arXiv:2302.07063v1 [cs.CC] 14 Feb 2023

从决策规则系统导出的决策树深度界

Kerven Durdymyradov 和 Mikhail Moshkov 计算机、电气与数学科学和工程部及计算生物科学研究中心 阿卜杜拉国王科技大学（KAUST） 沙特阿拉伯图瓦勒 23955-6900{kerven.durdymyradov,mikhail.moshkov}@kaust.edu.sa

摘要

决策规则系统和决策树被广泛用作知识表示、分类器和算法。它们是最具可解释性的知识分类与表示模型之一。研究这两种模型之间的关系是计算机科学的一项重要任务。将决策树转换为决策规则系统很容易，而逆向转换则更为困难。本文研究了根据决策规则系统的各种参数，从决策规则系统导出的决策树最小深度的不可改进的上界和下界。

关键词：决策规则系统，决策树。

1 引言

决策树 [3, 4, 8, 29, 32, 38] 和决策规则系统 [6, 7, 11, 12, 31, 32, 33, 34] 广泛用于知识表示、作为预测新对象决策的分类器，以及作为解决故障诊断、组合优化等各种问题的算法。决策树和规则是最易于解释的分类与知识表示模型之一 [10, 13, 21, 39]。

研究决策树与决策规则系统之间的关系是计算机科学的一项重要任务。从决策树中提取决策规则的常规方法早已为人所知 [35, 36, 37]：首先，将决策树中从根节点到终端节点的每条路径对应一条决策规则，然后简化所得规则。本文研究将决策规则系统转换为决策树这一更复杂的问题。与此问题相关的研究至少有三个方向：

- 在多篇论文中 [1, 2, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 40], ，有人提出分两个阶段构建决策树或其泛化形式（称为决策结构）：

首先，根据输入数据构建决策规则，然后根据构建出的规则构建决策树或决策结构。有多种方法论考量和实验结果支持这种方法。

- 确定性与非确定性决策树深度之间的关系，已针对决策表以及有限和无限信息系统上的问题进行了研究；这些信息系统各自由一个全域及其上定义的一组属性构成 [23, 25, 27, 28, 30]。非确定性决策树可以解释为给定表（问题）的一组真决策规则，它覆盖所有行（输入）。这一领域最著名的结果与计算布尔函数 [5, 14, 22, 41]的决策树有关。在这种情况下，布尔函数 f 的非确定性决策树的最小深度等于 f [9]的证书复杂度。

- 本文的一位作者在 [24, 26] 开始发展所谓的句法方法，以研究所考虑的问题。该方法假设我们不知道输入数据，而只有一个必须转换为决策树的决策规则系统。本文沿着这一方向继续开展研究。 [24, 26]中获得的结果在定理1和定理2之后的评注中作了介绍。

设有一个形如 $S(a_{i_1} = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{i_m} = \delta_m) \rightarrow \sigma$ 的决策规则系统，其中 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ 是属性， $\delta_1, \ldots, \delta_m$ 是这些属性的值，而 σ 是一项决策。我们描述与该系统相关的三个问题:

- 给定一个输入（由 S 中包含的所有属性的值组成的元组），需要找到至少一条对该输入可实现（即左侧为真）的规则，或者证明不存在这样的规则。

- 给定一个输入，需要找出所有对该输入可实现的规则，或者证明不存在这样的规则。

- 给定一个输入，需要找出对该输入可实现的规则的所有右端项，或者证明不存在这样的规则。

对于每个问题，我们考虑两种变体。第一种假设输入中的每个属性只能取该属性在系统 S 中出现过的值。第二种情况下，我们假设输入中的任意属性都可以取任意值。

我们的目标是最小化给定输入中的属性值查询次数。为此，本文将决策树作为解决所研究的六个问题的算法进行研究。

本文针对这些问题中的每一个，研究决策树最小深度的不可改进的上界和下界；该深度取决于决策规则系统的三个参数——系统所属规则中不同属性的总数、决策规则的最大长度，以及属性值的最大数量。

我们证明，对于每个问题，都存在相应的决策规则系统，使得解决该问题的决策树的最小深度远小于规则系统中的属性总数。对于这类决策规则系统，使用决策树是明智的。

本文分为六节。第2节讨论主要定义与符号。第3至5节致力于研究决策树深度的不可改进下界和上界，这些界取决于决策规则系统的参数：第3节包含辅助命题，第4节和第5节分别给出上界和下界的证明。第6节为简短的结论。

2 主要定义与符号

本节讨论与决策规则系统、决策树以及刻画由决策规则系统导出的决策树深度的函数相关的主要定义与符号。

2.1 决策规则系统

令 $\omega = \{0、1、2, \ldots\}$ 和 $A = \{a_i : i \in \omega\}$。集合 A 的元素称为 属性 *es.*

定义 1。决策规则是如下形式的表达式

$$(a_{i_1} = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{i_m} = \delta_m) \to \sigma,$$

其中，$m \in \omega$、$a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ 是来自 A 的两两不同的属性，并且 $\delta_1, \ldots, \delta_m$，$\sigma \in \omega$。

我们用 r 表示该决策规则。表达式 $(a_{i_1} = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{i_m} = \delta_m)$ 称为该规则 r 的左侧，数 σ 称为规则 r 的右侧。数 m 称为决策规则 r 的长度。记 $A(r) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$，以及 $K(r) = \{a_{i_1} = \delta_1, \ldots, a_{i_m} = \delta_m\}$。如果 $m = 0$，则 $A(r) = K(r) = \emptyset$。

定义2。如果 $K(r_1) = K(r_2)$，且规则 r_1 和 r_2 的右端项相等，则两个决策规则 r_1 和 r_2 相等。

定义3。决策规则系统 S 是一个由决策规则构成的有限非空集合。

记 $A(S) = \bigcup_{r \in S} A(r)$，$n(S) = |A(S)|$，$D(S)$ 为来自 S 的决策规则的右端项集合，并记 $d(S)$ 为来自 S 的决策规则的最大长度。令 $n(S) > 0$。对于 $a_i \in A(S)$，令 $V_S(a_i) = \{\delta : a_i = \delta \in \bigcup_{r \in S} K(r)\}$，且 $EV_S(a_i) = V_S(a_i) \cup \{*\}$，其中符号 $*$ 解释为一个不属于集合 $V_S(a_i)$ 的数。记 $k(S) = \max\{|V_S(a_i)| : a_i \in A(S)\}$。如果 $n(S) = 0$，那么 $k(S) = 0$。我们用 Σ 表示决策规则系统的集合。

例 1。考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \wedge (a_3 = 0) \to 3, (a_1 = 1) \wedge (a_4 = 0) \to 4, (a_1 = 2) \to 5\}$。那么 $A(r_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$，$K(r_1) = \{a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0\}$，其中 r_1 表示来自 S 的第一条规则。$A(S) = \bigcup_{r \in S} A(r) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$n(S) = |A(S)| = 4$，$D(S) = \{3, 4, 5\}$，$d(S) = 3$，$V_S(a_1) = \{\delta : a_1 = \delta \in \bigcup_{r \in S} K(r)\} = \{0, 1, 2\}$，$EV_S(a_1) = V_S(a_1) \cup \{*\} = \{0, 1, 2, *\}$，且 $k(S) = \max\{|V_S(a_i)| : a_i \in A(S)\} = |V_S(a_1)| = 3$。

设 $S \in \Sigma$，$n(S) > 0$，且 $A(S) = \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\}$，其中 $j_1 < \cdots < j_n$。记 $V(S) = V_S(a_{j_1}) \times \cdots \times V_S(a_{j_n})$，以及 $EV(S) = EV_S(a_{j_1}) \times \cdots \times EV_S(a_{j_n})$。对于 $\delta = (\delta_1、\ldots\ldots、\delta_n) \in EV(S)$，记 $K(S, \delta) = \{a_{j_1} = \delta_1, \ldots, a_{j_n} = \delta_n\}$。

定义 4。我们称来自 S 的决策规则 r 对元组 $\delta \in EV(S)$ 是可实现的，如果 $K(r) \subseteq K(S, \delta)$。

I显然，任何具有空左部的规则对于该元组都是可实现的 $\bar{\delta}$.

例 2. 考虑决策规则系统 $S = \{r_1 : (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 0, r_2 : (a_1 = 0) \wedge (a_3 = 1) \rightarrow 1\}$ 以及元组 $\delta = (0,0,0) \in EV(S)$。那么，来自 S 的决策规则 r_1 对元组 δ 是可实现的，但 r_2 不可实现。

设 $V \in \{V(S)\ EV(S)\}$。现在我们定义三个与规则系统 S 相关的问题。

定义 5. 问题 所有规则 针对这一对 (S, V)：给定元组 $\delta \in V$，要求找出 S 中对于元组 δ 可实现的规则集。

定义 6. 对于（S, V）的问题 所有决策：给定一个元组 $\delta \in V$，需要从 S 中找出一个决策规则集合 Z，使其满足以下条件：

- Z 中的所有决策规则对于元组 δ都是可实现的。
- 对于任意 $\sigma \in D$（S）$\setminus D$（Z），S中右侧等于 σ 的任意决策规则对于元组 δ都不可实现。

定义 7. 对于（S, V）的问题 部分规则：给定一个元组 $\delta \in V$，需要从 S 中找出一个决策规则集合 Z，使其满足以下条件：

- Z 中的所有决策规则对于元组 δ都是可实现的。
- 如果 $Z = \emptyset$，那么 S 中的任意决策规则对于元组 δ都不可实现。

分别将 $AR(S)$ 和 $EAR(S)$ 记为针对元组 $(S, V(S))$ 和 $(S, EV(S))$ 的所有规则问题。分别将 $AD(S)$ 和 $EAD(S)$ 记为针对元组 $(S, V(S))$ 和 $(S, EV(S))$ 的所有决策问题。分别将 $SR(S)$ 和 $ESR(S)$ 记为针对元组 $(S, V(S))$ 和 $(S, EV(S))$ 的部分规则问题。

例3。给定决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \wedge (a_3 = 0) \rightarrow 0, (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 1, (a_1 = 0) \rightarrow 0\}$ 以及元组 $\delta = (0, 0, 0) \in EV(S)$。那么，$\{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \wedge (a_3 = 0) \rightarrow 0, (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 1, (a_1 = 0) \rightarrow 0\}$ 是问题 $AR(S)$ 和元组 δ 的一个解，$\{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 1, (a_1 = 0) \rightarrow 0\}$ 是问题 $AD(S)$ 和元组 δ 的一个解，而 $\{(a_1 = 0) \rightarrow 0\}$ 是问题 $SR(S)$ 和元组 δ 的一个解。

在特殊情况下，当 $n(S) = 0$ 时，S 中的所有规则的左侧均为空。在这种情况下，自然可以将 (i) 集合 S 视为问题 $AR(S)$ 和 $EAR(S)$ 的解；将 (ii) 集合 S 的任意子集 Z（满足 $D(Z) = D(S)$）视为问题 $AD(S)$ 和 $EAD(S)$ 的解；并将 (iii) 集合 S 的任意非空子集 Z 视为问题 $SR(S)$ 和 $ESR(S)$ 的解。

2.2 决策树

带根的有限有向树是指只有一个节点没有入边的有限有向树。这个节点称为根节点。没有出边的节点称为终端节点。非终端节点称为工作节点。带根有限有向树中的一条完整路径是由该树的节点和边组成的序列 $\xi = v_1,\ d_1,\ \ldots,\ v_m,\ d_m,\ v_{m+1}$，其中 v_1 是根节点，v_{m+1} 是终端节点，并且对于 $i = 1,\ \ldots,\ m$，边 d_i 从节点 v_i 出发并进入节点 v_{i+1}。

我们将考虑两种类型的决策树：o-决策树（普通决策树，简称 o-树）和 e-决策树（扩展决策树，简称 e-树）。

定义 8. 一个定义在决策规则系统上的决策树 S 是一个带标签的有限有向树，其根节点为 Γ，并满足以下条件:

- 树 Γ 的每个工作节点都标记有集合 A（S）中的一个属性。
- 设树 Γ的一个工作节点 v 标记有属性 a_i。若 Γ 是 o-树，则恰有 $|V_S$（a_i）| 条边从节点 v 引出，且这些边分别标记有集合 V_S（a_i）中的互不相同的元素。若 Γ是 e-树，则恰有 $|EV_S$（a_i）| 条边从节点 v 引出，且这些边分别标记有集合 EV_S（a_i）中的互不相同的元素。
- 树 Γ 的每个终端节点都标记有集合 S的一个子集。

设 Γ 是决策规则系统 S 上的一棵决策树。我们用 $CP(\Gamma)$ 表示树 Γ 中完整路径的集合。设 $\xi = v_1, d_1, \ldots, v_m, d_m, v_{m+1}$ 是 Γ 中的一条完整路径。我们为这条路径对应一个属性集合 $A(\xi)$ 和一个方程组 $K(\xi)$。若 $m = 0$ 且 $\xi = v_1$，则 $A(\xi) = \emptyset$ 且 $K(\xi) = \emptyset$。设 $m > 0$，并且对于 $j = 1, \ldots, m$，节点 v_j 标记为属性 a_{i_j}，边 d_j 标记为元素 $\delta_j \in \omega \cup \{*\}$。则 $A(\xi) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$ 且 $K(\xi) = \{a_{i_1} = \delta_1, \ldots, a_{i_m} = \delta_m\}$。我们用 $\tau(\xi)$ 表示附属于节点 v_{m+1} 的决策规则集合。

例4。考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 0,\ (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 0) \rightarrow 0,\ (a_1 = 1) \rightarrow 0\}$。该决策规则系统上的 o-树 Γ_1 和 e-树 Γ_2 如图1所示，其中 r_1、r_2 和 r_3 分别是 S中的第一、第二和第三条决策规则。

设 ξ 是 o-树中的一条完整路径，该路径终止于标记有规则集合 $\{r_2, r_3\}$的终端节点。则 $A(\xi) = \{a_1, a_3\}$、$K(\xi) = \{a_1 = 1, a_3 = 0\}$ 以及 $\tau(\xi) = \{r_2, r_3\}$。

定义9。方程组 $\{a_{i_1} = \delta_1, \ldots, a_{i_m} = \delta_m\}$，其中 a_{i_1}，……，$a_{i_m} \in A$ 和δ_1，……，$\delta_m \in \omega \cup \{*\}$，若存在 l，$k \in \{1, \ldots, m\}$ 使得$l \neq k$、$i_l = i_k$和 $\delta_l \neq \delta_k$，则称其为不一致。如果该方程组不是不一致的，则称其为一致。

设 S 为一个决策规则系统，Γ 为一个关于 S 的决策树。

定义 10. 如果 Γ求解问题 $AR(S)$（分别为问题 $EAR(S)$），即 Γ 是一个 o-树（分别是一个 e-树），且任何满足相容方程组 $K(\xi)$ 的路径 $\xi \in CP(\Gamma)$ 均满足以下条件:

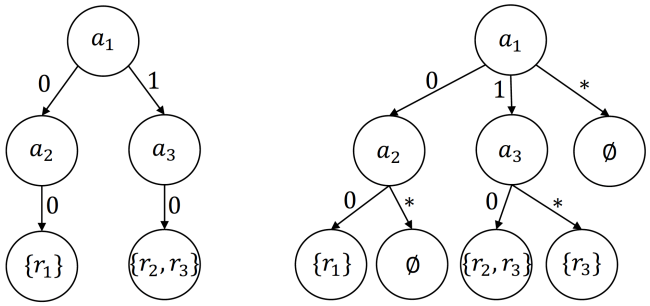

图1： 决策规则系统 S 上的 o-决策树 Γ_1 和 e-决策 Γ_2 树

- 对于任意决策规则 $r \in \tau(\xi)$，关系 $K(r) \subseteq K(\xi)$ 均成立。
- 对于任意决策规则 $r \in S \setminus \tau(\xi)$，方程组 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。

例 5。 设 S 为例4中的决策规则系统。那么，图1中所示的决策树 Γ_1 和Γ_2 分别求解问题 $AR(S)$ 和 $EAR(S)$。

定义11。 如果 Γ求解 问题 $AD(S)$（分别为问题 $EAD(S)$），则称之为如此；若 Γ 是 o-树（分别是 e-树），且任意一条路径 $\xi \in CP(\Gamma)$ 的相容方程组 $K(\xi)$ 满足以下条件：

- 对于任意决策规则 $r \in \tau(\xi)$，关系 $K(r) \subseteq K(\xi)$ 成立。
- 如果 $r \in S \setminus \tau(\xi)$ 且 r的右侧不属于集合 $D(\tau(\xi))$，那么方程组 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。

定义12. 如果 Γ 解决 问题 $SR(S)$（分别为问题 $ESR(S)$），我们称之为： Γ 是一棵 o-树（一棵 e-树），且任意具有一致方程组 $K(\xi)$ 的路径 $\xi \in CP(\Gamma)$ 均满足以下条件：

- 对于任意决策规则 $r \in \tau(\xi)$，关系 $K(r) \subseteq K(\xi)$ 均成立。
- 若 $\tau(\xi) = \emptyset$，则对于任意决策规则 $r \in S$，方程组 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。

例 6. 考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 0,(a_1 =1) \wedge (a_3 = 0) \rightarrow 1,(a_1 = 1) \rightarrow 1,(a_1 = 1) \rightarrow 2\}$ 以及图2中所示的决策树 Γ_1、 Γ_2 和 Γ_3。则决策树 Γ_1 解决问题 $AR(S)$， Γ_2 解决问题 $AD(S)$，而 Γ_3解决问题 $SR(S)$；其中 r_1、 r_2、 r_3 和 r_4 分别是S中的第一、第二、第三和第四条决策规则。

对于任意完整路径 $\xi \in CP(\Gamma)$，我们用 $h(\xi)$ 表示 ξ 中工作节点的数量。值 $h(\Gamma) = \max\{h(\xi) : \xi \in CP(\Gamma)\}$ 称为决策树 Γ 的深度 。

设 S是一个决策规则系统，且 $C \in \{AR, EAR, AD, EAD, SR, ESR\}$。我们用 $h_C(S)$ 表示在 S 上的决策树的最小深度，该决策树可解决问题 $C(S)$。

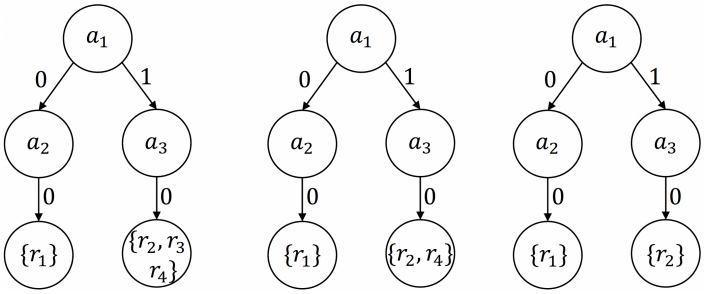

图2： 决策树 Γ_1、 Γ_2 和 Γ_3

设 $n(S) = 0$。若 $C \in \{AR, EAR\}$，则只有一棵决策树可以解决问题$C(S)$。这棵树仅由一个节点构成，该节点标记为规则集 S。若 $C \in \{AD, EAD\}$，则可解决问题 $C(S)$ 的决策树集合，与每棵树均仅由一个节点构成且该节点标记为集合 S 的子集 Z 的树的集合相同，其中 $D(Z) = D(S)$。若$C \in \{SR, ESR\}$，则可解决问题 $C(S)$ 的决策树集合，与每棵树均仅由一个节点构成且该节点标记为集合S 的非空子集 Z 的树的集合相同。因此，若 $n(S) = 0$，则对于任意 $C \in \{AR, EAR, AD, EAD, SR, ESR\}$， $h_C(S) = 0$。

2.3 表征决策树深度的函数

设 $S \in \Sigma$，其中 Σ 是决策规则系统的集合。我们用 $R_{SR}(S)$ 表示系统 S 的一个子系统，该子系统由满足以下条件的所有规则 $r \in S$ 组成：不存在规则 $r' \in S$ 使得 $K(r') \subset K(r)$。

定义13. 若 $R_{SR}(S) = S$，则称系统 S 为 SR-约简的 。

用 Σ_{SR} 表示 SR-约简的决策规则系统的集合。

对于 $S \in \Sigma$，我们用 $R_{AD}(S)$ 表示系统 S 的一个子系统，该子系统由满足以下条件的所有规则$r \in S$ 组成：不存在规则 $r' \in S$ 使得 $K(r') \subset K(r)$，且规则 r 和 r' 的右端项相同。

定义 14。 如果 $R_{AD}(S) = S$，则将系统 S 称为 AD-约简的 。

用 Σ_{AD} 表示 AD-约简的决策规则系统的集合。

例 7。 考虑决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \wedge (a_3 = 0) \to 0,\ (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \to 0,\ (a_1 = 0) \to 1\}$。对于该系统， $R_{AD}(S) = \{(a_1 = 0) \wedge (a_0 = 0) \to 0,\ (a_1 = 0) \to 1\}$，以及 $R_{SR}(S) = \{(a_1 = 0) \to 1\}$。

容易证明

$$\begin{aligned} \{(n(S), d(S), k(S)) : S \in \Sigma\} &= \{(n(S), d(S), k(S)) : S \in \Sigma_{SR}\} \\ &= \{(n(S), d(S), k(S)) : S \in \Sigma_{AD}\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \cup \{(n, d, k) : n, d, k \in \omega \setminus \{0\}, d \le n\}. \end{aligned}$$

确实，如果 $n(S) = 0$，也就是说， S 中的每条规则的左部都是空的，那么 $d(S) = k(S) = 0$。如果 $n(S) > 0$，那么 $d(S) > 0$, $k(S) > 0$，且 $d(S) \le n(S)$，因为在任一决策规则中，

左部中来自不同方程的属性各不相同。令 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$, $d \leq n$, and $S = \{(a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_d = 0) \rightarrow 0, (a_{d+1} = 0) \rightarrow 0, \ldots, (a_n = 0) \rightarrow 0, (a_1 = 1) \rightarrow 0, \ldots, (a_1 = k-1) \rightarrow 0\}$。可以证明，$S$ 是 AD-约简的，也是 SR-约简的，$n(S) = n$, $d(S) = d$，且 $k(S) = k$。

我们不研究这种情况：$(n(S)\ d(S)\ k(S)) = (0, 0, 0)$，因为若 $n(S) = 0$，则对任意 $C \in \{SR, ESR, AD, EAD, AR, EAR\}$，$h_C(S) = 0$。

定义 15. 令 $C \in \{SR, ESR, AD, EAD, AR, EAR\}$、$n$，$d$，$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。记

$$\begin{aligned} h_C(n, d, k) &= \min\{h_C(S) : S \in \Sigma, n(S) = n, d(S) = d, k(S) = k\}, \\ H_C(n, d, k) &= \max\{h_C(S) : S \in \Sigma, n(S) = n, d(S) = d, k(S) = k\}. \end{aligned}$$

所考察的参数是下界（$h_C(n,\ d,\ k)$）和上界（$H_C(n,\ d,\ k)$），它们是求解问题 $C(S)$ 的决策树最小深度的不可改进界，适用于满足 $n(S) = n$、$d(S) = d$ 且 $k(S) = k$ 的决策规则系统 S。

我们还考察了针对 SR-约简决策规则系统和 AD-约简决策规则系统的类似参数。研究此类规则系统之所以有意义，是因为将系统 S 转换为系统 $R_{SR}(S)$ 和 $R_{AD}(S)$ 并不困难，而且系统 $R_{SR}(S)$ 和 $R_{AD}(S)$ 可能比系统 S 简单得多。此外，如引理 9 所示，等式 $h_{ESR}(S) = h_{ESR}(R_{SR}(S))$ 和 $h_{EAD}(S) = h_{EAD}(R_{AD}(S))$ 成立；将求解问题 $ESR(R_{SR}(S))$ 和 $EAD(R_{AD}(S))$ 的决策树分别转换为求解问题 $ESR(S)$ 和 $EAD(S)$ 的决策树，也可以相对简单地完成。

定义 16. 令 $C \in \{SR, ESR, AD, EAD\}$, $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。若 $C \in \{SR, ESR\}$，则令 $C' = SR$；若 $C \in \{AD, EAD\}$，则令 $C' = AD$。记

$$\begin{aligned} h_C^R(n, d, k) &= \min\{h_C(S) : S \in \Sigma_{C'}, n(S) = n, d(S) = d, k(S) = k\}, \\ H_C^R(n, d, k) &= \max\{h_C(S) : S \in \Sigma_{C'}, n(S) = n, d(S) = d, k(S) = k\}. \end{aligned}$$

所考虑的参数是下界（$h_C^R(n, d, k)$）和上界（$H_C^R(n, d, k)$），它们是针对 C'-约简决策规则系统 S 在满足 $n(S) = n$、$d(S) = d$ 和 $k(S) = k$ 条件时，求解问题 $C(S)$ 的决策树最小深度的不可改进界。

3 辅助命题

本节将证明若干后文会用到的辅助命题。

设 S 是一个决策规则系统，Γ 是其上的一棵 e-决策树。我们用 $o(\Gamma)$ 表示一棵基于 S 的 o-树，它由树 Γ 删除所有满足以下条件的节点 v 得到：从 Γ 的根节点到节点 v 的路径包含一条标记为 $*$ 的边。删除节点 v 时，我们还会删除所有进入或离开 v 的边。可以证明以下两个引理。

引理 1. 设 S 是一个决策规则系统，$C \in \{AR, AD, SR\}$，且 Γ 是一个在 S 上求解问题 $EC(S)$ 的 e-决策树。那么，决策树 $o(\Gamma)$ 求解问题 $C(S)$。

引理 2. 设 S 是一个决策规则系统，且 Γ 是一个在 S上的决策树。那么

(a) 如果树 Γ 分别解决问题 $AR(S)$ ***(***$EAR(S)$，那么树 Γ 分别解决问题 $AD(S)$ ***(*** $EAD(S)$。

(b) 如果树 Γ 分别解决问题 $AD(S)$ ***(***$EAD(S)$，那么树 Γ 分别解决问题 $SR(S)$ ***(*** $ESR(S)$。

引理 3。设 S 为一个决策规则系统。则以下不等式成立:

$$\begin{array}{ccccccc} h_{ESR}(S) & \leq & h_{EAD}(S) & \leq & h_{EAR}(S) & \leq & n(S) \\ \vee| & & \vee| & & \vee| & & \\ h_{SR}(S) & \leq & h_{AD}(S) & \leq & h_{AR}(S) & & \end{array}$$

证明。显然，当 $n(S) = 0$ 时，所考虑的不等式成立。设 $n(S) > 0$。设 Γ 为 S上的一棵 e-决策树。显然， $h(o(\Gamma)) \leq h(\Gamma)$。利用这一不等式和引理 1，我们得到 $h_{SR}(S) \leq h_{ESR}(S)$、$h_{AD}(S) \leq h_{EAD}(S)$ 以及 $h_{AR}(S) \leq h_{EAR}(S)$。根据引理 2， $h_{ESR}(S) \leq h_{EAD}(S)$ $\leq h_{EAR}(S)$，且 $h_{SR}(S) \leq h_{AD}(S) \leq h_{AR}(S)$。可以构造一棵 Γ 上的 o-决策树 S，通过对 $A(S)$中的所有属性值进行顺序计算来解决问题 $EAR(S)$。因此， $h_{EAR}(S) \leq n(S)$。 □

设 S 为决策规则系统， Γ 为定义在 S 上的决策树，且 $\alpha = \{a_{i_1} = \delta_1, \ldots, a_{i_m} = \delta_m\}$ 为相容方程组，使得 a_{i_1}、.....、 $a_{i_m} \in A$ 以及 δ_1、.....、 $\delta_m \in \omega \cup \{*\}$。现在定义一个决策规则系统 S_α。设 r 为一条决策规则，且方程组$K(r) \cup \alpha$ 相容。我们将从 r 的左侧移除所有属于 α 的方程后得到的决策规则记为 r_α。那么， S_α 是满足以下条件的决策规则 r_α 的集合： $r \in S$，并且方程组 $K(r) \cup \alpha$ 相容。

假设对于 $j = 1$、.....、 m，有 $n(S) > 0$, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m} \in A(S)$、 $\delta_j \in EV_S(a_{i_j})$，且$\Gamma$ 是一棵 e-树。现在定义一棵 e-树 Γ_α。首先，定义一棵树 Γ'_α。设树 Γ 中的一条边 d 指向节点 v。我们称以 v 为根节点的 Γ 的子树与边 d 对应。记 $A(\alpha) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$。从 Γ 的根节点开始，我们将处理树 Γ 的所有工作节点。设 v 是 Γ 中标记有属性a_t 的工作节点。设 $a_t \in A(S_\alpha)$。保留从 v 出发且标记为集合 $EV_{S_\alpha}(a_t)$ 中元素的所有边。移除从 v 出发的所有其他边，以及与这些边对应的子树。设 $a_t \notin A(S_\alpha)$。我们按以下方式选择一个元素 $\delta \in EV_S(a_t)$。如果 $a_t \in A(\alpha)$ 且 $t = i_j$，则 $\delta = \delta_j$。如果 $a_t \notin A(\alpha)$，则 δ 是 $EV_S(a_t)$ 中的最小数。移除从 v 出发且标记为不同于 δ 的元素的所有边，以及与这些边对应的子树。将所得的树记为 Γ'_α。

现在我们处理这棵树中的所有节点。设 v 是一个标记有属性 a_t 的工作节点。如果 $a_t \in A(S_\alpha)$，则保持该节点不变。设 $a_t \notin A(S_\alpha)$。如果 v 是根节点，则移除节点 v 以及从 v 出发的边。设 v 不是根节点， d_0 是进入 v 的边， d_1 是离开 v 并进入节点 v_1 的边。我们从 Γ'_α 中移除节点 v 和边 d_1，并将边 d_0 连接到节点 v_1。设 v 是一个标记有决策规则集合 Z 的终端节点。我们用集合 Z_α 替换集合 Z。将得到的树记为 Γ_α。

设 $n(S) > 0$, a_{i_1}, ..., $a_{i_m} \in A(S)$, $\delta_j \in V_S(a_{i_j})$（ $j = 1$, ..., m 和Γ ）构成一棵 o-树。树 Γ'_α 和 o-树 Γ_α 的定义与

前一种情况几乎相同。唯一的区别是，我们考虑的集合是 $V_S(a_t)$ 和 $V_{S_\alpha}(a_t)$，而不是集合 $EV_S(a_t)$ 和 $EV_{S_\alpha}(a_t)$。

例 8. 考虑决策规则系统 $S = \{r^1 : (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 0, r^2 : (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 0) \rightarrow 0, r^3 : (a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \rightarrow 0\}$ 和 $\alpha = \{a_3 = 0\}$。那么$S_\alpha = \{r_\alpha^1 : (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 0, r_\alpha^2 : (a_1 = 1) \rightarrow 0\}$。图3中展示了决策树 Γ、 Γ'_α 和Γ_α，其中 Γ 是定义在 S上的 o-决策树。

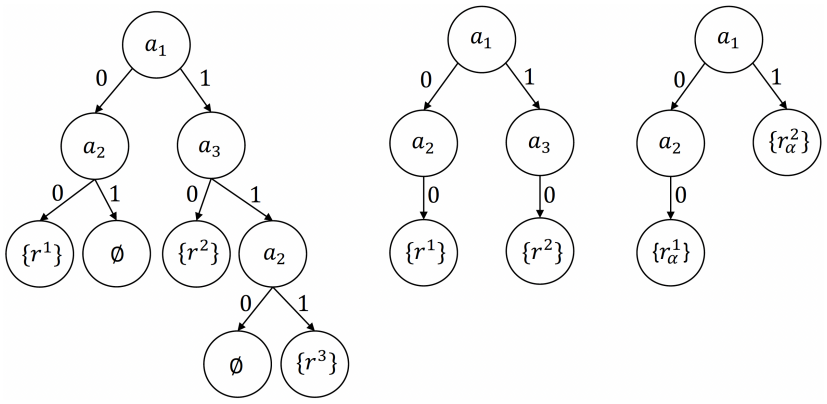

图3： 决策树 Γ、 Γ'_α 和 Γ_α

引理4。 设 S 是一个决策规则系统，满足 $n(S) > 0$， Γ 是定义在 S上的决策树，$C \in \{EAR, EAD, ESR\}$是一个相容方程组，使得对于 $j = 1, \ldots, m$，有 $a_{i_j} \in A(S)$ 且 $\delta_j \in EV_S(a_{i_j})$。如果决策树 Γ 解决问题 $C(S)$ 且满足 $S_\alpha \neq \emptyset$，那么决策树 Γ_α 解决问题 $C(S_\alpha)$。

证明。 令 Γ 求解问题 $C(S)$ 和 $S_\alpha \neq \emptyset$。显然， Γ_α 是决策规则系统 S_α上的一棵 e-决策树。还显然， Γ'_α 中的每条完整路径都与 Γ 中的某条完整路径重合，并且 Γ'_α 与 Γ_α 中的完整路径集合之间存在一一对应关系，使得 Γ'_α 中的每条路径 ξ 都对应于 Γ_α中的一条路径 ξ_α，该路径由 ξ 删除某些节点以及与这些节点相连的边后得到。可以证明，方程组 $K(\xi)$ 不一致，当且仅当系统 $K(\xi_\alpha)$ 不一致。

令 Γ'_α 中的 ξ 为一条完整路径，且方程组 $K(\xi)$ 一致。设路径 ξ 的终端节点标记为决策规则集合 Z。那么，路径 ξ_α 的终端节点标记为决策规则集合 Z_α。令 $r \in Z$。由于 Γ 求解问题 $C(S)$， $K(r) \subseteq K(\xi)$。因此，系统 $K(r) \cup \alpha$ 是一致的。显然，$K(\xi_\alpha) \subseteq K(\xi)$，且系统 $K(\xi) \setminus K(\xi_\alpha)$ 仅包含形式为 $a_t = \delta$ 的方程，其中 $a_t \notin A(S_\alpha)$。由于 $K(r_\alpha) \subseteq K(r)$， $K(r_\alpha) \subseteq K(\xi_\alpha)$。利用这些关系，我们得到 $Z_\alpha = \{r_\alpha : r \in Z\}$，并且对任意 $r_\alpha \in Z_\alpha$， $K(r_\alpha) \subseteq K(\xi_\alpha)$。

设 $r \in S$，系统 $K(r) \cup \alpha$ 一致，而系统 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。则存在 a_t, δ, σ，使得 $\delta \neq \sigma$, $a_t = \delta \in K(r)$ 且 $a_t = \sigma \in K(\xi)$。显然， $a_t \notin \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$。因此 $a_t = \delta \in K(r_\alpha)$ 且 $a_t \in A(S_\alpha)$。于是， $a_t = \sigma \in K(\xi_\alpha)$ 且 $K(r_\alpha) \cup K(\xi_\alpha)$ 不一致。

令 Γ 求解问题 $EAR(S)$。我们知道，对于任意 $r_\alpha \in Z_\alpha$， $K(r_\alpha) \subseteq K(\xi_\alpha)$。令$r' \in S_\alpha \setminus Z_\alpha$ 和 r为来自 S的一条规则，使得系统 $K(r) \cup \alpha$是一致的，并且 $r' = r_\alpha$。它

显然， $r \notin Z$。考虑到 Γ 求解问题 $EAR(S)$，我们可得系统 $K(r) \cup K(\xi)$是不一致的。因此，系统 $K(r_\alpha) \cup K(\xi_\alpha)$是不一致的。于是， Γ_α 求解问题 $EAR(S_\alpha)$。

令 Γ 求解问题 $EAD(S)$。我们知道，对于任意 $r_\alpha \in Z_\alpha$， $K(r_\alpha) \subseteq K(\xi_\alpha)$。令 $r' \in S_\alpha \setminus Z_\alpha$，且规则 r' 的右侧不属于 $D(Z_\alpha)$。现在考虑一个决策规则 $r \in S$，使得系统 $K(r) \cup \alpha$ 一致，且 $r' = r_\alpha$。显然， $r \notin Z$，并且 $D(Z) = D(Z_\alpha)$。考虑到 Γ 求解问题 $EAD(S)$，我们得到系统 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。因此，系统 $K(r_\alpha) \cup K(\xi_\alpha)$ 不一致。于是 Γ_α 求解问题 $EAD(S_\alpha)$。

令 Γ 求解问题 $ESR(S)$。我们知道，对于任意 $r_\alpha \in Z_\alpha$， $K(r_\alpha) \subseteq K(\xi_\alpha)$。令$Z_\alpha = \emptyset$。于是 $Z = \emptyset$。考虑到 Γ 求解问题 $ESR(S)$，我们得到：对于任意使系统 $K(r) \cup \alpha$一致的规则 $r \in S$，系统 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。因此，对于任意规则 $r_\alpha \in S_\alpha$，系统 $K(r_\alpha) \cup K(\xi_\alpha)$ 不一致。于是Γ_α 求解问题 $ESR(S_\alpha)$

□

以下引理的证明与引理4的证明类似。

引理5. 设 S 为一个决策规则系统，满足 $n(S) > 0$， Γ 为定义在 S上的一棵决策树，$C \in \{AR, AD, SR\}$为一个相容方程组，且满足$a_{i_j} \in A(S)$ 以及对于 $j = 1, \ldots, m$有 $\delta_j \in V_S(a_{i_j})$。若决策树解决问题$(S)$，且 $S_\alpha \neq \emptyset$，则决策树 Γ_α 解决问题 $C(S_\alpha)$。

引理 6. 设 S为一个决策规则系统，满足 $n(S) > 0$， $C \in \{EAR, AR, EAD, AD, ESR, SR\}$，$\alpha = \{a_{i_1} = \delta_1, \ldots, a_{i_m} = \delta_m\}$ 为一个相容方程组，且满足 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m} \in A(S)$；对于 $j = 1, \ldots, m$，若 $C \in \{EAR, EAD, ESR\}$，则 $\delta_j \in EV_S(a_{i_j})$；若$C \in \{AR, AD, SR\}$，则 $\delta_j \in EV_S(a_{i_j})$。于是 $h_C(S) \geq h_C(S_\alpha)$。

证明。设 Γ 是定义在 S 上的一棵决策树，它解决问题 $C(S)$，且满足 $h(\Gamma) = h_C(S)$。根据引理4和引理5，我们得到决策树 Γ_α 解决问题 $C(S_\alpha)$。显然， $h(\Gamma_\alpha) \leq h(\Gamma)$。因此， $h_C(S_\alpha) \leq h_C(S)$。

□

我们将决策规则系统 S 对应为一个超图 $G(S)$，其节点集合为 $A(S)$，边集合为 $\{A(r) : r \in S\}$。超图 $G(S)$ 的节点覆盖是节点集合 $A(S)$ 的一个子集 B，满足：对于任意规则 $r \in S$，只要 $A(r) \neq \emptyset$，就有 $A(r) \cap B \neq \emptyset$。如果$A(S) = \emptyset$，那么空集是超图 $G(S)$ 的唯一节点覆盖。用 $\beta(S)$ 表示超图 $G(S)$ 的最小节点覆盖基数。

示例 9. 考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \rightarrow 0, (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 0) \rightarrow 0, (a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \rightarrow 0\}$。可以证明，集合 $\{a_1, a_2\}$是超图 $G(S)$ 和 $\beta(S) = 2$的节点覆盖。

我们按以下方式定义系统 S 的子系统 $I_{SR}(S)$。如果 S 不包含长度为 0 的规则，则 $I_{SR}(S) = S$。否则， $I_{SR}(S)$ 由 S 中所有长度为 0 的规则组成。

注释 1。 请注意， $I_{SR}(S)$ 当且仅当 S 同时包含一条长度为 0 的规则和一条长度大于 0 的规则时，$\neq S$。

现在定义系统 S 的一个子系统 $I_{AD}(S)$。用 $D_0(S)$ 表示来自 S 的右端项长度等于 0 的决策规则的右端项集合。于是，子系统 $I_{AD}(S)$ 由 S 中所有长度为 0 的规则，以及 S 中右端项不属于 $D_0(S)$ 的所有规则组成。

注 2. 注意， $I_{AD}(S) \neq S$ 当且仅当 S 包含一条长度为 0 的规则，以及一条长度大于 0 且具有相同右端项的规则。

例 10. 考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \to 0, (a_1 = 1) \to 1, \to 1, \to 2\}$。对于这个系统， $I_{SR}(S) = \{\to 1, \to 2\}$ 且 $I_{AD}(S) = \{(a_1 = 0) \to 0, \to 1, \to 2\}$。

设 S 为一个决策规则系统。若存在一个¯ ¯元组 $\delta \in V(S)$，使得对于任意决策规则 $r \in S$，方程组 $K(r) \cup K(S, \delta)$ 都是不一致的，则称该系统为不完备 。否则，称系统 S 为完备。如果 $n(S) = 0$，则将系统 S视为完备。

引理 7. 设 S 是一个决策规则系统。那么

(a) 若 $C \in \{EAR, AR\}$，则 $h_C(S) \geq \beta(S)$。***(b)*** 若 $C \in \{AD, SR\}$，则 $h_{EC}(S) \geq \beta(I_C(S))$。***(c)*** 若 $C \in \{AD, SR\}$ 且系统 S不完备，则 $h_C(S) \geq \beta(S)$。

证明。 显然，当 $n(S) = 0$时，引理中的结论成立。设 $n(S) > 0$。

(a) 设 Γ 是定义在 S上的一棵决策树，它解决问题 $AR(S)$，且满足$h(\Gamma) = h_{AR}(S)$。设 ξ 是 Γ中的一条完整路径，且方程组 $K(\xi)$ 一致。显然，对于任意决策规则 $r \in S$，要么 $K(r) \subseteq K(\xi)$，要么方程组 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。因此，若 $A(r) \neq \emptyset$ 且 $A(\xi)$ 是超图 $G(S)$的节点覆盖，则 $A(\xi) \cap A(r) \neq \emptyset$。于是， $h(\Gamma) \geq h(\xi) \geq |A(\xi)| \geq \beta(S)$，且 $h_{AR}(S) \geq \beta(S)$。利用引理 3，可得 $h_{EAR}(S) \geq \beta(S)$。

(b) 如果 S 包含长度为 0 的规则，那么 $d(I_{SR}(S)) = 0$， $\beta(I_{SR}(S)) = 0$ ，并且不等式 $h_{ESR}(S) \geq \beta(I_{SR}(S))$ 成立。设 S 不包含长度为 0 的规则。于是$I_{SR}(S) = S$。设 Γ 是定义在 S 上、可求解问题 $ESR(S)$ 的决策树，并且对于¯，有 $h(\Gamma) = h_{ESR}(S)$。设 $\delta = (*, \ldots, *) \in EV(S)$，且 ξ是 Γ 中的一条完整路径，使得 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。显然，该路径的终端节点标记为空决策规则集。因此，对于任意 $r \in S$，方程组 $K(\xi) \cup K(r)$ 都是不一致的。由此可得 $A(\xi) \cap A(r) \neq \emptyset$。因此， $A(\xi)$ 是超图 $G(S)$ 的节点覆盖。显然，$h(\Gamma) \geq |A(\xi)|$ ，且 $|A(\xi)| \geq \beta(S)$。因此 $h(\Gamma) \geq \beta(S)$，并且 $h_{ESR}(S) \geq \beta(S) = \beta(I_{SR}(S))$。

设 Γ 是定义在 S 上的决策树，它求解问题 $EAD(S)$，且满足 $h(\Gamma) = h_{EAD}(S)$。设 $\delta = (*, \ldots, *) \in EV(S)$，并且 ξ 是 Γ 中的一条完整路径，使得 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。显然， $\tau(\xi)$ 只包含长度为 0 的规则，且 $D(\tau(\xi)) = D_0(S)$。还显然，对于任意规则 $r \in S$ ，若 r 的右侧不属于集合 $D_0(\tau(\xi))$，则方程组 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。因此， $A(\xi)$ 是超图 $G(I_{AD}(S))$ 的节点覆盖。显然， $h(\Gamma) \geq |A(\xi)|$ ，且 $|A(\xi)| \geq \beta(I_{AD}(S))$。因此， $h(\Gamma) \geq \beta(I_{AD}(S))$，且 $h_{EAD}(S) \geq \beta(I_{AD}(S))$。

(c) 设 Γ 是定义在 S 上的决策树，它求解问题 $SR(S)$，且满足 $h(\Gamma) = h_{SR}(S)$。设决策规则系统 S 不完备，且 δ 是来自 $V(S)$ 的一个元组，对于¯，任意决策规则 $r \in S$ 对应的方程组 $K(r) \cup K(S, \delta)$ 均不一致。考虑 Γ 中的一条完整路径 ξ，使得 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。显然，该路径的终端节点

标记为空决策规则集。因此，对于任意规则 $r \in S$，方程组 $K(\xi) \cup K(r)$ 均不一致。因此，$A(\xi)$ 是超图 $G(S)$ 的节点覆盖。因此 $h(\Gamma) \geq h(\xi) \geq |A(\xi)| \geq \beta(S)$，且 $h_{SR}(S) \geq \beta(S)$。利用引理 3，得到 $h_{AD}(S) \geq \beta(S)$。

□

请注意，引理 7 的陈述 (c) 中的不完备条件至关重要。考虑决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \to 0, \ldots\ldots, (a_n = 0) \to 0\}$。显然，该系统是完备的，并且 $\beta(S) = n$。现在考虑一棵决策树 Γ，它包含两个节点 v_1、v_2，以及一条从节点 v_1 出发并进入节点 v_2的边 d。节点 v_1 标记有属性 a_1，节点 v_2 标记有决策规则系统$\{(a_1 = 0) \to 0\}$，边 d 标记有数字 0。可以证明，Γ 解决了问题 $AD(S)$ 和 $SR(S)$，并且 $h(\Gamma) = 1$。

还请注意，不完备性不是一种遗传性质：存在一个不完备的决策规则系统 S 和一个相容方程组 $\alpha = \{a_{i_1} = \delta_1, \ldots, a_{i_m} = \delta_m\}$，其中 $a_{i_1}, \ldots\ldots, a_{i_m} \in A(S)$，且 $\delta_1 \in V_S(a_{i_1})$ $\ldots\ldots$，$\delta_m \in V_S(a_{i_m})$，使得决策规则系统 S_α 是完备的。考虑决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \wedge (a_2 = 0) \to 0, (a_1 = 1) \wedge (a_2 = 0) \to 0, (a_1 = 0) \wedge (a_2 = 1) \to 0\}$。该系统是不完备的：对于元组 $(1, 1) \in V(S)$，S 中没有可用于该元组的决策规则。设$\alpha = \{a_2 = 0\}$。那么 $S_\alpha = \{(a_1 = 0) \to 0, (a_1 = 1) \to 0\}$。显然，决策规则系统 S_α 是完备的。

引理 8. 设 S 为一个决策规则系统。则 *(a)* $h_{EAR}(S) \geq h_{AR}(S) \geq d(S)$。*(b)* 若 S 是一个 SR-约简系统，则 $h_{ESR}(S) \geq d(S)$。*(c)* 若 S 是一个 AD-约简系统，则 $h_{EAD}(S) \geq d(S)$。

证明。显然，当 $n(S) = 0$ 时，引理中的陈述成立。设 $n(S) > 0$。

(a) 设 r 是 S 中的一条决策规则，其长度等于 $d(S)$。设 Γ 是定义在 S上的一棵决策树，它解决问题 $AR(S)$，且 $h(\Gamma) = h_{AR}(S)$。显然，Γ 中存在一条完整路径 ξ，使得方程组 $K(r) \cup K(\xi)$一致。考虑到 Γ 解决问题 $AR(S)$，可得 $K(r) \subseteq K(\xi)$。因此，$h(\xi) \geq d(S)$，$h(\Gamma) \geq d(S)$，且 $h_{AR}(S) \geq d(S)$。利用引理 3，可得$h_{EAR}(S) \geq h_{AR}(S) \geq d(S)$。

(b) 设 S 是一个 SR-约化的决策规则系统，r 是来自 S 的长度为 $d(S)$ 的决策规则，Γ 是定义在 S 上、求解问题 $ESR(S)$ 且满足 $h(\Gamma) = h_{ESR}(\Gamma)$ 的决策树。我们用 $S(r)$ 表示来自 S 且满足 $K(\rho) = K(r)$ 的规则 ρ 集合。¯ ¯考虑一个元组 $\delta \in EV(S)$，使得 $K(r) \subseteq K(S, \delta)$，并且方程组 $K(S, \delta)$ 中的每个方程¯都具有形式 $a_t = *$。鉴于 S 是一个 SR-约化的¯系统，我们得到，对于任意规则 $r' \in S \setminus S(r)$，方程组 $K(r') \cup K(S, \delta)$ 均不一致。设 ξ 是 Γ 中一条完整路径，且满足 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。由于 Γ 求解问题 $ESR(S)$，路径 ξ 的终端节点标记着集合 $S(r)$ 的一个非空子集，并且对任意 $\rho \in S(r)$，$K(\rho) \subseteq K(\xi)$。因此，$h(\xi) \geq d(S)$，$h(\Gamma) \geq d(S)$，且 $h_{ESR}(S) \geq d(S)$。

(c) 设 S 为一个 AD-约简的决策规则系统，r 为来自 S、长度为$d(S)$的决策规则，且 Γ 为 S 上的一棵决策树，它解决问题 $EAD(S)$，并且

满足 $h(\Gamma) = h_{EAD}(\Gamma)$。我们用 $S'(r)$表示来自 S 的规则 ρ 所构成的集合，其中 ρ 和 r 相等。考虑一个元组 $\delta \in EV(S)$，使得 $K(r) \subseteq K(S,\delta)$，并且系统 $K(S,\delta)$中每个方程¯都具有形式 $a_t = *$。鉴于 S是一个 AD-约简的¯系统，我们得到，对于任意规则 $r' \in S \setminus S'(r)$，若 $K(r') \subseteq K(S,\delta)$，则规则 r' 的右侧不同于规则 r的右侧。设 ξ 为 Γ 中的一条完整路径¯，使得 $K(\xi) \subseteq K(S,\delta)$。鉴于 Γ 解决了问题 $EAD(S)$，可以证明至少有一条规则 $r \in S'(r)$ 属于集合 $\tau(\xi)$，且 $K(r) \subseteq K(\xi)$。因此$h(\xi) \geq d(S)$， $h(\Gamma) \geq d(S)$，并且 $h_{EAD}(S) \geq d(S)$。

□

注意，对于问题 $SR(S)$ 和 $AD(S)$，我们无法得到类似于引理 8 的陈述 (b) 和 (c) 中所述的界。考虑一个决策规则系统$S = \{(a_1 = 0) \to 0, \ (a_2 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_n = 0) \to 0\}$。很容易看出，该系统 S是SR-约简的，并且是 AD-约简的，且 $d(S) = n - 1$。现在考虑一个决策树 Γ，其中包含两个节点 v_1、 v_2，以及一条从节点 v_1 离开并进入节点 v_2的边 d。节点 v_1 标记有属性 a_1，节点 v_2 标记有决策规则系统$\{(a_1 = 0) \to 0\}$，边 d 标记有数字 0。可以证明， Γ 解决了问题 $AD(S)$ 和 $SR(S)$，并且 $h(\Gamma) = 1$。

引理 9。设 S 是一个决策规则系统。则 $h_{ESR}(S) = h_{ESR}(R_{SR}(S))$ 以及 $h_{EAD}(S) = h_{EAD}(R_{AD}(S))$。

证明。显然，当 $n(S) = 0$ 时，所考虑的等式成立。设 $n(S) > 0$。

我们首先证明 $h_{ESR}(S) \leq h_{ESR}(R_{SR}(S))$。设 Γ 是一个定义在 $R_{SR}(S)$ 上的决策树，它解决问题 $ESR(R_{SR}(S))$，并且满足 $h(\Gamma) = h_{ESR}(R_{SR}(S))$。我们将处理树 Γ 的所有节点，从终端节点开始。如果 v 是树 Γ 的终端节点，则保持不变。设 v 是树 Γ 的一个工作节点，并且对于离开 v 的每条边 d，其对应于 d 的子树 Γ 中的所有节点均已处理。设 v 标记有属性 a_i。如果 $EV_S(a_i) = EV_{R_{SR}(S)}(a_i)$，则保持节点 v 不变。否则，对于每个 $\delta \in EV_S(a_i) \setminus EV_{R_{SR}(S)}(a_i)$，我们向树 Γ 添加一个子树 G，该子树对应于离开 v 且标记为符号 $*$ 的边。我们还添加一条离开 v、进入 G 的根节点且标记为数字 δ 的边。将处理完树 Γ 的所有节点后得到的树记为 Γ'。可以证明， Γ' 是一个定义在 S 上、解决问题 $ESR(S)$ 的决策树。显然， $h(\Gamma') = h(\Gamma)$。因此 $h_{ESR}(S) \leq h_{ESR}(R_{SR}(S))$。

现在我们证明 $h_{ESR}(S) \geq h_{ESR}(R_{SR}(S))$。设 Γ 是定义在 S 上的决策树，它解决问题 $ESR(S)$，并且满足 $h(\Gamma) = h_{ESR}(S)$。我们将从终端节点开始处理树 Γ 的所有节点。设 v 是 Γ 的一个终端节点，且 v 标记有一组决策规则 B。若 $B = \emptyset$，则保持节点 v 不变。否则，将 B 中的每条规则 r 替换为规则 $r' \in R_{SR}(S)$，使得 $K(r') \subseteq K(r)$。设 v 是一个标记有属性 a_i 的工作节点，并且对于离开 v的任意边 d，子树 Γ 中与 d 对应的所有节点都已处理完毕。设 $a_i \notin A(R_{SR}(S))$，且 G 是 Γ中与离开 v 并标记为符号 $*$的边 d 相对应的子树。若 v 是 Γ的根节点，则从 Γ 中移除除子树 G之外的所有节点和边。设 v 不是根节点，且 d' 是一条进入 v的边。我们从与d' 对应的子树中移除除子树 G 之外的所有节点和边，并将 d' 连接到 G的根节点。

$a_i \in A(R_{SR}(S))$。我们处理离开 v的所有边。设边 d 离开 v，且标记为数字 δ。若 $\delta \in EV_{R_{SR}(S)}(a_i)$，则保持 d 不变。若 $\delta \notin EV_{R_{SR}(S)}(a_i)$，则移除 d 及其对应的子树。我们将处理完 Γ的所有节点后得到的树记为 Γ'。可以证明，Γ' 是定义在 $R_{SR}(S)$ 上的决策树，它解决问题$ESR(R_{SR}(S))$。显然，$h(\Gamma') \leq h(\Gamma)$。因此，$h_{ESR}(R_{SR}(S)) \leq h_{ESR}(S)$。由此，$h_{ESR}(R_{SR}(S)) = h_{ESR}(S)$。

引理陈述的第二部分，即等式 $h_{EAD}(S) = h_{EAD}(R_{AD}(S))$，可以用类似的方法证明。

□

4 无法改进的上界

本节研究依赖于决策规则系统三个参数的决策树最小深度的无法改进的上界。

首先，我们证明几个引理。

引理10. 设 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则以下不等式成立：

$$\begin{array}{ccccccc} H_{ESR}(n,d,k) & \leq & H_{EAD}(n,d,k) & \leq & H_{EAR}(n,d,k) & \leq & n \\ \vee| & & \vee| & & \vee| & & \\ H_{SR}(n,d,k) & \leq & H_{AD}(n,d,k) & \leq & H_{AR}(n,d,k), & & \end{array}$$

$$H^R_{SR}(n,d,k) \leq H^R_{ESR}(n,d,k) \leq n, H^R_{AD}(n,d,k) \leq H^R_{EAD}(n,d,k) \leq n.$$

证明。所考虑的不等式可由引理 3 立即得出。 □

引理 11. 设 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则以下不等式成立：

$$H_{SR}(n,d,k) \geq H^R_{SR}(n,d,k), H_{ESR}(n,d,k) \geq H^R_{ESR}(n,d,k),$$
$$H_{AD}(n,d,k) \geq H^R_{AD}(n,d,k), H_{EAD}(n,d,k) \geq H^R_{EAD}(n,d,k).$$

证明. 所讨论的不等式可由显然的包含关系 $\Sigma_{SR} \subset \Sigma$ 和 $\Sigma_{AD} \subset \Sigma$ 得出。

□

引理12. 设 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则

$$H^R_{SR}(n,d,k) = H_{SR}(n,d,k) = \begin{cases} 1, & if\ d = 1, \\ d, & if\ k = 1, \\ n, & if\ k > 1\ and\ d > 1. \end{cases}$$

证明。令 $S \in \Sigma$ 和 $d(S) = 1$。令 $a_i \in A(S)$。显然，对于任意 $\delta \in V_S(a_i)$，系统 S包含一条形式为 $(a_i = \delta) \rightarrow \sigma$ 的规则 r_δ。令 $V_S(a_i) = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$。我们将由 Γ 表示一个定义在 S 上的决策树，它由一个标记了属性 a_i 的节点 v_0、一个标记了集合 $\{r_{\delta_j}\}$ 的节点 v_j，以及一条边 d_j 组成；该边从节点 v_0 出发，进入节点 v_j，并标记数字 δ_j，$j = 1, \ldots, m$。可以证明，Γ 求解问题 $SR(S)$，且 $h(\Gamma) = 1$。因此，$h_{SR}(S) \leq 1$。利用引理 11，我们得到$H^R_{SR}(n,1,k) \leq H_{SR}(n,1,k) \leq 1$。考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_1 = 0) \rightarrow$

$0, \ldots, (a_1 = k-1) \to 0, (a_2 = 0) \to 0, (a_3 = 0) \to 0, \ldots, (a_n = 0) \to 0\}$。显然，$S \in \Sigma_{SR}$, $n(S) = n$, $d(S) = 1$, $k(S) = k$，且 $h_{SR}(S) \geq 1$。因此，$H^R_{SR}(n, 1, k) \geq 1$。于是，$H^R_{SR}(n, 1, k) = H_{SR}(n, 1, k) = 1$。

令 $S \in \Sigma$ 和 $k(S) = 1$。可以证明，值 $h_{SR}(S)$ 等于 S中的一条规则的最小长度。利用这一事实和引理 11，我们得到 $H^R_{SR}(n, d, 1) \leq H_{SR}(n, d, 1) \leq d$。考虑一个决策规则系统 $S = \{(a_i = 0) \wedge \cdots \wedge (a_{i+d-1} = 0) \to i : i = 1, \ldots, n-d+1\}$。显然，$S \in \Sigma_{SR}$, $n(S) = n$, $d(S) = d$, $k(S) = 1$，且 $h_{SR}(S) = d$。因此，$H^R_{SR}(n, d, 1) \geq d$ 且 $H^R_{SR}(n, d, 1) = H_{SR}(n, d, 1) = d$。

令 $k > 1$ 和 $d > 1$。现在我们证明 $H^R_{SR}(n, d, k) \geq n$。考虑一个决策规则系统

$$S = \{(a_1 = 1) \wedge \cdots \wedge (a_d = 1) \to 0, (a_1 = 1) \wedge (a_2 = 0) \to 1, (a_2 = 1) \wedge (a_3 = 0) \to 2, \ldots,$$
$$(a_{n-1} = 1) \wedge (a_n = 0) \to n-1, (a_n = 1) \wedge (a_1 = 0) \to n,$$
$$(a_1 = 2) \to 0, \ldots, (a_1 = k-1) \to 0\}.$$

显然，$S \in \Sigma_{SR}$, $n(S) = n$, $d(S) = d$，且 $k(S) = k$。设 Γ 是一棵决策树，其解决问题 $SR(S)$，并且对于该树有 $h(\Gamma) = h_{SR}(S)$。设 $\delta = (0, \ldots, 0) \in V(S)$，并令 ξ 为中一条完备路径，使得 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。显然，$S$ 中不存在对 δ 可实现的规则。因此，ξ 的终端节点标记为空决策规则集，并且对于任意规则 $r \in S$，方程组 $K(r) \cup K(\xi)$ 不一致。假设对于某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，方程 $a_i = 0$ 不属于 $K(\xi)$。那么方程组 $K(r_i) \cup K(\xi)$ 是一致的，其中 r_i 是 S 中右侧等于 i 的规则，但这是不可能的。因此，$h(\xi) \geq n$, $h(\Gamma) \geq n$，且 $h_{SR}(S) \geq n$。于是$H^R_{SR}(n, d, k) \geq n$。利用引理 10 和 11，我们得到 $H^R_{SR}(n, d, k) = H_{SR}(n, d, k) = n$。

□

引理 13 .设 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则 $H^R_{ESR}(n, d, k) = n$ 且 $H^R_{AD}(n, d, k) = n$.

证明。考虑一个决策规则系统 $S = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 = \{(a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_d = 0) \to 0, (a_{d+1} = 0) \to d+1, \ldots\ldots, (a_n = 0) \to n\}$ 且 $S_2 = \{(a_1 = 1) \to n+1, \ldots\ldots, (a_1 = k-1) \to n+k-1\}$。若 $k = 1$，则 $S_2 = \emptyset$。显然，$S \in \Sigma_{SR} \cap \Sigma_{AD}$、$n(S) = n$、$d(S) = d$，且 $k(S) = k$。

设 Γ_1 是一个决策树，它解决问题 $AD(S)$，且满足 $h(\Gamma_1) = h_{AD}(S)$。

设 $\delta = (0, \ldots, 0) \in V(S)$，并且 ξ 是 Γ_1 中的一条完整路径，满足 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。考虑到 Γ_1 解决问题 $AD(S)$，可以证明这条路径的终端节点标记为集合 S_1，并且对于任意 $r \in S_1$，$K(r) \subseteq K(\xi)$。因此，$h(\xi) \geq n$。于是$h(\Gamma_1) \geq n$，且 $h_{AD}(S) \geq n$。因此，$H^R_{AD}(n, d, k) \geq n$。利用引理 10，可得 $H^R_{AD}(n, d, k) = n$。

设 Γ_2 是一棵决策树，它解决问题 $ESR(S)$，且满足 $h(\Gamma_2) = h_{ESR}(S)$。设 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ 是来自 $EV(S)$ 的一个元组，使得 $\delta_1 = \cdots = \delta_d = 0$ 且 $\delta_{d+1} = \cdots = \delta_n = *$。设 ξ 是 Γ_2 中一条完整路径，满足 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。我们将决策规则 $(a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_d = 0) \to 0$ 记作 r_0。显然，来自 S 的唯一可实现于元组 δ 的决策规则是 r_0。考虑到 Γ_2 解决了问题 $ESR(S)$，可得 $K(r_0) \subseteq K(\xi)$。设 $\xi = v_1, d_1, \ldots, v_m, d_m, v_{m+1}$。对于 $i = 1, \ldots, d$，设 j_i 是集合 $\{1, \ldots, m\}$ 中满足节点 v_{j_i} 标记有属性 a_i 的最小数。设 i_0 是 $\{1, \ldots, d\}$ 中满足 $j_{i_0} = \max\{j_1, \ldots, j_d\}$ 的一个数。考虑

来自 $EV(S)$ 的元组 $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$，使得 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{i_0-1} = \sigma_{i_0+1} = \cdots = \sigma_d = 0$ 且 $\sigma_{i_0} = \sigma_{d+1} = \cdots = \sigma_n = *$。设 ξ' 是 Γ_2 中一条完整路径，满足 $K(\xi') \subseteq K(S, \bar{\sigma})$。显然，来自 S 的决策规则均无法在元组 $\bar{\sigma}$ 上实现。考虑到 Γ_2 解决了问题 $ESR(S)$，可得方程组 $K(r) \cup K(\xi')$ 对任意 $r \in S$ 都是不一致的。显然，路径 ξ 和 ξ' 有 j_{i_0} 个公共节点 $v_1, \ldots, v_{j_{i_0}}$。因此 $a_1, \ldots, a_d \in A(\xi')$。假设对于某个 $j \in \{d+1, \ldots, n\}$，有 $a_j \notin A(\xi')$。那么方程组 $K((a_j = 0) \rightarrow j) \cup K(\xi')$ 是一致的，这不可能。因此 $|A(\xi')| = n$ 且 $h(\xi') \geq n$。于是 $h(\Gamma_2) \geq n$, $h_{ESR}(S) \geq n$，并且 $H^R_{ESR}(n, d, k) \geq n$。利用引理10，可得 $H^R_{ESR}(n, d, k) = n$。 □

定理1。设 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。那么

$$H^R_{SR}(n,d,k) = H_{SR}(n,d,k) = \begin{cases} 1, & if\ d = 1, \\ d, & if\ k = 1, \\ n, & if\ k > 1\ and\ d > 1 \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} H^R_{ESR}(n,d,k) = H^R_{AD}(n,d,k) = H^R_{EAD}(n,d,k) = H_{AD}(n,d,k) = H_{AR}(n,d,k) \\ = H_{ESR}(n,d,k) = H_{EAD}(n,d,k) = H_{EAR}(n,d,k) = n. \end{aligned}$$

证明。定理的第一个陈述由引理12得出。第二个陈述由引理10、11和13得出。 □

备注 3。请注意，定理1中提到的等式 $H_{AR}(n, d, k) = n$ 是在[24]中得到的。定理1中提到的等式 $H_{EAR}(n, d, k) = n$ 发表于 [26]，但未附证明。

5 无法改进的下界

本节中，我们研究依赖于决策规则系统三个参数的决策树最小深度的不可改进下界。

首先，我们考虑两个简单的陈述。

Le引理 14. 设 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则下列不等式成立：

$$\begin{array}{ccccccc} h_{ESR}(n,d,k) & \leq & h_{EAD}(n,d,k) & \leq & h_{EAR}(n,d,k) & \leq & n \\ \vee| & & \vee| & & \vee| & & \\ h_{SR}(n,d,k) & \leq & h_{AD}(n,d,k) & \leq & h_{AR}(n,d,k), & & \end{array}$$

$$h^R_{SR}(n,d,k) \leq h^R_{ESR}(n,d,k) \leq n, h^R_{AD}(n,d,k) \leq h^R_{EAD}(n,d,k) \leq n.$$

证明。所讨论的不等式可由引理 3 立即推出。 □

引理15。设 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则以下不等式成立：

$$\begin{aligned} h_{SR}(n,d,k) \leq h^R_{SR}(n,d,k), h_{ESR}(n,d,k) \leq h^R_{ESR}(n,d,k), \\ h_{AD}(n,d,k) \leq h^R_{AD}(n,d,k), h_{EAD}(n,d,k) \leq h^R_{EAD}(n,d,k). \end{aligned}$$

证明。 所讨论的不等式可由显然的包含关系 $\Sigma_{SR} \subset \Sigma$ 和 $\Sigma_{AD} \subset \Sigma$推出。

□

5.1 $h_{SR}(n,d,k)$的界、 $h_{AD}(n,d,k)$的界、 $h_{ESR}(n,d,k)$的界、 $h_{EAD}(n,d,k)$的界、$h^R_{SR}(n,d,k)$的界以及 $h^R_{AD}(n,d,k)$的界

引理 16. 设 n、 d和 $k \in \omega \setminus \{0\}$ 以及 $d \leq n$。那么

$$h_{SR}(n,d,k) = h_{AD}(n,d,k) = h_{ESR}(n,d,k) = h_{EAD}(n,d,k) = 0.$$

证明。 设 $C \in \{SR, AD, ESR, EAD\}$。现在我们考虑一个决策规则系统

$$S = \{\to 0, (a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_d = 0) \to 0, (a_{d+1} = 0) \to 0, \ldots, (a_n = 0) \to 0, \\ (a_1 = 1) \to 0, \ldots, (a_1 = k-1) \to 0\}.$$

显然， $n(S) = n$， $d(S) = d$， 且 $k(S) = k$。设 Γ 是一个仅由一个节点组成的决策树，该节点标记有决策规则集 $\{\to 0\}$。容易证明，Γ 解决了问题 $C(S)$。因此， $h_C(n, d, k) \leq 0$。显然， $h_C(n, d, k) \geq 0$。因此，$h_C(n, d, k) = 0$。

□

引理 17. 设 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。那么

$$h^R_{SR}(n,d,k) = h^R_{AD}(n,d,k) = \begin{cases} n, & \text{if } d = n, \\ 1, & \text{if } d \neq n. \end{cases}$$

证明。设 $S \in \Sigma_{SR}$, $n(S) = n$, $d(S) = n$， 且 $k(S) = k$。设 $A(S) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$。那么，存在一个来自 S 的决策规则 r_0，其形式为 $(a_{i_1} = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{i_n} = \delta_n) \to \sigma$。设$\Gamma$ 是一棵决策树，它解决问题 $SR(S)$，且满足 $h(\Gamma) = h_{SR}(S)$。设 $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$，且 ξ是 Γ中的一条完整路径，使得 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。由于 S是一个SR-约简的决策规则系统，对于元组 δ，只有来自 S 且满足 $K(r) = K(r_0)$ 的决策规则 r 是可实现的。由于 Γ 解决问题 $SR(S)$，因此 $K(r_0) \subseteq K(\xi)$。于是 $h(\xi) \geq n$， $h(\Gamma) \geq n$， $h_{SR}(S) \geq n$， 且 $h^R_{SR}(n, n, k) \geq n$。利用引理 14，可得 $h^R_{SR}(n, n, k) = n$。

设 $S \in \Sigma_{AD}$, $n(S) = n$, $d(S) = n$， 且 $k(S) = k$。设 $A(S) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$。那么，存在一条来自 S、形式为 $(a_{i_1} = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{i_n} = \delta_n) \to \sigma$ 的决策规则 r_0。设Γ 是一棵决策树，它求解问题 $AD(S)$，且满足 $h(\Gamma) = h_{AD}(S)$。设 $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$，并设 ξ 是 Γ中的一条完整路径，使得 $K(\xi) \subseteq K(S, \delta)$。显然， r_0 对元组 δ是可实现的。考虑到 S 是一个 AD-约简决策规则系统，我们可知，任何与 r_0 不同且对元组δ 可实现的规则 $r \in S$，其右侧都不同于 σ。考虑到 Γ 求解问题$AD(S)$，我们可得 $K(r_0) \subseteq K(\xi)$。因此， $h(\Gamma) \geq n$， $h_{AD}(S) \geq n$，且 $h^R_{AD}(n, n, k) \geq n$。利用引理 14，我们可得 $h^R_{SR}(n, n, k) = n$。

设 $d < n$。考虑决策规则系统 $S = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 = \{(a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_d = 0) \to 0, (a_{d+1} = 0) \to 0, \ldots\ldots, (a_n = 0) \to 0\}$且 $S_2 = \{(a_1 = 1) \to 0, \ldots\ldots, (a_1 = k-1) \to 0\}$。如果 $k = 1$， 则 $S_2 = \emptyset$。显然， $S \in \Sigma_{SR} \cap \Sigma_{AD}$, $n(S) = n$,$d(S) = d$， 并且 $k(S) = k$。记 Γ 为一棵由节点 v_1、 v_2 以及从 v_1 离开并进入 v_2的边d 组成的决策树。节点 v_1 标记为属性 a_n， 节点 v_2 被

标记为决策规则集合 $\{(a_n = 0) \rightarrow 0\}$，边 d 标记为数字 0。可以证明， $h(\Gamma) = 1$ ，并且决策树 Γ 解决了问题 $SR(S)$ 和 $AD(S)$。因此 $h^R_{SR}(n,\ d,\ k) \leq 1$，且 $h^R_{AD}(n,\ d,\ k) \leq 1$。

设 $S \in \Sigma_{SR}$ 和 $n(S) > 0$。那么 S 不包含长度为 0 的决策规则。利用这一事实，可以证明 $h_{SR}(S) \geq 1$。因此，如果 $d < n$，则 $h^R_{SR}(n,\ d,\ k) = 1$。

设 $S \in \Sigma_{AD}$ 和 $n(S) > 0$。那么 S 包含一个形式为 $(a_{i_1} = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{i_m} = \delta_m) \rightarrow \sigma$，其中 $m > 0$。考虑到 $S \in \Sigma_{AD}$，我们得到 S不包含形式为 $\rightarrow \sigma$ 的决策规则。利用这些考虑，可以证明$h_{AD}(S) \geq 1$。因此，如果 $d < n$，则 $h^R_{AD}(n,\ d,\ k) = 1$。

□

5.2 $h_{AR}(n,\ d,\ k)$ 和 $h_{EAR}(n,\ d,\ k)$ 的界

引理 18. 设 S 是一个决策规则系统， S' 是系统S的非空子系统。那么 $h_{AR}(S) \geq h_{AR}(S')$。

证明。显然，当 $n(S) = 0$ 时，所考虑的不等式成立。设 $n(S) > 0$。

设 Γ 是一棵决策树，它解决问题 $AR(S)$，且满足 $h(\Gamma) = h_{AR}(S)$。从根节点开始，我们将处理树 Γ 中的所有工作节点。设 v 是一个标记有属性 a_t 的工作节点。设 $a_t \in A(S')$。保留所有从 v 出发且标记为集合 $V_{S'}(a_t)$ 中数字的边。删除从 v 出发的所有其他边，以及与这些边对应的子树。设 $a_t \notin A(S')$，并令 δ 为 $V_S(a_t)$ 中的最小数字。删除从 v 出发的所有边及其对应的子树，但标记为 δ 的边除外。将处理完所有工作节点后从 Γ 得到的树记为 Γ_0。

现在我们处理树 Γ_0 中的所有节点。设 v 是一个标记有属性 a_t 的工作节点。若 $a_t \in A(S')$，则保持节点 v 不变。设 $a_t \notin A(S')$。若 v 是树 Γ_0 的根节点，则删除节点 v 及其出边。设 v 不是根节点。设 d_0 是进入 v 的边， d_1 是从节点 v 出发的边。令 d_1 进入节点 v_1。从 Γ_0 中删除节点 v 和边 d_1，并将边 d_0 接到节点 v_1 上。设 v 是一个标记有决策规则集合 B 的终端节点。将集合 B 替换为集合 $B \cap S'$。将所得的树记为 Γ'。

可以证明， Γ' 是决策规则系统 S'上的o-树。现证明 Γ' 解决问题 $AR(S')$。设 ξ' 是 Γ' 中的一条具有相容方程组 $K(\xi')$的完整路径。则存在 Γ 中的一条完整路径 ξ ，满足以下条件：$\tau(\xi') = \tau(\xi) \cap S'$， $K(\xi') \subseteq K(\xi)$，并且集合 $K(\xi) \setminus K(\xi')$中的所有方程均具有形式$a_t = \delta$，其中 $a_t \notin A(S')$，且 δ 是集合 $V_S(a_t)$中的最小数。容易证明，方程组 $K(\xi)$是一致的。设 $r \in \tau(\xi')$。则 $r \in \tau(\xi)$。因此$K(r) \subseteq K(\xi)$，从而 $K(r) \subseteq K(\xi')$。设 $r \in S' \setminus \tau(\xi')$。则 $r \in S \setminus \tau(\xi)$。于是，系统 $K(r) \cup K(\xi)$是不一致的。因此，系统 $K(r) \cup K(\xi')$也不一致。由此得到，Γ' 解决问题 $AR(S')$。显然， $h(\Gamma') \leq h(\Gamma)$。因此， $h_{AR}(S') \leq h(\Gamma) = h_{AR}(S)$。

□

引理 19. 设 n、 d、 $k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则

(a) 如果 $k = 1$ 或 $d = 1$，那么 $h_{AR}(n, d, k) = n$。*(b)* 如果 $k \geq 2$ 且 $d \geq 2$，那么 $h_{AR}(n, d, k) \geq$ 最大 $\left\{d, \frac{n}{k^d}(k-1)\right\}$。

证明。(a) 设 S 为一个具有 $n(S) = n, d(S) = d$，以及 $k(S) = k$的决策规则系统。

设 $k = 1$ 和 Γ 为一棵决策树，该树解决问题 $AR(S)$，并且满足$h(\Gamma) = h_{AR}(S)$。显然，决策树 Γ 恰好有一条完整路径 ξ。该路径的终端节点标记为集合 S，并且对于任意规则 $r \in S$，有 $K(r) \subseteq K(\xi)$。显然，$h(\xi) \geq n$、$h(\Gamma) \geq n$，以及 $h_{AR}(S) \geq n$。考虑到 S 是一个满足 $k(S) = 1$的任意决策规则系统，我们得到 $h_{AR}(n, d, 1) \geq n$。根据引理 14，$h_{AR}(n, d, 1) = n$。

设 $d = 1$。可以证明，在此情况下 $\beta(S) = n$。根据引理 7，$h_{AR}(S) \geq n$。考虑到 S 是一个满足 $d(S) = 1$的任意决策规则系统，我们得到$h_{AR}(n, 1, k) \geq n$。由此不等式和引理 14 可知，$h_{AR}(n, 1, k) = n$。

(b) 设 S 为一个决策规则系统。由引理 8 可得 $h_{AR}(S) \geq d(S)$。由于 S 是任意的决策规则系统，因此 $h_{AR}(n, d, k) \geq d$。

我们将对 d 使用归纳法证明：对于任意满足 $d \leq n$ 的 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$，以下不等式成立：

$$h_{AR}(n, d, k) \geq \frac{n(k-1)}{k^d}. \tag{1}$$

由上文证明的等式 $h_{AR}(n, 1, k) = n$ 可知，当 $d = 1$ 时，不等式 (1) 成立。假设对于某个 $d \geq 1$，不等式 (1) 对任意 $d', 1 \leq d' \leq d$ 均成立。现在证明 (1) 对 $d+1$ 成立。设 S 是一个决策规则系统，且 $n(S) = n, d(S) = d+1$，以及 $k(S) = k$。我们选取系统 S 的一个子系统 S'，使得对于任意系统 $S_1 \subset S'$，$A(S') = A(S)$ 且 $A(S_1) \neq A(S)$。显然，$n(S') = n$, $d(S') \leq d + 1$，以及 $k(S') \leq k$。利用引理 18，我们得到

$$h_{AR}(S) \geq h_{AR}(S'). \tag{2}$$

设 $S' = \{r_1, \ldots, r_p\}$。显然，对于 $j = 1$、.....、p，方程组 $K(r_j)$ 含有一个方程 $a_{i_j} = \sigma_j$，使得 $a_{i_j} \notin A(S') \setminus A(r_j)$。因此

$$p = \left|S'\right| \leq n. \tag{3}$$

假设 $|S'| \leq {}^{n}_{(k-1)\,k}$。记 $\alpha = \{a_{i_1} = \sigma_1, \ldots, a_{i_p} = \sigma_p\}$。显然，$\alpha$ 是一个相容方程组。现在考虑决策规则系统 S'_α（相应定义见引理4之前）。记 $n_0 = n(S'_\alpha)$、$d_0 = d(S'_\alpha)$ 和 $k_0 = k(S'_\alpha)$。可以证明 $n_0 = n - p \geq n - {}^{n}_{(k-1)\,k} = {}^{n}_{k}$、$1 \leq k_0 \leq k$ 和 $1 \leq d_0 \leq d$。令 $k_0 = 1$ 或 $d_0 = 1$。利用引理陈述的 (a) 部分，可得 $h_{AR}(S'_\alpha) \geq n_0 \geq {}^{n}_{k} \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^d} = {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。

令 $k_0 \geq 2$ 和 $d_0 \geq 2$。在此情况下，$d \geq 2$。根据归纳假设，$h_{AR}(S'_\alpha) \geq {}^{n_0}_{(k_0-1)\,k_0^{d_0}} \geq {}^{k_0-1}_{(k_0-1)\,k_0^{d}}$。现在我们证明 ${}^{k_0-1}_{k_0^d} \geq {}^{k-1}_{k^d}$。为此，对于 $x \geq 2$，考虑函数 $f(x) = {}^{x-1}_{x^d}$ 及其导数 $f'(x) = {}^{1-d}_{x^d} + {}^{d}_{x^{d+1}}$。容易证明，$f'(x) < 0$ 当且仅当 $x > 2$。利用中值定理和不等式 $2 \leq k_0 \leq k$，可得$f(k_0) \geq f(k)$。因此 $h_{AR}(S'_\alpha) \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。根据引理 6，$h_{AR}(S') \geq h_{AR}(S'_\alpha)$。由上述关系和 (2) 可知，$h_{AR}(S) \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。

现在假设 $|S'| > {}^{n}_{(k-1)\,k}$。记 $m = n - |S'|$。由（3）可得$m \geq 0$。令 $m = 0$。那么，不难注意到，$d(S') = 1$。利用该

引理陈述的(a)部分，我们得到 $h_{AR}(S') \geq n(S') = |S'| \geq {}^{n}_{(k-1)\,k} \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。利用（2），我们得到$h_{AR}(S) \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。

现在假设 $m > 0$。记 $B = A(S) \setminus \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}\}$。显然， $|B| = m$。设 $B = \{a_{l_1}, \ldots, a_{l_m}\}$和 $l_1 < \cdots < l_m$。设 $j \in \{1, \ldots, m\}$。现在定义一个集合 V_j。如果$\left|V_{S'}(a_{l_j})\right| = k$，那么 $V_j = V_{S'}(a_{l_j})$。如果 $\left|V_{S'}(a_{l_j})\right| < k$，那么 V_j是 ω的一个子集，使得 $|V_j| = k$且 $V_{S'}(a_{l_j}) \subset V_j$。记作 $V = V_1 \times \cdots \times V_m$。设 $q = d(S') - 1$。显然， $q \leq m$且 $q \leq d$。还显然，对于任意决策规则 $r \in S'$，至少存在 k^{m-q} 个元组$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in V$，使得方程组 $K(r) \cup \{a_{l_1} = \delta_1, \ldots, a_{l_m} = \delta_m\}$是一致的。对于每个 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in V$，令 $N(\delta)$表示满足系统 $K(r) \cup \{a_{l_1} = \delta_1, \ldots, a_{l_m} = \delta_m\}$ 一致的决策规则 $r \in S'$ 的数量。记作 $N = \sum_{\bar{\delta} \in V} N(\delta)$。显然， $N \geq |S'|\, k^{m-q} \geq {}^{k^m}_{(k-1)_{k^{q+1}}}$。还显然，存在一个元组 $\bar{\delta}' \in V$，使得 $N(\bar{\delta}') \geq {}^{N}_{|V|} = {}^{N}_{k^m} \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{q+1}} \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。令 $\bar{\delta}' = (\delta'_1, \ldots, \delta'_m)$。现在定义一个元组$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$。设 $j \in \{1, \ldots, m\}$。如果 $\delta'_j \in V_{S'}(a_{l_j})$，那么 $\delta_j = \delta'_j$。如果 $\delta'_j \notin V_{S'}(a_{l_j})$，那么 δ_j是集合 $V_{S'}(a_{l_1})$ 中的最小数。容易证明， $N(\delta) \geq N(\delta') \geq n(k-1)\,k^{d+1}$。记作 $\alpha = \{a_{l_1} = \delta_1, \ldots, a_{l_m} = \delta_m\}$，并考虑决策规则系统 S'_α。可以证明， $k(S'_\alpha) = 1$, $d(S'_\alpha) = 1$，且 $n(S'_\alpha) = N(\bar{\delta}) \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。利用引理陈述的 (a) 部分，我们得到 $h_{AR}(S'_\alpha) \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。根据引理 6， $h_{AR}(S') \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。由这个不等式和 (2) 可得， $h_{AR}(S) \geq {}^{n}_{(k-1)\,k^{d+1}}$。因此，不等式 (1) 对 $d+1$成立。由此，不等式 (1) 成立。 □

引理 20. 设 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$, $d \leq n$, $d \geq 2$ 和 $k \geq 2$。则 $h_{EAR}(n, d, k) \leq d + {}^{n}_{k^{d-1}}$。

证明。现在我们描述一个决策规则系统 S，它具有 $A(S) = \{a_1, \ldots, a_n\}$。记作$E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$。考虑一个划分 $\{a_d, \ldots, a_n\} = \bigcup_{\bar{\delta} \in E_k^{d-1}} B(\delta)$，使得$\left|B(\bar{\delta})\right| \leq \left\lceil {}^{n-d+1}_{k^{d-1}} \right\rceil$对任意 $\bar{\delta} \in E_k^{d-1}$ 都成立（我们假设，对于任意 $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2 \in E_k^{d-1}$, $\delta_1 \neq \delta_2$， $B(\bar{\delta}_1) \cap B(\bar{\delta}_2) = \emptyset$）。显然，该划分中的某些集合可能为空，但至少有一个集合非空。令 $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{d-1}) \in E_k^{d-1}$。描述一个决策规则系统 $S(\bar{\delta})$。如果 $B(\delta) = \emptyset$，则 $S(\delta) = \{(a_1 = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{d-1} = \delta_{d-1}) \to 0\}$。如果 $B(\delta) \neq \emptyset$，则 $S(\delta) = \{(a_1 = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{d-1} = \delta_{d-1}) \wedge (a_i = 0) \to 0 : a_i \in B(\delta)\}$。记作 $S = \bigcup_{\bar{\delta} \in E_k^{d-1}} S(\delta)$。显然， $n(S) = n$、 $d(S) = d$，且 $k(S) = k$。

我们来描述一棵决策树 Γ。首先，计算属性 $a_1, \ldots, a_{d-1}$的值。令 $a_1 = \delta_1, \ldots, a_{d-1} = \delta_{d-1}$。如果存在 $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ 使得 $\delta_i = *$，那么 Γ 的输出为空决策规则集。令 $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{d-1}) \in E_k^{d-1}$。如果 $B(\bar{\delta}) = \emptyset$，那么 Γ 的输出为集合 $S(\delta)$。令 $B(\delta) \neq \emptyset$ 且 $B(\delta) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$。计算属性 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$的值。令 $a_{i_1} = \sigma_1, \ldots, a_{i_m} = \sigma_m$。那么 Γ 的输出为决策规则集合 $\{(a_1 = \delta_1) \wedge \cdots \wedge (a_{d-1} = \delta_{d-1}) \wedge (a_{i_j} = 0) \to 0 : j \in \{1, \ldots, m\}, \sigma_j = 0\}$。可以证明， Γ 求解了问题 $EAR(S)$，并且 $h(\Gamma) \leq d - 1 + \left\lceil {}^{n-d+1}_{k^{d-1}} \right\rceil \leq d + {}^{n}_{k^{d-1}}$。因此 $h_{EAR}(n, d, k) \leq d + {}^{n}_{k^{d-1}}$。 □

引理 21. 设 n、 d、 $k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则 *(a)* 如果 $k = 1$ 或 $d = 1$，那么 $h_{AR}(n, d, k) = h_{EAR}(n, d, k) = n$。

(b) 如果 $k \geq 2$ 和 $d \geq 2$，那么

$$\max\left\{d, \frac{n(k-1)}{k^d}\right\} \leq h_{AR}(n,d,k) \leq h_{EAR}(n,d,k) \leq d + \frac{n}{k^{d-1}}.$$

证明。由引理 14 可得 $h_{AR}(n,d,k) \leq h_{EAR}(n,d,k) \leq n$。利用这些不等式以及引理 19 和引理 20，即可得到所考虑的结论。 □

5.3 $h^R_{ESR}(n,d,k)$ 和 $h^R_{EAD}(n,d,k)$的界

引理 22。设 $C \in \{SR, AD\}$，$n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则 $h^R_{EC}(n,d,k)$ ≥最大值 $\left\{d, \sqrt[d]{(nk)_k} - d\right\}$。

证明。设 $S \in \Sigma_C$。利用引理 8，可得 $h_{EC}(S) \geq d(S)$。由于 S是任意的C-约简系统，不等式 $h^R_{EC}(n,d,k) \geq d$成立。

我们通过对 d进行归纳法证明：对于满足 $d \leq n$的任意 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$，以下陈述成立。设 $S' \in \Sigma_C$, $S \subseteq S'$, $n(S) = n$, $k(S) = k$，且 $d(S) = d$。则

$$h_{EC}(S') \geq \frac{(nk)^{1/d}}{k} - d.$$

令 $S' \in \Sigma_C$, $S \subseteq S'$, $n(S) = n$, $k(S) = k$，以及 $d(S) = 1$。显然，$\beta(S') \geq \beta(S) = n$。下面证明 $I_C(S') = S'$（相应定义见引理 7 之前）。若 $C = SR$，则 S' 不同时包含长度为 0 的规则和长度大于 0 的规则。若 $C = AD$，则 S' 不同时包含右端项相同、长度为 0 的规则和长度大于 0 的规则。利用注 1 和注 2，可得 $I_C(S') = S'$。由引理 7，$h_{EC}(S') \geq n$。因此，对于 $d = 1$，所考虑的结论成立。

假设对于某个 $d \geq 1$，该陈述对每个 d'、$1 \leq d' \leq d$ 都成立。我们证明它对 $d+1$ 也成立。令 $S' \in \Sigma_C$、$S \subseteq S'$、$n(S) = n$、$k(S) = k$，且 $d(S) = d+1$。现在我们证明

$$h_{EC}(S') \geq \frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k} - d - 1. \tag{4}$$

根据上述证明，$h_{EC}(S') \geq d(S') \geq d(S) \geq 2$。因此，如果 $2 \geq \sqrt[d+1]{(nk)_k} - d - 1$，则不等式 (4) 成立。假设 $\sqrt[d+1]{(nk)_k} - d - 1 > 2$。于是

$$\frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k} > 2. \tag{5}$$

记 $m = \beta(S)$。显然，$\beta(S') \geq \beta(S)$。根据注 1 和注 2，以及 $S' \in \Sigma_C$ 这一事实，可得 $I_C(S') = S'$。由引理 7 可知，$h_{EC}(S') \geq m$。令 $m \geq \sqrt[d+1]{(nk)_k} - d - 1$。于是，不等式 (4) 成立。现在假设 $\sqrt[d+1]{(nk)_k} - d - 1 > m$。那么

$$\frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k} > m. \tag{6}$$

令 $B = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$ 为超图 $G(S$ 的最小基数节点覆盖。对于任意 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $\delta \in V_S(a_{i_j})$，我们用 $S(a_{i_j} = \delta$ 表示来自 S、左侧含有方程 $a_{i_j} = \delta$ 的决策规则集合。由于 B 是超图 $G(S$ 的节点覆盖，$A(S = \bigcup_{j \in \{1,\ldots,m\}} A(S(a_{i_j} = \delta))$。因此，存在$\delta \in V_S(a_{i_j})$

$j \in \{1, \ldots, m\}$ 以及 $\delta \in V_S(a_{i_j})$，使得 $\left|A(S(a_{i_j} = \delta))\right| \geq \frac{n}{mk}$。利用 (6)，我们得到

$$\left|A(S(a_{i_j} = \delta))\right| > \frac{n}{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}. \tag{7}$$

记 $\alpha = \{a_{i_j} = \delta\}$。考虑决策规则系统 $S'' = R_C(S'_\alpha)$。记 S_0 为从系统 $S(a_{i_j} = \delta)$ 中移除包含在 $S(a_{i_j} = \delta)$ 中的规则左侧的方程 $a_{i_j} = \delta$ 后得到的决策规则系统。记$k_0 = k(S_0)$、$d_0 = d(S_0)$ 和 $n_0 = n(S_0)$。可以证明 $k_0 \leq k$，$d_0 \leq d$，$n_0 = \left|A(S(a_{i_j} = \delta))\right| - 1$，且 $S_0 \subseteq S''$。利用 (7)，我们得到 $n_0 > \frac{n}{(nk)^{\frac{1}{d+1}}} - 1$。记 $q = \frac{n}{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}$。由（5）可得 $n > 2^{d+1}k^d$。因此，我们有 $q = \frac{n}{k^{\frac{d}{d+1}}} > \frac{(2^{d+1}k^d)^{\frac{d}{d+1}}}{k^{\frac{1}{d+1}}} = 2^d k^{d-1} \geq 2^d \geq 2$。利用归纳假设，我们得到$k^{d+1}$

$$h_{EC}(S'') \geq \frac{(n_0 k_0)^{1/d_0}}{k_0} - d_0 \geq \frac{((q-1)k)^{1/d}}{k} - d = \frac{((q-1)k)^{1/d}}{k} + 1 - d - 1.$$

根据引理 9，$h_{EC}(S'') = h_{EC}(S'_\alpha)$。由引理 6 可得 $h_{EC}(S') \geq h_{EC}(S'_\alpha) = 1 - 1 h_{EC}(S'')$。现在我们证明 $\left(\frac{(q-1)k^d}{k}\right)^{\frac{1}{d}} + 1 \geq (qk)^{\frac{1}{d}}$。为此，我们需要证明 $(q-1)^{\frac{1}{d}} + k^{1-\frac{1}{d}} - q^{\frac{1}{d}} \geq 0$。显然，$k^{1-\frac{1}{d}} \geq 1$。现在我们证明 $(q-1)^{\frac{1}{d}} + 1 - q^{\frac{1}{d}} \geq 0$。为此，对于 $x \geq 2$，我们考虑函数 $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{d}} + 1 - x^{\frac{1}{d}}$及其导数$f'(x) = \frac{1}{d}(x-1)^{\frac{d-1}{d}} - \frac{1}{d}x^{\frac{d-1}{d}}$。容易证明，对任意 $x \geq 2$，都有 $f'(x) > 0$。利用中值定理，我们得到对任意 $x \geq 2$，都有 $f(x) \geq f(2)$。显然，$f(2) = 2 - 2^{\frac{1}{d}} \geq 0$。因此，$h_{EC}(S') \geq (qk)^{\frac{1}{d}} - d - 1$。容易证明，$(qk)^{1/d} = (nk)^{\frac{1}{d+1}}$。因此 $h_{EC}(S') \geq (nk)^{\frac{d+1}{k}} - d - 1$。由此，不等式（4）得证。因此，所考虑的命题成立。由此命题可立即推出，对于任意满足 $d \leq n$ 的 $n, d, k \in \omega \setminus \{0\}$，不等式 $h^R_{EC}(n, d, k) \geq (nk)^{1/d} - d$ 成立。

□

引理 23。令 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。则 h^R_{ESR}（n、d、k）$\leq 2d\left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil$ 且 h^R_{EAD}（n、d、k）$\leq 2d\left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil$。

证明。我们对 d 进行归纳，证明对于任意满足 $d \leq n$ 的 n，d，$k \in \omega \setminus \{0\}$，存在一个满足以下条件的 SR-约简决策规则系统 S：S 中所有规则的右端项均等于 0，$n(S) = n$，$d(S) = d$，$k(S) = k$，以及 $h_{ESR}(S) \leq 2d\left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil$。

设 $d=1$。考虑系统 $S=\{(a_1=0)\to 0,\ (a_1=1)\to 0,\ \ldots\ldots,\ (a_1=k-1)\to 0,\ (a_2=0)\to 0,\ \ldots\ldots,\ (a_n=0)\to 0\}$。显然，$S\in\Sigma_{SR}$、$n(S)=n$、$d(S)=1$、$k(S)=k$，且 S 中所有规则的右端项均等于 0。利用引理 14，我们得到 $h_{ESR}(S)\le n$。因此，对于 $d=1$，所述命题成立。假设该命题对于某个 $d\ge 1$ 成立。我们将证明它对于 $d+1$ 也成立。

记 $t=\left\lceil \frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k}\right\rceil$。显然，$t\ge 1$。令 $2(d+1)t\ge n$。考虑一个决策规则系统 $S=\{(a_1=0)\wedge\cdots\wedge(a_{d+1}=0)\to 0, (a_1=1)\to 0,\ldots,(a_1=k-1)\to 0, (a_{d+2}=0)\to 0,\ldots,(a_n=0)\to 0\}$。显然，$n(S)=n$, $d(S)=d+1$, $k(S)=k$,$S\in\Sigma_{SR}$，且 S 中所有规则的右端项均等于 0。利用引理 14，可得 $h_{ESR}(S)\le n\le 2(d+1)t$。因此，在这种情况下，所考虑的命题成立。

现在假设 $2(d+1)t<n$。那么 $n-2t>2dt\ge 2d$. 利用这些不等式，我们得到存在数 $n_0,n_1,\ldots,n_{2tk}\in\omega$，满足以下条件：$\sum_{i=0}^{2tk}n_i=n$, $n_0=2t$, $n_1=d$, 如果$\lceil\frac{n-2t}{2tk}\rceil<d$; 否则为 $d\le n_1\le\lceil\frac{n-2t}{2tk}\rceil$, 且对于 , , , 有$\le\lceil\frac{n-2t}{2tk}\rceil$ $i=2\ \ldots\ 2tk$ —— —— $A'_0\ A'_1\ \ldots\ A'_{2tk}$ 。

显然，存在属性集合 , , , 使得对于任意 $i,j\in\{0,1,\ldots,2tk\}, i\ne j, |A'_i|=n_i$，都有 $A'_i\cap A'_j=\emptyset$；当 $i=0$ =1, $\ldots, 2tk$ 时，$\bigcup_{i=0}^{2tk}A'_i=\{a_1,\ldots,a_n\}$，并且 $A'_0=\{a_1,\ldots,a_{2t}\}$。现在我们定义属性集合 $A_0,A_1,\ldots,A_{2tk}$。令$i\in\{0,1,\ldots,2tk\}$。如果 $A'_i\ne\emptyset$, 那么 $A_i=A'_i$。如果 $A'_i=\emptyset$, 那么 $A_i=\{a_n\}$。显然，$A_0=\{a_1,\ldots,a_{2t}\}, |A_1|\ge d, A_0\cap A_i=\emptyset$，并且当 $i=1=\ldots,2tk$ 时，$A_i\ne\emptyset$；$\bigcup_{i=0}^{2tk}A_i=\{a_1,\ldots,a_n\}$，并且对于 $i=2=\ldots,2tk$,

$$|A_i|\le\left\lceil\frac{n-2t}{2tk}\right\rceil. \tag{8}$$

对于每个 $i\in\{1,\ldots,2tk\}$，定义决策规则系统 S_i，使得 $A(S_i)=A_i$。令$|A_i|\le d$和 $A_i=\{a_{j_1},\ldots,a_{j_m}\}$。则 $S_i=\{(a_{j_1}=0)\wedge\cdots\wedge(a_{j_m}=0)\to 0,\ (a_{j_1}=1)\to 0,\ \ldots\ldots,\ (a_{j_1}=k-1)\to 0\}$。显然，$n(S_i)=|A_i|$、$d(S_i)=|A_i|$、$k(S_i)=k$，来自 S_i 的决策规则的右端项均等于 0，并且 $S_i\in\Sigma_{SR}$。根据引理 14，我们得到 $h_{ESR}(S_i)\le m\le d$。因此

$$h_{ESR}(S_i)\le 2d\left\lceil\frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k}\right\rceil. \tag{9}$$

令 $|A_i|>d$。则 $|A_i|\ge 2$。利用归纳假设，我们得到存在一个满足以下条件的决策规则系统 S_i：$n(S_i)=|A_i|$、$d(S_i)=d$、$k(S_i)=k$、$S_i\in\Sigma_{SR}$，来自 S_i 的决策规则的右端项等于 0，并且

$$h_{ESR}(S_i)\le 2d\left\lceil\frac{(|A_i|\,k)^{1/d}}{k}\right\rceil. \tag{10}$$

现在我们证明系统 S_i 满足不等式 (9)。利用不等式 (8)，我们得到

$$2\le|A_i|\le\left\lceil\frac{n-2t}{2tk}\right\rceil\le\frac{n}{2tk}+1\le\frac{n}{tk}\le\frac{nk}{k(nk)^{\frac{1}{d+1}}}=\frac{n}{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}.$$

由这些关系和不等式 (10) 可得

$$h_{ESR}(S_i) \le 2d \left\lceil \frac{\left(\frac{nk}{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}\right)^{1/d}}{k} \right\rceil = 2d \left\lceil \frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k} \right\rceil.$$

因此，不等式 (9) 成立。

设 $j \in \{1, \ldots, 2t\}$ 和 $\sigma \in \{0, \ldots, k-1\}$。描述一个决策规则系统 $S_{j\sigma}$。令 $i = k(j-1) + \sigma + 1$。我们在 S_i 中每条规则的左侧添加方程 $a_j = \sigma$。我们将得到的决策规则系统记为 $S_{j\sigma}$。记 $S_0 = \{(a_i = \delta) \wedge (a_j = \sigma) \to 0 : 1 \le i < j \le 2t;\ \delta,\ \sigma \in \{0, \ldots, k-1\}\}$。现在考虑决策规则系统

$$S = S_0 \cup \bigcup_{\substack{j \in \{1,\ldots,2t\} \\ \sigma \in \{0,\ldots,k-1\}}} S_{j\sigma}.$$

可以证明，$n(S) = n$, $d(S) = d+1$, $k(S) = k$, $S \in \Sigma_{SR}$，并且 S 中所有规则的右端项都等于 0。

下面描述决策树 Γ 求解问题 $ESR(S)$ 的过程。首先，我们计算属性 a_1、.....、a_{2t} 的值。如果 $a_1 = \cdots = a_{2t} = *$，那么对于所考虑的属性值元组，$S$ 中没有任何规则是可实现的。设存在 $i,\ j \in \{1, \ldots, 2t\}$，使得 $a_i = \delta$ 且 $a_j = \sigma$，其中 $i \ne j$ 且 $\sigma,\ \delta \in \{0, \ldots, k-1\}$。那么，对于所考虑的属性值元组，$S$ 中的规则 $(a_i = \delta) \wedge (a_j = \sigma) \to 0$ 是可实现的。令 $a_1 = \cdots = a_{j-1} = a_{j+1} = \cdots = a_{2t} = *$ 和 $a_j = \sigma$，其中 $\sigma \in \{0, \ldots, k-1\}$。在这种情况下，我们得到，对于所考虑的属性值元组，只有来自 $S_{j\sigma}$ 的规则是可实现的。考虑到 $a_j = \sigma$，我们得到，求解问题 $ESR(S)$ 可归结为求解问题 $ESR(S_i)$，其中 $i = k(j-1) + \sigma + 1$。我们使用具有最小深度的决策树求解问题 $ESR(S_i)$。根据（9），

$$h(\Gamma) \le 2t + 2dt = 2(d+1) \left\lceil \frac{(nk)^{\frac{1}{d+1}}}{k} \right\rceil.$$

因此，所考虑的命题得到了完整证明。

令 $n,\ d,\ k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \le n$。那么存在一个决策规则系统 S，满足以下条件：$n(S) = n$, $d(S) = d$, $k(S) = k$, $S \in \Sigma_{SR}$，来自 S 的所有决策规则的右端项均等于 0，并且 $h_{ESR}(S) \le 2d \left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil$。显然，$S \in \Sigma_{AD}$ 且 $h_{EAD}(S) = h_{ESR}(S)$。因此，以下两个不等式成立：

$$h^R_{ESR}(n,d,k) \le 2d \left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil, h^R_{EAD}(n,d,k) \le 2d \left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil.$$

□

5.4 下界定理

定理 2. 令 n、d、$k \in \omega \setminus \{0\}$ 和 $d \leq n$。那么

(a) $h_{SR}(n,d,k) = h_{AD}(n,d,k) = h_{ESR}(n,d,k) = h_{EAD}(n,d,k) = 0$. *(b)* 若 $k = 1$ 或 $d = 1$，则 $h_{AR}(n,d,k) = h_{EAR}(n,d,k) = n$。若 $k \geq 2$ 且 $d \geq 2$，则

$$\max\left\{d, \frac{n(k-1)}{k^d}\right\} \leq h_{AR}(n,d,k) \leq h_{EAR}(n,d,k) \leq d + \frac{n}{k^{d-1}}.$$

(c) $h^R_{SR}(n,d,k) = h^R_{AD}(n,d,k) = \begin{cases} n, & \text{if } d = n, \\ 1, & \text{if } d \neq n. \end{cases}$

(d) $\max\left\{d, \frac{(nk)^{1/d}}{k} - d\right\} \leq h^R_{ESR}(n,d,k) \leq 2d\left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil$.

(e) $\max\left\{d, \frac{(nk)^{1/d}}{k} - d\right\} \leq h^R_{EAD}(n,d,k) \leq 2d\left\lceil \frac{(nk)^{1/d}}{k} \right\rceil$.

P上界。 该定理的结论可由引理 16、17、21、22 和 2 推出 3. □

注 4。 请注意，定理中提到的 $h_{AR}(n,d,k)$ 的结果发表于[24]。 $h_{EAR}(n,d,k)$ 的结果发表于 [26]，但未附证明。

6 结论

本文得到了决策树最小深度的不可改进的上界和下界，这些决策树用于解决所有规则（AR）、所有决策（AD）、部分规则（SR）问题及其扩展版本（EAR、EAD 和 ESR）。

未来的工作中，我们将研究如何为给定的决策规则系统构造决策树及表示树的无环决策图，并探讨是否可以不构造完整的决策树，而是仅针对给定输入构造该树中的计算路径。

致谢

本出版物所报告的研究得到了阿卜杜拉国王科技大学（KAUST）的支持。

参考文献

[1] Abdelhalim, A., Traor´e, I., Nakkabi, Y.：使用 RBDT- 1 根据规则创建决策树。《计算智能》**32**(2)，216–239（2016年）[2] Abdelhalim, A., Traor´e, I., Sayed, B.：RBDT-1：一种新的基于规则的决策树生成技术。载于：G. Governatori, J. Hall, A. Paschke（编），《规则交换与应用：RuleML 2009 国际研讨会》，美国内华达州拉斯维加斯，2009年11月5日至7日。论文集，计算机科学讲义，第5858卷，第108–121页。Springer（2009年）

[3] AbouEisha, H., Amin, T., Chikalov, I., Hussain, S., Moshkov, M.：《组合优化与数据挖掘的动态规划扩展》，《智能系统参考丛书》，第146卷。Springer（2019年）[4] Alsolami, F., Azad, M., Chikalov, I., Moshkov, M.：《面向多值决策决策表的决策树、抑制树及规则》，《智能系统参考丛书》，第156卷。Springer（2020年）[5] Blum, M., Impagliazzo, R.：通用预言机与预言机类（扩展摘要）。载于：第28届年度计算机科学基础研讨会，美国加利福尼亚州洛杉矶，1987年10月27日至29日，第118–126页。IEEE计算机学会（1987年）[6] Boros, E., Hammer, P.L., Ibaraki, T., Kogan, A.：数值数据逻辑分析。《数学规划》**79**，163–190（1997年）[7]Boros, E., Hammer, P.L., Ibaraki, T., Kogan, A., Mayoraz, E., Muchnik, I.B.：数据逻辑分析的实现。《IEEE知识与数据工程汇刊》**12**(2)，292–306（2000年）[8] Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., Stone, C.J.：《分类与回归树》。Wadsworth and Brooks（1984年）[9] Buhrman, H., de Wolf, R.：复杂性度量与决策树复杂度：综述。《理论计算机科学》**288(1)**，21–43（2002年）[10] Cao, H.E.C., Sarlin, R., Jung, A.：通过最大可满足性学习可解释决策规则。《IEEE Access》**8**，218180–218185（2020年）[11] Chikalov, I., Lozin, V.V., Lozina, I., Moshkov, M., Nguyen, H.S., Skowron, A., Zielosko, B.：《数据分析的三种方法——测试理论、粗糙集与数据逻辑分析》，《智能系统参考丛书》，第41卷。Springer（2013年）[12] F¨urnkranz, J., Gamberger, D., Lavrac, N.：《规则学习基础》。认知技术。Springer（2012年）[13]Gilmore, E., Estivill-Castro, V., Hexel, R.：更具可解释性的决策树。载于：H. Sanjurjo-Gonz´alez, I. Pastor-L´opez, P.G. Bringas, H. Quinti´an, E. Corchado（编），《混合人工智能系统——第16届国际会议，HAIS 2021》，西班牙毕尔巴鄂，2021年9月22日至24日。论文集，计算机科学讲义，第12886卷，第280–292页。Springer（2021年）[14]Hartmanis, J., Hemachandra, L.A.：单向函数、鲁棒性与NP完全集的非同构性。载于：第二届年度复杂性理论结构会议论文集，美国纽约州伊萨卡康奈尔大学，1987年6月16日至19日。IEEE计算机学会（1987年）[15] Imam, I.F., Michalski, R.S.：从决策规则中学习决策树：一种方法及比较研究的初步结果。《智能信息系统杂志》**2**(3)，279–304（1993年）

[16] Imam, I.F., Michalski, R.S.：决策树应从示例还是从决策规则中学习？载于：H.J. Komorowski, Z.W. Ras（编）《智能系统方法论》，第七届国际研讨会 ISMIS '93，挪威特隆赫姆，1993年6月15日至18日，论文集，计算机科学讲义，第689卷，第395–404页。Springer（1993年）[17] Imam, I.F., Michalski, R.S.：决策学习：FRD方法与比较研究。载于：Z.W. Ras, M. Michalewicz（编）《智能系统基础》，第九届国际研讨会 ISMIS '96，波兰扎科帕内，1996年6月9日至13日，论文集，计算机科学讲义，第1079卷，第428–437页。Springer（1996年）[18] Kaufman, K.A., Michalski, R.S., Pietrzykowski, J., Wojtusiak, J.：多任务归纳数据库 VINLEN：初始实现与早期成果。载于：S. Dzeroski, J. Struyf（编）《归纳数据库中的知识发现》，第五届国际研讨会 KDID 2006，德国柏林，2006年9月18日，修订后的精选论文和特邀论文，计算机科学讲义，第4747卷，第116–133页。Springer（2006年）[19] Michalski, R.S., Imam, I.F.：从决策规则中学习面向问题的决策结构：AQDT-2系统。载于：Z.W. Ras, M. Zemankova（编）《智能系统方法论》，第八届国际研讨会 ISMIS '94，美国北卡罗来纳州夏洛特，1994年10月16日至19日，论文集，计算机科学讲义，第869卷，第416–426页。Springer（1994年）[20] Michalski, R.S., Imam, I.F.：关于决策结构的学习。Fundam. Informaticae**31(1)**，49–64（1997年）[21] Molnar, C.：《可解释机器学习：使黑箱模型可解释的指南》，第2版（2022年）。网址：christophm.github.io/interpretable-ml-book/[22] Moshkov, M.：关于计算布尔函数的决策树深度。Fundam. Informaticae **22(3)**，203–215（1995年）[23] Moshkov, M.：确定性与非确定性决策树复杂度的比较分析：全局方法。Fundam. Informaticae**25(2)**，201–214（1996年）[24] Moshkov, M.：决策树与决策规则系统之间的一些关系。载于：L. Polkowski, A. Skowron（编）《粗糙集与计算领域当前趋势》，第一届国际会议 RSCTC'98，波兰华沙，1998年6月22日至26日，论文集，计算机科学讲义，第1424卷，第499–505页。Springer（1998年）[25] Moshkov, M.：用于粗糙计算的确定性与非确定性决策树。Fundam. Informaticae **41(3)**，301–311（2000年）[26] Moshkov, M.：关于决策规则系统向决策树的转换（俄文）。载于：第七届国际研讨会《离散数学及其应用》论文集，A

pp出版物 ，莫斯科，俄罗斯，一月 y 29日 – 2月 y 2, 第1部分 ，pp。21–26。中心

莫斯科国立大学数学与力学系应用研究中心（2001年）[27] Moshkov, M.：关于无限信息系统的分类：取决于决策树和决策规则系统的复杂度。Fundam. Informaticae **54(4)**, 345–368（2003年）[28] Moshkov, M.：确定性与非确定性决策树复杂度的比较分析。局部方法。载于：J.F. Peters, A. Skowron（编）Trans. Rough Sets IV，计算机科学讲义，第3700卷，第125–143页。Springer（2005年）[29] Moshkov, M.：决策树的时间复杂度。载于：J.F. Peters, A. Skowron（编）Trans. Rough Sets III，计算机科学讲义，第3400卷，第244–459页。Springer（2005年）[30] Moshkov, M.：确定性与非确定性决策树的比较分析，智能系统参考丛书，第179卷。Springer（2020年）[31] Moshkov, M., Piliszczuk, M., Zielosko, B.：粗糙集中的部分覆盖、约简与决策规则：理论与应用，计算智能研究，第145卷。Springer（2008年）[32] Moshkov, M., Zielosko, B.：组合机器学习——粗糙集方法，计算智能研究，第360卷。Springer（2011年）[33] Pawlak, Z.：粗糙集——数据推理的理论方面，理论与决策丛书：*D*辑，第9卷。Kluwer（1991年）[34] Pawlak, Z., Skowron, A.：粗糙集基础。Inf. Sci.**177(1)**, 3–27（2007年）[35] Quinlan, J.R.：从决策树生成产生式规则。载于：J.P. McDermott（编）第十届国际人工智能联合会议论文集。意大利米兰，1987年8月23日至28日，第304–307页。Morgan Kaufmann（1987年）[36] Quinlan, J.R.：C4.5：机器学习程序。Morgan Kaufmann（1993年）[37] Quinlan, J.R.：简化决策树。Int. J. Hum. Comput. Stud. **51(2)**, 497–510（1999年）[38] Rokach, L., Maimon, O.：决策树数据挖掘——理论与应用，机器感知与人工智能系列，第69卷。World Scientific（2007年）[39] Silva, A., Gombolay, M.C., Killian, T.W., Jimenez, I.D.J., Son, S.：用于可解释可微决策树优化的方法及其在强化学习中的应用。载于：S. Chiappa, R. Calandra（编）第23届国际人工智能与统计会议，AISTATS 2020，2020年8月26日至28日，线上 [意大利西西里巴勒莫],机器学习研究论文集，第108卷，第1855–1865页。PMLR（2020年）

[40] Szydlo, T., Sniezynski, B., Michalski, R.S.：归纳数据库系统 VINLEN 中从规则到树的转换。载于：M.A. Klopotek、S.T. Wierzchon、K. Trojanowski（编），智能信息处理与网络挖掘：2005年6月13日至16日在波兰格但斯克举行的国际 IIS：IIPWM'05 会议论文集，软计算进展，第31卷，第496–500页。Springer（2005）

[41] Tardos, G.：查询复杂度，或者为什么很难通过随机预言机将 $NP^A \cap coNP^A$ 与 P^A 分开 A? Comb.9(4), 385–392（1989）