

$$\mathcal{E}_{O,H,n} : \mathcal{A}_{H_n} \otimes \mathcal{A}_{O_n} \to \mathcal{A}_{H_n} \tag{4.38}$$

经过这些替换，经典过程的样本代数 $\mathcal{A}_{H,\,O} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{H_n}) \otimes L^\infty_{\mathbb{C}}(S_{O_n}))$（见（3.16））被替换为

$$\mathcal{A}_{H,O} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{B}_{O_n} \otimes \mathcal{B}_{H_n}) \tag{4.39}$$

以及从 $\mathcal{A}_{H,\,O}$ 到隐代数的全局发射算子

$$\mathcal{A}_H := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{H_n} \tag{4.40}$$

被替换为

$$\mathcal{E}_{O,H} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{O,H;n} : \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{B}_{O_n} \otimes \mathcal{B}_{H_n}) = \mathcal{A}_{H,O} \to \mathcal{A}_H = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{H_n} \tag{4.41}$$

类比经典情形，转移期望 $\mathcal{E}_{O,\,H,\,n}$（它是一个特殊的马尔可夫算子）被称为第 n– **个发射算子**。同样，在量子情形中，隐过程 $H \equiv \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **是任意的**。

定理 8 设给定：
– 一种称为隐过程的量子随机过程，

$$(\mathcal{A}_H, P_H, (\mathcal{B}_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}, (j_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}) \tag{4.42}$$

其中 $\mathcal{A}_H$ 由（4.40）给出， j_{H_n} 是通常的张量嵌入；– 一族 $*$–代数（$\mathcal{B}_{O_n}$）$_{n\in\mathbb{N}}$；

– 一族发射算子 $\mathcal{E}_{O,H,n}$: $\mathcal{B}_{H_n}\otimes\mathcal{B}_{O_n}\to\mathcal{B}_{H_n}$ ($n\in\mathbb{N}$)，以及由 (4.41) 给出的相关全局发射算子。
存在一个在随机等价意义下唯一的量子随机过程

$$(\mathcal{A}_{H,O}, P_{H,O}, (\mathcal{B}_{H_n}\otimes\mathcal{B}_{O_n})_{n\in\mathbb{N}}, (j_{O_n}\otimes j_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}) \tag{4.43}$$

使得 $\mathcal{A}_{H,O}$ 由 (4.39) 给出， $j_{O_n}\otimes j_{H_n}$ 是通常的张量嵌入，并且

$$P_{H,O} = P_H\circ\mathcal{E}_{O,H} \tag{4.44}$$

或者，更明确地说，

$$P_{H,O}\Big(\bigotimes_{m=0}^{n} j_{H_m}(g_m)\otimes j_{O_m}(f_m)\Big) = P_H\Big(\bigotimes_{m=0}^{n} j_{H_m}(\mathcal{E}_{O,H,m}(g_m\otimes f_m))\Big) \tag{4.45}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$、 $m\in\{0,\dots,n\}$、 $f_m\in\mathcal{B}_{O_n}$ 和 $g_m\in\mathcal{B}_{H_n}$。

证明。由于 $\mathcal{E}_{O,H}$: $\mathcal{A}_{H,O}\to\mathcal{A}_H$ 是一个马尔可夫算子，且 P_H 是 $\mathcal{A}_H$ 上的一个态，$P_{H,O} = P_H\circ\mathcal{E}_{O,H}$ 是 $\mathcal{A}_{H,O}$ 上的一个态。因此，量子随机过程 (4.43) 定义良好。□

定义 16 定理 8 中构造的量子随机过程 (4.43) 称为量子隐过程，其隐过程由 (4.42) 给出，而可观测过程由

$$(\mathcal{A}_O, P_O, (\mathcal{B}_{O_n})_{n\in\mathbb{N}}, (j_{O_n})_{n\in\mathbb{N}}) \tag{4.46}$$

其中

$$\mathcal{A}_O := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_{O_n} \equiv \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_{O_n}\otimes 1_{\mathcal{A}_H} \tag{4.47}$$

P_O 是 $P_{H,O}$ 到 $\mathcal{A}_O$ 的限制，其中采用了识别 (4.47)（通过将 (4.45) 中所有的 $g_m = 1_{\mathcal{A}_H}$ 代入得到），而 j_{O_n} 是通常的张量嵌入。

5 量子隐马尔可夫过程

与经典情形一样，量子隐马尔可夫过程是指其隐过程为量子马尔可夫过程的量子隐过程（在本文中为马尔可夫链）。

在本节中，我们考虑非必然齐次的（逆向）马尔可夫链（参见 [Ac74d-Camerino], [Ac74-FAA]）。它们是代数$\mathcal{A}_H$ 上的态，该代数由式（4.40）给出，并由一对

$$(P_{H_0}\ ,\ (\mathcal{E}_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}) \tag{5.1}$$

其中，P_{H_0} 是 $\mathcal{B}_{H_0}$ 上的一个态，并且

$$\mathcal{E}_{H_n}\colon \mathcal{B}_{H_n}\otimes\mathcal{B}_{H_{n+1}}\to\mathcal{B}_{H_n}\quad ,\quad n\in\mathbb{N} \tag{5.2}$$

一个反向转移期望族。这样的二元组通过以下恒等式确定联合期望

$$\begin{aligned} &P_H\Big(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(g_m)\Big) \\ =&P_{H_0}\left(\mathcal{E}_{H_0}\left(g_0\otimes\mathcal{E}_{H_1}\left(\cdots\otimes\mathcal{E}_{H_{n-1}}\left(g_{n-1}\otimes\mathcal{E}_{H_n}\left(g_n\otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

对所有 $g_m\in\mathcal{B}_{H_m}$、$m\in\{1,\dots,n\}$均成立。

定理 9 采用定理 8 的记号，设量子隐过程 (4.42) 是由二元组 (5.1) 刻画的反向马尔可夫过程。那么，过程 (4.43) 是隐量子马尔可夫过程，其联合期望由下式给出

$$\begin{aligned} &P_{H,O}\Big(\bigotimes_{m=0}^{n} j_{H_m}(g_m)\otimes j_{O_m}(f_m)\Big) \\ =&P_{H_0}\big(\mathcal{E}_{H_0}\big(\mathcal{E}_{O,H;0}(f_0\otimes g_0)\ \otimes\mathcal{E}_{H_1}\big(\mathcal{E}_{O,H;1}\left((f_1\otimes g_1)\ \otimes\cdots\right.\right. \\ &\left.\left.\otimes\mathcal{E}_{H_{n-1}}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}(f_{n-1}\otimes g_{n-1})\otimes\mathcal{E}_{H_n}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}\left(f_n\otimes g_n\right)\otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{5.4}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$、$m\in\{0,\dots,n\}$、$f_m\in\mathcal{B}_{O_n}$ 和 $g_m\in\mathcal{B}_{H_n}$均成立。此外，引入记号

$$\mathcal{E}_{m;f_m}:=\mathcal{E}_{O,H,m}(1_{H_m}\otimes f_m) \tag{5.5}$$

将所有 $m\in\{1,\dots,n\}$ 都设为 $g_m=1$，由 (5.4) 得到的可观测过程的联合期望为

$$P_O\left(\bigotimes_{m=0}^{n} j_{O_m}(f_m)\right) \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} =\ &P_{H_0}\big(\mathcal{E}_{H_0}\big(\mathcal{E}_{O,\ H;0}\big(f_0\otimes\mathcal{E}_{H_1}\big(\mathcal{E}_{1;f_1}\otimes\cdots\ \otimes\mathcal{E}_{H_{n-1}}\left(\mathcal{E}_{n-1;f_{n-1}}\otimes\mathcal{E}_{H_n}\left(\mathcal{E}_{n;f_n}\otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$、$m\in\{0,\dots,n\}$、$f_m\in\mathcal{B}_{O_n}$。

备注。公式（5.6）突显了量子隐马尔可夫过程的双层结构：算子 $\mathcal{E}_{j;\cdot}$ 将 $\mathcal{B}_{O_n}$ 中的元素（在交换情形下，是 j 阶可观测随机变量 O_j 的函数 f_j ）转换为 j 阶隐随机变量 H_j 的函数；而转移期望 $\mathcal{E}_{H_j}$ 则像在通常的马尔可夫链中那样作用于这些转换后的函数（见（5.4））。

证明。恒等式（5.6）由（5.4）得到：将右侧的 g_m 替换为 $\mathcal{E}_{O,\ H;m}(f_m \otimes g_m)$。采用记号（5.5）时，将（5.4）右侧的 g_m 替换为 $1_{\mathcal{B}_{H_m}}$，即可得到恒等式（5.6）。 □

备注。回顾一下，如果代数 $\mathcal{B}_{O_n}$ 和 $\mathcal{B}_{H_n}$ 都是交换的，转移期望可表示为

$$\mathcal{E}_{H_n}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}\left(f_n \otimes g_n\right) \otimes 1_{H_{n+1}}\right) := P_{H_n}\left(B_{O,H,n}(f_n) g_n\right) \tag{5.7}$$

在此情形下，联合期望（5.4）与（3.20）一致，即与由马尔可夫算子（P_{H_n}）和发射算子（$B_{O,\ H,\ n}$）定义的经典隐马尔可夫过程一致。

5.1 可对角化马尔可夫链及其相关的经典隐过程

本节将证明，一类特殊的量子马尔可夫链与经典隐马尔可夫过程有着紧密联系，具体而言：该类中任意元素在任意对角（尤其是交换的）子代数上的限制都会产生一个隐马尔可夫过程。这意味着，给定一个可对角化量子马尔可夫链，就会自动得到不可数多个经典隐马尔可夫过程。这一事实自量子马尔可夫链理论早期便已为人所知（参见 [Ac91-Q-Kalman-filters]）。

上述特殊的马尔可夫链类别，是通过对第 5 节开头所述的构造进行特例化，并引入 3 类附加条件而得到的。

(i) 关于代数的假设

所有代数 $\mathcal{A}_{H_n}$ 和 $\mathcal{A}_{O_n}$ 均取为与同一个代数 $\mathcal{B}$同构，**且与** n 无关，并且同构于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上所有有界算子构成的代数：

$$\mathcal{A}_{H_n} \equiv \mathcal{A}_{O_n} \equiv \mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{H}) \tag{5.8}$$

其中 $\equiv$ 表示 $*$–同构。因此，对于底层马尔可夫过程的样本代数，可作如下识别

$$\mathcal{A}_H := \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}$$

以及张量嵌入

$$j_{H_n} : b \in \mathcal{B} \to j_{H_n}(b) \equiv b \otimes 1_{\{n\}^c} \in \mathcal{A}_H \quad ; \quad \mathcal{A}_{H_n} := j_{H_n}(\mathcal{B}) \tag{5.9}$$

其中 $1_{\{n\}^c}$ 表示$\bigotimes_{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \mathcal{B}$中的单位元。

类似地，我们定义可观测代数

$$\mathcal{A}_O \equiv \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}$$

以及张量嵌入

$$j_{O_n} : b \in \mathcal{B} \to j_{O_n}(b) \equiv b \otimes 1_{\{n\}^c} \in \mathcal{A}_O \quad ; \quad \mathcal{A}_{O_n} := j_{O_n}(\mathcal{B}) \tag{5.10}$$

其中同样有 $1_{\{n\}^c}$ 表示$\bigotimes_{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \mathcal{B}$中的单位元。

（H， O）–过程的代数为

$$\mathcal{A}_{H,O} := \mathcal{A}_{H_n} \otimes \mathcal{A}_{O_n} \equiv \bigotimes_{\mathbb{N}} (\mathcal{A}_H \otimes \mathcal{A}_O) \equiv \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B} \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B} \tag{5.11}$$

（ii）关于转移期望的假设

我们假设， H–过程的反向转移期望不依赖于 $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{E} : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B} \tag{5.12}$$

且其形式为 $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(x) := \overline{\mathrm{Tr}}_2(K^* x K) \quad , \quad x \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \tag{5.13}$$

其中 $K \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 是与其右移位算子对易的条件密度振幅，即:

$$[K \otimes 1\ ,\ 1 \otimes K] = 0 \tag{5.14}$$

(iii) 关于初始态的假设

$\varphi_0 = \mathrm{Tr}(w_0\,\cdot)$ 是定义在 $\mathcal{B}$ 上的态，满足

$$[w_0 \otimes 1,\ K] = 0 \tag{5.15}$$

此外，我们假设 w_0 具有非简并谱，即

$$w_0 := \sum_{j\in D} w_{0;j} e_{jj} = \sum_{j\in D} w_{0;j} e_j e_j^*$$

其中 $e \equiv (e_j)_{j\in D}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。我们用 $(e_{hk} = e_h e_k^*)_{h,\ k\in S}$ 表示与基 e 相关联的 $\mathcal{B}$ 上的矩阵单位系。采用这些记号，我们还假设以下非简并条件成立:

$$(e_{kk} \otimes 1)K \neq 0 \quad , \quad \forall k \in D \tag{5.16}$$

定理 10 在上述条件 (i)、(ii)、(iii) 下，存在一个随机矩阵 $P \equiv (p_{jk})$，使得

$$K = \sum_{j,k\in D} \sqrt{p_{jk}}\, e_{jj} \otimes e_{kk} \tag{5.17}$$

其中，对每个 $j,\ k \in D$ $\sqrt{p_{jk}}$ 是 p_{jk} 的任意一个平方根。反过来，给定一个随机矩阵 $P \equiv (p_{jk})$，对于 p_{jk} $(j,k \in D)$ 的任意平方根 $\sqrt{p_{jk}}$，由 (5.17) 右侧定义的矩阵 K 是一个条件密度振幅。

证明。如果 w_0 的谱非简并，那么 $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 中 $w_0 \otimes 1$ 的交换子为

$$\{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\}' = \{x \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\colon\ x = \sum_{j\in D} (e_{jj} \otimes 1_M) x (e_{jj} \otimes 1_M)\} \tag{5.18}$$

由于 $(e_{hk})_{h,k\in S}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的矩阵单位系，K 可写成如下形式

$$K = \sum_{h,k\in S} e_{hk} \otimes K_{hk} \qquad , \quad P_{0;hk} \in \mathcal{B} \tag{5.19}$$

其中 $K_{hk} \in \mathcal{B}$。根据 (5.19)，条件 (5.16) 等价地可写为

$$K_{kk} \neq 0 \quad , \quad \forall k \in D \tag{5.20}$$

因此，(5.15) 意味着

$$K = \sum_{j\in D}(e_{jj}\otimes 1_M)K(e_{jj}\otimes 1_M) \overset{(5.19)}{=} \sum_{j\in D}\sum_{h,k\in D}(e_{jj}\otimes 1_M)(e_{hk}\otimes K_{hk})(e_{jj}\otimes 1_M)$$

$$= \sum_{j\in D}\sum_{h,k\in D}(e_{jj}e_{hk}e_{jj}\otimes K_{hk}) = \sum_{j,h,k\in D}\delta_{jh}\delta_{kj}(e_{jj}\otimes K_{hk})$$

$$= \sum_{j\in D}(e_{jj}\otimes K_{jj}) \tag{5.21}$$

(5.14) 意味着

$$0 = \sum_{j,k\in D}[(e_{jj}\otimes K_{jj})\otimes 1 \ , \ 1\otimes(e_{kk}\otimes K_{kk})]$$

$$= \sum_{j,k\in D}(e_{jj}\otimes K_{jj}e_{kk}\otimes K_{kk} - e_{jj}\otimes e_{kk}K_{jj}\otimes K_{kk})$$

$$= \sum_{j\in D} e_{jj}\otimes\sum_{k\in D}(K_{jj}e_{kk}\otimes K_{kk} - e_{kk}K_{jj}\otimes K_{kk})$$

$$\iff 0 = \sum_{k\in D}(K_{jj}e_{kk}\otimes K_{kk} - e_{kk}K_{jj}\otimes K_{kk}) \quad , \quad \forall j \in D$$

右乘 $e_{hh}\otimes 1$，其中 $h \neq k$，可得

$$0 = \sum_{k\in D} e_{kk}K_{jj}e_{hh}\otimes K_{kk} \quad , \quad \forall j \in D$$

$$\iff 0 = e_{kk}K_{jj}e_{hh}\otimes K_{kk} \quad , \quad \forall j,k \in D$$

$$\iff 0 = e_{kk}K_{jj}e_{hh} = 0 \quad , \quad \forall j,k \in D \text{ such that } K_{kk} \neq 0$$

$$\overset{(5.20)}{\iff} 0 = e_{kk}K_{jj}e_{hh} = 0 \quad , \quad \forall j,k \in D \ , \ \forall h \neq k$$

而这等价于

$$K_{jj} = \sum_{k\in D} e_{kk}K_{jj}e_{kk} = \sum_{k\in D}\langle e_k, K_{jj}e_k\rangle e_{kk} =: \sum_{k\in D} r_{jk}e_{kk} \quad , \quad \forall j \in D \tag{5.22}$$

将（5.22）代入（5.21），可得

$$K=\sum_{j\in D}(e_{jj}\otimes K_{jj})=\sum_{j,k\in D}r_{jk}e_{jj}\otimes e_{kk}$$

K 是条件密度振幅这一事实意味着

$$1=\overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*K)=\overline{\mathrm{Tr}}_2((\sum_{j,k\in D}r_{jk}e_{jj}\otimes e_{kk})^*(\sum_{j,k\in D}r_{jk}e_{jj}\otimes e_{kk}))$$

$$=\overline{\mathrm{Tr}}_2((\sum_{j,k\in D}\overline{r_{jk}}r_{jk}e_{jj}\otimes e_{kk})=\sum_{j\in D}\left(\sum_{k\in D}|r_{jk}|^2\right)e_{jj}$$

$$\iff\sum_{k\in D}|r_{jk}|^2\quad,\quad\forall j\in D \tag{5.23}$$

因此，以这些元素为项的矩阵

$$p_{jk}:=|r_{jk}|^2\quad,\quad\forall j,k\in D$$

是一个随机矩阵，并且每个 r_{jk} 都是相应p_{jk}的平方根。这就证明了第一个结论。逆命题的证明包含在计算式 (5.23) 中。□

zzz 可以证明，对于 $\mathcal{B}$ 上任意正规态 P_0，若其密度算子为w_0，则数对 $(P_0,\mathcal{E})$ 唯一确定 $\mathcal{A}_H\equiv\bigotimes_{\mathbb{N}}\mathcal{B}$ 上的一个态 P_H，它是一个量子马尔可夫链，且其联合期望具有形式 (5.3)。正向**时间平移** u 是 $\mathcal{A}$ 的 $*$–自同态，由以下性质刻画：

$$u\circ j_{H_n}:=j_{H_{n+1}}\quad,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

对于任意条件密度振幅 K 和任意 n，定义

$$K_{[n,n+1]}:=u^n((j_{H_0}\otimes j_{H_1})(K))=(j_{H_n}\otimes j_{H_{n+1}})(K) \tag{5.24}$$

并可证明，记

$$W_{[0,n+1]}:=$$

$$K_{[n,n+1]}K_{[n-1,n]}\dots K_{[0,1]}w_0K^*_{[0,1]}K^*_{[1,2]}\dots K^*_{[n,n+1]}\in\left(\otimes\mathcal{B}\right)^{n+2} \tag{5.25}$$

one has

$$\overline{\mathrm{Tr}}_{n+1}\left(K_{[n,n+1]}K_{[n-1,n]}\dots K_{[0,1]}w_0K^*_{[0,1]}K^*_{[1,2]}\dots K^*_{[n,n+1]}\right)\in\left(\otimes\mathcal{B}\right)^{n+1} \tag{5.26}$$

$$= \text{density matrix of } \; P_{H,[0,n]}$$

反过来，给定条件密度振幅（CDA） K 和定义在 $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_0$ 上的初始密度算子 w_0 ，并按式（5.25）定义 $W_{[0,n+1]}$ ，则极限

$$P_H(a) := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(W_{[0,n]}a) \quad , \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

在 $\mathcal{A}$ 上以强有限意义存在，并满足 (5.26)。等价地 y:

$$P_H(a) = Tr(W_{[0,n+1]}a) \qquad , \quad \forall a \in \mathcal{A}_{[0,n]} \tag{5.27}$$

且 P_H 是由对 $(\varphi_0, \mathcal{E})$ 生成的量子马尔可夫链，其中 $\mathcal{E}$ 由 (5.13) 给出（有关此构造的更多信息，请参见 [Ac81-Topics-QP] ）。

5.1.1 可对角化的条件密度振幅与隐马尔可夫过程

量子马尔可夫链最简单的例子，可以通过固定 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基 $e_H \equiv (e_{H;j})_{j\in D}$ 来构造（其中 D 是一个基数等于 $\mathcal{H}$ 维数的集合），并选择满足定理 10 相对于该基的条件的 K 。于是我们知道，K 由一个随机矩阵 $P_H \equiv (p_{H;i,\ j})$ 通过单位元唯一确定:

$$K_H := \sum_{i,j\in D} \sqrt{p_{H;i,j}}\, e_{H;ii} \otimes e_{H;jj} \tag{5.28}$$

其中 $e_{H;ij} := e_{H;i}e^*_{H;j}$ 是与标准正交基 e_H 相关联的矩阵单位系，并且对于每个 $i,\ j \in D$, $e_{H;i}e^*_{H;j}$ 定义如下:

$$e_{H;ij}\xi = e_{H;i}e^*_{H;j}(\xi) := \langle e_{H;j}, \xi\rangle e_{H;i} \qquad , \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \tag{5.29}$$

形式为 (5.28) 的条件密度振幅（CDA）（及其相关的 QMC）称为秩–1–**可对角化的**。对于这类 QMC，定义

$$P_0 = K^*_{[0,1]}K_{[0,1]} \qquad P_n = u^n(P_0) \qquad ; \qquad n \in \mathbb{N} \tag{5.30}$$

可以验证，

$$W_{[0,n]} = w_0 \cdot P_0 \cdot P_1 \cdots P_n \tag{5.31}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in D} p^0_{H;j_0} p_{H;j_0j_1} \cdots p_{H;j_{n-1}j_n} e_{H;j_0j_0} \otimes e_{H;j_1j_1} \otimes \cdots \otimes e_{H;j_nj_n}$$

因此，可对角化的量子马尔可夫链是经典马尔可夫链的对角提升 .

5.1.2 与可对角化量子马尔可夫链相关的经典隐马尔可夫过程：极大可观测量

在本节中，我们证明**任意对角化代数上的任意可对角化量子马尔可夫态，其限制都是经典隐马尔可夫过程**。

定义 17 采用第 5.1 节的记号，对每个 $n \in \mathbb{N}$，固定一组标准正交基 $e_O \equiv (e_{O_n;j})_{j\in D}$，并定义 e_{O_n} 对角代数如下：

$$\mathcal{D}_{e_{O_n}} := \text{lin. span}\{e_{O_n;jj} : j \in D\} \subset j_{O_n}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}_{O_n}$$

其中 $e_{O_n;jj} := e_{O_n;j}e^*_{O_n;j}$（见 (5.29)）。代数

$$\mathcal{D}_{(e_O)} := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{e_{O_n}} \left(\sim \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{e_{O_n}} \right) \subset \mathcal{A}_O \tag{5.32}$$

称为关于基序列 e_{O_n} 的对角代数，或简称为 e_O 对角代数。

定理 11 采用第 5.1 节的记号，设 φ 是由满足定理 10 条件的数对 $(\varphi_0, \mathcal{E})$ 确定的、定义在 $\mathcal{A} = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}$ 上的量子马尔可夫链。那么，φ 在 e_O 对角代数 (5.32) 上的限制由联合概率刻画如下：

$$P_O(j_{O_0}(e_{O_0;k_0,k_0})j_{O_1}(e_{O_1;k_1,k_1}) \cdots j_{O_n}(e_{O_n;k_n,k_n}) \tag{5.33}$$

$$= \sum_{j_0,\ldots,j_n\in D} p^{(0)}_{H;j_0} p_{H_0;j_0j_1} \cdots p_{H_n;j_{n-1}j_n} \cdot p(O_0 = k_0|H = j_0) \cdots p(O_n = k_n|H = j_n)$$

其中 k_0、…、$k_n \in D$，且

$$p(O_m = k_m|H_m = j) = |\langle e_{H_m;j}, e_{O_m;k}\rangle|^2 \tag{5.34}$$

而随机矩阵 $P_H := (p_{H;jk})$ 由式 (5.17) 给出。

备注。根据识别（5.11），在（5.34）中，隐随机变量和可观测随机变量都取值于状态空间 D。此外，记号 $H_m = j_m$ 表示隐随机变量 H_m 在时刻 m 处于状态 j_m，$p(O_m = k_m|H_m = j_m)$ 表示在时刻 m，在已知时刻 m 时 $H_m = j_m$ 且 $p_{H;j_{m-1}j_m}$ 的条件概率

即在时刻 m，在已知时刻 m 时 $H = j_{m-1}$ 的条件概率。这些识别有助于简化记号，但从条件概率的物理解释来看，最好避免使用这些记号。

备注。将 (5.33) 右侧与 (3.21) 右侧进行比较，便可立即看出，前者给出了由发射算子 ($p(O_m = k_m|H = j_m)$) 和马尔可夫算子 ($p_{H;j_{m-1}j_m}$) 定义的可观测过程的联合概率。

证明。回顾与可对角化条件密度振幅 K 相关的密度算子结构 (5.31)，可得

$$\varphi(j_0(e_{O_0;k_0,k_0})j_1(e_{O_1;k_1,k_1})\cdots j_n(e_{O_n;k_n,k_n}) \tag{5.35}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in D} p^0_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}\mathrm{Tr}_{[0,n]}\left((e_{H;j_0j_0}\otimes e_{H;j_1j_1}\otimes\cdots\otimes e_{H;j_nj_n})\right.$$

$$\left.(j_0(e_{O_0;k_0,k_0})j_1(e_{O_1;k_1,k_1})\cdots j_n(e_{O_n;k_n,k_n}))\right)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in D} p^0_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}\mathrm{Tr}_{[0,n]}\left(j_0(e_{H;j_0j_0})j_1(e_{H;j_1j_1})\cdots j_{n-1}(e_{H;j_{n-1}j_{n-1}})\right.$$

$$\left.(j_0(e_{O_0;k_0,k_0})j_1(e_{O_1;k_1,k_1})\cdots j_{n-1}(e_{O_{n-1};k_{n-1},k_{n-1}}))j_n(e_{H;j_nj_n}e_{O_n;k_n,k_n})\right)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in D} p^0_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}\mathrm{Tr}_{[0,n-1]}\left(j_0(e_{H;j_0j_0})j_1(e_{H;j_1j_1})\cdots j_{n-1}(e_{H;j_{n-1}j_{n-1}})\right.$$

$$\left.(j_0(e_{O_0;k_0,k_0})j_1(e_{O_1;k_1,k_1})\cdots j_{n-1}(e_{O_{n-1};k_{n-1},k_{n-1}}))\right)\overline{\mathrm{Tr}}_n\left(j_n(e_{H;j_nj_n}e_{O_n;k_n,k_n})\right)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in D} p^0_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}\mathrm{Tr}_{[0,n-1]}\left(j_0(e_{H;j_0j_0})j_1(e_{H;j_1j_1})\cdots j_{n-1}(e_{H;j_{n-1}j_{n-1}})\right.$$

$$\left.(j_0(e_{O_0;k_0,k_0})j_1(e_{O_1;k_1,k_1})\cdots j_{n-1}(e_{O_{n-1};k_{n-1},k_{n-1}}))\right)|\langle e_{H;j_n},e_{O_n;k_n}\rangle|^2$$

$$\overset{(5.34)}{=} \sum_{j_1,\ldots,j_n\in D} p^0_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}p(H=j|O_n=k_n)$$

$$\mathrm{Tr}_{[0,n-1]}\left(j_0(e_{H;j_0j_0})j_1(e_{H;j_1j_1})\cdots j_{n-1}(e_{H;j_{n-1}j_{n-1}})\right.$$

$$\left.(j_0(e_{O_0;k_0,k_0})j_1(e_{O_1;k_1,k_1})\cdots j_{n-1}(e_{O_{n-1};k_{n-1},k_{n-1}}))\right)$$

由此，通过归纳法可得 (5.33)。 □

5.2 量子隐马尔可夫过程的对角限制

在定理 9 的记号和假设下，设

$$(\mathcal{A}_{H,O}, P_{H,O}, (\mathcal{B}_{O_n} \otimes \mathcal{B}_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}, (j_{O_n} \otimes j_{H_n})_{n\in\mathbb{N}}) \tag{5.36}$$

采用特殊的发射算子选择，在定理 8 中定义的量子隐过程

$$\mathcal{E}_{O,H,n} \colon \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \overset{(5.9),(5.10)}{\equiv} \mathcal{B}_{H_n} \otimes \mathcal{B}_{O_n} \to \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{H_n} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.37}$$

由下式给出

$$\mathcal{E}_{O,H,n}(x) := \overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*_{O',H',n} x K_{O',H',n}) \quad , \quad x \in \mathcal{B}_{H_n} \otimes \mathcal{B}_{O_n} \tag{5.38}$$

其中，$\overline{\mathrm{Tr}}_2$ 由式 (4.11) 给出，$K_{O'、H'、n}$ 定义如下。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，固定两组标准正交基 $e_{O'_n} \equiv (e_{O'_n;\ j})_{j\in D}$（分别为 $e_{H'_n} \equiv (e_{H'_n;\ j})_{j\in D}$），它们属于 $\mathcal{H}$，如定义 17 所述；并用记号 (5.29) 将相应的矩阵单位系记为 $e_{O'_n;\ jk} := e_{O'_n;\ j} e^*_{O'_n;\ k}$（分别为 $e_{H'_n;\ jk} := e_{H'_n;\ j} e^*_{H'_n;\ k}$）（见式 (5.29)）。固定一个**条件密度振幅**（相对于迹）

$$K_{O',H',n} := \sum_{i,j\in D} K_{O',H',n;i,j} e_{H'_n;ii} \otimes e_{O'_n;jj} \in \mathcal{B}_{H_n} \otimes \mathcal{B}_{O_n} \tag{5.39}$$

注意式 (5.39) 与式 (5.17) 的区别：在式 (5.39) 中，投影 $e_{H'_n;\ ii}$, $e_{O'_n;\ jj}$ 属于**不同的**对角代数，而在式 (5.17) 中，投影 e_{jj}, e_{kk}属于**同一个**对角代数。

注意，对于任意 $g \in \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{H_n}$ 和 $f \in \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{O_n}$，都有

$$\mathcal{E}_{O,H,n}(g \otimes f) = \overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*_{O',H',n}(g \otimes f) K_{O',H',n}) \tag{5.40}$$

$$= \overline{\mathrm{Tr}}_2\Big(\Big(\sum_{i_1,j_1\in D} K_{O',H',n;i_1,j_1} e_{H'_n;i_1 i_1} \otimes e_{O'_n;j_1 j_1}\Big)^* (g\otimes f) \Big(\sum_{i_2,j_2\in D} K_{O',H',n;i_2,j_2} e_{H'_n;i_2 i_2} \otimes e_{O'_n;j_2 j_2}\Big)\Big)$$

$$= \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_2} \overline{\mathrm{Tr}}_2 \left(e_{H'_n;i_1 i_1} g e_{H'_n;i_2 i_2} \otimes e_{O'_n;j_1 j_1} f e_{O'_n;j_2 j_2}\right)$$

$$= \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_2} \langle e_{H'_n;i_1}, g e_{H'_n;i_2}\rangle \langle e_{O'_n;j_1}, f e_{O'_n;j_2}\rangle \overline{\mathrm{Tr}}_2 \left(e_{H'_n;i_1 i_2} \otimes e_{O'_n;j_1 j_2}\right)$$

$$= \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_2} \langle e_{H'_n;i_1}, g e_{H'_n;i_2}\rangle \langle e_{O'_n;j_1}, f e_{O'_n;j_2}\rangle \delta_{j_1,j_2} e_{H'_n;i_1 i_2}$$

$$= \sum_{i_1,j_1,i_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_1} \langle e_{H'_n;i_1}, g e_{H'_n;i_2}\rangle \langle e_{O'_n;j_1}, f e_{O'_n;j_1}\rangle e_{H'_n;i_1 i_2}$$

^^对于 $n \in \mathbb{N}$，记由 $(e_{O'_n;jj})_{j\in D}$（分别由 $(e_{H'_n;ii})_{i\in D}$）生成的对角代数为 $\mathcal{D}_{O'_n}$（分别为 $\mathcal{D}_{H'_n}$），则 (5.9)、(5.10) 推出

$$j_{O_n}(\hat{\mathcal{D}}_{O'_n}) =: \mathcal{D}_{O'_n} \subset \mathcal{B}_{O_n} \ ; \quad j_{H_n}(\hat{\mathcal{D}}_{H'_n}) =: \mathcal{D}_{H'_n} \subset \mathcal{B}_{H_n}$$

分别定义 H'–对角代数和 O'–对角代数为

$$\mathcal{D}_{H'} := \bigvee \mathcal{D}_{H'_n} \quad ; \quad \mathcal{D}_{O'} := \bigvee \mathcal{D}_{O'_n} \tag{5.41}$$

(5.40) 的一个重要推论是，$\mathcal{E}_{O,\ H,\ n}$ 将对角代数 ^^^$\mathcal{D}_{H'_n} \otimes \mathcal{D}_{O'_n} \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ 映射到对角代数 $\mathcal{D}_{H'_n} \subset \mathcal{B}$中。特别地，在 (5.40) 中令 $f = g = 1_{\mathcal{B}}$，可得

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{B}} &\overset{\text{Le. }1}{=} \mathcal{E}_{O,H,n}(1_{\mathcal{B}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) \\ &\overset{(5.40)}{=} \sum_{i_1,j_1,i_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_1} \delta_{i_1,i_2} e_{H'_n;i_1 i_2} \\ &= \sum_{i_1\in D} \Big(\sum_{j_1\in D} |K_{O',H',n;i_1,j_1}|^2 \Big) e_{H'_n;i_1 i_1} \end{aligned}$$

换言之

$$P(O_n = j | H'_n = i) := p_{O,H',n;i,j} := |K_{O',H',n;i,j}|^2 \ , \quad \forall i,j \in D \tag{5.42}$$

是一个随机矩阵。

定理12 在上述记号及定理 11 的假设下，对于发射算子由 (5.38) 和 (5.39) 给出的量子隐马尔可夫 (H,O)–过程，其限制在对角代数 $\mathcal{D}_{H'} \otimes \mathcal{D}_{O'}$ 上的联合概率为

$$\begin{aligned} & P_{H',O'}\Big(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(e_{H';j_m,j_m}) \prod_{m=0}^{n} j_{O'_m}(e_{O'_m;k_m,k_m}) \Big) \\ =& p_{O',H,0;h_0,k_0} p_{O',H,1;h_1,k_1} \cdots p_{O',H,n-1;h_{n-1},k_{n-1}} p_{O',H,n;h_n,k_n} \\ & \sum_{j_0,\ldots,j_n\in D} p^{(0)}_{H;j_0} p_{H;j_0 j_1} \cdots p_{H;j_{n-1} j_n} \cdot |\langle e_{H_0;j_0}, e_{H'_0;k_0}\rangle|^2 \cdots |\langle e_{H_n;j_n}, e_{H'_n;k_n}\rangle|^2 \end{aligned} \tag{5.43}$$

其中 $p_{H;jj'}$ 和 $p_{O,\ H',\ n;\ i,\ j}$ 分别由 (5.28) 和 (5.42) 给出。

备注。请注意，这些联合概率取决于转移概率 $|\langle e_{H_r;\ j_r}, e_{H'_r;\ k_r}\rangle|^2$，但不取决于 $|\langle e_{O_r;\ j_r}, e_{O'_r;\ k_r}\rangle|^2$。

证明。由定理（9）可知，在上述假设下，过程（5.36）是隐量子马尔可夫过程，其联合期望为

$$
\begin{aligned}
&P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n}(j_{H_m}(f_m)j_{O_m}(g_m)\right) \qquad (5.44)\\
=&P_{H_0}\left(\mathcal{E}_{H_0}\left(\mathcal{E}_{O,H;0}(g_0\otimes f_0)\otimes\mathcal{E}_{H;1}\mathcal{E}_{O,H;1}\left((g_1\otimes f_1)\otimes\cdots\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.\otimes\mathcal{E}_{H_{n-1}}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}(g_{n-1}\otimes f_{n-1})\otimes\mathcal{E}_{H_n}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}\left(g_n\otimes f_n\right)\otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

对所有的 $n\in\mathbb{N}$、$m\in\{0,\ldots,n\}$、$g_m\in\mathcal{B}_{O_n}$ 和 $f_m\in\mathcal{B}_{H_n}$ 均成立。首先我们计算表达式

$$
\mathcal{E}_{O,H;n}(g_n\otimes f_n)\overset{(5.38)}{=}\overline{\mathrm{Tr}}_2(K^*_{O',H',n}(g_n\otimes f_n)K_{O',H',n}) \qquad (5.45)
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.40)}{=}\overline{\mathrm{Tr}}_2\Big(\Big(\sum_{i,j\in D}K_{O',H',n;i,j}e_{H'_n;ii}\otimes e_{O'_n;jj}\Big)^*(g_n\otimes f_n)\Big(\sum_{i,j\in D}K_{O',H',n;i,j}e_{H'_n;ii}\otimes e_{O'_n;jj}\Big)\Big)\\
&=\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D}\overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}}K_{O',H',n;i_2,j_2}\,\overline{\mathrm{Tr}}_2\left((e_{H'_n;i_1i_1}\otimes e_{O'_n;j_1j_1})(g_n\otimes f_n)\left(e_{H'_n;i_2i_2}\otimes e_{O'_n;j_2j_2}\right)\right)\\
&=\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D}\overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}}K_{O',H',n;i_2,j_2}\,\overline{\mathrm{Tr}}_2\left(e_{H'_n;i_1i_1}g_ne_{H'_n;i_2i_2}\otimes e_{O'_n;j_1j_1}f_ne_{O'_n;j_2j_2}\right)\\
&=\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D}\overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}}K_{O',H',n;i_2,j_2}\langle e_{H'_n;i_1},g_ne_{H'_n;i_2}\rangle\langle e_{O'_n;j_1},f_ne_{O'_n;j_2}\rangle\overline{\mathrm{Tr}}_2\left(e_{H'_n;i_1i_2}\otimes e_{O'_n;j_1j_2}\right)\\
&=\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in D}\overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}}K_{O',H',n;i_2,j_2}\langle e_{H'_n;i_1},g_ne_{H'_n;i_2}\rangle\langle e_{O'_n;j_1},f_ne_{O'_n;j_2}\rangle e_{H'_n;i_1i_2}\delta_{j_1,j_2}\\
&=\sum_{i_1,j_1,i_2\in D}\overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}}K_{O',H',n;i_2,j_1}\langle e_{H'_n;i_1},g_ne_{H'_n;i_2}\rangle\langle e_{O'_n;j_1},f_ne_{O'_n;j_1}\rangle e_{H'_n;i_1i_2}
\end{aligned}
$$

为了计算期望值 (5.44)，必须在 (5.45) 中将 f_n 替换为一个一般的 $e_{O_n;a,b}$，并将 g_n 替换为一个一般的 $e_{H';a',b'}$ $(a,b,a',b'\in D)$。这

得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{O,H;n}(e_{H'_n;a',b'} \otimes e_{O'_n;a,b}) \qquad (5.46)\\
=&\sum_{i_1,j_1,i_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_1}\\
&\qquad \langle e_{H'_n;i_1}, e_{H';a',b'} e_{H'_n;i_2}\rangle \langle e_{O'_n;j_1}, e_{O_n;a,b} e_{O'_n;j_1}\rangle e_{H'_n;i_1 i_2}\\
=&\sum_{i_1,j_1,i_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_1} \delta_{i_1,a'} \delta_{b',i_2} \delta_{j_1,b} \delta_{a,j_1} e_{H'_n;i_1 i_2}\\
=&\delta_{a,b} \overline{K_{O',H',n;a',a}} K_{O',H',n;b',a} e_{H'_n;a',b'}
\end{aligned}
$$

(5.46) 特别表明，$\mathcal{E}_{O,\ H;n}$ 将对角代数 $\mathcal{D}_{e_{H'_n}} \otimes \mathcal{D}_{e_{O'_n}}$ 映射到 $\mathcal{D}_{e_{H'_n}} \subset \mathcal{D}_H$，并将不属于该代数的元素 $\mathcal{B}_{H'_n} \otimes \mathcal{D}_{e_{O'_n}}$ 映射为零。此外，在 (5.46) 中代入 $a' = b' = h_m$ 和 $a = b = k_m$，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{O,H;n}(e_{H'_n;h_n,h_n} \otimes e_{O'_n;k_n,k_n}) \qquad (5.47)\\
=&\sum_{i_1,j_1,i_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_1}\\
&\qquad \langle e_{H'_n;i_1}, e_{H';h_n,h_n} e_{H'_n;i_2}\rangle \langle e_{O'_n;j_1}, e_{O'_n;k_n,k_n} e_{O'_n;j_1}\rangle e_{H'_n;i_1 i_2}\\
=&\sum_{i_1,j_1,i_2\in D} \overline{K_{O',H',n;i_1,j_1}} K_{O',H',n;i_2,j_1} \delta_{i_1,h_n} \delta_{h_n,i_2} \delta_{k_n,j_1} e_{H'_n;i_1 i_2}\\
=&\overline{K_{O',H',n;h_n,k_n}} K_{O',H',n;h_n,k_n} e_{H'_n;h_n,h_n}\\
=&|K_{O',H',n;h_n,k_n}|^2 e_{H'_n;h_n,h_n} =: p_{O,H,n;h_n,k_n} e_{H'_n;h_n,h_n}
\end{aligned}
$$

$$
\qquad (5.48)
$$

综上所述：

$$
\mathcal{E}_{O,H;n}(e_{H'_n;h_n,h_n} \otimes e_{O'_n;k_n,k_n}) \overset{(5.42)}{=} p_{O,H,n;h_n,k_n} e_{H'_n;h_n,h_n} \qquad (5.49)
$$

由上述讨论可知，期望值 (5.43) 等于

$$
P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H,m}(e_{H';j_m,j_m}) j_{O,m}(e_{O'_m;k_m,k_m})\right) \qquad (5.50)
$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{H_0}\left(\mathcal{E}_{H_0}\left(\mathcal{E}_{O,\ H;0}(e_{H';\ j_0,\ j_0} \otimes e_{O'_0;\ k_0 k_0}) \otimes \mathcal{E}_{H_1}(\mathcal{E}_{O,\ H;1}\left((e_{H';\ j_1,\ j_1} \otimes e_{O'_1;\ k_1,\ k_1}\right) \otimes \cdots\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\otimes \mathcal{E}_{H_{n-1}}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}(e_{H';j_{n-1},j_{n-1}} \otimes e_{O'_{n-1};k_{n-1},k_{n-1}}) \otimes \mathcal{E}_{H_n}\left(\mathcal{E}_{O,H;n}\left(e_{H';j_n,j_n} \otimes e_{O'_n;k_n,k_n}\right) \otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= P_{H_0}\left(\mathcal{E}_{H_0}\left((p_{O,H,0;h_0,k_0}e_{H'_0;h_0,h_0})\otimes\mathcal{E}_{H_1}((p_{O,H,1;h_1,k_1}e_{H'_1;h_1,h_1})\otimes\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\otimes\mathcal{E}_{H_{n-1}}\left((p_{O,H,n-1;h_{n-1},k_{n-1}}e_{H'_{n-1};h_{n-1},h_{n-1}})\otimes\mathcal{E}_{H_n}\left((p_{O,H,n;h_n,k_n}e_{H'_n;h_n,h_n})\right)\otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)$$

$$= p_{O,H,0;h_0,k_0}p_{O,H,1;h_1,k_1}\cdots p_{O,H,n-1;h_{n-1},k_{n-1}}p_{O,H,n;h_n,k_n}$$

$$P_{H_0}\left(\mathcal{E}_{H_0}\left(e_{H'_0;h_0,h_0}\otimes\mathcal{E}_{H_1}(e_{H'_1;h_1,h_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}_{H_{n-1}}\left(e_{H'_{n-1};h_{n-1},h_{n-1}}\otimes\mathcal{E}_{H_n}\left(e_{H'_n;h_n,h_n}\otimes 1_{H_{n+1}}\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= p_{O,H,0;h_0,k_0}p_{O,H,1;h_1,k_1}\cdots p_{O,H,n-1;h_{n-1},k_{n-1}}p_{O,H,n;h_n,k_n}P_H\left(\prod_{m=0}^{n}j_m(e_{H'_0;h_m,h_m})\right)$$

其中，概率 $p_{O,\ H,\ m;h_m,\ k_m}$ 由 (5.49) 给出，而 $P_H\left(\prod_{m=0}^{n}j_m(e_{H'_0;\ h_m,\ h_m})\right)$则是可对角化量子马尔可夫链在 H'–对角代数上的限制的联合概率。

T这些联合概率已在定理 11 中计算，其中
O–过程扮演 H'–过程的角色，并且可表示为

$$P_H\left(\prod_{m=0}^{n}j_m(e_{H'_0;k_m,k_m})\right) \tag{5.51}$$

$$= \sum_{j_0,\ldots,j_n\in D}p^{(0)}_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}\cdot p(H'_0=k_0|H=j_0)\cdots p(H'_n=k_n|H=j_n)$$

其中概率 $p^{(0)}_{H\ ;j}$ 和 $p_{H;jj'}$ 由（5.31）和

$$p(H'_m=k_m|H=j)=|\langle e_{H;j},e_{H'_m;k}\rangle|^2 \tag{5.52}$$

结合（5.50）、（5.51）和（5.52），可得

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n}j_{H,m}(e_{H';j_m,j_m})j_{O,m}(e_{O_m;k_m,k_m})\right) \tag{5.53}$$

$$= p_{O,H,0;h_0,k_0}p_{O,H,1;h_1,k_1}\cdots p_{O,H,n-1;h_{n-1},k_{n-1}}p_{O,H,n;h_n,k_n}$$

$$\sum_{j_0,\ldots,j_n\in D}p^{(0)}_{H;j_0}p_{H;j_0j_1}\cdots p_{H;j_{n-1}j_n}\cdot|\langle e_{H;j_0},e_{H'_m;k_0}\rangle|^2\cdots|\langle e_{H;j_n},e_{H'_m;k_n}\rangle|^2$$

即为（5.43）。 □

5.2.1 一族隐藏但非隐藏马尔可夫的经典过程

回顾一下记号： $\forall h_n, k_n \in D$,

$$P(O_n = k_n | H'_n = h_n) := p_{O,H',n;h_n,k_n} := |K_{O,H',n;h_n,k_n}|^2 \tag{5.54}$$

$$P(H'_n = k_n | H_n = j_n) = |\langle e_{H;j_n}, e_{H'_m;k_n} \rangle|^2 = P(H_n = j_n | H'_n = k_n) \tag{5.55}$$

根据定理 (12)，(H, O)–过程在对角代数 $\mathcal{D}_{H'} \otimes \mathcal{D}_{O'}$ 上的联合概率为

$$P_{H,O} \left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(e_{H';j_m,j_m}) \prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(e_{O'_m;k_m,k_m}) \right) \tag{5.56}$$

$$= p_{O,H,0;h_0,k_0} p_{O,H,1;h_1,k_1} \cdots p_{O,H,n-1;h_{n-1},k_{n-1}} p_{O,H,n;h_n,k_n}$$

$$\sum_{j_0,\ldots,j_n \in D} p^{(0)}_{H;j_0} p_{H;j_0 j_1} \cdots p_{H;j_{n-1} j_n} \cdot |\langle e_{H;j_0}, e_{H'_m;k_0} \rangle|^2 \cdots |\langle e_{H;j_n}, e_{H'_m;k_n} \rangle|^2$$

$$\overset{(5.54),(5.55)}{=} \prod_{m=0}^{n} P(O_m = k_m | H'_m = h_m)$$

$$\sum_{j_0,\ldots,j_n \in D} p^{(0)}_{H;j_0} p_{H;j_0 j_1} \cdots p_{H;j_{n-1} j_n} \cdot \prod_{m=0}^{n} P(H'_m = k_m | H_m = j_m)$$

我们知道（见 (3.9)），条件

$$P_{H,H'} \left(H'_0 = k_0; H'_1 = k_1; \ldots; H'_n = k_n \middle| H_0 = j_0; H_1 = j_1; \ldots; H_n = j_n \right)$$

$$= \prod_{m=0}^{n} P(H'_m = k_m | H_m = j_m) \tag{5.57}$$

将过程（H'_m）描述为底层马尔可夫过程（H_m）的可观测过程，并且在这种情况下，有

$$\sum_{j_0,\ldots,j_n \in D} p^{(0)}_{H;j_0} p_{H;j_0 j_1} \cdots p_{H;j_{n-1} j_n} \cdot \prod_{m=0}^{n} P(H'_m = k_m | H_m = j_m)$$

$$= P_{H'} \left(H'_0 = k_0; H'_1 = k_1; \ldots; H'_n = k_n \right)$$

其中右侧表示 H'–过程的联合概率。因此，（5.56）可写成以下形式

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(e_{H';j_m,j_m})\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(e_{O_m;k_m,k_m})\right) \tag{5.58}$$

$$=\prod_{m=0}^{n} P(O_m=k_m|H'_m=h_m)P_{H'}\left(H'_0=k_0;H'_1=k_1;\ldots;H'_n=k_n\right)$$

类比于（5.57），我们引入条件

$$\prod_{m=0}^{n} P(O_m=k_m|H'_m=h_m) \tag{5.59}$$

$$=P_{O,H'}\left(O_0=k_0;O_1=k_1;\ldots O'_n=k_n\middle|H'_0=h_0;H'_1=h_1;\ldots;H'_n=h_n\right)$$

该条件将过程（O_m）刻画为底层过程（H'_m）的可观测过程；底层过程不是马尔可夫过程，而是隐马尔可夫过程。假设（5.59）成立，结合（5.59），（5.58）右侧变为

$$\prod_{m=0}^{n} P(O_m=k_m|H'_m=h_m)P_{H'}\left(H'_0=k_0;H'_1=k_1;\ldots;H'_n=k_n\right)$$

$$=P_{O,H'}\left(O_0=k_0;O_1=k_1;\ldots O'_n=k_n\middle|H'_0=h_0;H'_1=h_1;\ldots;H'_n=h_n\right)$$

$$P_{H'}\left(H'_0=k_0;H'_1=k_1;\ldots;H'_n=k_n\right)$$

$$=P_{O,H'}\left(O_0=k_0;O_1=k_1;\ldots O'_n=k_n\ ;\ H'_0=h_0;H'_1=h_1;\ldots;H'_n=h_n\right)$$

这恰好是（5.56）左侧的经典概率解释，即

$$P_{H,O}\left(\prod_{m=0}^{n} j_{H_m}(e_{H';j_m,j_m})\prod_{m=0}^{n} j_{O_m}(e_{O_m;k_m,k_m})\right)$$

总之，将发射算子由 (5.37) 和 (5.39) 给出的量子隐马尔可夫 (H,O) 过程限制在 (H',O) 对角代数上，会产生一族新的经典随机过程。在这一族过程中的一个过程中，通常隐马尔可夫过程中由隐过程和可观测过程组成的二元组 (H,O)，被

一个**过程三元组**(H, H', O)所取代，其中：

(i) H' 是马尔可夫过程 H的可观测过程；(ii) O 是隐马尔可夫过程 H'的可观测过程。因此，这一族中的过程可以称为三层**隐马尔可夫过程**。

特别地，这一族中的过程构成了定义 4 中抽象定义的过程的第一类实例，即：其底层过程不是马尔可夫过程的隐过程（相关族中的隐马尔可夫过程）。

5.3 D_e保持的量子马尔可夫链及其关联的经典隐过程

e**–可对角化**量子马尔可夫链族（见定义 15 及第 4.1 节末尾）是齐次后向量子马尔可夫链的一个特殊类别，其转移期望 $\mathcal{E}$ 具有以下性质：

$$\mathcal{E}(D_e \otimes D_e) \subseteq D_e \otimes 1_e \subseteq D_e \otimes D_e \tag{5.60}$$

下面的问题：

给定一个 C^*–代数 $\mathcal{B}$，刻画转移期望 $\mathcal{E}$： $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \otimes 1_{\mathcal{B}}$，使得存在满足以下条件的阿贝尔子代数 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$

$$\mathcal{E}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \cap (\mathcal{B} \otimes 1_{\mathcal{B}}) \tag{5.61}$$

自量子马尔可夫链诞生之初。，便伴随着它的发展

对于一般形式的问题，即使 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 对某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 成立，问题仍未解决。不过，在 [LuYG95-QMC]，中，作者针对一类特殊但重要的转移期望$\mathcal{E}$解决了这个问题： $M_d(\mathbb{C}) \otimes M_d(\mathbb{C})$，即具有以下形式的转移期望

$$\mathcal{E}(x) = \overline{\mathrm{Tr}}_2(\sum_{j \in D_{\mathcal{E}}} K_j^* \; x \; K_j) \tag{5.62}$$

并且存在一个极大阿贝尔子代数 $D_e \subset M_d(\mathbb{C})$，满足条件 (5.60)。

定义18 满足条件 (5.60) 的转移期望 $\mathcal{E}$: $M_d(\mathbb{C}) \otimes M_d(\mathbb{C})$ 称为 D_e**–保持的**。

在下一节中，我们给出 [LuYG95-QMC]主要结果的改进版本；并在第5.5节证明，它们在 e–对角子代数上的限制导出了一类新的经典隐过程，这类过程不包含在定义 4 中，但包含在定义8 中。

5.4 满足 $\mathcal{E}(D_e \otimes D_e) \subseteq D_e$ 的 $M_d(\mathbb{C})$ 上转移期望的刻画

本节**我们只考虑**$\dim(\mathcal{H}) = d < +\infty$ 的情形。矩阵单位系 $(e_{h,k})_{h,k\in D}$ 的指定使我们能够将$\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ 与由所有 $d \times d$ 复矩阵构成的代数 $M_d(\mathbb{C})$ 等同起来。下文中，利用这一等同，我们用 $M_d(\mathbb{C})$ 代替 $\mathcal{B}$。

命题1 设 $\mathcal{E}$ 是 $M_d(\mathbb{C})$ 上具有形式 (5.62) 的转移期望。对于矩阵单位 $M_d(\mathbb{C})$ 的**任意**矩阵单位系 $e \equiv (e_{hh'})_{h,h'\in D}$，总可以将 (5.62) 中的算子 K_r 写成如下形式

$$K_r = \sum_{h,h'\in D} e_{hh'} \otimes K_{r,h,h'} \quad , \quad \forall r \in D_{\mathcal{E}} \tag{5.63}$$

固定分解 (5.63) 后， $\mathcal{E}$ 对 e–矩阵单位的作用如下:

$$\mathcal{E}(e_{i,m} \otimes e_{i'm'}) = \sum_{h,j'\in D} e_{hj'} \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;hi}\ e_{i'm'}\ K_{r;mj'}\right) \tag{5.64}$$

当且仅当对于满足 $j \neq j'$ 的任意 m、m'、j、$j' \in D$，$\mathcal{E}$ 是 D_e**–保持**的

$$\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;mj}\ e_{m'm'}\ K_{r;mj'}\right) = \langle e_{m'}, \Big(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} K_{r,\ m,\ j'} K^*_{r,\ m,\ j}\Big) e_{m'}\rangle = 0 \tag{5.65}$$

在这种情况下

$$\mathcal{E}(e_{mm} \otimes e_{m'm'}) = \sum_{j\in D} e_{j,j} Tr(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} K^*_{r,m,j} e_{m'm'} K_{r,m,j}) \tag{5.66}$$

$\mathcal{E}$ 是保单位的，当且仅当

$$1 = Tr\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \sum_{m\in D} |K_{r,m,j}|^2\right) \quad , \quad \forall j \in D \tag{5.67}$$

也就是说，当且仅当，对于每个 $r \in D$，矩阵 $P \equiv (P_{j,\ m})$

$$P_{j,m} := Tr\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} |K_{r,m,j}|^2\right) \quad , \quad m,j \in D$$

是一个**随机矩阵** ($P_{j,\ m} \geq 0$; $\sum_{m\in D} P_{j,\ m} = 1$)。

$$\iff Tr(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \sum_{m\in D} K^*_{r,m,j} K_{r,m,j}) = 1 \quad , \quad \forall j \in D$$

证明。对于 i、$m \in D$ 和 $b \in M_d(\mathbb{C})$，有

$$\mathcal{E}(e_{i,m} \otimes b) \overset{(4.13)}{=} \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \sum_{h,j,i',j'\in D} e_{jh} e_{i,m} e_{i'j'}\ \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;hj}\ b\ K_{r;i'j'}\right)$$

$$= \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \sum_{h,j,i',j'\in D} \delta_{hi}\delta_{mi'} e_{hj'}\ \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;hj}\ b\ K_{r;i'j'}\right)$$

$$= \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \sum_{j,j'\in D} e_{jj'}\ \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;ij}\ b\ K_{r;mj'}\right) \tag{5.68}$$

(5.68) 表明，对于任意 $e_{i,\ m}$、$e_{i'm'}$，

$$\mathcal{E}(e_{i,m} \otimes e_{i'm'}) = \sum_{j,j'\in D} e_{jj'} \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;ij}\ e_{i'm'}\ K_{r;mj'}\right)$$

由此可得 (5.64)。取 $i = m$ 和 $i' = m'$，得到

$$\mathcal{E}(e_{mm} \otimes e_{m'm'}) = \sum_{j,j'\in D} e_{jj'} \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;mj}\ e_{m'm'}\ K_{r;mj'}\right)$$

($e_{hj'}$) 的线性无关性意味着，$\mathcal{E}$ 将 $D_e \otimes D_e$ 映射到 D_e，即当且仅当它是 D_e–**保持的**，

$$j \neq j' \ \Rightarrow\ \sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} \mathrm{Tr}\left(K^*_{r;mj}\ e_{m'm'}\ K_{r;mj'}\right) = 0 \quad , \quad \forall m,m' \in D$$

这与（5.65）等价。在此情况下，$\mathcal{E}$ 保单位当且仅当

$$1_{\mathcal{B}} = \sum_{m,m'\in D} \mathcal{E}(e_{mm} \otimes e_{m'm'}) = \sum_{m,m'\in D} \sum_{j\in D} e_{j,j} Tr(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} K^*_{r,m,j} e_{m'm'} K_{r,m,j})$$

$$= \sum_{j\in D} e_{j,j} Tr\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}}\sum_{m\in D} |K_{r,m,j}|^2\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ 1 = \sum_{m\in D} Tr\left(\sum_{r\in D_{\mathcal{E}}} |K_{r,m,j}|^2\right) \quad , \quad \forall j \in D$$

即（5.67）。 □

以下定理给出了由保持 D_e 的转移期望生成的量子马尔可夫链在 e 对角代数上的限制结构。

定理13 设 $\mathcal{E}$ 是一个从 $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}$、将$D_e \otimes D_e$映射到 D_e的转移期望。对所有 r、m、$i \in \{1,\cdots,d\}$，记为

$$P_{r;m,i} := \langle e_i, \Big(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}} K_{j,m,r} K^*_{j,m,r}\Big) e_i\rangle \tag{5.69}$$

$$P_{r;m} := \sum_{i\in D} P_{r;m,i} \tag{5.70}$$

那么 $P \equiv (P_{r;m,\ i})$ 是一个 $(d \times d^2)$ 随机矩阵，即:

$$P_{r;m,i} \geq 0 \quad , \quad \forall m, r, i \in \{1,\cdots,d\} \tag{5.71}$$

$$\sum_{m,i} P_{r;m,i} = \ 1 \quad , \quad \forall r \in \{1,\cdots,d\} \tag{5.72}$$

此外，若 $\varphi \equiv (\varphi_0, \mathcal{E})$ 是由数对 $(\varphi_0, \mathcal{E})$ 确定的定义在$\bigotimes_{\mathbb{N}} M_d(\mathbb{C})$ 上的齐次量子马尔可夫链，其中 φ_0（初始态）由下式给出

$$\varphi_0 := Tr(\sum_{i\in D} p_i^{(0)} e_{i,i}\,\cdot\,) := Tr(p^{(0)}\,\cdot\,) \quad ; \quad p_i^{(0)} \geq 0\ ,\ \sum_{i\in D} p_i^{(0)} = 1 \tag{5.73}$$

于是有

$$\mathcal{E}(e_{i_0,i_0}\otimes\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}i_{n-1}}\otimes\mathcal{E}(e_{i_n,i_n}\otimes 1))\cdots)) \tag{5.74}$$
$$= \sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} P_{r_0;i_0,r_1} P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n} P_{r_n;i_n} e_{r_0 r_0}$$

特别是

$$\begin{aligned}&\varphi(e_{i_0,i_0}\otimes e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n,i_n})\\&=\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0}p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}\end{aligned}\tag{5.75}$$

反过来，给定一族满足条件 (5.71) 和 (5.72) 的数 $(P_{r;m,i})_{r,m,i\in\{1,\cdots,d\}}$，以及 $\{1,\cdots,d\}$ 上的概率测度 $(p^{(0)}_i)_{i\in\{1,\cdots,d\}}$，则存在唯一的经典随机过程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其状态空间为$\{1,\cdots,d\}$，联合概率由 (5.75) 右端给出；也就是说，对所有 $i_0,i_1,\ldots,i_n\in\{1,\cdots,d\}$，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}\big(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\big)\\&=\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0}p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}\end{aligned}\tag{5.76}$$

其中$P_{r_n;i_n}$ 由 (5.70) 给出。

证明。由 (5.69) 可知，(5.71) 显然成立。(5.72) 则由以下事实得出：对所有 $r\in\{1,\cdots,d\}$，都有

$$\sum_{m,i}P_{r;m,i}=\sum_{m,i}\Big(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K^*_{j,m,r}|^2\Big)(i,i)\overset{(5.67)}{=}1$$

对每个 $m,i\in\{1,\cdots,d\}$，都有，

$$\mathcal{E}(e_{mm}\otimes e_{ii})\overset{(5.66),(5.69)}{=}\sum_{r\in D}e_{rr}P_{r;m,i}\tag{5.77}$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}i_{n-1}}\otimes\mathcal{E}(e_{i_n,i_n}\otimes 1))\cdots)\\&\overset{(5.77),(5.70)}{=}\sum_{i\in D}\sum_{r_n}\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}i_{n-1}}\otimes e_{r_nr_n})\ldots)P_{r_n;i_n,i}\\&\overset{(5.69)}{=}\sum_{r_n}\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots e_{i_{n-2}i_{n-2}}\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}i_{n-1}}\otimes e_{r_nr_n})\ldots)P_{r_n;i_n}\\&\overset{(5.77)}{=}\sum_{r_n,r_{n-1}}\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\mathcal{E}(e_{i_{n-2}i_{n-2}}\otimes e_{r_{n-1}r_{n-1}})\ldots)P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}\end{aligned}\tag{5.78}$$

假设根据归纳法

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}i_{n-1}}\otimes\mathcal{E}(e_{i_n,i_n}\otimes 1))\cdots) \\ =&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1} e_{r_1r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}\end{aligned} \tag{5.79}$$

Then

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(e_{i_0,i_0}\otimes\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}i_{n-1}}\otimes\mathcal{E}(e_{i_n,i_n}\otimes 1))\cdots)) \\ \overset{(5.79)}{=}&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1}\mathcal{E}(e_{i_0,i_0}\otimes e_{r_1r_1})P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n} \\ \overset{(5.77)}{=}&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} e_{r_0r_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}\end{aligned} \tag{5.80}$$

由归纳法可知，（5.74）成立。因此，按照该陈述中的记号，

$$\begin{aligned}&\varphi(e_{i_0,i_0}\otimes e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n,i_n}) \\ =&\overline{\mathrm{Tr}}_0\left(p^{(0)}\mathcal{E}(e_{i_0,i_0}\otimes\mathcal{E}(e_{i_1,i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}(e_{i_{n-1}}e^*_{i_{n-1}}\otimes\mathcal{E}(e_{i_n,i_n}\otimes 1))\cdots))\right) \\ =&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}\end{aligned} \tag{5.81}$$

即为 (5.75)。为证明逆命题，我们必须证明：将 (5.76) 左端定义为其右端后，Kolmogorov 相容条件得以满足。这可由下式推出

$$\begin{aligned}&\sum_{i_n\in D}\mathrm{Prob}\big(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\big) \\ =&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}\sum_{i_n\in D}P_{r_n;i_n} \\ \overset{(5.70)}{=}&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}\sum_{i_n,i\in D}P_{r_n;i_n,i} \\ \overset{(5.72)}{=}&\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n} \\ \overset{(5.70)}{=}&\sum_{r_{n-1},\ldots,r_1,r_0} p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1}} \\ =&\sum_{i_n\in D}\mathrm{Prob}\big(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_{n-1}\big)\end{aligned} \tag{□}$$

定理 14 将保持 D_e 的量子马尔可夫链限制到 e–对角代数后得到的经典随机过程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其状态空间为 $\{1,\cdots,d\}$。该过程是经典马尔可夫链，当且仅当算子$\{K_r\}$ （见 (4.10)）具有如下形式:

$$K_r=\sum_{h\in D}e_{hh}\otimes K_{r,h,h}\ ,\qquad\qquad \forall\ j\in D_{\mathcal{E}} \tag{5.82}$$

证明。陈述中的经典过程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是经典马尔可夫链，当且仅当

$$\mathcal{E}(a\otimes b)=a\mathcal{E}(1\otimes b)=aP(b)\quad,\quad \forall a,b\in D_e \tag{5.83}$$

其中 P 是 D_e上的马尔可夫算子。这等价于说

$$\begin{aligned}&\sum_{r\in D}e_{r,r}Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,m,r}|^2e_{ii})=\sum_{r\in D}e_{r,r}Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}K^*_{j,m,r}e_{ii}K_{j,m,r})\\ =&\mathcal{E}(e_{mm}\otimes e_{ii})=e_{mm}\mathcal{E}(1\otimes e_{ii})=e_{mm}\sum_{h\in D}\mathcal{E}(e_{hh}\otimes e_{ii})\\ =&e_{mm}\sum_{h\in D}\sum_{r\in D}e_{r,r}Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,h,r}|^2e_{ii})=e_{mm}\sum_{h\in D}Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,h,m}|^2e_{ii})\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{r\in D}e_{r,r}Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,m,r}|^2e_{ii})=e_{mm}\sum_{h\in D}Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,h,m}|^2e_{ii}) \tag{5.84}$$

(5.84)意味着

$$Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,m,r}|^2e_{ii})=0\ ,\quad \forall i\in D\,,\ m\neq r$$

等价地

$$Tr(\sum_{j\in D_{\mathcal{E}}}|K_{j,m,r}|^2)=0\ ,\quad \forall m\neq r$$

这个等式以及算子$|K_{j,m,r}|^2$ 的正性保证了，只要 $m\neq r$，就有$|K_{j,m,r}|^2=0$ 。反过来，如果满足这个条件，则显然有 (5.82)。□

推论 2 在定理 14 的假设下，进一步假设在记号 (5.82) 中，$|D_{\mathcal{E}}| = 1$（即只有一个条件密度振幅 K）。那么 φ 可按定义 15 的意义对角化，即 K具有形式 (4.32)。

P证明。根据定理 14 和对角化条件，K 具有如下形式

$$K = \sum_{hh \in D} e_{hh} \otimes K_h$$

并且满足

$$0 = [K \otimes 1, 1 \otimes K] = [\sum_{h} e_{hh} \otimes K_h \otimes 1, 1 \otimes \sum_{h'} e_{h'h'} \otimes K_{h'}]$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{h,h'} e_{hh} \otimes K_h e_{h'h'} \otimes K_{h'} = \sum_{h,h'} e_{hh} \otimes e_{h'h'} K_h \otimes K_{h'}$$

两边乘以一个固定的 $e_{hh} \otimes 1 \otimes 1$，可得

$$e_{hh} \otimes \sum_{h'} K_h e_{h'h'} \otimes K_{h'} = e_{hh} \otimes \sum_{h'} e_{h'h'} K_h \otimes K_{h'} \quad , \quad \forall h \in D$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{h'} K_h e_{h'h'} \otimes K_{h'} = \sum_{h'} e_{h'h'} K_h \otimes K_{h'} \quad , \quad \forall h \in D$$

两边左乘一个固定的 $e_{kk} \otimes 1$，可得

$$\sum_{h'} e_{kk} K_h e_{h'h'} \otimes K_{h'} = e_{kk} K_h \otimes K_{k,k} \quad , \quad \forall h, k \in D$$

两边右乘一个固定的 $e_{k'k'} \otimes 1$，可得

$$e_{kk} K_h e_{k'k'} \otimes K_{k',k'} = e_{kk} K_h e_{k'k'} \otimes K_{k,k} \quad , \quad \forall h, k, k' \in D$$

$$\Longleftrightarrow e_{kk} K_h e_{k'k'} \otimes (K_{k',k'} - K_{k,k}) = 0 \quad , \quad \forall h, k, k' \in D$$

由于 $K_{m,\ n}$ 总可以通过改变指标集 $D_{\mathcal{E}}$，设为线性无关，因此这等价于说

$$e_{kk} K_h e_{k'k'} = 0 \quad , \quad \forall h, k, k' \in D \ , \ k \neq k'$$

即，

$$K_h = \sum_{j \in D} K_{hj} e_{jj} \quad , \quad \forall h \in D \ , \ \text{for some } K_{hj} \in \mathbb{C}$$

我们知道，归一化条件意味着 $(|K_{hj}|^2)_{h,\ j \in D}$ 是一个随机矩阵。因此，K 具有形式 (4.32)，并且 φ 可对角化。

□

5.5 保持 D_e的量子马尔可夫链的对角限制

定理13表明，如果某个转移期望 $\mathcal{E}$ 对某个标准正交基 $e \equiv (e_j)_{j\in D}$ 的 $H \equiv \mathbb{C}^d$是 D_e–保持的，那么对于 M 上的任意 e–对角态 φ_0 （见 (5.73)），由有序对 $(\varphi_0, \mathcal{E})$定义的$\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} M$上的量子马尔可夫链 φ限制到对角代数 $\mathcal{D}_e = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} D_e$ 产生一个经典随机过程 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其状态空间为 $\{1, \cdots, d\}$，联合概率由 φ_0 和一族实数 $(P_{r;m,\ i})_{r,\ m,\ i\in\{1,\cdots,d\}}$ 通过恒等式 (5.75) 唯一确定，并满足条件 (5.71) 和 (5.72)。反过来，任何这样的三元组都确定一个唯一的经典过程。以下定理（见 [LuYG95-QMC]中的定理2.4）将以此方式得到的经典过程刻画为一类特殊马尔可夫过程的限制。

定理 15 设 $P \equiv (P_{r;m,\ i})$是定理13中的一个 $(d\times d^2)$ 随机矩阵，且 $X \equiv (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个状态空间为$\{1, \cdots, d\}$ 、联合概率由 (5.75) 右侧给出的经典随机过程。在 $\{1, \cdots, d\}^2$ 上定义概率测度 $P^{(0)} \equiv p^{(0)}(\cdot, \cdot)$如下：

$$p^{(0)}(j, i) := \sum_r p_0(r) P_{r;i,j} \tag{5.85}$$

以及矩阵 $P_{D^2} \equiv \left(p_{(j,i),\ (j',i')}\right)$ 由

$$p_{(j,i),(j',i')} := P_{j;i',j'}\ , \quad \forall\ (j, i), (j', i') \in \{1, \cdots, d\}^2 \tag{5.86}$$

并令 $(Z, Y) \equiv \{(Z_n, Y_n)\}_{n=0}^{\infty}$为由配对 $(P^{(0)}, P_{D^2})$ 确定的状态空间为$\{1, \cdots, d\}^2$ 的经典马尔可夫链。

那么，将 P_X （分别将 $P_{Z,\ Y}$）记为 X （分别为 (Z, Y)）的概率分布，可得

$$\begin{aligned} &P_X\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\right) \\ =&P_{Z,Y}\left(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \cdots, Y_n = i_n\right) \end{aligned} \tag{5.87}$$

换言之，过程 X 与子过程Y随机等价；后者是将过程 (Z, Y) 限制到由 Y_n 生成的 σ 代数上所得。

Co反之，如果 $(Z, Y) \equiv \{(Z_n, Y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个具有状态

空间 $\{1,\cdots,d\}^2$ 由有序对 $(P^{(0)},P)$ 确定，并满足：(i)
$P\equiv\left(p_{(j,i),\ (j',i')}\right)$ 其中

$$p_{(j,i),(j',i')}\text{ independent of }\ i \tag{5.88}$$

(ii) $P^{(0)}\equiv p^{(0)}(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\{1,\cdots,d\}^2$ 上的概率测度，定义如下

$$p^{(0)}(j,i):=\sum_{r\in D}p_0(r)p_{(r,i),(j,i)} \tag{5.89}$$

其中，$(p_0(r))_{r\in D}$ 是 $\{1,\cdots,d\}$ 上的任意概率测度，
那么，存在一个定义在 $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}M$ 上的量子马尔可夫链 φ 和一个对角代数 $\mathcal{D}_e:=\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}D_e\subseteq\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}M$，使得 φ 在 $\mathcal{D}_e$ 上的限制是一个经典随机过程，它与 (Z,Y) 的子过程 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 随机等价。此外，D_e 的选取是任意的。

证明。设经典随机过程 X 如定理的第一条所述。由 (5.72)，由 (5.86) 定义的矩阵 $\left(p_{(j,i),(j',i')}\right)$ 是 $\{1,\cdots,d\}^2$ 上的转移矩阵。于是，若 $P^{(0)}$ 由 (5.85) 定义，则数对 $(P_{(0)}\,P_{D^2})$ 唯一地确定一个在随机等价意义下唯一的经典马尔可夫链 $(Z,Y)\equiv\{(Z_n,Y_n)\}_{n=0}^{\infty}$，其状态空间为 $\{1,\cdots,d\}^2$。根据构造，子过程 Y 的联合分布 P_Y 为

$$P_Y(Y_0=i_0,\cdots,Y_1=i_1)=\sum_{r_n,r_{n-1},\ldots,r_1,r_0}p^{(0)}_{i_0}P_{r_0;i_0,r_1}P_{r_1;i_1,r_2}\cdots P_{r_{n-1};i_{n-1},r_n}P_{r_n;i_n}$$

其中，$P_{r;m}$ 由 (5.70) 给出。将其与 (5.76) 右侧比较可知，(5.87) 成立。

反过来，给定一个经典马尔可夫链 $\{(Z_n,Y_n)\}_{n=0}^{\infty}$，其状态空间为 $\{1,\cdots,d\}^2$，并由一对满足上述条件 (i) 和 (ii) 的 $(P_{(0)}\,P)$ 确定，则定义

$$P_{j;i',j'}:=p_{(j,i),(j',i')}\quad,\quad\forall\ (j,i),(j',i')\in\{1,\cdots,d\}^2$$

$(P_{j;i,k})$满足 (5.71)、(5.72)。因此，根据定理13，对于 $\{1,\cdots,d\}$ 上的任意概率测度 p_0 以及任意对角代数 $D_e\subset M$，有序对 $(p_0,(P_{j;i,k})_{j,i,k\in D}$ 定义了一个量子马尔可夫态 φ，其在 $\mathcal{D}_e:=\bigotimes_{\mathbb{N}}D_e$ 上的联合概率由 (5.76) 给出。由于按照构造，这些联合概率与子过程 (Y_n) 的联合概率一致，故结论得证。□

5.6 由保持 D_e 的量子马尔可夫链的对角限制所定义的隐藏过程

本节证明，对于 D_e–保持的（非对角）量子马尔可夫链的对角限制，也可以得到符合定义 (7) 意义下的时间连续隐马尔可夫过程。

设 (Z,Y) 是定理 15 第二个陈述中的马尔可夫过程。若 I 是集合 $\{Z_k,Y_k,\dots,Z_0,Y_0\}$ 的任意子集，我们记

$$\mathcal{F}_I := \sigma\text{–algebra generated by the random variables in } I$$

因此，例如，对于 $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^k} := \sigma\text{–algebra generated by } \{(Z_m,Y_m)\}_{m\in\{0,\dots,k\}}$$

$$\mathcal{F}_{Z_k} := \sigma\text{–algebra generated by } Z_k$$

我们将 (Z,Y) 过程在给定 σ 代数 $\mathcal{F}_I$ 条件下的条件期望记为 $E_{\mathcal{F}_I}$。已知，若 $I\subseteq J$，则

$$E_{\mathcal{F}_I}E_{\mathcal{F}_J}=E_{\mathcal{F}_J}E_{\mathcal{F}_I}=E_{\mathcal{F}_I} \tag{5.90}$$

过程 (Z,Y) 的马尔可夫性意味着

$$E_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^n}}(G_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=n+1}^\infty}})=E_{\mathcal{F}_{(Z_n,Y_n)}}(G_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=n+1}^\infty}}) \tag{5.91}$$

对于任意 $\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=n+1}^\infty}$ 可测函数 $G_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=n+1}^\infty}}$。根据假设，过程 (Z,Y) 满足条件 (5.88)，这等价于

$$P_{Y,Z}\big((Z_n,Y_n)\big|\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}\big)=P_{Y,Z}\big((Z_n,Y_n)\big|\ Z_{n-1}\big)$$

即,

$$E_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)=E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big) \tag{5.92}$$

对于任意 $\mathcal{F}_{(Z_n,Y_n)}$–可测函数 f_n。由（5.92）可推知，由于$\mathcal{F}_{Z_{n-1},\,(Z_h,\,Y_h)_{h=0}^{n-2}}\subseteq\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}$，因此有

$$\begin{aligned}
&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-2}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big) \qquad (5.93)\\
=&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-2}}}E_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)\\
\overset{(5.92)}{=}&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-2}}}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)=E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)
\end{aligned}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&E\big(f_n(Z_n,Y_n)\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)\\
=\,&E\big(E_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)f_{n-1}(Z_{n-1},Y_{n-1})\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)\\
\overset{(5.92)}{=}\,&E\big(E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)f_{n-1}(Z_{n-1},Y_{n-1})\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)\\
=\,&E\big(E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)\cdot\\
\cdot\,&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-2}}}\big(f_{n-1}(Z_{n-1},Y_{n-1})\big)f_{n-2}(Z_{n-2},Y_{n-2})\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)\big)\\
\overset{(5.92)}{=}\,&E\big(E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(\big(f_{n-1}(Z_{n-1},Y_{n-1})\big)f_{n-2}(Z_{n-2},Y_{n-2})\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)\big)
\end{aligned}
$$

假设根据归纳法

$$
\begin{aligned}
&E\big(f_n(Z_n,Y_n)\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big) \qquad (5.94)\\
=&E\big(\prod_{h=n-(k-1)}^{n}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)\prod_{m=0}^{n-k}f_m(Z_m,Y_m)\big)
\end{aligned}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
&E\big(f_n(Z_n,Y_n)\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)\\
=\,&E\big(\prod_{h=n-(k-1)}^{n}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\prod_{m=0}^{n-k-1}f_m(Z_m,Y_m)\big)\\
=\,&E\big(\prod_{h=n-(k-1)}^{n}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-k-1}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\big)\cdot\\
&\qquad\cdot\prod_{m=0}^{n-k-1}f_m(Z_m,Y_m)\big) \qquad (5.95)
\end{aligned}
$$

由于 $\mathcal{F}_{Z_{n-1},\ (Z_h,\ Y_h)_{h=0}^{n-k-1}}\subseteq\mathcal{F}_{Z_{n-1},\ (Z_h,\ Y_h)_{h=0}^{n-2}}$，因此

$$
\begin{aligned}
&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-k-1}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\big) \qquad (5.96)\\
=&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-k-1}}}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-2}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\big)\\
\overset{(5.93)}{=}\,&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-k-1}}}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\\
=&E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})
\end{aligned}
$$

总之

$$E\big(f_n(Z_n,Y_n)\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big)$$

$$\overset{(5.95)}{=} E\Big(\prod_{h=n-(k-1)}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1},(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-k-1}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\big)$$

$$\prod_{m=0}^{n-k-1} f_m(Z_m,Y_m)\Big)$$

$$\overset{(5.96)}{=} E\Big(\prod_{h=n-(k-1)}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_{n-k}(Z_{n-k},Y_{n-k})\big)\prod_{m=0}^{n-k-1} f_m(Z_m,Y_m)\Big)$$

$$= E\Big(\prod_{h=n-k}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)\prod_{m=0}^{n-k-1} f_m(Z_m,Y_m)\Big)$$

因此，(5.94) 对 $k+1$ 成立，故由归纳法可得 (5.94) 对所有 $k\le n$ 都成立。

将 $k=n-1$ 代入 (5.94)，可得

$$\begin{aligned}
&E\big(f_n(Z_n,Y_n)\cdots f_0(Z_0,Y_0)\big) \qquad (5.97)\\
=&E\Big(\prod_{h=1}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)f_0(Z_0,Y_0)\Big)\\
=&E\Big(\prod_{h=1}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_0(Z_0,Y_0)\big)\Big)\\
=&E\Big(\prod_{h=0}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)\Big)
\end{aligned}$$

取

$$f_h(Z_h,Y_h) := F_h(Z_h)G(Y_h)$$

可得

$$E_{Z,Y}\Big(\prod_{h=0}^{n} F_h(Z_h)G(Y_h)\Big) = E_Z\Big(\prod_{h=0}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(F_h(Z_h)G(Y_h)\big)\Big) \qquad (5.98)$$

现在注意到，由于 $\mathcal{F}_{(Z_h)_{h=0}^{n-1}}\subseteq\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}$，有

$$\begin{aligned}
&E_{\mathcal{F}_{(Z_h)_{h=0}^{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big) = E_{\mathcal{F}_{(Z_h)_{h=0}^{n-1}}}E_{\mathcal{F}_{(Z_h,Y_h)_{h=0}^{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)\\
=&E_{\mathcal{F}_{(Z_h)_{h=0}^{n-1}}}E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big) = E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n,Y_n)\big)
\end{aligned}$$

特别地，如果 f_n 不依赖于第二个变量，则有

$$E_{\mathcal{F}_{(Z_h)_{h=0}^{n-1}}}\big(f_n(Z_n)\big) = E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_n(Z_n)\big) \tag{5.99}$$

即子过程 (Z_n) 是马尔可夫过程。因此，记 $(P_{Z;n,\ n+1})$ 为其转移算子序列，则有

$$E_{Z,Y}\big(\prod_{h=0}^{n} f_h(Z_h,Y_h)\big) \overset{(5.98)}{=} E_Z\big(\prod_{h=0}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\big(f_h(Z_h,Y_h)\big)\big) \tag{5.100}$$

$$= E_{Z_0}\Big(P_{Z;0,1}P_{Z;1,2}\cdots P_{Z;n-2,n-1}\Big(\prod_{h=0}^{n} E_{\mathcal{F}_{Z_{n-1}}}\left(f_h(Z_h,Y_h)\right)\Big)\Big)$$

由此可见，除记号外，(5.100) 的右侧**恰好具有**定义 (7) 中时间连续隐马尔可夫过程的特征形式。

N注意，若 (Z,Y) 是隐过程为 Z 的隐马尔可夫过程，则应有

$$P_{Z,Y}\Big(\prod_{m=0}^{n} f_m(Y_m)g_m(Z_m)\Big) \tag{5.101}$$

$$= p_{Z_0}\left(B_{Y,Z,0}(f_0)g_0 P_{Z_0}\left(B_{Y,Z,1}(f_1)g_1\right)\left(\cdots P_{Z_{n-1}}\left(B_{Y,Z,n}(f_n)g_n\right)\right)\right)$$

比较 (5.97) 和 (5.101) 可知，(Z,Y) 是定义 8 意义下的时间连续隐马尔可夫过程（隐过程为 Z），**但不是**定义 4 意义下的隐马尔可夫过程。

参考文献

[Ac73-past-dep-PE] L. Accardi：关于一类与依赖过去的概率演化相关的测度，Avtomatika i Telemechanika（俄文），第 50–61 页（1974），Laboratorio di cibernetica 内部报告（1973）

[Ac74d-Camerino] L. Accardi：《非交换的马尔可夫链》，《国际数学物理学校》论文集，卡梅里诺大学，1974年9月30日、10月12日，第268-295页

[Ac74-FAA]L. Accardi：《非交换马尔可夫性质》，《函数分析及其应用》（俄文版），9（1），第1-8页（1975），1974年1月31日提交；译载于《函数分析及其应用》9（1），第1-8页（1975）

[Ac81-Topics-QP] L. Accardi：量子概率专题，《物理报告》77（3），第169-192页（1981）。《物理快报》评论节（编者：C. DeWitt- Morette、K.D. Elworthy）

[Ac82c-Some trends and problems] L. Accardi：量子概率中的一些趋势与问题，《量子概率及其在不可逆过程的量子理论中的应用》，L. Accardi、A. Frigerio和V. Gorini（编），第二届会议论文集：量子概率及其在不可逆过程的量子理论中的应用，第6-11页，第9卷（1982），蒙德拉戈内别墅（罗马），Springer讲义丛书第1055卷，第1-19页（1984）

[Ac91-Q-Kalman-filters] Accardi L.：量子卡尔曼滤波器，载于《数学系统理论：R.E. Kalman的影响》，A.C. Antoulas（编），施普林格（1991），第135-143页。应邀为R.E. Kalman 60岁诞辰纪念文集撰写的文章

[AcFi01b] L.Accardi, F. Fidaleo：量子马尔可夫场的结构，布尔格会议论文集，2001年3月15日至20日，W. Freudenberg（编），世界科学出版社，QP–PQ丛书第15卷，第1–20页（2003）

[AcFi03-EMC]L. Accardi, F. Fidaleo：纠缠马尔可夫链《纯粹与应用数学年鉴》，184（3），第327–346页（2005）。DOI：10.1007/s10231-004-0118-4。Volterra预印本第556号（2003）
http://www.springerlink.com/index/10.1007/s10231-004-0118-4

[AcFiMu07] L. Accardi, F. Fidaleo, F. Mukhamedov：*CAR*代数上的马尔可夫态与马尔可夫链，《无限维分析、量子概率及相关专题》（IDAQP）10，第165–183页（2007）

[AcSouElG20] L. Accardi、A. Souissi、El. Soueidy：量子马尔可夫链：一种统一方法，《无限维分析、量子概率及相关主题》(IDAQP) 23 (2) (2020)

[AcWa87] L. Accardi、G.S. Watson：量子电磁场的马尔可夫态，Phys. Rev. A 35，第1275–1283页 (1987)[Algh2016] R. Alghamdi：隐马尔可夫模型（*HMM*）及其在安全领域的应用。Int. J. Adv. Comput. Sci. Appl. 7 (2)，第39–47页 (2016)[BaumPetr66] L.E. Baum、T. Petrie：有限状态马尔可夫链的概率函数的统计推断。《数理统计年刊》37，第1554-1563页 (1966)[CGGK2017] M. Cholewa、P. Gawron、P. Glomb、D. Kurzyk：基于转移操作矩阵的量子隐马尔可夫模型。《量子信息处理》16 (4)，第1–19页 (2017)[Eddy98] S.R. Eddy：轮廓隐马尔可夫模型。《生物信息学》14 (9)，第755-763页 (1998)[JasKell12] J. Ernst、M. Kellis：*ChromHMM*：自动化染色质状态发现与表征。《自然方法》28，9，第215-216页 (2012)[FaNaWe92] M. Fannes、B. Nachtergaele B.、R.F. Werner：量子自旋链上的有限相关态，Commun. Math. Phys.，第144卷，第443–490页 (1992)[FelsChur92] J. Felsenstein、G.A. Churchill：利用隐马尔可夫模型研究进化速率的位点间变异。《分子生物学与进化》13 (1)，第93-104页 (1996)[GhahrJord97] Z. Ghahramani、M.I. Jordan：因子隐马尔可夫模型。《机器学习》29，第245-273页 (1997)[HuaYasMerv90] X.D. Huang、A. Yasuo、M. Jack：**用于语音识别的隐马尔可夫模型**，哥伦比亚大学出版社 (1990) ISBN:978-0-7486-0162-2[JelBahMer75] F. Jelinek、L. Bahl、R. Mercer：用于连续语音识别的语言统计解码器设计。《IEEE信息论汇刊》21 (3)，第250-256页 (1975)[HasNat05] M.R. Hassan、B. Nath：使用隐马尔可夫模型进行股票市场预测：一种新方法，第五届智能系统设计与应用国际会议 (ISDA’05)，第192-196页 (2005)

[LiSte03] Na Li, M. Stephens：利用单核苷酸多态性数据建模连锁不平衡并识别重组热点。《遗传学》，165 (4)，第2213-33页（2003），doi: 10.1093/genetics/165.4.2213[LuYG95-QMC] Y.G. Lu：量子马尔可夫链与经典随机序列。《名古屋数学杂志》，139，第173–183页（1995）| MGK2021] B. Mor, S. Garhwal, A. Kumar：隐马尔可夫模型及其应用的系统综述。《工程计算方法档案》，28 (3)，第1429-1448页（2021）| MonrWiesn11] A. Monras, A. Beige, and K. Wiesner：隐量子马尔可夫模型与多体态的非自适应读出，《应用数学与计算机科学》3，93（2011）[Nguyet18]N. Nguyen：股票交易中的隐马尔可夫模型。《国际金融研究杂志》，6 (2)，36（2018）https://doi.org/10.3390/ijfs6020036[OP] M. Ohya, D. Petz：**量子熵及其应用**，施普林格，柏林-海德堡-纽约（1993）[RosPent98] N.M. Oliver, B. Rosario, A. Pentland：用于识别人类互动的图模型。《神经信息处理系统进展》，11，第24-30页（1998）| PardBirm05] B. Pardo, W. Birmingham。音乐表演在线跟踪的建模形式。AAAI'05：第20届全国人工智能会议论文集，第2卷，第1018-1023页（2005）[Rab88] L.R. Rabiner：隐马尔可夫模型的数学基础。载于：《语音理解与对话系统最新进展》，施普林格，柏林、海德堡，第183-205页（1988）[Rab89] L.R. Rabiner，隐马尔可夫模型及其在语音识别中的若干应用教程，《IEEE 会议录》77 (2)，第257–286页（1989）[RabJua86] L.R. Rabiner, B.H. Juang：隐马尔可夫模型简介。《IEEE 声学、语音与信号处理杂志》，3 (1)，第4-16页（1986）

[RabLeSo83] L.R. Rabiner, S.E. Levinsion, M.M. Sondhi，矢量量化和隐马尔可夫模型在说话人无关孤立词识别中的应用，Bell System 技术期刊，卷62，第4期，第1075–1105页（1983）[RaoSaz93-proj] M.M. Rao, V.V. Sazonov：概率空间及其应用的射影极限定理，《理论概率及其应用》38 (2)，第307–315页（1993）。译自俄文，https://doi.org/10.1137/1138027[RebSa17] Sara Rebagliati, E manuela Sasso 使用隐马尔可夫模型识别金融时间序列中的模式 《塔尔图大学数学学报》，(21) 1 (2017) 1–17 http://acutm.math.ut.ee[SatGuru93] L. Satish, B.I. Gururaj，隐马尔可夫模型在局部放电模式分类中的应用，《IEEE 电气绝缘学报》，28 (2)，第172-182页（1993）[SSGGBB18] S. Srinivasan, G. Gordon, B. Boots：学习隐量子马尔可夫模型。《第21届人工智能与统计国际会议》（AISTATS）2018，PMLR：卷84，第1979-1987页[WiesnCrutc08]K. Wiesner, C.P. Crutchfield：有限随机过程与量子过程中的计算，Physica D，卷237，第9期，第1173-1195页（2008），https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.01.021[YamOhyIsh92] J. Yamato, J. Ohya, K. Ishii：使用隐马尔可夫模型识别时序图像中的人类动作。《1992年IEEE计算机学会计算机视觉与模式识别会议》（CVPR）论文集，第379-385页，doi:10.1109/CVPR.1992